概要目录

单步转移概率

- 离散时间马尔可夫链$\{X_n\}$:状态空间可数或有限且$T=(0,1,2,\ldots)$的马尔可夫随机过程，把X_n的值看作第n次试验的结果
  - 回顾马尔可夫性质：给定现在状态时,未来状态与过去状态条件独立,即对任意$t_1<t_2<\cdots<t_n<t$,

$$Pr\{a<X_t\leq b|X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_n}=x_n\}$$
$$=Pr\{a<X_t\leq b|X_{t_n}=x_n\}.$$

  - 马尔可夫链：状态空间可数或有限
- 通常用非负整数集$\{0,1,\cdots\}$标记状态空间,$X_n=i$称为X_n处于状态i
- 单步转移概率：$P_{ij}^{n,n+1}=Pr\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$，可能与$i,j,n$相关
- 平稳转移概率：单步转移概率与时间n无关(大多数情况成立)$P_{ij}^{n,n+1}=P_{ij}$

转移概率矩阵

- 转移概率矩阵：

$$\mathbf{P} = \|P_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \right\|$$

  在离散时间、离散状态、具有平稳转移概率的马尔可夫过程中定义(多个条件下的复杂条件概率化简为单一条件下的条件概率。因此，转移概率刻画了过程的性质)

- 其中每行都是条件概率分布，表示必定会出现某个转移

- 其它理解视角：矩阵乘法的意义？邻接关系的描述？(后面再讨论)

计算联合概率

- 确定过程的性质，需要计算$Pr\{X_{j_1}=i_{j_1},X_{j_2}=i_{j2},\ldots,X_{j_k}=i_{j_k}\}$
- 由全概率公式，只需计算$Pr\{X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n\}=?$
- 条件概率展开，联合概率$=$
  $Pr\{X_n=i_n|X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot Pr\{X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$
- 根据马尔可夫性质，联合概率
  $=Pr\{X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}\}\cdot Pr\{X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$
  $=P_{i_{n-1}i_n}\cdot Pr\{X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}\}$
- 由归纳法，联合概率
  $=P_{i_{n-1}i_n}P_{i_{n-2}i_{n-1}}\cdot Pr\{X_0=i_0,\ldots,X_{n-2}=i_{n-2}\}$
  $=\ldots$
  $=P_{i_{n-1}i_n}P_{i_{n-2}i_{n-1}}\ldots P_{i_0i_1}Pr\{X_0=i_0\}$

概要目录

空间齐次马尔可夫链

- 设ξ表示仅取非负整数值的离散值随机度量，$Pr\{\xi = i\} = a_i$,$a_i \geq 0$, 且$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$，并设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$表示对$\xi$的一系列独立观察
- 过程$X_n = \xi_n$（$X_0 = \xi_0$事先指定）的转移概率矩阵有如下形式

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix}$$

表明随机变量X_{n+1}与X_n是独立的

空间齐次马尔可夫链

- 过程$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$的转移概率矩阵？（定义$X_0 = 0$）
- 计算单步转移概率，
$$
\begin{aligned}
& Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \\
&= Pr\{\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = j | \sum_{k=1}^{n} \xi_k = i\} \\
&= Pr\{\xi_{n+1} = j - i\} \\
&= \begin{cases} a_{j-i}, & \text{对于} j \geq i \\ 0, & \text{对于} j < i \end{cases}
\end{aligned}
$$
- 写成矩阵形式：

$$
\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{matrix} \right\|
$$

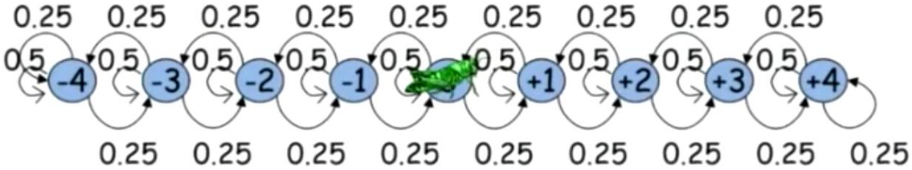
空间齐次马尔可夫链

- 如果随机变量ξ允许取全体整数，其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \right\|$$

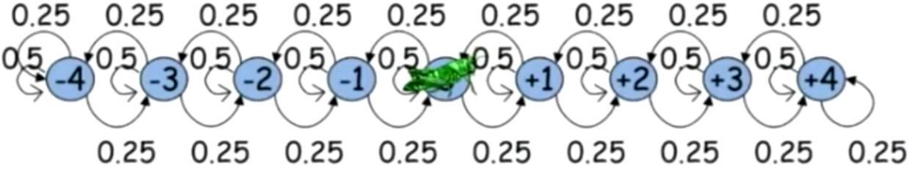
这里$Pr\{\xi = k\} = a_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，且$a_k \geq 0$，$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1$

一维随机游动



- 一维随机游动：状态空间为整数集有限或无限子集:$a, a+1, \cdots, b$, 如果某个粒子处于状态i，则通过一次转移它或着仍停留在i，或者移动到相邻状态$i-1$，$i+1$其中之一

