7.2.

1.(1) $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 的解空间为W.

显然 $0\in W$. W为非空集

设 $(\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n),(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)\in W$.

则 ~~$(\eta_1+\gamma_1)x_1$~~ $\because$ $\begin{cases}a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_n\eta_n=0\\a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+\cdots+a_n\gamma_n=0\end{cases}$

$\therefore a_1(\eta_1+\gamma_1)+a_2(\eta_2+\gamma_2)+\cdots+a_n(\eta_n+\gamma_n)=0$

$\therefore(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)+(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)\in W$.

$\therefore$对加法封闭

显然 $k(\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n)\in W$. 即对数量乘法封闭 $\therefore$是子空间

(2) 显然其解空间对加法不封闭 ，不是子空间

(3) 对加法不封闭 $\therefore$不是子空间

2. 证明：① $\because 0A=A0$ $\therefore 0\in C(A)$ $\therefore$为非空集

② 设 $B,C\in C(A)$，则 $AB=BA$，$AC=CA$

$\therefore A(B+C)=(B+C)A$

$\therefore B+C\in C(A)$ $\therefore$对加法封闭

③ 设 $D\in C(A)$. $\therefore AD=DA$

$\therefore kAD=kDA$ $\therefore A(kD)=(kD)A$

$\therefore$对数乘封闭 $\therefore$为子空间

3. 设 $A=diag\{a_1\cdots a_n\}$. $a_1\cdots a_n$两两不同，B为与A可交换的矩阵

$B=(b_{ij})=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)'$

则 $AB=BA$ $\therefore(a_1\gamma_1,a_2\gamma_2\cdots a_n\gamma_n)'=(a_1\alpha_1,a_2\alpha_2,\cdots,a_n\alpha_n)$

$$\therefore\begin{bmatrix}a_1b_{11}&a_1b_{12}&\cdots&a_1b_{1n}\\a_2b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_2b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_{n1}&a_nb_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_{11}&a_2b_{12}&\cdots&a_nb_{1n}\\a_1b_{21}&a_2b_{22}&\cdots&a_nb_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1b_{n1}&a_2b_{n2}&\cdots&a_nb_{nn}\end{bmatrix}$$

$\because a_1,a_2\cdots a_n$两两不同 $\therefore b_{ij}=0$, $i,j=1\cdots n$ 且 $i\neq j$ $\therefore B$为对角矩阵

$\therefore$基为 $E_{11},E_{22}\cdots E_{nn}$，维数为$n$.

4. $V_1+V_2=\langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\rangle$

设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\2&1&3&-1&-1\\1&1&2&0&3\\0&1&1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&3&3&-5&-3\\0&2&2&-2&2\\0&1&1&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&1&1&1&7\\0&0&0&-8&-24\\0&0&0&-4&-12\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&1&1&1&7\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\because$ 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 也是 V_1+V_2 的基

$\therefore \dim(V_1+V_2)=3$.

α_1,α_2 为 V_1 的基, $\dim V_1=2$

β_1,β_2 为 V_2 的基 $\dim V_2=2$

另外, β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性表出, 并满足 $\beta_2=-\alpha_1+4\alpha_2+3\beta_1$

$\therefore -\alpha_1+4\alpha_2=\beta_2-3\beta_1$

$\therefore -\alpha_1+4\alpha_2\in V_1\cap V_2$

而 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=2+2-3=1$

$\therefore -\alpha_1+4\alpha_2$ 就是 $V_1\cap V_2$ 的基, 即 $(-5,2,3,4)'$ 为 $V_1\cap V_2$ 的基

5. $V_1+V_2=\langle\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\rangle$

$$\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\-1&3&2&3\\0&1&0&1\\1&-3&-2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&1&3&4\\0&1&0&1\\0&-1&-3&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\0&1&3&4\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 V_1+V_2 的基. $\dim(V_1+V_2)=3$.

