第五次作业参考答案

1.（10 分）有三个自旋态

$$
\begin{aligned}
|\psi_a\rangle &= a_1\,|u\rangle + a_2\,|d\rangle \\
|\psi_b\rangle &= b_1\,|u\rangle + b_2\,|d\rangle \\
|\psi_c\rangle &= c_1\,|u\rangle + c_2\,|d\rangle
\end{aligned}
$$

证明：$\langle\psi_a|\,(\alpha\,|\psi_b\rangle + \beta\,|\psi_c\rangle) = \alpha\,\langle\psi_a|\psi_b\rangle + \beta\,\langle\psi_a|\psi_c\rangle$.
这里 a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 和 α, β 都是复数.

证明　向上态 $|u\rangle$ 与向下态 $|d\rangle$ 分别为

$$
|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|\psi_a\rangle &= a_1\,|u\rangle + a_2\,|d\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
|\psi_b\rangle &= b_1\,|u\rangle + b_2\,|d\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
|\psi_c\rangle &= c_1\,|u\rangle + c_2\,|d\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此列向量 $|\psi_a\rangle$ 的共轭行向量为

$$
\langle\psi_a| = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_a|\left(\alpha\left|\psi_b\right\rangle+\beta\left|\psi_c\right\rangle\right)=&\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}\left[\alpha\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\right]\\
=&\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\alpha b_1\\ \alpha b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta c_1\\ \beta c_2\end{pmatrix}\right]\\
=&\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha b_1+\beta c_1\\ \alpha b_2+\beta c_2\end{pmatrix}\\
=&a_1^*(\alpha b_1+\beta c_1)+a_2^*(\alpha b_2+\beta c_2)\\
=&\alpha(a_1^*b_1+a_2^*b_2)+\beta(a_1^*c_1+a_2^*c_2)\\
=&\alpha\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\\
=&\alpha\left\langle\psi_a|\psi_b\right\rangle+\beta\left\langle\psi_a|\psi_c\right\rangle
\end{aligned}
$$

2.（10 分）验算 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\left|n_-\right\rangle=-\left|n_-\right\rangle$.（$\left|n_-\right\rangle$ 的定义见课本 92 页）.

解 已知

$$
\vec{n}=\{\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\},
$$

$$
\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\vec{n}\cdot\hat{\sigma}&=n_x\hat{\sigma}_x+n_y\hat{\sigma}_y+n_z\hat{\sigma}_z\\
&=\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

又已知

$$
\left|n_-\right\rangle=\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}
$$

由矩阵乘法，得

$$
\begin{aligned}
\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\,|n_-\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}+(-\cos\theta)\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}-\theta\right) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\,|n_-\rangle
\end{aligned}
$$

3.（10 分）假设施特恩-格拉赫实验中（磁场沿 z 方向）的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{8}{17}|u\rangle - \frac{15\mathrm{i}}{17}|d\rangle$$

如果最后检测屏上共有 1000 个银原子，那么上斑点中大约有多少个银原子，下斑点中大约有多少个银原子？

解 上斑点中有大约有

$$n_u = 1000\times\left|\frac{8}{17}\right|^2 \approx 221$$

个银原子；下斑点中大约有

$$n_d = 1000\times\left|-\frac{15\mathrm{i}}{17}\right|^2 \approx 779$$

个银原子。

4.（10 分）假设施特恩-格拉赫实验中的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

那么磁场沿什么方向 $\vec{n}$ 的时候，检测屏上只会出现一个斑点.

解 当这个自旋态就是算符 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ 的一个本征态时，检测屏上会出现一个斑点．而算符 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ 的本征态为

$$|n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},\quad |n_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

其中 $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$．同时

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

当自旋态 $|\phi\rangle$ 为本征态 $|n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} \\ e^{i\varphi_1}\sin\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}$ 时，有 $\frac{1}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\varphi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}$，这时有

$$\theta_1 = 120^\circ, \quad \varphi_1 = 0^\circ$$

此时的磁场方向为

$$\begin{aligned} \vec{n_1} &= \{\sin\theta_1\cos\varphi_1, \sin\theta_1\sin\varphi_1, \cos\theta_1\} \\ &= \{\sin 120^\circ\cos 0^\circ, \sin 120^\circ\sin 0^\circ, \cos 120^\circ\} \\ &= \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

当自旋态 $|\phi\rangle$ 为本征态 $|n_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ 时，有 $\frac{1}{2} = \sin\frac{\theta_2}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = -e^{i\varphi_2}\cos\frac{\theta_2}{2}$，这时有

$$\theta_2 = 60^\circ, \quad \varphi_2 = 180^\circ$$

此时的磁场方向为

$$\begin{aligned} \vec{n_2} &= \{\sin\theta_2\cos\varphi_2, \sin\theta_2\sin\varphi_2, \cos\theta_1\} \\ &= \{\sin 60^\circ\cos 180^\circ, \sin 60^\circ\sin 180^\circ, \cos 60^\circ\} \\ &= \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

有 $\vec{n_1} = -\vec{n_2}$，$\vec{n_1}$ 与 $\vec{n_2}$ 在同一直线上，方向相反. 因此磁场沿方向 $\vec{n} = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \mp\frac{1}{2}\right\}$ 的时候，检测屏上只会出现一个斑点，这里正负号的改变表示磁场 N 极与 S 极的对调.