一维随机游动



- 如果状态空间是非负整数集，则转移概率矩阵有如下形式

$$
\mathbf{P} = \begin{Vmatrix}
r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & & & \\
q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & & & \\
0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 & \\
 & & \ddots & & & & \ddots &
\end{Vmatrix}
$$

其中$p_i > 0$，$q_i > 0$，$r_i \geq 0$，并且$q_i + r_i + p_i = 1, i = 1, 2, \cdots$，$p_0 \geq 0$，$r_0 \geq 0$，$r_0 + p_0 = 1$

“赌徒输光”模型

- 赌徒A和B的初始财富分别为x和y，$x+y=a$，则转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & \\ & & \ddots & & & \\ & & & q_{a-1} & r_{a-1} & p_{a-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

- “赌徒输光”模型：设$p_k \equiv p$，$q_k = 1-p = q$，$\forall k \geq 1$
  - 若$p \neq q$，输光概率为$\frac{(\frac{q}{p})^{x_0}-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^a}$，对手输光为$\frac{(\frac{p}{q})^{a-x_0}-(\frac{p}{q})^a}{1-(\frac{p}{q})^a} = \frac{1-(\frac{q}{p})^{x_0}}{1-(\frac{q}{p})^a}$，$x_0$为初始时刻的财富，$a$为财富总和
  - 若$p=q$，输光概率为$\frac{a-x_0}{a}$，对手输光为$\frac{x_0}{a}$
  - $0, a$为“吸收态”：一旦到达就不能离开

"赌徒输光"模型

- "赌徒输光"模型：当$a \to \infty$时，
  - 若$p > q$，输光概率为$(\frac{q}{p})^{x_0}$，财富无限增加的概率为$1 - (\frac{q}{p})^{x_0}$
  - 若$p \leq q$，则以概率1最终输光
  - 具有教育意义（后面第三章有推导）

埃伦费斯特模型

- Ehrenfest模型：边界状态为“反射壁”的有限状态集 $\{i=0,\pm1,\cdots,\pm a\}$上的随机游动，转移概率为

$$P_{ij}=\begin{cases}\frac{a-i}{2a}, & \text{如果} j=i+1\\ \frac{a+i}{2a}, & \text{如果} j=i-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

- $-a, a$为“反射”状态：一旦到达就向反向离开

- 举例：两个容器共装$2a$个球，第一个容器有$a+i$个球，第二个容器有$a-i$个球，每次从$2a$个球中随机挑选1个球放到另一个容器

对称随机游动

- 整数集上对称随机游动：状态空间是整数全体，转移概率矩阵为

$$P_{ij}=\begin{cases}p, & 若 j=i+1\\ p, & 若 j=i-1\\ r, & 若 j=i\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

  以下约定：$r=0, p=\frac{1}{2}$

- n维对称随机游动：状态空间是n维欧式空间E^n的所有整数格点，转移概率矩阵为

$$P_{\mathbf{kl}}=\begin{cases}\frac{1}{2n}, & 若 \sum_{i=1}^{n}|l_i-k_i|=1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

- E^n上的对称随机游动表示n维布朗运动的一种离散形式

离散排队马尔可夫链

- 顾客到达服务台并排成队，在第n段时间只有一个顾客受到服务，同时有ξ_n个顾客到达
- 设$\{\xi_n\}$独立同分布，且$Pr\{\xi_n = k\} = a_k$，转移概率矩阵如何计算?
- 顾客数量为

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + \xi_n, & \text{如果}X_n \geq 1 \\ \xi_n, & \text{如果}X_n = 0 \end{cases}$$

- 转移概率矩阵:

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{matrix} \right\|$$

离散排队马尔可夫链

- 队列长度相关结论：
  - $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$时，队列长度无限拉长
  - $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k < 1$时，队列长度为稳定状态
  - $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k = 1$时，总体上不稳定（常返理论）

存储模型

- 仓库货物的补充发生在连续时刻$t_1, t_2, \cdots$，并假设在时间(t_{n-1}, t_n)的货物的累计需求量是独立同分布的$\{\xi_n\}$，$Pr\{\xi_n = k\} = a_k$
- 存储策略由两个事先指定的非负临界值s，$S > s$来确定：倘若可用库存不超过s，则马上进货使库存达到S，若可用库存超过s，则不马上进货
- 现有存储量$\{X_n\}$满足：

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & 若 s < X_n \leq S \\ S - \xi_{n+1}, & 若 X_n \leq s \end{cases}$$

成功的游程

- 考虑非负整数集上的一个马尔可夫链，其转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} p_0 & q_0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1 & 0 & q_1 & 0 & \cdots \\ p_2 & 0 & 0 & q_2 & \cdots \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix}$$

