

附录1.拉普拉斯变换

附录1.1 拉氏变换的定义

如果有一个以时间为变量的函数 $f(t)$ ，它的定义域是 $t > 0$ ，那么拉氏变换就是如下运算式

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt \quad \text{A-1}$$

式中 s 为复数。一个函数可以进行拉氏变换的充分条件是

- (1) 在 $t < 0$ 时， $f(t) = 0$ ；
- (2) 在 $t \geq 0$ 时的任一有限区域内， $f(t)$ 是分段连续的；
- (3) $\int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt < \infty$

在实际工程中，上述条件通常是满足的。式 A-1 中， $F(s)$ 成为像函数， $f(t)$ 成为原函数。为了表述方便，通常把式 A-1 记作

$$F(s) = L[f(t)]$$

如果已知象函数 $F(s)$ ，可用下式求出原函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{A-2})$$

式中 c 为实数，并且大于 $F(s)$ 任意奇点的实数部分，此式称为拉氏变换的反变换。同样，为了表述方便，可以记作

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

为了工程应用方便，常把 $F(s)$ 和 $f(t)$ 的对应关系编成表格，就是一般所说的拉氏变换表。表 A-1 列出了最常用的几种拉氏变换关系。

一些常用函数的拉氏变换

附录1.1.1 单位阶跃函数的拉氏变换

这一函数的定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

它表示 $t = 0$ 时，突然作用于系统的一个不变的给定量或扰动量，如图 3-1 所示。单位阶跃函数的拉氏变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

在进行这个积分时，假设 s 的实部比零大，即 $\text{Re}[s] > 0$ ，因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \rightarrow 0$$

附录1.1.2 单位脉冲函数的拉氏变换

单位脉冲函数也是作为自动控制系统常用的标准输入量。它是在持续时间 $\varepsilon \rightarrow 0$ 期间内作用的矩形

波，其幅值与作用时间的乘积等于 1，如图 3-3 所示。其数学表达式为 $\delta(t) = \begin{cases} 0, & 0 > t \text{ 和 } t > \varepsilon \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \end{cases}$

其拉氏变换为

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \delta(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \times \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} [1 - e^{-s\varepsilon}] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon s}{1!} + \frac{\varepsilon^2 s^2}{2!} + \cdots \right) \right] = 1 \end{aligned}$$

附录1.1.3 单位斜坡时间函数和抛物线时间函数的拉氏变换

单位斜坡时间函数为 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$

如图 3-2 所示，斜坡时间函数的拉氏变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[-\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \quad \text{Re}[s] > 0$$

同理单位抛物线函数为

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2$$

其拉氏变换为 $F(s) = \frac{1}{s^3}$ ， $\text{Re}[s] > 0$ 。

附录1.1.4 正弦和余弦时间函数的拉氏变换

正弦函数的拉氏变换为

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= F(s) = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

同理求得余弦函数的拉氏变换为

$$L[\cos \omega t] = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

常用的拉氏变换法则（不作证明）

1. 线性性质 拉氏变换也遵从线性函数的齐次性和叠加性。拉氏变换的齐次性是一个时间函数乘以

常数时，其拉氏变换为该时间函数的拉氏变换乘以该常数，即 $L[af(t)] = aF(s)$

拉氏变换的叠加性是：若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉氏变换分别是 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ ，则有

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

2. 微分定理 原函数的导数的拉氏变换为

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

式中 $f(0)$ —— $f(t)$ 在 $t=0$ 时的值。

同样，可得 $f(t)$ 各阶导数的拉氏变换是

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

.....

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

如果上列各式中所有的初始值都为零，则各阶导数的拉氏变换为

$$L[f'(t)] = sF(s)$$

$$L[f''(t)] = s^2 F(s)$$

$$L[f'''(t)] = s^3 F(s)$$

.....

