

第十一次习题

1. 考虑讲义中描述的自旋和猫的复合系统，它们有四个量子态 $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 和 $|d, \text{dead}\rangle$ 。初始时刻，这个系统处于如下量子态

$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{5}{13} |u\rangle + i \frac{12}{13} |d\rangle \right) \otimes |\text{alive}\rangle = \frac{5}{13} |u, \text{alive}\rangle + i \frac{12}{13} |d, \text{alive}\rangle$$

现在猫对自旋进行测量。按照多世界理论，系统会变成

$$|\Psi_1\rangle = \frac{5}{13} |u, \text{alive}\rangle + i \frac{12}{13} |d, \text{dead}\rangle$$

按照哥本哈根解释，如果测量结果是自旋向下，波包塌缩为

$$|\Psi_2\rangle = |d, \text{dead}\rangle$$

现在我们把 $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 和 $|d, \text{dead}\rangle$ 写成如下列向量

$$|u, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (8分) 请验证 $|\Psi_1\rangle = U |\Psi_0\rangle$ ，其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) (8分) 请验证 $|\Psi_2\rangle = A |\Psi_1\rangle$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \frac{13}{12} \end{pmatrix}$$

- (c) (8分) 证明 U 是一个幺正矩阵，而 A 不是一个幺正矩阵。

2. (16分) 小娟正在犹豫：现在是去上《简明量子力学》呢？还是逃课放松一下？于是她决定利用网站 <https://qrng.anu.edu.au/random-binary/> 上产生的量子随机数来帮助她决定。
- (1) 如果按stop键以后最后一位是1，她就去上《简明量子力学》；
 - (2) 如果按stop键以后最后一位是0，她就不上《简明量子力学》。
- a) (10分) 分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述最后的结果。
- b) (6分) 当然小娟也可以通过投掷硬币来决定去上《简明量子力学》还是不上。将投掷硬币的结果和上面两个结果对比，描述异同。