另外, β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性表出: $\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+\beta_1$

$\therefore 2\alpha_1+\alpha_2=-\beta_1+\beta_2\in V_1\cap V_2$

显然 $\dim V_1=\dim V_2=2$ $\quad\because \dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$

$=4-3=1$

$\therefore 2\alpha_1+\alpha_2=(0,1,1,-1)'$ 为 $V_1\cap V_2$ 的基

6. 证明：先证 $V=V_1+V_2$

显然 $V_1+V_2\subseteq V$，下面证 $V\subseteq V_1+V_2$

任取 $\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)'\in V$，有

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_2-a_3\cdots-a_n\\-a_1-a_3-a_4\cdots-a_n\\\vdots\\-a_1-a_2\cdots-a_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i\\\sum_{i=1}^{n}a_i\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}a_i\end{bmatrix}$$

令右边中第一个向量为 α_1，第二个向量为 α_2

$\because$ 显然 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，$\therefore \alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V_1+V_2$

$\therefore V\subseteq V_1+V_2$　　$\therefore V=V_1+V_2$

第二步证明 $V_1\cap V_2=0$

任取 $\eta\in V_1+V_2$，$\eta=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$

则 $\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_n=0\\k_1=k_2=\cdots=k_n\end{cases}$

$\therefore nk_1=0$　$\therefore k_1=0$　$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\therefore V_1\cap V_2=0$

7. 证明：设 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 且 $V_i=\langle\alpha_i\rangle$　$i=1,2\cdots n$

下面证 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$

显然 $V_1+V_2+\cdots+V_n\subseteq V$

任取 $\alpha\in V$，由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 V 的基可知：

$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

而 $k_i\alpha_i\in V_i\ (i=1\cdots n)$　$V\subseteq V_1+V_2+\cdots+V_n$　$\therefore V=V_1+V_2+\cdots+V_n$

$V_1+V_2+\cdots+V_n=\langle\alpha_1\rangle+\langle\alpha_2\rangle+\cdots+\langle\alpha_n\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\rangle$

$\because \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关　$\therefore \dim(V_1+V_2+\cdots+V_n)=n$

而 $\dim(V_i)=1\ (i=1,2\cdots n)$　$\therefore$

$\dim(V_1+V_2+\cdots+V_n)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_n=n$

$\therefore V_1+V_2+\cdots+V_n$ 为直和

$\therefore V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$　证毕

8. (1) 证明：显然 $0 \in M_n^0(K)$ ∴ $M_n^0(K)$ 非空集

设 $A, B \in M_n^0(K)$ 则 $tr(A) = tr(B) = 0$

∵ $tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0$

∴ $A+B \in M_n^0(K)$ ∴ 对加法封闭

$tr(kA) = k\, tr(A) = 0$ ∴ 对数乘封闭

∴ 是子空间

(2) 证明 ① 下面证 $M_n(K) = \langle I \rangle + M_n^0(K)$. 显然 $\langle I \rangle + M_n^0(K) \subseteq M_n(K)$

任取 $A \in M_n(K)$ 、设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

有 $A = A_1 + A_2$.

其中 $A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, I$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{bmatrix}$$

显然 $A_1 \in \langle I \rangle$. $A_2 \in M_n^0(K)$ ∴ $A \in A_1 + A_2$

∴ 故 $M_n(K) \subseteq \langle I \rangle + M_n^0(K)$ ∴ $M_n(K) = \langle I \rangle + M_n^0(K)$

② 下面证 $\langle I \rangle + M_n^0(K)$ 为直和

任取 $B \in \langle I \rangle \cap M_n^0(K)$ ， B 为 n 级矩阵

∴ $\begin{cases} B = kI . & k \in K . \\ tr(B) = 0 \end{cases}$

∵ $tr(kI) = kn$ ∴ $k = 0$ ∴ $B = 0 I = 0$

∴ $\langle I \rangle \cap M_n^0(K) = 0$ ∴ $M_n(K) = \langle I \rangle \oplus M_n^0(K)$

定理①

9.证明：n级矩阵A可对角化 ⟺ A的属于不同特征值的特征空间的维数之和为n

充分性：若 $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$

则 $\dim(K^n) = n = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s}$

由定理①可知，A可对角化

必要性：设A可对角化，由定理①可知

$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_n} = n$

在 $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2} \cdots V_{\lambda_s}$ 中各取一个基，