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$$

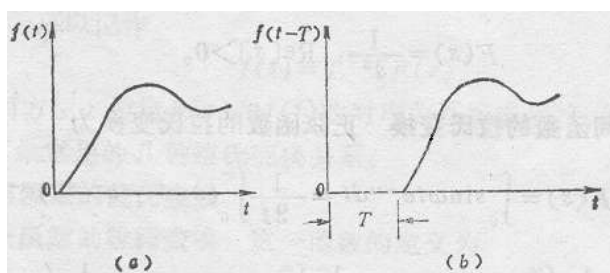


图1 平移函数

3. 积分定理 原函数 $f(t)$ 积分的拉氏变换为

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{(\int f(t)dt)_{t=0}}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

当初始值为零时

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

4. 时滞定理 如图 A-1 所示，原函数 $f(t)$ 沿时间轴平移 T ，平移后的函数为 $f(t-T)$ 。该函数

满足下述条件

$$\begin{aligned} t < 0 \text{ 时, } f(t) &= 0 \\ 0 < t < T \text{ 时, } f(t-T) &= 0 \end{aligned}$$

则平移函数的拉氏变换为

$$L[f(t-T)] = \int_0^{\infty} f(t-T)e^{-st} dt = e^{-sT} F(s)$$

这就是时滞定理。

5. 初值定理 如果原函数 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$ ，并且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在，则时间函数 $f(t)$ 的初值为

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

表 A-1 拉普拉斯变换对照表

原函数	拉普拉斯函数
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-at} (r=1,2,3)$	$\frac{1}{(s+a)^r}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$e^{-at} \sin \omega_n t$	$\frac{\omega_n}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$
$e^{-at} \cos \omega_n t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$

原函数	拉普拉斯函数
$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \theta)$ $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad 0 < \zeta < 1$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

6. 终值定理 如果原函数 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$ ，并且 $sF(s)$ 在 s 平面得右半平面和虚轴上是解析的，则时间函数 $f(t)$ 的稳态值可如下求得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

这一定理对于求暂态过程的稳态值是很有用的。但是，当 $sF(s)$ 的极点的实部为正或等于零时，不能应用终值定理。这一点必须注意。在下面的例题中，还要说明。

例1 应用初值定理求 $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ 的原函数 $f(t)$ 的初始值 $f(0)$ 和 $f'(0)$ 。

(1) 求 $f(0)$ 。根据初值定理 $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 得

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(s+2)^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s + 4 + \frac{4}{s}} = 0$$

(2) 求 $f'(0)$ 。因为

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0) = \frac{s}{(s+2)^2} - f(0)$$

将已求得的 $f(0)=0$ 带入上式得

$$L[f'(t)] = \frac{s}{(s+2)^2}$$

根据初值定理得

$$f'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s}{(s+2)^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{s} + \frac{4}{s^2}} = 1$$

可以校核这一结果的正确性，由

$$L[F(s)] = f(t)$$

得

$$f(t) = te^{-2t}$$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} te^{-2t} =$$

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} [e^{-2t} - 2te^{-2t}] = 1$$

例2 应用终值定理求 $f(t) = 5 - 5e^{-t}$ 的终值。

因

$$F(s) = \frac{5}{s(s+1)}$$

所以得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{(s+1)} = 5$$

也可以按下式求 $f(t)$ 的终值

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (5 - 5e^{-t}) = 5$$

例 3 应用终值定理 $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 原函数的终值，并用 $f(t) = \sin \omega t$ 的终值进行校核。

由于 $sF(s) = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$ 有两个极点在虚轴上，所以不能应用终值定理。如用终值定理，则得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} = 0$$

这个结论是错误的，因为表 A-1 得知原函数为 $f(t) = \sin \omega t$ ，该函数为周期性的简谐振荡函数，没有终值。

7. 卷积和定理 如果时间函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都满足条件：

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } f_1(t) = f_2(t) = 0$$

则 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

由于卷积符合交换律，卷积也可写成

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau$$

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

如果 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是可以进行拉氏变换的， $F_1(s) = L[f_1(t)]$ ， $F_2(s) = L[f_2(t)]$ 。那么 $f_1(t) * f_2(t)$ 的拉氏变换可求得如下

