第三次习题

1. 在二维希尔伯特空间里有两个向量

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\ \\ 1 \quad i\end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}\frac{8}{17}i\\ \\ \frac{15}{17}\end{pmatrix}$$

计算$<\psi_1|\psi_2>$和$<\psi_2|\psi_1>$

解：$<\psi_1|\psi_2> = \frac{1}{2}\ [(1+\mathrm{i})^*\cdot\frac{8}{17}\mathrm{i} + (1-\mathrm{i})^*\cdot\frac{15}{17}] = \frac{1}{2}\ [(1-\mathrm{i})\cdot\frac{8}{17}\mathrm{i} + (1+\mathrm{i})\cdot\frac{15}{17}]$

$= \frac{1}{2}\ [\frac{8}{17}\mathrm{i} + \frac{8}{17} + \frac{15}{17} + \frac{15}{17}\mathrm{i}] = \frac{23}{34}+\frac{23}{34}\mathrm{i}$

由于$<\psi_1|\psi_2>$与$<\psi_2|\psi_1>$互为复共轭，$<\psi_2|\psi_1> = \frac{23}{34} - \frac{23}{34}\mathrm{i}$

2. 在二维希尔伯特空间里定义两个向量

$$|\bar{e}_1\rangle = \frac{3}{5}|e_1\rangle + \frac{4}{5}|e_2\rangle) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\ \\ 4\end{pmatrix}, \qquad |\bar{e}_2\rangle = \frac{4}{5}|e_1\rangle - \frac{3}{5}|e_2\rangle) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\ \\ 3\end{pmatrix}$$

（1） 证明这两个向量正交归一；

证明：$<\hat{e}_1|\hat{e}_1>=(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=1$，$<\hat{e}_2|\hat{e}_2>=(\frac{4}{5})^2+(\frac{-3}{5})^2=1$

$<\hat{e}_1|\hat{e}_2>=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{(-3)}{5} = 0$

$<\hat{e}_2|\hat{e}_1> = 0$

因为$<\hat{e}_1|\hat{e}_1>=<\hat{e}_2|\hat{e}_2>=1$，$<\hat{e}_1|\hat{e}_2>=<\hat{e}_2|\hat{e}_1>=0$，两个向量正交归一

证毕.

（2） 由于它们正交归一，所以可以用它们作正交基矢。在这组正交基下，题1中的 $|\psi_1>$ 具有如下形式

$$|\psi_1>=a|\hat{e}_1>+b|\hat{e}_2>$$

求a和b

解：由题知 $|\psi_1>=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix} = a\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} + b\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$

可列出二元一次方程组

$\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$

$\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}) = \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b$

解得 $a=\frac{7}{10} - \frac{1}{10}\mathrm{i}$，$b=\frac{1}{10} + \frac{7}{10}\mathrm{i}$