- "成功游程"：考虑只有两个结果（成功(S)或失败(F)）的一系列试验，假设每次试验中成功概率为α，失败概率为$\beta = 1 - \alpha$
- 如果到第n次试验时，前$r+1$次试验的结果分别为$F, S, S, \ldots, S$，则称出现了一个长度为r的成功游程
- 将成功游程的长度作为过程的当前状态，如果最后一次试验失败，则状态是零：$p_i = \beta, q_i = \alpha$

分支过程

- 假定某生物体在其生命终结之际繁衍的后代数ξ是一个随机变量，其概率分布为$Pr\{\xi = k\} = a_k$,所有后代独立地按相同概率分布繁衍
- 若$\{X_n\}$代表第n代的总数，则转移概率矩阵为

$$P_{ij} = Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = Pr\{\sum_{k=1}^{i} \xi_k = j\}$$

- $\sum_{k=1}^{i} \xi_k$的母函数是$[g(s)]^i$，$g(s)$为ξ的母函数，因此P_{ij}就是$[g(s)]^i$展成幂级数的第j个系数
- 回顾母函数：$g(s) = E[s^X] = \Sigma_{k=0}^{\infty} s^k Pr\{X = k\}$

遗传学中的马尔可夫链

- 假设某单倍体群体有总数为$2N$的a型(j个)和A型($2N-j$个)基因构成，下一代的组成取决于如下的$2N$个独立二项试验：每次试验结果为a型或A型的概率分别为$p_j=\frac{j}{2N}, q_j=1-\frac{j}{2N}$,如此重复地选择
- 相关单步转移概率为

$$P_{jk}=Pr\{X_{n+1}=k|X_n=j\}=\binom{2N}{k}p_j^k q_j^{2N-k}$$

- 状态0和$2N$是完全吸收的：当$X_n=0$(或$2N$)时，对所有$k\geq 0$, $X_{n+k}=0$(或$2N$)
- 如何确定在条件$X_n=i$之下群体达到上述“稳定”的概率和相关速率？（将在第3章讨论“吸收概率”）

遗传学中的马尔可夫链

- “变异过程”：新一代形成前$a \to A$的概率为α_1,$A \to a$的概率为α_2,则

$$p_j = \frac{j}{2N}(1-\alpha_1) + (1-\frac{j}{2N})\alpha_2$$

$$q_j = \frac{j}{2N}\alpha_1 + (1-\frac{j}{2N})(1-\alpha_2)$$

- 若$\alpha_1, \alpha_2 > 0$，当$n \to \infty$时，X_n的分布函数将趋进一个稳定分布，称为“稳态基因频率分布”

概要目录

马尔可夫链的转移概率矩阵

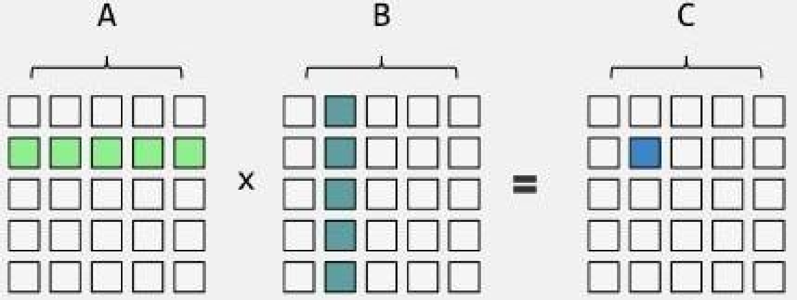
- n步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(n)}=\|P_{ij}^n\|$：过程经过$n$步转移从状态$i$到达状态$j$的概率，即$P_{ij}^n=Pr\{X_{n+m}=j|X_m=i\}$，假设转移概率是平稳的
- 定理3.1：如果一个马尔可夫链的单步转移概率矩阵是$\mathbf{P}=\|P_{ij}\|$，则对和为n的任意固定非负整数对r,s，且$r+s=n$，

$$P_{ij}^n=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}^rP_{kj}^s,\quad \text{这里规定}P_{ij}^0=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^n &= Pr\{X_{n+m}=j|X_m=i\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}Pr\{X_{m+r}=k|X_m=i\}Pr\{X_{m+(r+s)}=j|X_{m+r}=k,X_m=i\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}Pr\{X_{m+r}=k|X_m=i\}Pr\{X_{m+(r+s)}=j|X_{m+r}=k\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}^rP_{kj}^s
\end{aligned}$$

马尔可夫链的转移概率矩阵

- 由矩阵理论，转移概率矩阵满足矩阵乘法$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(r)}\mathbf{P}^{(s)}$