∵ A属于不同特征值的特征向量线性无关

∴ 它们合起来是n个线性无关的向量，成为 K^n 的基，

∴ $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$

7.3

1. 证明：显然，$\dim M_{s\times n}(K) = \dim K^{sn} = sn$

$\therefore M_{s\times n}(K)$ 与 K^{sn} 同构

对于 $A=(a_{ij})_{s\times n}$

$\sigma(A)=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn})$

2. 证明：$\dim K[x]_n = \dim K^n = n$ $\therefore$ $K[x]_n$ 与 K^n 同构

$\therefore$ 对于 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

$\sigma(f(x))=(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$

3. 证明：R 作为自身上的线性空间的基为 1，从而 $\dim R=1$

7.1.1(2) 的线性空间的基为 a，$(a\in R^+ \wedge a\neq 1)$，$\therefore \dim R^+=1$

$\therefore \dim R = \dim R^+ = 1$ $\therefore$ 它们同构

$\forall x\in R$，令 $\sigma = x \mapsto 2^x$，则 σ 为 R 到 R^+ 的同构映射

4. (1) 证明：显然 $0\in L$，$\therefore L$ 非空集

任取 2 级矩阵 $A_1, A_2 \in L$，设 $A_1=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$

$\therefore A_1+A_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{bmatrix}$

$\because a_1+a_2\in R$，$b_1+b_2\in R$ $\therefore A_1+A_2\in L$

$\therefore$ 对加法封闭

任取 2 级矩阵 $B=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\in L$

$\therefore kB=\begin{bmatrix} ka & kb \\ -kb & ka \end{bmatrix}$ $\because ka, kb\in R$

$\therefore kB\in L$ $\therefore$ 对数乘封闭

$\therefore L$ 为 $M_2(R)$ 的子空间

$\therefore$ L 的一个基为 $E_{11}+E_{22}$，$E_{12}-E_{21}$，$\therefore \dim L=2$

(2) 证明：C 作为 R 上的线性空间　　的基为 $1, i$. ∴ $\dim_R C = 2$

∴ $\dim_R C = \dim L = 2$ 　∴ $C \cong L$.

对于 $a+bi$,

$$\sigma(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$ 　为一个同构映射

8.1

1.(1) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$, 则 $A(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ b_1 + c_1 \\ c_1^2 \end{bmatrix}$ 　$A(\beta) = \begin{bmatrix} a_2 - b_2 \\ b_2 + c_2 \\ c_2^2 \end{bmatrix}$

$A(\alpha) + A(\beta) = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)-(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ c_1^2 + c_2^2 \end{bmatrix}$ 　而 $A(\alpha+\beta) = A\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2-(b_1+b_2) \\ b_1+b_2+c_1+c_2 \\ (c_1+c_2)^2 \end{bmatrix}$

$A(\alpha) + A(\beta) \neq A(\alpha+\beta)$ 　∴ 不是线性变换

(2) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ 　$\beta = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 则 $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2a_1 - b_1 \\ b_1 + c_1 \\ 3a_1 - b_1 + c_1 \end{bmatrix}$, $A(\beta) = \begin{bmatrix} 2a_2 - b_2 \\ b_2 + c_2 \\ 3a_2 - b_2 + c_2 \end{bmatrix}$

∴ $A(\alpha) + A(\beta) = \begin{bmatrix} 2(a_1+a_2) - (b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) + (c_1+c_2) \\ 3(a_1+a_2) - (b_1+b_2) + (c_1+c_2) \end{bmatrix} = A(\alpha+\beta)$ 　保持加法运算

∴ ~~保持加法运算~~

$A(k\alpha) = \begin{bmatrix} 2ka_1 - kb_1 \\ kb_1 + kc_1 \\ 3ka_1 - kb_1 + kc_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(2a_1 - b_1) \\ k(b_1 + c_1) \\ k(3a_1 - b_1 + c_1) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2a_1 - b_1 \\ b_1 + c_1 \\ 3a_1 - b_1 + c_1 \end{bmatrix} = kA(\alpha)$

保持数乘运算, 　∴ 是线性变换

2.(1) 设 $B, C \in M_n(k)$, 则 $A(B) = BA$. 　$A(C) = CA$

∴ $A(B+C) = (B+C)A = BA + CA = A(B) + A(C)$.

$A(kB) = (kB)A = k(BA) = kA(B)$

∴ 是线性变换

(2) 设 $X_1, X_2 \in M_n(K)$、则 $A(X_1) = BX_1C$，$A(X_2) = BX_2C$.