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

这称为卷积定理。根据卷积符合交换律得

$$L\left[\int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau\right] = F_2(s) F_1(s)$$

因此

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = L[f_2(t) * f_1(t)] = F_1(s) F_2(s) = F_2(s) F_1(s)$$

8. 位移性质 如果 $L[f(t)] = F(s)$ ，则有

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a), \quad \operatorname{Re}[s + a] > 0$$

附录1.2 拉普拉斯反变换

求反变换的运算公式是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

用上式求反变换显然是很复杂的，但是对与绝大多数控制系统，并不需要利用这一公式求解反变换，而是按照下面的方法求反变换。

在控制系统中，拉氏变换可以写成下列一般形式

$$F(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + b_n} \quad (A-3)$$

一般 $n > m$ 。式 A-3 可以分解为诸因式之积：

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (A-4)$$

式中当 $s = -z_1, s = -z_2, \cdots, s = -z_m$ 时， $F(s) = 0$ 。因此， $-z_1, -z_2, \cdots, -z_m$ 称为复变函数 $F(s)$ 的零点。

当 $s = -p_1, s = -p_2, \cdots, s = -p_n$ 时， $F(s) = \infty$ ，因此， $-p_1, -p_2, \cdots, -p_n$ 称为复变函数 $F(s)$ 的极点。

对于 A-4 式所示的拉氏变换，可以用部分分式展开，然后查拉氏变换表来求原函数。

1. 只包含不相同极点时的反变换 $f(t)$ 因为各极点均不相同，因此 $F(s)$ 可以分解为诸分式之和

$$F(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n}$$

式中的 A_1, A_2, \cdots, A_n 为常数， A_i 称为 $s = -p_i$ 的留数，该值可以按下式求出。

$$A_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s+p_i)F(s)$$

即

$$A_i = [F(s)(s+p_i)]_{s=-p_i}$$

当各项系数求出后，可按下式求原函数 $f(t)$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{A_1}{s+p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{A_2}{s+p_2}\right] + \cdots + L^{-1}\left[\frac{A_n}{s+p_n}\right]$$

因

$$L^{-1}\left[\frac{A_i}{s+p_i}\right] = A_i e^{-p_i t}$$

故得

$$f(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \cdots + A_n e^{-p_n t}, \quad t \geq 0$$

例4 求下列拉氏变换得反变换

(1) 已知 $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$, 求 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ 。

将 $F(s)$ 分解为部分分式

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

式中

$$A_1 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} (s+1) \right]_{s=-1} = 2,$$

$$A_2 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} (s+2) \right]_{s=-2} = -1$$

于是

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

(2) 已知 $F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{(s+1)(s+2)}$, 求 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ 。

因上式中得分子得幂次大于分母 s 得幂次, 在求其反变换前, 先将分子除以分母, 得

$$F(s) = s + 1 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

对上式中得三项分别求拉氏反变换

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[s] + L^{-1}[1] + L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]$$

式中

$$L^{-1}[s] = \frac{d\delta(t)}{dt};$$

$$L^{-1}[1] = \delta(t);$$

$$L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

因此得到原函数为

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

2. 包含共轭复极点得反变换 如果 $F(s)$ 有一对共轭极点, 则可利用下面得展开式简化运算。设 $-p_1$,

$-p_2$ 为共轭极点, 则

$$F(s) = \frac{A_1 s + A_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{A_3}{s+p_3} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n}$$

式中的 A_1 及 A_2 可按下式求解

$$[F(s)(s+p_1)(s+p_2)]_{s=-p_1} = [A_1 s + A_2]_{s=-p_1}$$

因为 $-p_1$ 是一个复数值, 故等号两边都是复数值。使等号两边的实数部分和虚数部分分别相等, 得两个

方程式。联立求解, 即得到 A_1 及 A_2 两个常数值。

例5 已知 $F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2+s+1}$, 求 $f(t)$ 。

三个极点分别为

$$s = 0, \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5 \pm j0.866$$

确定各部分分式得待定系数

$$A_0 = \left[\frac{s+1}{s(s^2+s+1)} s \right]_{s=0} = 1$$

$$\text{因} \quad \left[\frac{(s+1)(s^2+s+1)}{s(s^2+s+1)} \right]_{s=-0.5-j0.866} = A_1(-0.5-j0.866) + A_2$$

