第十一次作业参考答案

1. 考虑讲义中描述的自旋和猫的复合系统，它们有四个量子态 $|u,\text{alive}\rangle$、$|d,\text{alive}\rangle$、$|u,\text{dead}\rangle$ 和 $|d,\text{dead}\rangle$。初始时刻，这个系统处于如下量子态

$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{5}{13}|u\rangle + \mathrm{i}\frac{12}{13}|d\rangle\right) \otimes |\text{alive}\rangle = \frac{5}{13}|u,\text{alive}\rangle + \mathrm{i}\frac{12}{13}|d,\text{alive}\rangle$$

现在对猫自旋进行测量。按照多世界理论，系统会变成

$$|\Psi_1\rangle = \frac{5}{13}|u,\text{alive}\rangle + \mathrm{i}\frac{12}{13}|d,\text{dead}\rangle$$

按照哥本哈根解释，如果测量结果是自旋向下，波包塌缩为

$$|\Psi_2\rangle = |d,\text{dead}\rangle$$

现在我们把 $|u,\text{alive}\rangle$、$|d,\text{alive}\rangle$、$|u,\text{dead}\rangle$ 和 $|d,\text{dead}\rangle$ 写成如下列向量

$$|u,\text{alive}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |d,\text{alive}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |u,\text{dead}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |d,\text{dead}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a)（8 分）请验证 $|\Psi_1\rangle = U|\Psi_0\rangle$，其中

$$U = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(b)（8 分）请验证 $|\Psi_2\rangle = A|\Psi_1\rangle$，其中

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\frac{13}{12}\end{pmatrix}$$

(c)（8 分）证明 U 是一个幺正矩阵，而 A 不是一个幺正矩阵。

解 (a)

$$|\Psi_0\rangle = \frac{5}{13}|u,\text{alive}\rangle + \mathrm{i}\frac{12}{13}|d,\text{alive}\rangle = \frac{5}{13}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\frac{12}{13}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\ \mathrm{i}\frac{12}{13}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{5}{13}|u,\text{alive}\rangle + \mathrm{i}\frac{12}{13}|d,\text{dead}\rangle = \frac{5}{13}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\frac{12}{13}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\0\\0\\ \mathrm{i}\frac{12}{13}\end{pmatrix}$$

$$U|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\ \mathrm{i}\frac{12}{13}\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\0\\0\\ \mathrm{i}\frac{12}{13}\end{pmatrix} = |\Psi_1\rangle$$

(b)

$$|\Psi_2\rangle = |d,\text{dead}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\frac{13}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\0\\0\\ \mathrm{i}\frac{12}{13}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = |\Psi_2\rangle$$

(c)

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = I$$

因此 U 是一个幺正矩阵。

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\mathrm{i}\frac{13}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\frac{13}{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\frac{169}{144}\end{pmatrix} \neq I$$

因此 A 不是一个幺正矩阵。

2. 小娟正在犹豫，现在是去上《简明量子力学》呢？还是逃课放松一下？于是她决定利用网站 https://qrng.anu.edu.au/random-binary/上产生的量子随机数来帮助她决定。

(1) 如果按 stop 键以后最后一位是 1，她就去上《简明量子力学》；

(2) 如果按 stop 键以后最后一位是 0，她就不上《简明量子力学》。

a)（10 分）分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述最后的结果。

b)（6 分）当然小娟也可以通过投掷硬币来决定去上《简明量子力学》还是不上。将投掷硬币的结果和上面两个结果对比，描述异同。

(a) 初始时刻,系统处于量子态

$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes |\text{initial}\rangle\,,$$

其中$|\text{initial}\rangle$表示小娟头脑的初始状态. 按照多世界理论,在小娟拿到了随机数之后,系统演化为

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |\text{skip class}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |\text{go to class}\rangle\,.$$

按照波包塌缩理论,如果生成的随机数是1,则波包塌缩为

$$|\Psi_{\text{get1}}\rangle = |1\rangle \otimes |\text{go to class}\rangle\,,$$

如果生成的随机数是0,则波包塌缩为

$$|\Psi_{\text{get0}}\rangle = |0\rangle \otimes |\text{skip class}\rangle\,.$$

(b) 如果小娟用投硬币的方式来决定是否去上课,那么投硬币的结果确定性地取决于投影币前世界的状态.设 $|\text{will get heads}\rangle$表示会导致硬币正面向上的世界状态,$|\text{will get tails}\rangle$表示会导致硬币反面向上的世界状态.

设$|\text{initial}\rangle$ 为小娟头脑的初始状态.如果世界一开始处于$|\text{will get heads}\rangle$状态,则演化过程为

$$|\text{will get heads}\rangle \otimes |\text{initial}\rangle \to |\text{heads}\rangle \otimes |\text{go to class}\rangle\,.$$

如果世界一开始处于$|\text{will get tails}\rangle$状态,则演化过程为

$$|\text{will get tails}\rangle \otimes |\text{initial}\rangle \to |\text{tails}\rangle \otimes |\text{skip class}\rangle\,.$$

用投硬币来决定和用量子随机数来决定的区别在于,投硬币不会引入量子叠加态,所有演化过程都是“确定性”的.而量子随机数是借助于量子叠加态的.从波包塌缩的角度来说,量子随机数的生成会导致波包的塌缩,而投硬币不会.从多世界理论的角度来说,量子随机数的生成会导致小娟进入一个“分支”世界;而投硬币不会引入新的分支世界.