$\therefore A(X_1+X_2) = B(X_1+X_2)C = BX_1C + BX_2C = A(X_1) + A(X_2)$

$A(kX_1) = B(kX_1)C = kBX_1C = kA(X_1)$

$\therefore$ 是线性变换

3. 设 ~~设~~ $f(x), g(x) \in K[x]$，则 $Af(x) = f(x+a)$. $Ag(x) = g(x+a)$

$A[f(x)+g(x)] = f(x+a) + g(x+a) = Af(x) + Ag(x)$

$A(kf(x)) = kf(x+a) = kAf(x)$

$\therefore$ 是线性变换

4. ~~有~~ 设 $x_1, x_2 \in R^+$ 则 ~~有~~ $\log_a(x_1) = \log_a x_1$. $\log_a(x_2) = \log_a x_2$

$\log_a(x_1 \oplus x_2) = \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

$\log_a(k \odot x_1) = \log_a(x_1^k) = \log_a x_1^k = k\log_a x_1 = k\log_a(x_1)$

$\therefore$ 是线性变换

5(1) 证AA：设 $f(x), g(x) \in K[x]$，则 $Af(x) = xf(x)$ $Ag(x) = xg(x)$

$A[f(x)+g(x)] = x(f(x)+g(x)) = xf(x)+xg(x) = Af(x) + Ag(x)$.

$A[kf(x)] = x(kf(x)) = kxf(x) = kAf(x)$

是线性变换

(2) $\forall f(x) \in K[x]$ 有 $Af(x) = xf(x)$. $Df(x) = f'(x)$

$(DA)(f(x)) = D(Af(x)) = D(xf(x)) = xf'(x) + f(x)$

$(AD)(f(x)) = A(Df(x)) = Af'(x) = xf'(x)$

$\therefore DA(f(x)) - AD(f(x)) = xf'(x) + f(x) - xf'(x) = f(x)$

$\because \forall f(x) \in K[x]$ 有 $(DA - AD)(f(x)) = f(x)$

$\therefore DA - AD$ 为恒等映射. 即 $DA - AD = I$

6. 证明 必要性：A可逆当且仅当A是V到自身的同构映射

由同构的性质可知，若 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 为V的一个基，则

~~A α~~ $A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_n$ 为V的一个基

充分性：假设 $A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_n$ 为V的一个基

① ∵ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为V的一个基 ∴ $\forall \alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$

有 $A(\alpha) = a_1A(\alpha_1) + a_2A(\alpha_2) + \cdots + a_nA(\alpha_n)$

∵ $A\alpha_1 \cdots A_n$ 为V的一个基

∴ 任意 $A\alpha \in V$ 可由 $A\alpha_1 \cdots A_n$ 线性表出

∴ A的值域与陪域都为V，二者相等，∴ A是满射

② 设 $\forall \beta_1, \beta_2 \in V$，且 $A\beta_1 = A\beta_2$ 其中 $\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n$

$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n$

$a_{11}A\alpha_1 + a_{12}A\alpha_2 + \cdots + a_{1n}A\alpha_n = a_{21}A\alpha_1 + a_{22}A\alpha_2 + \cdots + a_{2n}A\alpha_n$

∴ $(a_{11}-a_{21})A\alpha_1 + (a_{12}-a_{22})A\alpha_2 + \cdots + (a_{1n}-a_{2n})A\alpha_n = 0$

∵ $A\alpha_1 \cdots A\alpha_n$ 为基 ∴ 线性无关 ∴ $a_{11}=a_{21}, a_{12}=a_{22} \cdots a_{1n}=a_{2n}$

∴ $\beta_1 = \beta_2$ ∴ A是单射

综上所述 A是双射 ∴ A可逆

7. 证明 设 $k_0\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$

两边乘 A^{m-1} 得 $k_0\alpha A^{m-1} = 0$

∵ $\alpha A^{m-1} \neq 0$ ∴ $k_0 = 0$ ∴ $k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \cdots + k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$

