第五次习题

1. （10 分）有三个自旋态

$$|\psi_a\rangle = a_1 |u\rangle + a_2 |d\rangle$$
$$|\psi_b\rangle = b_1 |u\rangle + b_2 |d\rangle$$
$$|\psi_c\rangle = c_1 |u\rangle + c_2 |d\rangle$$

证明：$\langle\psi_a|(\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle)\rangle = \alpha\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\langle\psi_a|\psi_c\rangle$.
这里 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 和 α, β 都是复数。

$$|\psi_a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ |\psi_b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ |\psi_c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi_a|(\alpha|\psi_b\rangle + \beta|\psi_c\rangle)\rangle$$
$$= (a_1^* a_2^*)\begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 \end{pmatrix}$$
$$= a_1^*(\alpha b_1 + \beta c_1) + a_2^*(\alpha b_2 + \beta c_2)$$
$$= \alpha(a_1^* b_1 + a_2^* b_2) + \beta(a_1^* c_1 + a_2^* c_2)$$
$$= \alpha\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\langle\psi_a|\psi_c\rangle.$$

2. （10 分）验算 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}|n\_\rangle = -|n\_\rangle$

$$\vec{n}\cdot\hat{\sigma}|n_\rangle = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta e^{-i\varphi} \\ sin\theta e^{i\varphi} & -cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} sin\frac{\theta}{2}cos\theta + \left(-e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2} sin\theta e^{-i\varphi}\right) \\ sin\frac{\theta}{2} sin\theta e^{i\varphi} - e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2}(-cos\theta) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \left(cos^2\frac{\theta}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}\right) sin\frac{\theta}{2} - 2sin\frac{\theta}{2}cos^2\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\left(2cos\frac{\theta}{2}sin^2\frac{\theta}{2} + cos\frac{\theta}{2}\left(1 - 2sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -sin\frac{\theta}{2}\left(cos^2\frac{\theta}{2} + sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2}\left(2sin^2\frac{\theta}{2} + 1 - 2sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -|n\_\rangle$$

3. （10 分）假设施特恩-格拉赫实验中（磁场沿 z 方向）的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{8}{17}|u\rangle - \frac{15i}{17}|d\rangle$$

如果最后检测屏上共有 1000 个银原子，那么上斑点中有大约有多少个银原子，下斑点中大约有多少个银原子？

向上的概率：$\frac{64}{289}$，向下的概率：$\frac{225}{289}$

上斑点银原子个数：$1000*\frac{64}{289}$=221.45≈221

下斑点银原子个数：$1000*\frac{225}{289}$=778.54≈779

4. （10 分）假设施特恩-格拉赫实验中的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

那么磁场沿什么方向$\vec{n}$的时候，检测屏上只会出现一个斑点。

c_1，c_2与$\vec{n}$有如下关系：$c_1 = cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$，$c_2 = sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

由上述关系和θ范围可知，$\theta = \frac{2\Pi}{3}$，$cos\theta = \text{-}\frac{1}{2}$，$sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

将θ代入 $sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $cos\varphi = 1$，$sin\varphi = 0$.

$$\vec{n} = \{sin\theta cos\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta\} = \{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \text{-}\frac{1}{2}\}$$