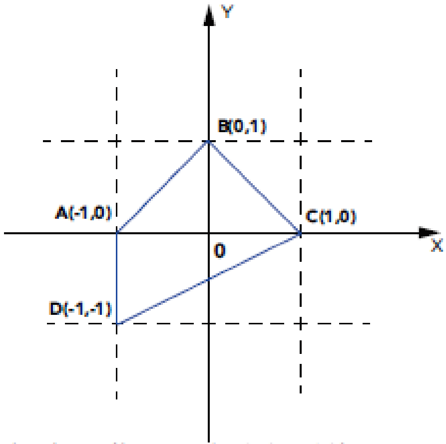
1. (10分）有一个矩阵Q_x

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



画出图中的四边形ABCD在矩阵Q_x作用下变成的形状。

2. 现在有两个矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

(1)（10分）计算M_1M_2, M_2M_1, M_1^T, M_2^T, $M_1^\dagger$, $M_2^\dagger$。
(2)（1分） $M_1M_2 = M_2M_1$吗?
(3)（4分） M_1和 M_2中哪个是厄米矩阵?

3. (10分) 验证下面这个向量$|\psi\rangle$是$\hat{\sigma}_y$的本征态

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

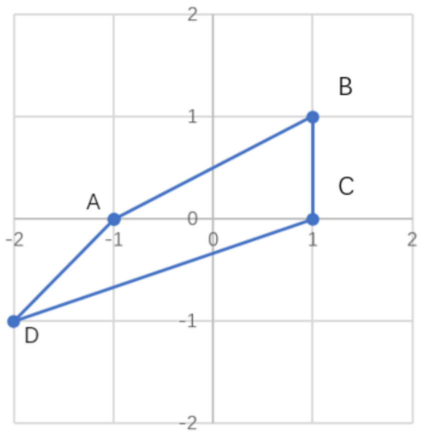
并将向量$|\psi\rangle$归一化。

4. (5分) 在二维平面里进行两次不同的旋转，旋转的结果不依赖于两次旋转的次序； 举例说明三维空间里的两次旋转，旋转的结果会依赖于两次旋转的次序。

附加题（0分）：

- 证明:二维空间里的一条直线在任意矩阵的作用下是一条直线或者一个点。 （我们生活的三维空间当然有类似的结论。）

1.$Q_xA = \binom{-1}{0}$; $Q_xB = \binom{1}{1}$; $Q_xC = \binom{1}{0}$; $Q_xD = \binom{-2}{-1}$.



2.(1) $M_1M_2 = \begin{pmatrix} 8 & 4+10i \\ 4-4i & 6+2i \end{pmatrix}$;

$M_2M_1 = \begin{pmatrix} 10+2i & 4+8i \\ 4-4i & 4 \end{pmatrix}$;

${M_1}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$;

${M_2}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+3i & 1 \end{pmatrix}$;

${M_1}^\dagger = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$;

${M_2}^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-3i & 1 \end{pmatrix}$.

(2).不等于.

(3). ${M_1}^\dagger = M_1$; ${M_2}^\dagger \neq M_2$. 所以M_1是厄米矩阵，M_2不是厄米矩阵.

3. $\hat{\sigma}_y|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |\psi\rangle$;

所以$|\psi\rangle$是$\hat{\sigma}_y$本征值为 1 的本征态。

归一化：$|\psi\rangle' = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

4.在二维平面的逆时针旋转θ角操作可以表示为矩阵（书上公式 4.65）：

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

先后连续的两次旋转，分别旋转α、β角，即：

$$R_\beta \cdot R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= R_{(\alpha+\beta)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = R_\alpha \cdot R_\beta$$

上述验算即可证明，在二维平面两次旋转的先后次序并不影响旋转的结果.

对于三维情况，我们考虑向量$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，以及绕 z 轴逆时针旋转 90°的操作$R_z^{90}$和绕 x 轴逆时针旋转 90°的操作$R_x^{90}$.

可以自行想象:

1.先绕 z 轴逆时针旋转 90°后变为$|\psi\rangle^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，再绕 x 轴逆时针旋转 90°变为$|\psi\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2. 先绕 x 轴逆时针旋转 90°后变为$|\psi\rangle^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，再绕 z 轴逆时针旋转 90°变为$|\psi\rangle^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

显然$|\psi\rangle^2 \neq |\psi\rangle^4$，所以在三维空间两次旋转的先后次序并会影响旋转的结果.

用矩阵的方法来验证，

$$R_z^{90} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° & 0 \\ \sin 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x^{90} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90° & -\sin 90° \\ 0 & \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可以自行验证这两个矩阵的正确性.

1. $R_x^{90} R_z^{90} |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2. $R_z^{90} R_x^{90} |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

我们可以得到同样的结论，三维空间两次旋转的先后次序并会影响旋转的结果.

附加题:二维平面中的直线可以表示为参数方程的形式:

$$\begin{cases} x = x_0 + s \cdot cos\theta \\ y = y_0 + s \cdot sin\theta \end{cases}$$

其中 s 为参数，二维平面中任意矩阵我们可以写作:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

其中 a, b, c, d 为任意复数，该直线在 A 的作用下变为:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 + s \cdot cos\theta \\ y_0 + s \cdot sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 + s \cdot acos\theta + s \cdot bsin\theta \\ cx_0 + dy_0 + s \cdot ccos\theta + s \cdot dsin\theta \end{pmatrix}$$

我们令:

$$\begin{cases} C_1 = acos\theta + bsin\theta \\ C_2 = ccos\theta + dsin\theta \\ C = \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2} \end{cases}$$

由于 C 是一个常数，根据三角函数的性质，我们可以令:

$$\cos\varphi = {}^{C_1}\!/_{C}\text{；}\sin\varphi = {}^{C_2}\!/_{C}$$

所以:

$$\begin{pmatrix} ax_0 + by_0 + s \cdot acos\theta + s \cdot bsin\theta \\ cx_0 + dy_0 + s \cdot ccos\theta + s \cdot dsin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 + sC \cdot \cos\varphi \\ cx_0 + dy_0 + sC \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

当 C=0 时，该直线变成一个点；

当 C≠0 时，该直线变为另一条以$\begin{pmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix}$为不动点的，参数为$sC$的直线.