同理可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0$

∴ $\alpha, A\alpha, A^2\alpha \cdots A^{m-1}\alpha$ 线性无关

8.(1) 证明：设 $\alpha, \beta \in V$，则有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta = \beta_1 + \beta_2$，其中 $\alpha_1, \beta_1 \in U$，$\alpha_2, \beta_2 \in W$

$P_U(\alpha+\beta) = \alpha_1 + \beta_1 = P_U(\alpha) + P_U(\beta)$，$P_U(k\alpha) = P_U(k\alpha_1 + k\alpha_2) = k\alpha_1 = kP_U(\alpha)$

同理 $P_W(\alpha+\beta) = P_W(\alpha) + P_W(\beta)$，$P_W(k\alpha) = kP_W(\alpha)$

∴ P_U, P_W 都是V的一个线性变换

(2) 证明：当 $\delta \in U$ 时 $\delta = \delta + 0$. 其中 $0 \in W$.

当 $\delta \in W$ 时 $\delta = 0 + \delta$. 其中 $0 \in U$

$\therefore P_U(\delta) = \begin{cases} \delta & 当\ \delta \in U \\ 0 & 当\ \delta \in W \end{cases}$

(3) 证明：$\forall\ \alpha \in V$. 设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. $\alpha_1 \in U$. $\alpha_2 \in W$

① $\because P_U^2(\alpha) = P_U(P_U(\alpha)) = P_U(\alpha_1) = \alpha_1 = P_U(\alpha)$

$\therefore P_U^2 = P_U$.

② $(P_U + P_W)(\alpha) = P_U\alpha + P_W\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

$\therefore P_U + P_W = I$

③ $P_U P_W \alpha = P_U(P_W(\alpha)) = P_U(\alpha_2) = 0$

$\therefore P_U P_W = 0$

8.2

1. ~~解~~ $A(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3$

$A(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$A(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

∴得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $D(f_1) = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx = af_1 - bf_2$

$D(f_2) = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx = af_2 + bf_1$

∴得 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

3. $A(E_{11}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$

$A(E_{12}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = aE_{12} + cE_{22}$

$A(E_{21}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + dE_{21}$

$A(E_{22}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = bE_{12} + dE_{22}$

∴得 $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$

4. 证明：先证明 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha \cdots A^{n-1}\alpha$ 线性无关

设 $k_0\alpha + k_1A\alpha + \cdots + k_{n-1}A^{n-1}\alpha = 0$，两边乘 A^{n-1} 得

$k_0A^{n-1}\alpha = 0$ ∵ $A^{n-1}\alpha \neq 0$ ∴ $k_0 = 0$

同理可证 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$ ∴ $\alpha, A\alpha \cdots A^{n-1}\alpha$ 线性无关

∵ 此向量组包含的向量个数为 n ∴ 是 V 的一个基

∴ $A(A^{n-1}\alpha) = A^n\alpha = 0$，$A(A^{n-2}\alpha) = A^{n-1}\alpha = 1\cdot A^{n-1}\alpha + 0\cdot A^{n-2}\alpha + \cdots + 0\cdot\alpha$

$A(A^{n-3}\alpha) = A^{n-2}\alpha = 0A^{n-1}\alpha + 1\cdot A^{n-2}\alpha + \cdots + 0\cdot\alpha$

$A(\alpha) = A\alpha = 0A^{n-1}\alpha + 0A^{n-2}\alpha + \cdots + 1\cdot A\alpha + 0\alpha$

题中矩阵为 A 在 $A^{n-1}\alpha, A^{n-2}\alpha, \cdots, A\alpha, \alpha$ 这个基下的矩阵

5. 显然 $\dim \mathrm{Hom}(V,V) = n^2$

V上 n^2+1 个线性变换必线性相关，存在不全为零的 $k_0 \cdots k_{n^2}$

使得 $k_0 \underline{I} + k_1 \underline{A} + k_2 \underline{A}^2 + \cdots + k_{n^2} \underline{A}^{n^2} = 0$

即存在一个次数不超过 n^2 的非零多项式，使得 $f(\underline{A}) = 0$.

6. 显然 $\dim V = n \quad \dim K = 1$

$\therefore$ ~~dim V~~ $\dim \mathrm{Hom}(V,K) = (\dim V)\dim K = n$

$\therefore \dim V^* = n = \dim V$

$\therefore V^* \cong V$.