- 利用归纳法得到$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$(左边是$n$步转移矩阵,右边是连乘$n$次)
- 马尔可夫链由转移概率矩阵及在0时刻状态概率分布所确定：

$$Pr\{X_n = k\} = \sum_{j=0}^{\infty} Pr\{X_0 = j\} P_{jk}^{n}$$

概要目录

马尔可夫链的状态分类

- 状态j称为可自状态i到达的：如果对某个整数$n \geq 0$，$P_{ij}^n > 0$
- 两个状态i和j彼此可达，则称为互通的，并记为$i \longleftrightarrow j$
- 如果状态i和j不是互通的，则关系式

$$P_{ij}^n = 0, \forall n \geq 0$$

$$P_{ji}^n = 0, \forall n \geq 0$$

至少成立一个

- 互通的概念是一个等价关系：
  - 自反性：$i \longleftrightarrow i$
  - 对称性：若$i \longleftrightarrow j$，则$j \longleftrightarrow i$
  - 传递性：若$i \longleftrightarrow j$，$j \longleftrightarrow k$，则$i \longleftrightarrow k$（如何证明？）
  - 考虑$P_{ik}^{n+m} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^n P_{rk}^m \geq P_{ij}^n P_{jk}^m$

马尔可夫链的状态分类

- 称马尔可夫链是不可约的，如果所有状态彼此互通
- 转移概率矩阵

$$
\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{cccccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0
\end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc}
\mathbf{P}_1 & 0 \\
0 & \mathbf{P}_2
\end{array} \right\|
$$

状态分为两个等价类

- 它相当于把两个完全无关的过程组合在一起（邻接关系图？）

马尔可夫链的状态分类

- 随机游动模型中转移概率矩阵，有几个等价类?

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

- 排队马尔可夫链是不可约的，当$a_k > 0, \forall k$时

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{Vmatrix}$$

马尔可夫链的状态分类

- 存储模型是不可约的，当$a_k > 0, \forall k$时

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1}, & 若 s < X_n \leq S \\ S - \xi_{n+1}, & 若 X_n \leq s \end{cases}$$

- 成功游程是不可约的，当$q_i > 0, p_i > 0, \forall i$时

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} p_0 & q_0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1 & 0 & q_1 & 0 & \cdots \\ p_2 & 0 & 0 & q_2 & \cdots \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{matrix} \right\|$$

马尔可夫链的周期性

- 状态i的周期$d(i)$：使$P_{ii}^n > 0$成立的所有正整数n的最大公约数
  如果对所有$n \geq 1$，$P_{ii}^n = 0$，则定义$d(i) = 0$
  (能否推出$P_{ii}^{d(i)} > 0$?)

- 随机游动的周期性

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & q_i & r_i & p_i & 0 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \end{Vmatrix}$$

- 周期为2，如果满足$r_i = 0$，$\forall i$；否则周期为1

马尔可夫链的周期性

- 具有n个状态的有限马尔可夫链，若其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

则每个状态的周期都是n

马尔可夫链的周期性

- 定理4.1：如果$i \longleftrightarrow j$，则$d(i) = d(j)$
- 定理4.2：若状态i具有周期$d(i)$，则存在一个与i有关的整数N，使得对所有$n \geq N$，$P_{ii}^{nd(i)} > 0$
- 推论4.1：若$P_{ji}^{m} > 0$,则$P_{ji}^{m+nd(i)} > 0$对所有足够大的正整数n都成立
- 一个马尔可夫链，若其每个状态的周期都为1，则称为非周期的

概要目录

首次到达概率

- 从状态i出发经过n次转移首次到达状态j的概率：

$$f_{ij}^n = Pr\{X_n = j, X_v \neq j, v = 1, 2, \ldots, n-1 | X_0 = i\}$$

- 显然$f_{ij}^1 = P_{ij}$，并定义$f_{ij}^0 = 0$
- 令E_k：$X_0 = i, X_n = j$时，在k次转移后首次到达状态j所有可能实现
- 事件$E_k(k = 1, 2, \cdots, n)$是互斥的：
  $P_{ij}^n = \sum_{k=1}^n Pr\{E_k\}$
  $= \sum_{k=1}^n Pr\{\text{在}k\text{次转移时首次到达}j \mid X_0 = i\} \cdot Pr\{X_n = j \mid X_k = j\}$
  $= \sum_{k=1}^n f_{ij}^k \cdot P_{jj}^{n-k}$
- 即，

$$P_{ij}^n = \sum_{k=0}^n f_{ij}^k \cdot P_{jj}^{n-k}, n \geq 1$$

f_{ij}^n与P_{ij}^n的母函数关系

- 定义序列的母函数:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n s^n, |s| < 1 \qquad F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^n s^n, |s| < 1$$

- 回顾事实:如果$C(s) = A(s)B(s)$,则$c_r = \sum_{m=0}^{r} a_m b_{r-m}$,其中

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k, B(s) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l s^l, C(s) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r s^r$$

- 注意$P_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$,但$f_{ij}^0 \equiv 0$

- 则有母函数关系:

$$P_{ij}(s) = \begin{cases} F_{ii}(s)P_{ii}(s) + 1, & i = j \\ F_{ij}(s)P_{jj}(s), & i \neq j \end{cases}, \text{和} P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

