第六次习题

1. 证明：$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$

   $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

   $= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix}2i & 0\\ 0 & -2i\end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z$

2. 给定自旋态

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

（1） 测得自旋沿 z 方向向上和向下的几率分别是多少？

测得自旋沿 z 方向向上和向下的几率分别是$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$

（2） 测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是多少？

设 $|\psi_1\rangle = c_1|f\rangle + c_2|b\rangle$

则 $c_1 = \langle f|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$c_2 = \langle b|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是

$|c_1|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0.933$，$|c_2|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \approx 0.066$

（3） 测得自旋沿 $\vec{n}$ 正方向和负方向的几率分别是多少？

由题可知 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

对应的本征态是 $|n_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$，$|n_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$

易验证 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\,|n_+\rangle = |n_+\rangle$，$\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\,|n_-\rangle = -|n_-\rangle$

且满足：$\langle n_+|n_-\rangle = \langle n_-|n_+\rangle = 0$，$\langle n_+|n_+\rangle = \langle n_-|n_-\rangle = 1$

设 $|\psi_1\rangle = d_1|n_+\rangle + d_2|n_-\rangle$

则 $d_1 = \langle n_+|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\ \ 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

$d_2 = \langle n_-|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\ \ -3)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是

$|d_1|^2 = \frac{6+3\sqrt{3}}{20} \approx 0.5598$，$|d_2|^2 = \frac{14-3\sqrt{3}}{20} \approx 0.4402$

3. 给定一个自旋态

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{2}|d\rangle$$

和一个方向

$$\vec{n} = \{3/5, 0, 4/5\}$$

（1） 测得自旋沿 z 方向向上和向下的几率分别是多少？

测得自旋沿 z 方向向上和向下的几率分别是$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$

（2） 测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是多少？

设 $|\psi_2\rangle = c'_1|f\rangle + c'_2|b\rangle$

则 $c'_1 = \langle f|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$c'_2 = \langle b|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是

$|c'_1|^2 = \frac{1}{2}$, $|c'_2|^2 = \frac{1}{2}$

（3） 测得自旋沿 $\vec{n}$ 正方向和负方向的几率分别是多少？

下面直接使用 2(3) 的 $\vec{n}\cdot\hat{\sigma}$ 以及对应的本征态

设 $|\psi_2\rangle = d_1'|n_+\rangle + d_2'|n_-\rangle$

则 $d_1' = \langle n_+|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\ \ 1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

$d_2' = \langle n_-|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\ \ -3)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1+i3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$

测得自旋沿 x 正方向和负方向的几率分别是

$|d_1'|^2 = \frac{3}{10} = 0.3$，$|d_2'|^2 = \frac{7}{10} = 0.7$

（4） 计算期待值 $\langle\psi_2|\vec{n}\cdot\hat{\sigma}|\psi_2\rangle$

$\langle\psi_2|\vec{n}\cdot\hat{\sigma}|\psi_2\rangle$

$= \left(\frac{1}{2}\quad \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{4+i3\sqrt{3}}{5}\quad \frac{3-i4\sqrt{3}}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\ -i\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\bullet\frac{4+i3\sqrt{3}-i\sqrt{3}(3-i4\sqrt{3})}{5} = -\frac{2}{5} = -0.4$