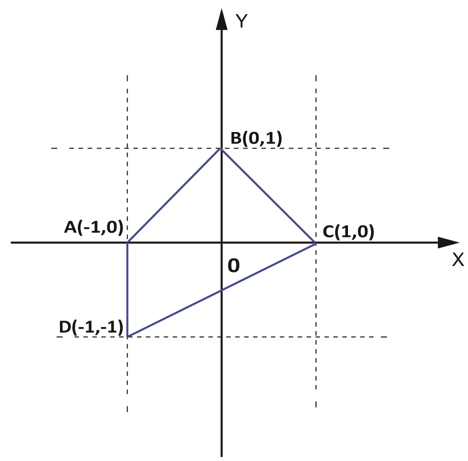
第四次习题

1. 有一个矩阵$\boldsymbol{Q_x}$

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



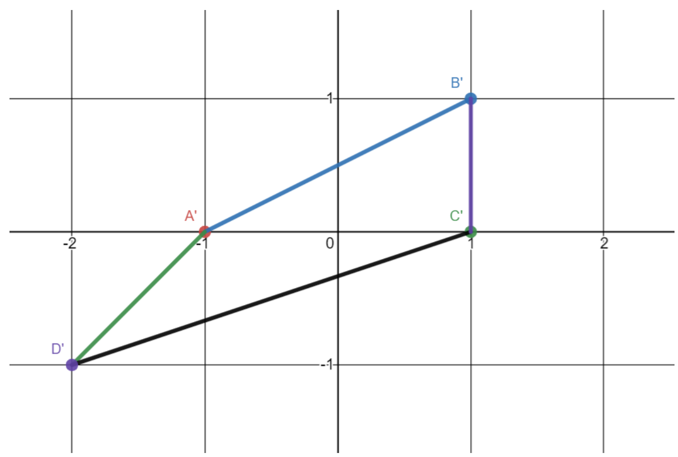
画出图中的四边形 ABCD 在矩阵$\boldsymbol{Q_x}$作用下变成的形状。

$$Q_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2. 现在有两个矩阵

$$\boldsymbol{M_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1+i} \\ \boldsymbol{1-i} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1+3i} \\ \boldsymbol{1-i} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

（1）计算$\boldsymbol{M_1M_2}$，$\boldsymbol{M_2M_1}$，$\boldsymbol{M_1^T}$，$\boldsymbol{M_2^T}$，$\boldsymbol{M_1^\dagger}$，$\boldsymbol{M_2^\dagger}$

$$M_1M_2 = \begin{pmatrix} 3*2+(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) & 3(1+3i)+(1+i) \\ (1-i)*2+2(1-i) & (1-i)(1+3i)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4+10i \\ 4-4i & 6+2i \end{pmatrix}$$

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} 2*3+(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) & 2(1+i)+(1+3i)*2 \\ (1-i)*3+(1-i) & (1-i)(1+i)+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10+2i & 4+8i \\ 4-4i & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_1^T=\begin{pmatrix}3 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix} \qquad M_2^T=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+3i & 1\end{pmatrix}$$

$$M_1^\dagger=\begin{pmatrix}3 & 1+i\\ 1-i & 2\end{pmatrix} \qquad M_2^\dagger=\begin{pmatrix}2 & 1+i\\ 1-3i & 1\end{pmatrix}$$

（2）$\boldsymbol{M_1M_2=M_2M_1}$**吗？**

二者不相等

（3）$\boldsymbol{M_1}$**和**$\boldsymbol{M_2}$**中哪一个是厄密矩阵？**

因为$M_1=M_1^\dagger$，而$M_2\neq M_2^\dagger$，所以M_1为厄密矩阵

3. **验证下面这个向量|ψ〉是**$\hat{\sigma}_y$ 的本征态

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}1\\ \\ i\end{pmatrix}$$

并将向量|ψ〉归一化。

由 $\hat{\sigma}_y|\psi\rangle=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=|\psi\rangle$，|ψ〉是$\hat{\sigma}_y$ 的本征态。

$$\langle\psi|\psi\rangle=(1\ \ -i)\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=2$$

$$|\psi'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

验证：$\langle\psi'|\psi'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}.2=1$

4. 在二维平面里进行两次不同的旋转，旋转的结果不依赖于两次旋转的次序；举例说明三维空间里的两次旋转，旋转的结果会依赖于两次旋转的次序。

绕 Z 轴逆时针旋转$\frac{\Pi}{2}$角的旋转矩阵：$R_z=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

绕 X 轴逆时针旋转$\frac{\Pi}{2}$角的旋转矩阵：$R_x=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

对向量$v_1=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$进行两次旋转。先进行 z 轴旋转后做 x 轴旋转得$\begin{pmatrix}-y\\ -z\\ x\end{pmatrix}$，而先进行 x 轴旋转后做 z 轴旋转得$\begin{pmatrix}z\\ x\\ y\end{pmatrix}$，两个结果不同。可见，旋转的结果会依赖于两次旋转的次序。