常返性的定义

- 状态i是常返的$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{n}=1$
- 令$\overline{f_{ij}^{n}}$为从状态i出发在n步内都没能到达状态j的概率

$$\overline{f_{ij}^{n}}=Pr\{X_v\neq j, v=1,2,\ldots,n|X_0=i\}$$

- 由递归式

$$\overline{f_{ij}^{n-1}}=f_{ij}^{n}+\overline{f_{ij}^{n}}, n\geq 2$$

得到

$$1=f_{ij}^{1}+\overline{f_{ij}^{1}}=f_{ij}^{1}+f_{ij}^{2}+\overline{f_{ij}^{2}}=\cdots=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k}+\overline{f_{ij}^{n}}$$

- 状态i常返$\Longleftrightarrow$从状态i出发经过有限时长之后回到状态i的概率为1
- 非常返的状态又称为瞬态
- 如何根据P_{ii}^{n}判断？(参考$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_{ii}(s)}$)

常返性的充要条件

- 定理5.1：状态i是常返的$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$
- 令E_n为从状态i出发在n步内到达状态j次数的期望，用归纳法证明:

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{k}, n \geq 1$$

- 当$k = 1$时

$$E_1 = 1 \cdot P_{ij}^{1} + 0 \cdot \sum_{l \neq j} P_{il}^{1} = P_{ij}^{1}$$

- 假设$k = n - 1$时成立，当$k = n$时，
$E_n = E[$前$n-1$到达j的次数$] + E[$恰好在第n步到达j的次数$]$
$= E_{n-1} + (1 \cdot P_{ij}^{n} + 0 \cdot \sum_{l \neq j} P_{il}^{n}) = \sum_{k=1}^{n-1} P_{ij}^{k} + P_{ij}^{n} = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{k}$
- 状态i常返$\Longleftrightarrow$返回次数的期望值无限

常返性是类性质

- 推论5.1：如果$i \longleftrightarrow j$且i是常返的，则j也是常返的
- 常返性也像周期性一样是一个类性质：在一个等价类中的状态或者都是常返的，或者都不是
- 证明：由于$i \longleftrightarrow j$，$\exists m, n$，使得

$$P_{ij}^{n} > 0 \quad \text{和} \quad P_{ji}^{m} > 0$$

- 由$C-K$方程：$P_{ij}^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{r} P_{kj}^{s}, r+s=n$，得到

$$P_{jj}^{m+v+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}^{m} P_{kj}^{v+n} \geq P_{ji}^{m} P_{ij}^{v+n} = P_{ji}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{v} P_{kj}^{n} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{v} P_{ij}^{n}$$

- 因此，

$$\sum_{u=0}^{\infty} P_{jj}^{u} \geq \sum_{v=0}^{\infty} P_{jj}^{m+v+n} \geq \sum_{v=0}^{\infty} P_{ji}^{m} P_{ii}^{v} P_{ij}^{n} \geq P_{ji}^{m} P_{ij}^{n} \sum_{v=0}^{\infty} P_{ii}^{v}$$

概要目录

整数集上的一维随机游动

- 每次转移中粒子向右移动一个单位的概率为p，向左移动一个单位的概率为$q(p+q=1)$
- 计算粒子从原点出发经过有限时间能够返回原点的概率，判断状态0是否是常返的
- $P_{00}^{2n+1}=0, n=0,1,2,\ldots$
- $P_{00}^{2n}=\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} p^n q^n=\frac{(2n)!}{n!n!}p^n q^n, n=0,1,2,\ldots$
- 借助于斯特林公式：

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

- $P_{00}^{2n} \sim \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi})(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi})}p^n q^n=\frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}=\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$

整数集上的一维随机游动

- 容易验证$p(1-p)=pq\le\frac{1}{4}$，等号成立$\Longleftrightarrow p=q=\frac{1}{2}$
- 因此$p=q=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}P_{00}^{n}=\infty\Longleftrightarrow$一维随机游动是常返的
- 如果$p>q(p<q)$，初始位于原点的粒子趋向于$+\infty(-\infty)$，而不再回到原点的概率是正的

全平面上的二维随机游动

- 设从某个状态往上、下、左、右移动一个单位的概率都等于$\frac{1}{4}$
- 研究由原点代表的状态的常返性
- $P_{00}^{2n+1} = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$
- $P_{00}^{2n} = (\frac{1}{4})^{2n} \sum_{i,j,i+j=n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!} = (\frac{1}{4})^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right)^2$
- 由于$\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-i \end{array} \right)$,且$\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ n-i \end{array} \right)$,得

$$P_{00}^{2n} = (\frac{1}{4})^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right)^2$$

全平面上的二维随机游动

- 同样借助于斯特林公式：

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

- $P_{00}^{2n} \sim \frac{1}{\pi n}$
- 因此$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{n} = \infty$，由原点代表的状态也是常返状态

三维空间里的对称随机游动

- 同样研究由原点代表的状态的常返性
- $P_{00}^{2n+1} = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$
- $P_{00}^{2n} = (\frac{1}{6})^{2n} \sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!}$
  $= (\frac{1}{6})^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2$
- 回顾事实：$\sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = 3^n$

