第七次作业参考答案

(一) 一个自旋正在按照下面的幺正矩阵

$$U_s(t)=\begin{pmatrix}\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & \cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{pmatrix}$$

进行动力学演化。

1. 初始的自旋态是 $|u\rangle$，那么时刻 t 时，自旋处于什么态？假设在 t_f 时刻，自旋态演化成为 $|b\rangle=(|u\rangle-|d\rangle)/\sqrt{2}$。请问 $t_f=$?

   解：时刻 t 时，自旋态为：

$$|\psi_t\rangle=U_s(t)|u\rangle=\begin{pmatrix}\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & \cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{pmatrix}=(\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)|u\rangle+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t|d\rangle$$

   在时刻 t_f，自旋态为：

$$|\psi_{t_f}\rangle=U_s(t_f)|u\rangle=(\cos t_f-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f)|u\rangle+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f|d\rangle=(|u\rangle-|d\rangle)/\sqrt{2}$$

   $|\psi\rangle$差一个整体相位在物理上表示同一量子态，因此我们只需要要求

$$(\cos t_f-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f)/(i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f)=-1 \qquad \text{即}\cos t_f=0$$

   所以可得：$t_f=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{N})$ (只需要给出一个正确的 t_f 即可)

   答：时刻 t 时，自旋处于 $(\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)|u\rangle+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t|d\rangle$。$t_f=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{N})$。

2. 初始的自旋态是 $|d\rangle$，那么时刻 t 时，自旋处于什么态？在同样的 t_f 时，自旋处于什么态？

   解：时刻 t 时，自旋态为：

$$|\psi_t\rangle=U_s(t)|d\rangle=\begin{pmatrix}\cos t-i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t & \cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\\ \cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\end{pmatrix}=i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t|u\rangle+(\cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)|d\rangle$$

   在时刻 $t_f=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{N})$，自旋态为：

$$|\psi_{t_f}\rangle=U_s(t_f)|d\rangle=i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f|u\rangle+(\cos t_f+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f)|d\rangle=\pm(\frac{\sqrt{2}i}{2}|u\rangle+\frac{\sqrt{2}i}{2}|d\rangle)$$

   答：在时刻 t，自旋处于 $i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t|u\rangle+(\cos t+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)|d\rangle$。在时刻 t_f，自旋态为 $\pm(\frac{\sqrt{2}i}{2}|u\rangle+\frac{\sqrt{2}i}{2}|d\rangle)$。

3. 初始的自旋态是

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|u\rangle + \frac{1}{2}|d\rangle$$

那么在时刻 t_f，自旋态处于什么态？

解：在时刻 t_f，自旋态为：

$$|\psi_{t_f}\rangle = U_s(t_f)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos t_f - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f & i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f \\ i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f & \cos t_f + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t_f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \pm\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i \end{pmatrix}$$

$$= \pm(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i|u\rangle + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i|d\rangle)$$

（二）一个长度为 $a = 1$ 的一维盒子里，粒子处于两个能量本征态的叠加态

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_2(x) + \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x)$$

$$\psi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_2(x) - \psi_3(x)] = \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x)$$

请画出这两个波函数 ψ_+ 和 ψ_-。

解：波函数的图像如下所示：