7. $\sigma: \mathrm{Hom}(V,V') \longrightarrow M_{s\times n}(K)$

$\underline{A} \longrightarrow A$

$\because \sigma$ 是 $\mathrm{Hom}(V,V')$ 到 $M_{s\times n}(K)$ 的一个同构映射.

由 σ 保持乘法运算可知

$\underline{A}^2 = \underline{A} \iff A^2 = A$

$\therefore$ $\underline{A}$是幂等变换 $\iff$ A是幂等矩阵

8. 由题知，(~~$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$~~)设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为S.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore S^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.(1) $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$

∴ 全部特征值为 1（二重）10、

$\lambda=1$ 时，对应齐次方程组 $(\lambda I-A)X=0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ 一般解为 $x_1 = -2x_2 + 2x_3$ x_2, x_3 为自由未知量

基础解系 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，令 $\eta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_3$ ∴属于1的全部特征向量为 ~~此~~
$\eta_2 = -2\alpha_1 + \alpha_2$
$\{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K \wedge$ 不全为0$\}$

∴ $\lambda=10$ 时，解对应齐次方程组 $(\lambda I-A)X=0$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

一般解为 $\begin{cases} 2x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量

解得 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ∴ 令 $\eta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ 属于10的全部特征向量为
$\{k_3\eta_3 \mid k_3 \in K \wedge k_3 \neq 0\}$

(2) $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$

全部特征值为 1，3（二重）

$\lambda=1$ 时，解 $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴一般解 $x_1 = -2x_3$，$x_2 = 0$，x_3 为自由未知量

∴解得 $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ∴令 $\eta_1 = -2\alpha_1 + \alpha_3$ ∴属于1的全部特征向量为
$\{k_1\eta_1 \mid k_1 \in K \wedge k_1 \neq 0\}$

$\lambda=10$ 时，解 $(\lambda I-A)X=0$ 得 $\begin{cases} 2x_1 = x_3 \\ 2x_2 = -x_3 \end{cases}$，$x_3$ 为自由未知量

得 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 令 $\eta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$ ∴属于3的全部特征向量为 $\{k_2\eta_2 \mid k_2 \neq 0 \wedge k_2 \in K\}$

§10. (1) ∵ 有3个线性无关的特征向量

∴ 可对角化

标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 有2个线性无关的特征向量

而 $\dim V = 3$ ∴ 不可对角化

11. (1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\lambda^2$

∴ 全部特征值为 1(二重), 0 (二重)

$\lambda=1$ 时 $(\lambda I - A)X = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ 解得 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. ∴ 基础解: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

令 $\eta_1 = \alpha_1 + \alpha_3$. $\eta_2 = \alpha_4$.

∴ 属于1的全部特征向量为 $\{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 \mid k_1, k_2 \in K$, 且 k_1, k_2 不全为0$\}$

$\lambda=0$ 时 $(\lambda I - A)X = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ 解得 $x_1 = x_4 = 0$

x_2, x_3 为自由未知量

∴ 属于0的全部特征向量为 $\{k_2\alpha_2 + k_4\alpha_3 \mid k_3, k_4 \in K$, 且 k_3, k_4 不全为0$\}$

(2) V 基为 $\alpha_1+\alpha_3$, α_4, α_2, α_3.

对应对角矩阵: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12、证明：设 λ_1, λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的不同特征值，η_1, η_2 分别为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_1, λ_2 的一个特征向量 $\mathcal{A}$ 在V的一个基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的矩阵为A

证由 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = 0$ (1) 得 $k_1 = k_2 = 0$

(1) 式两边左乘A

$\therefore k_1 A\eta_1 + k_2 A\eta_2 = 0$

$\therefore k_1\lambda_1\eta_1 + k_2\lambda_2\eta_2 = 0$ (2)

在(1)式两边乘 λ_2，

得 $k_1\lambda_2\eta_1 + k_2\lambda_2\eta_2 = 0$ (3)

(2) − (3) 得 $k_1(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1 = 0$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \therefore k_1 = 0$

$\therefore k_2\eta_2 = 0 \quad \therefore k_2 = 0 \quad \therefore k_1 = k_2 = 0$

$\therefore \eta_1, \eta_2$ 线性无关，