可得

$$\frac{0.5-j0.866}{-0.5-j0.866} = A_1(-0.5-j0.866) + A_2$$

即

$$0.5-j0.866 = A_1(-0.5-j0.866)^2 + A_2(-0.5-j0.866) = A_1(-0.5+j0.866) + A_2(-0.5-j0.866)$$

使等号两端得实部和虚部分别相等，得

$$-0.5A_1 - 0.5A_2 = 0.5$$

$$0.866A_1 - 0.866A_2 = -0.866$$

解之得

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 0$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2}$$

则

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2} \right] \\ &= 1 - e^{-0.5t} \cos 0.866t + 0.57e^{-0.5t} \sin 0.866t, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

3. 包含有 r 个重极点时的反变换 如果有 r 个重极点，则 $F(s)$ 可写为

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_0)^r(s+p_{r+1})(s+p_{r+2})\cdots(s+p_n)}$$

将上式展开成部分分式

$$F(s) = \frac{A_{01}}{(s+p_0)^r} + \frac{A_{02}}{(s+p_0)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{0r}}{s+p_0} + \frac{A_{r+1}}{s+p_{r+1}} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n}$$

在上式中， A_{r+1}, A_{r+2}, \cdots 的计算与在单极点情况下求待定系数的方法相同，而 $A_{01}, A_{02}, \cdots, A_{0r}$ 的求法如下：

$$\begin{aligned} A_{01} &= \left\{ (s+p_0)^r F(s) \right\}_{s=-p_0} \\ A_{02} &= \left\{ \frac{d}{ds} [(s+p_0)^r F(s)] \right\}_{s=-p_0} \\ &\cdots \cdots \cdots \\ A_{0i} &= \frac{1}{(i-1)!} \left\{ \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s+p_0)^r F(s)] \right\}_{s=-p_0} \\ &\cdots \cdots \cdots \\ A_{0r} &= \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s+p_0)^r F(s)] \right\}_{s=-p_0} \end{aligned}$$

则具有 r 个重极点的拉氏反变换为

$$f(t) = \left[\frac{A_{01}}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{A_{02}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + A_{0r} \right] e^{-p_0 t} + A_{r+1} e^{-(p_r+1)t} + \cdots + A_n e^{-p_n t}, t \geq 0$$

例6 求 $F(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}$ 的拉氏反变换

将 $F(s)$ 分解为部分分式

$$F(s) = \frac{A_{01}}{(s+2)^2} + \frac{A_{02}}{s+2} + \frac{A_{03}}{s+1}$$

上式中各项系数为

$$\begin{aligned} A_{01} &= \left[\frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)} (s+2)^2 \right]_{s=-2} = 1 \\ A_{02} &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)} (s+2)^2 \right] \right\}_{s=-2} = -2 \\ A_{03} &= \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)} \right]_{s=-1} = 2 \end{aligned}$$

于是得

$$F(s) = \frac{-1}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

所以原函数为

$$f(t) = -(t+2)e^{-2t} + 2e^{-t}, t \geq 0$$

附录1.3 用拉氏变换求解系统得暂态过程

上面介绍了用拉氏变换解常系数线性微分方程的方法，今举例说明用这种方法求解系统的暂态过程。

例7 设一线性系统的微分方程为

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} + 5 \frac{dx_c}{dt} + 6x_c = 6u(t)$$