  这是因为$(a+b+c)^n = \sum_{i,j,0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} a^i b^j c^{n-i-j}$
- $P_{00}^{2n} \le (\frac{1}{2})^{2n} (\frac{1}{3})^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \max_{i,j,0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$

三维空间里的对称随机游动

- 容易验证：上式右边在$i=j=\frac{n}{3}$时取到最大值，即

$$P_{00}^{2n} \le (\frac{1}{2})^{2n}(\frac{1}{3})^{n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}3^{n}n!((\frac{n}{3})!)^3}$$

- 借助于斯特林公式:$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$
- 因此$P_{00}^{2n} \le \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} \le \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} < \infty$
- 由定理5.1，原点所表示的状态是瞬态
- 粒子一旦离开某个状态之后，不再返回该状态的概率是正的

二项试验成功游程

- 转移概率矩阵:

$$\left\|\begin{matrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ p_r & 0 & \cdots & \cdots & 1-p_r & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \end{matrix}\right\| (0 < p_i < 1)$$

- 状态全部属于同一等价类，因此我们仅研究状态0的常返性

- $f_{00}^1 = p_0 = 1 - (1 - p_0)$

- $f_{00}^n = \left(\Pi_{i=0}^{n-2}(1 - p_i)\right) p_{n-1}, n > 1$
$= \Pi_{i=0}^{n-2}(1 - p_i)[1 - (1 - p_{n-1})]$
$= \Pi_{i=0}^{n-2}(1 - p_i) - \Pi_{i=0}^{n-1}(1 - p_i)$

二项试验成功游程

- $\sum_{n=1}^{m+1} f_{00}^{n} = 1 - \Pi_{i=0}^{m}(1-p_i)$

- 引理6.1:如果$0 < p_i < 1, i = 0, 1, 2, \ldots$,则$\lim_{m\to\infty} \Pi_{i=0}^{m}(1-p_i) = 0$ $\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$

  "$\Longleftarrow$": $e^{-p_i} = 1-p_i+\frac{p_i^2}{2!}-\frac{p_i^3}{3!}+\cdots > 1-p_i$, $e^{-\sum_{i=0}^{m} p_i} > \prod_{i=0}^{m}(1-p_i)$

  "$\Longrightarrow$": 容易证明$\prod_{i=j}^{m}(1-p_i) > 1 - \sum_{i=j}^{m} p_i$, 再用反证法推出: $\lim_{m\to\infty} \prod_{i=j}^{m}(1-p_i) > 1 - \lim_{m\to\infty} \sum_{i=j}^{m} p_i > 0$矛盾

- 状态0是常返的$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{n} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$

概要目录

关于常返性的补充

- 定义符号$Q_{ij} = Pr\{$一个粒子从状态i出发无限次到达状态$j\}$
- 定理7.1：状态i是常返的或瞬时的，分别对应于Q_{ii}等于1或0
- 证明：设$Q_{ii}^N = Pr\{$一个粒子从状态i出发至少N次返回状态$i\}$
- 令E_k：从状态i出发，在k次转移后首次返回i，总共至少N次返回i
- 事件$E_k (k = 1, 2, \cdots, n)$是互斥的：

$$Q_{ii}^N = \sum_{k=1}^{\infty} Pr\{E_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^k Q_{ii}^{N-1} = Q_{ii}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^k \right)^N$$

- 再由$\lim_{N\to\infty} Q_{ii}^N = Q_{ii}$
  得到$Q_{ii} = 1$或0分别对应于$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^k = 1$或$< 1$

关于常返性的补充

- 定理7.2：若$i \longleftrightarrow j$且类是常返的，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n} = 1$
- 回顾$\overline{f_{kl}^{n}}$为从状态k出发在n步内都没能到达状态l的概率

$$\overline{f_{kl}^{n}} = Pr\{X_v \neq l, v = 1, 2, \ldots, n | X_0 = k\} = 1 - \sum_{m=1}^{n} f_{kl}^{m}$$

- 令$m = \min\{k : P_{ji}^{k} > 0\}$（为什么选最小的？）
- $\overline{f_{jj}^{n}} = Pr\{X_v \neq j, v = 1, 2, \ldots, n | X_0 = j\}$
  $\geq Pr\{X_m = i, X_v \neq j, v = 1, 2, \ldots, n | X_0 = j\}$
  $= Pr\{X_m = i, X_u \neq j, u = 1, 2, \ldots, m-1 | X_0 = j\} \cdot Pr\{X_v \neq j, v = m+1, m+2, \ldots, n | X_m = i, X_0 = j, X_u \neq j, u = 1, 2, \ldots, m-1\}$
  $= P_{ji}^{m} \cdot \overline{f_{ij}^{n-m}}$
- 反证法，假设$\lim_{n\to\infty} \overline{f_{ij}^{n}} > 0$，与$\lim_{n\to\infty} \overline{f_{jj}^{n}} = 0$矛盾
  （不选$\overline{f_{ii}^{n}}$?）

