1900094619 元培 金镇雄 – 线性代数 习题5.4, 5.5

习题5.4

1. (1) 可对角化 $U=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\operatorname{diag}\{1,1,10\}$

(2) 不可对角化

(3) 可对角化 $U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\operatorname{diag}\{2,2,11\}$

(4) 不可对角化

(5) 可对角化 $U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\operatorname{diag}\{0,1,-1\}$

2.(1) 实数域上不可对角化

复数域上可对角化 $U=\begin{bmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\operatorname{diag}\{1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i\}$

(2) 复数域上可对角化 $U=\begin{bmatrix}2 & 1-2i & 1+2i\\ -1 & -1+i & -1-i\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\operatorname{diag}\{1,i,-i\}$

2. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14}\\ 0 & \lambda-a_{22} & -a_{23} & -a_{24}\\ 0 & 0 & \lambda-a_{33} & -a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a_{44}\end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})(\lambda-a_{44})$

$\because a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$ 两两不同. A有4个特征值

$\because$ A为n级矩阵 $\therefore$ 可对角化

3. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)$ $\therefore$ A的全部特征值为 3, 2.

① 特征值为3时. 解 $(\lambda I-A)X=0$

$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\therefore x_1=x_2$ $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\therefore$ A属于3的特征向量为 $\{k_1\alpha_1 \mid k_1\in K \wedge k_1\neq 0\}$

② 特征值为2时，解 $(\lambda I-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}1&-2\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix} \quad x_1=2x_2 \quad \therefore \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

A属于2的特征向量为 $\{k_2\alpha_2 \mid k_2\in K, \wedge k_2\neq 0\}$

令 $U=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ 则 $U^{-1}AU=\{3,2\}$

$$\therefore A^m=U\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}^m U^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}^m\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3^m&4^m\\3^m&2^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{m+1}-3^m&2(3^m-2^m)\\2^m-3^m&2(3^m-2^{m-1})\end{bmatrix}$$

4. 设 α,β 分别为 A属于 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，

若 $\alpha+\beta$ 是A的特征向量，则必属于 A的某个特征值 λ_3

$\therefore A(\alpha+\beta)=\lambda_3(\alpha+\beta)$

$\because A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta$

$\therefore \lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=\lambda_3\alpha+\lambda_3\beta$

$\therefore (\lambda_1-\lambda_3)\alpha+(\lambda_2-\lambda_3)\beta=0$

$\because$ A属于不同特征值的特征向量线性无关

$\therefore \lambda_1-\lambda_3=0 \quad \lambda_2-\lambda_3=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$ 而与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾

$\therefore \alpha+\beta$ 不是A的特征向量

5. 若 K^n 中任意非零列向量都是 A的特征向量

则 A无不同的特征值，即A有且只有一个特征值 λ_1.

又由 A有n个线性无关的特征向量

可知 A可对角化

于是存在 K上n级可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_1\}=\lambda_1 I$

$\therefore A=\lambda_1 I$，即数量矩阵

6.证明：设 n 级幂零矩阵 A，且 $\operatorname{rank}(A)=r$.
则 A 的特征值都是 0
∴ A 不可对角化

习题5.5.

1.(1) $A=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\2&\lambda+3&-4\\-2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+8)$

① 特征值为 1（二重根）. 解 $(\lambda I-A)X=0$ 得

$\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $x_1=-2x_2+2x_3$

∴ $\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

∴ A 属于 1 的特征向量为 $\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \mid k_1,k_2\in K \wedge k_1,k_2$ 不全为 0$\}$

$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}$

$\eta_1=\dfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\sqrt5\\\frac{\sqrt5}{5}\\0\end{bmatrix}$ $\eta_2=\dfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt5}{15}\\\frac{4}{15}\sqrt5\\\frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}$

② 特征值为 −8. 解方程组得

$\begin{bmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac14&\frac14\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}x_1=\frac14x_2-\frac14x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$

∴ $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$

∴ 属于 −8 的特征向量为 $\{k_3\alpha_3 \mid k_3\in K,\ k_3\neq0\}$

∴ $\beta_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$ $\eta_3=\begin{bmatrix}\frac13\\\frac23\\-\frac23\end{bmatrix}$

∴ $T=\begin{bmatrix}-\frac25\sqrt5&\frac{2}{15}\sqrt5&\frac13\\\frac{\sqrt5}{5}&\frac{4}{15}\sqrt5&\frac23\\0&\frac{\sqrt5}{3}&-\frac23\end{bmatrix}$ $T'AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{bmatrix}$

(2). $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -4\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ -4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-6)$

① 特征值 -3（重根），解齐次方程组 $(\lambda I-A)x=0$

$\therefore \begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\therefore x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3$

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$

$\eta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\sqrt{5}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5}\\ 0\end{bmatrix}$ $\eta_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{15}\sqrt{5}\\ \frac{2}{15}\sqrt{5}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$

② 特征值为 6 时，解方程组得 $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}$ $\therefore \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

$\therefore \eta_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$, $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

(3) 同(1)(2)可得 $T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

(4) $T=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

2. 证明：∵ A与B有相同的特征多项式

∴ A与B有相同的特征根 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

又∵ A与B为实对称矩阵

∴存在正交矩阵 X 和 Y 使 $X^{-1}AX = diag\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n\}$

$= Y^{-1}BY$

∴ $YX^{-1}AXY^{-1} = B$ （左乘Y，右乘 Y^{-1}）

∴ 令 $T = XY^{-1}$ 则 $T' = YX^{-1}$

∴ $T^{-1}AT = B$ ∴ A与B相似

3. 证明：存在正交矩阵 T. 使得 $T^{-1}AT = D$. （D为对角矩阵）

∴ $A = TDT^{-1} = TDT'$

$A' = (TDT')' = (T')'D'T' = TDT' = A$

∴ A为对称矩阵

4. 证明：对复数矩阵的级数 n 作数学归纳法

n=1 时题中命题为真

假设 n-1 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵

设 λ_1 为 n级复矩阵 A 的一个特征值. α_1 为属于 λ_1 的一个特征向量.

把 α_1 扩充成 C^n 的一个基：$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$

令 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 则 P_1 为n级可逆矩阵

且 $P_1^{-1}AP_1 = P_1^{-1}(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots A\alpha_n) = (P_1^{-1}A\alpha_1, P_1^{-1}A\alpha_2, \cdots P_1^{-1}A\alpha_n)$

由于 $P_1^{-1}P_1 = I$ ∴ $P_1^{-1}\alpha_1 = \varepsilon_1$

∴ $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$

对 n-1级复矩阵 B 用归纳假设. 有 n-1 级可逆矩阵 P_2.

使得 $P_2^{-1}BP_2$ 为上三角矩阵

令 $P = P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ∴则 P 是 n 级可逆矩阵.

且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha P_2 \\ 0 & P_2^{-1}BP_2 \end{bmatrix}$

∴ $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵. ∴对一切正整数 n. 命题为真

∵ 幂零矩阵的特征值有且只有 0.

∴存在正交矩阵 T. 使得 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{0, 0, \cdots, 0\}$

∴ $A = T0T^{-1} = 0$