并设初始条件是

$$\dot{x}_c(0) = 2, x_c(0) = 2$$

求输出量 $x_c(t)$ 。

系统微分方程的拉氏变换为

$$s^2 X_c(s) - s x_c(0) - \dot{x}_c(0) + 5s X_c(s) - 5x_c(0) + 6X_c(s) = 6/s$$

代入初始条件的值并整理得 $X_c(s)$ 如下方程

$$X_c(s) = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s+3)(s+2)}$$

将上式展开为部分分式

$$X_c(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+2}$$

式中

$$\begin{aligned}A_0 &= [X_c(s)s]_{s=0} = 1 \\A_1 &= [X_c(s)(s+3)]_{s=-3} = -4 \\A_2 &= [X_c(s)(s+2)]_{s=-2} = 5\end{aligned}$$

因此

$$X_c(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+3} + \frac{5}{s+2}$$

利用表 A-1 就可求出上式的拉氏反变换为

$$x_c(t) = 1 - 4e^{-3t} + 5e^{-2t}$$

上述解由两部分组成，稳态解为 1，暂态解为 $(-4e^{-3t} + 5e^{-2t})$ 。系统的稳态解也可以用终值定理求得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2 + 12s + 6}{(s+3)(s+2)} = 1$$

例 8 图 2-7 所示闭环速度自动控制系统的微分方程式是

$$\frac{T_d T_m}{1 + K_h} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{T_m}{1 + K_h} \frac{dn}{dt} + n = \frac{K_y U_g(t)}{C_e (1 + K_h)}$$

给定量为阶跃函数时，其拉氏变换为

$$U_g(s) = \frac{U_g}{s}$$

设初始值为零，微分方程式的拉氏变换为

$$\left(\frac{T_d T_m}{1 + K_h} s^2 + \frac{T_m}{1 + K_h} s + 1 \right) n(s) = \frac{K_y U_g}{C_e (1 + K_h) s}$$

于是得

$$n(s) = \frac{K_y U_g / C_e}{s \left(\frac{T_d T_m}{1 + K_h} s^2 + \frac{T_m}{1 + K_h} s + 1 \right) (1 + K_h)}$$

设系统的参数如下：

$$C_e = 0.2, K_y = 100, K_h = 4, T_m = 0.5s, T_d = 0.1s$$

则

$$\begin{aligned}n(s) &= \frac{100U_g}{s(0.01s^2 + 0.1s + 1)} = \frac{100^2 U_g}{s(s^2 + 10s + 100)} \\&= 100^2 U_g \left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 10s + 100} \right)\end{aligned}$$

特征方程的根为

$$s = 0, s_{1,2} = 5(-1 \pm j\sqrt{3})$$

求各项系数得

$$A_0 = \left[\frac{1}{s(s^2 + 10s + 100)} s \right]_{s=0} = \frac{1}{100}$$

又由

$$\left[\frac{1}{s(s^2 + 10s + 100)} (s^2 + 10s + 100) \right]_{s=5(-1+j\sqrt{3})}$$

$$= \left[\left(\frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + 10s + 100} \right) (s^2 + 10s + 100) \right]_{s=5(-1+j\sqrt{3})}$$

得

$$\frac{1}{5(-1+j\sqrt{3})} = 5(-1+j\sqrt{3})A_1 + A_2$$

令等号两边的实部和虚部分别相等，得

$$A_1 = -\frac{1}{100}, \quad A_2 = -\frac{1}{10}$$

所以

$$\begin{aligned} n(s) &= 100U_g \left(\frac{1}{s} - \frac{s+10}{s^2 + 10s + 100} \right) \\ &= 100U_g \left[\frac{1}{s} - \frac{s+5}{(s+5)^2 + (5\sqrt{3})^2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}5\sqrt{3}}{(s+5)^2 + (5\sqrt{3})^2} \right] \end{aligned}$$

查表 A-1 得原函数

$$\begin{aligned} n(t) &= 100U_g \left[1 - e^{-5t} \left(\cos 5\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 5\sqrt{3}t \right) \right] \\ &= 100U_g \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-5t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5\sqrt{3}t + \frac{1}{2} \sin 5\sqrt{3}t \right) \right] \\ &= 100U_g \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-5t} \sin \left(5\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3} \right) \right], t \geq 0 \end{aligned}$$