关于常返性的补充

- 推论7.1:如果$i \longleftrightarrow j$且类是常返的,那么$Q_{ij}=1$
- 证明：设$Q_{ij}^N = Pr\{$一个粒子从状态i出发至少N次到达状态$j\}$
- 令E_k：从状态i出发，在k次转移后首次到达j，总共至少N次到达j
- 事件$E_k(k=1,2,\cdots,n)$是互斥的：

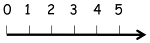
$$Q_{ij}^N = \sum_{k=1}^{\infty} Pr\{E_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^k Q_{jj}^{N-1} = Q_{jj}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^k$$

- 得到，$Q_{ij} = Q_{jj} \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^k$
- 再由上述两个定理，得到$Q_{ij}=1$

概要目录

时序轨迹的分布

- 设定时间间隔尺寸 $\triangle$



- $X^{(t)}$：在时间点$t\triangle$的变量
- $X^{(t:t')} = \{X^{(t)}, \cdots, X^{(t')}\} \quad (t \leq t')$
- 如何表达 $P(X^{(t:t')}), \forall t, t'$

马尔可夫假设

- 链式分解

$$P(\mathbf{X}^{(0:T)}) = P(\mathbf{X}^{(0)}) \prod_{t=0}^{T-1} P(\mathbf{X}^{(t+1)} \mid \mathbf{X}^{(0:t)})$$

- 马尔可夫假设

$$(\mathbf{X}^{(t+1)} \perp \mathbf{X}^{(0:t-1)} \mid \mathbf{X}^{(t)})$$

- 化简分解

$$P(\mathbf{X}^{(0:T)}) = P(\mathbf{X}^{(0)}) \prod_{t=0}^{T-1} P(\mathbf{X}^{(t+1)} \mid \mathbf{X}^{(t)})$$

- 通过增加状态描述，可以扩充马尔可夫假设的适用性

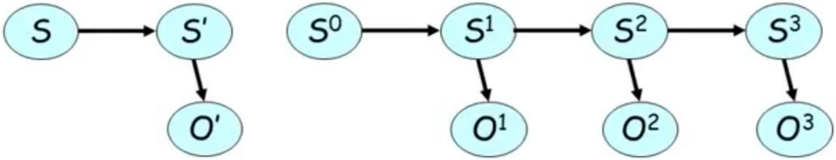
时间不变性假设

- 模板概率模型 $P(\mathbf{X}'|\mathbf{X})$

$$P(\mathbf{X}^{(t+1)}|\mathbf{X}^{(t)}) = P(\mathbf{X}'|\mathbf{X}), \quad \forall t$$

隐马尔可夫模型

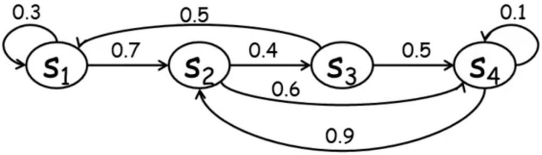
- transition model， observation model



- 转移概率矩阵

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0.3	0.7	0	0
s_2	0	0	0.4	0.6
s_3	0.5	0	0	0.5
s_4	0	0.9	0	0.1

