装订线内

不要答题

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

**考试科目：** 算法设计与分析 **姓名：**____________ **学号：**____________

**考试时间：**2020 年 6 月 3 日 **大班教师:**____________**小班教师:**____________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | **总分** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | | |

## 北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

**答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树等、约束条件；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。**

一、（25 分）按照阶递减的顺序排列下面的函数。如果函数 $f(n)$与 $g(n)$的阶相同，就表示成 $f(n)=\Theta(g(n))$，本题只需要给出结果。

$$2^{\sqrt{2\log n}},\quad n\log n,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad n2^n,\quad (\log n)^{\log n},\quad 2^{2n},\quad 2^{\log\sqrt{n}}$$

$$n^3,\quad \log(n!),\quad \log n,\quad \log\log n,\quad n^{\log\log n},\quad n!,\quad n,\quad \log 10^n$$

**答案：**

$$n!,\quad 2^{2n},\quad n2^n,\quad (\log n)^{\log n}=\Theta(n^{\log\log n}),$$

$$n^3,\quad \log(n!)=\Theta(n\log n),\quad \log 10^n=\Theta(n),\quad 2^{\log\sqrt{n}},\quad 2^{\sqrt{2\log n}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\Theta(\log n),\quad \log\log n$$

二、（25 分）设 $A$ 是 $n$ 个实数的数组，考虑下面的递归算法：

```
XYZ (A[1..n])
if   n=1 then return A[1]
else   temp ← XYZ (A[1..n−1])
          if   temp < A[n]
          then   return   temp
          else   return   A[n]
```

1. 用简短的文字说明算法 XYZ 的输出是什么？
2. 以 $A$ 中元素的比较作为基本运算，列出算法 XYZ 最坏情况下时间复杂度 $W(n)$的递推方程，并解出 $W(n)$。
3. 在求解这个问题的算法类中，算法 XYZ 最坏情况下是不是效率最高的算法？为什么？

解答：

1. $A$ 中的最小实数。

2. $W(n)=W(n-1)+1$

   $W(1)=0$

   $W(n)=n-1$

3. 是效率最高的算法，因为找最小问题至少需要比较 $n-1$ 次。

三、（25 分）设 $A$ 是 $n$ 个数的序列，如果 $A$ 中的元素 $x$ 满足以下条件：小于 $x$ 的数的个数$\geq n/4$，且大于 $x$ 的数的个数$\geq n/4$，则称 $x$ 为 $A$ 的近似中值. 设计算法求 $A$ 的一个近似中值. 说明算法的设计思想和最坏情况下的时间复杂度.

答案

1. 用 Select 算法找第$\lceil n/4 \rceil$小的数 $a$ 和第$\lceil 3n/4 \rceil$小的数 $b$
2. if $a=b$ return “无解”
3. else 用 $a$ 和 $b$ 划分数组 $A$ 为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$，其中 $A_1$ 的数$<a$，$A_2$ 的数$=a$,

   $A_3$ 的数$>a$ 且小于 $b$，$A_4$ 的数$=b$. $A_5$ 的数$>b$. （当 $a=b$ 时，无解）
4. if $A_3$ 非空，则 $A_3$ 中的数为近似中值，否则无解.

时间 $O(n)$.

四、（25 分）给定图$G=(V,E)$ 和整数$k$。如果任意两个结点$v,u \in I$，边$(v,u) \notin E$，并且也没有从$v$到$u$的两条边的路径，即没有结点$w$使得$(v,w)\in E \wedge (w,u) \in E$，则称集合$I \subseteq V$是强独立的。强独立集问题是要确定$G$是否有一个大小不小于$k$的强独立集。

- 请证明强独立集是 NP
- 证明强独立集是 NP 难

证明：

首先，给定一个集合，容易在多项式时间内验证是否是强独立集，所以强独立集属于 NP。

其次，利用 NPC 问题独立集进行证明。

任给一个独立集问题的实例图 G，在每条边的中间加一个顶点 u_i，所有新加的顶点之间都连边，{u_i}形成完全图。然后证明在新的图 G’中，一个强独立集不能同时选择两个 u’，因为任何两个 u’有边相连。也不能同时选择一个新顶点和一个旧顶点，因为任意一个新顶点距离任意一个旧顶点距离为 2，所以只能都选旧顶点。新图中只由旧顶点构成的强独立集等价于旧图中的独立集。