第十次作业参考答案

1. 根据书本上（7.31-34）式，θ的取值范围为[0,π)；

（1） 第一问所求θ满足：

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\sin^2\theta$$

简单化简并结合θ取值范围，得到：

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

第一题θ取值在这个范围都可以；

（2） 第二问同理可以得到

$$\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$$

第二问θ取值在这个范围都可以；

2. （1）.

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{i}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{i}{2}\end{pmatrix}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2).

$$\Delta\hat{\sigma}_z{}^2=\langle\psi|\hat{\sigma}_z{}^2|\psi\rangle-\langle\psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle^2$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{i}{2}\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{i}{2}\end{pmatrix}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Delta\hat{\sigma}_y{}^2 = \langle\psi|\hat{\sigma}_y{}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

所以:

$$\Delta\hat{\sigma}_z{}^2 + \Delta\hat{\sigma}_y{}^2 = 1 \geq 1$$

附加题.:

构建任意双自旋态:

$$|\psi\rangle = x_1|uu\rangle + x_2|ud\rangle + x_3|du\rangle + x_4|dd\rangle$$

其中x_1、x_2、x_3、x_4均为复数。由于整体相因子没有物理意义，所以x_1、x_2、x_3、x_4中一个可以选为实数， 比如我们设x_1为实数。根据归一化条件：$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = 1$，我们有

$$x_1{}^2 + x_{2r}{}^2 + x_{2i}{}^2 + x_{3r}{}^2 + x_{3i}{}^2 + x_{4r}{}^2 + x_{4i}{}^2 = 1$$

其中x_{2r}, x_{2i}是x_2的实部和虚部，其他变量类似。这是一个六维球面，即任意双自旋态可以看作为此六维球面上的一个点。

构建任意一个归一化的直积态:

$$|\psi_{12}\rangle = (a_1|u\rangle + b_1|d\rangle) \otimes (c_1|u\rangle + d_1|d\rangle)$$

右边第一部分中的两个变量是复数，但是同样由于整体相位因子和归一化条件，独立的实变量只有两个，它们生活在一个二维球面上。这样所有的直积态生活在一个四维几何体上，它们是两个二维球面的直积。

从所有双自旋态生活的 6 维球面扣除直积态（4 维几何体）就是所有的纠缠态，

所以纠缠态生活在一个 6 维几何体上。从测度上理解，它们的数目远远多于直积态。比如在二维球面上扣除几条线段，它的面积其实不变。