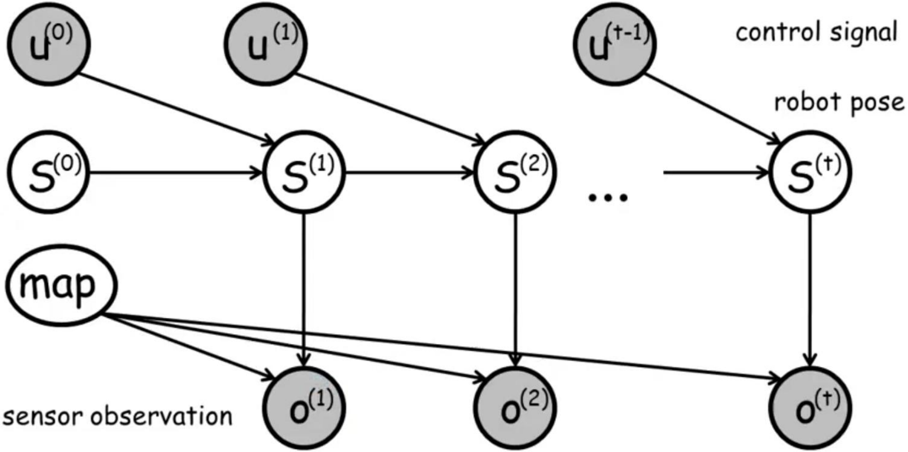
- 对应的转换图



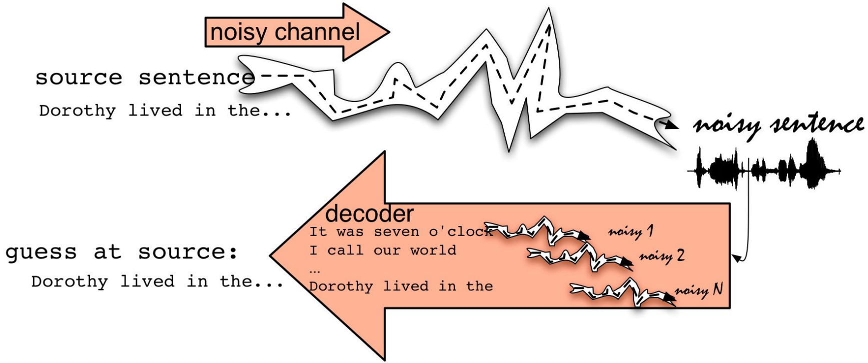
应用举例

- 机器人定位
- 语音识别
- 生物序列分析
- 文本注释

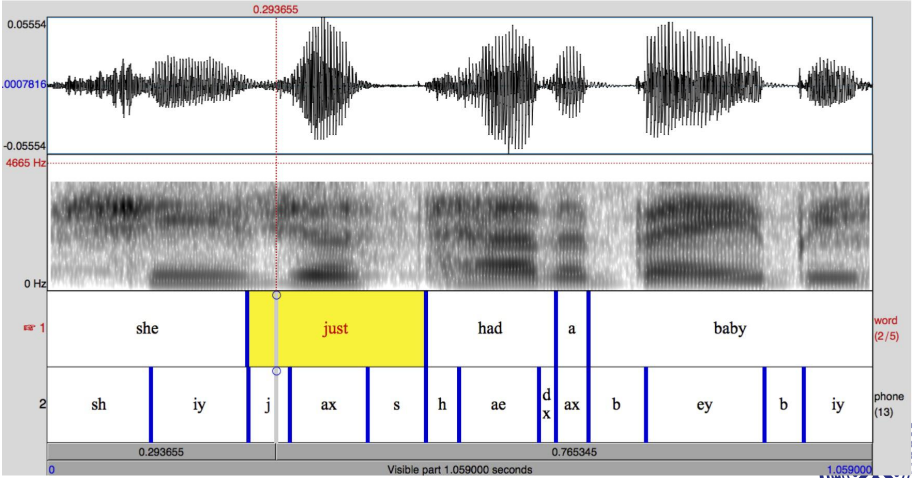
机器人定位


$u^{(0)}$
$u^{(1)}$
$u^{(t-1)}$
control signal
robot pose
$s^{(0)}$
$s^{(1)}$
$s^{(2)}$
...
$s^{(t)}$
map
sensor observation
$o^{(1)}$
$o^{(2)}$
$o^{(t)}$

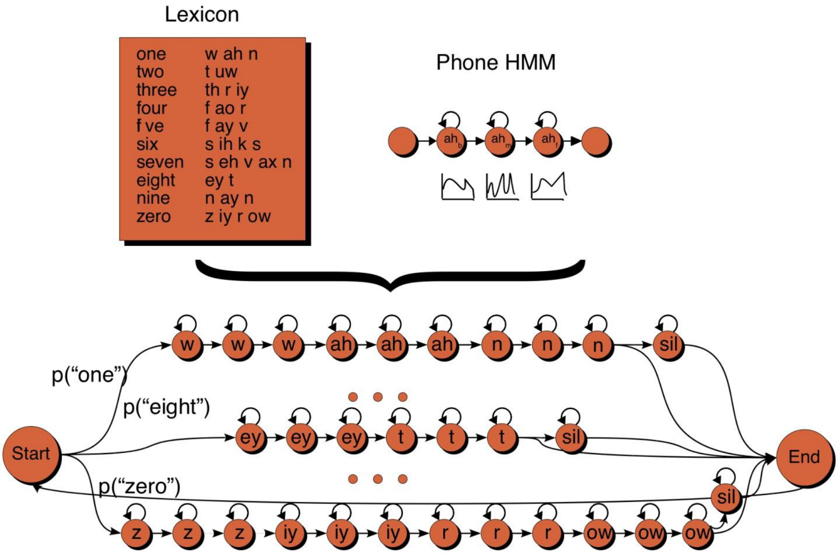
语音识别


noisy channel
source sentence
Dorothy lived in the...
noisy sentence
decoder
It was seven o'clock
I call our world
...
Dorothy lived in the
noisy 1
noisy 2
noisy N
guess at source:
Dorothy lived in the...

声音信号的分割


0.293655
0.05554
.0007816
-0.05554
4665 Hz
0 Hz
1
she
just
had
a
baby
word
(2/5)
2
sh
iy
j
ax
s
h
ae
d
x
ax
b
ey
b
iy
phone
(13)
0.293655
0.765345
0
Visible part 1.059000 seconds
1.059000

识别的隐马尔可夫模型


Lexicon
one w ah n
two t uw
three th r iy
four f ao r
f ve f ay v
six s ih k s
seven s eh v ax n
eight ey t
nine n ay n
zero z iy r ow
Phone HMM
p("one")
p("eight")
p("zero")
Start
End
sil

隐马尔可夫模型的特点

- 可被看作动态贝叶斯网络的子类型
- 清楚的表明了在转移概率矩阵中的稀疏性和重复元素
- 在很多应用中用于对序列数据的建模