装
订
线
内

不
要
答
题

北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 算法设计与分析 **姓名：** ________ **学号：** ________

考试时间： 2012 年 6 月 11 日 **任课教师：** 肖臻

题号	一	二	三	四	五	六	七	**总分**
分数								
阅卷人								

北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

以下为试题和答题纸，共 15 页。

得分

一、填空题（每小题 2 分，共 14 分）

1. 设流网络 $G=<V, E>$边的容量均为整数，最大流的值为$|f^*|$，则基于增广路径的最朴素最大流算法（Ford-Fulkerson 算法）的最差情形下运行时间为__________________。

2. 设两个二项堆中共有 n 个元素，则合并这两个二项堆的运行时间为__________________，合并后取二项堆中的最小值的运行时间为___________________。

3. 二进制计数器：计数器 $A[0 \cdot\cdot k-1]$ 表示为 k 位二进制位的数组。操作 INCREMENT 实现计数器加一。采用势能法分析平摊代价，如何定义其势函数____，对应的 INCREMENT 操作的平摊时间是_________________________。

4. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为矩阵序列，其中 A_i 为 $P_{i}\text{-}1\times P_i$ 阶矩阵，$i=1, 2, \cdots, n$。确定乘法顺序使元素相乘的总次数最少。以 $m[i, j]$表示得到 $A_{i..j}$ 的最少的相乘次数，请写出其递推方程：

____。

5. 对于巡回售货员问题（TSP）：给定 n 个城市集合 $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$，从一个城市到另一个城市的距离 d_{ij} 为正整数，求一条最短且每个城市恰好经过一次的巡回路线。请给出采用分支限界的回溯算法求解该问题时，结点代价函数如何设计？

____

____。

6. 给定无向图 $G=$（V，E），顶点覆盖问题的近似算法的运行时间是 _______。

7. 满足三角不等式的货郎问题（TSP）存在多项式时间的_________-近似算法。（填近似比例）

装订线内 不要答题

得分

二、判断题（ 正确打✓，错误打✗。）（每小题 1 分，共 10 分）

1. 已知对于一般的流网络 G，其最大流 f 不一定唯一，因而在 G 中$|S|$值最小的最小割$<S, T>$也不一定唯一。 [ ]

2. 给定无向图 $G=(V, E)$，该图的最大匹配问题是多项式时间可解的。 [ ]

3. 已知流网络 $G=(V, E)$上的流 f，对于$\forall X\subseteq V$，$\forall Y\subseteq V$ 和$\forall Z\subseteq V$，均有 $f(X\cup Y, Z)= f(X, Z) + f(Y, Z)$。 [ ]

4. 2-CNF-SAT 问题也是 NP 问题。 [ ]

5. 0-1 背包问题可以用动态规划方法求解，因此应该不属于 NPC 类问题。 [ ]

6. 如果任何一个 NP 问题都能在多项式时间内规约到问题 A，则问题 A 就一定是 NPC 问题。 [ ]

7. $T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+1$ 的解是 $\Theta(n)$ [ ]

8. $\log(n!)=\Theta(n\log(n))$ [ ]

9. 在最坏情形线性运行时间内求第 i 小元素的 SELECT 算法中，通过元素分组的中位数选取划分元素时，分组的大小可以是 3。 [ ]

10. 用回溯法求解 0-1 背包问题，在构造解空间树时，一般来说，采用重量从大到小的顺序排列每个分量，比采用重量从小到大的顺序排列，所得到的解空间树的节点可能更少。 [ ]

得分

三、单选题.（每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知递推公式 $T(n)=T(\sqrt{n}) + 1$，则 $T(n)$ = ?： [ ]
   A) $\Theta(\log n \log\log n)$
   B) $\Theta(\log\log n)$
   C) $\Theta(\log n)$
   D) $\Theta(\sqrt{n})$

2. 对同时支持插入和删除操作的动态表，满时扩张一倍，小于 1/4 时收缩一半，令 *num*[*T*]表示表中元素数量，*size*[*T*]占用存储空间大小，则用势能法分析动态表的平摊代价时，其势函数应定义为： [ ]
   A）$\Phi(T) = 2num[T] - size[T]$
   B）$\Phi(T) = size[T]/2-num[T]$
   C）$\Phi(T) = max(2num[T] - size[T], size[T]/2-num[T])$
   D）$\Phi(T) = min(2num[T] - size[T], size[T]/2-num[T])$

3. 对在 1~*k* 之间的 *n* 个数用计数排序法排序，时间复杂度为：[ ]
   A）$\Theta(n)$
   B）$\Theta(n+k)$
   C）$\Theta(k)$
   D）$\Theta(nk)$

4. 如果图 $G=(V, E)$中的每条边的长度均为 1，则求给定起点的单源最短路径问题的时间复杂度为（选取最紧的渐进界）： [ ]
   A）$O(V^2)$
   B）$O(E+V\log V)$
   C）$O(E\log V)$
   D）$O(V+E)$

5. 同时查找 2*n* 个数中的最大值和最小值，最少比较次数为： [ ]
   A）$(3/2)n-2$
   B）$4n-2$
   C）$3n-2$
   D）$2n-2$

得分

四、用归纳法证明下列递归式的解，假设 T(1)=1

（每小题 3 分，共 6 分）

(1) $T(n) = 3T(n/2) + n$

装订线内

不要答题

(2) $T(n) = 4T(n-2) + 2$

装
订
线
内

不
要
答
题

得分

四、解答题（共 61 分）

（1）给定无向图 G =（V，E），设 T 是该图的一颗最小生成树。请问是否一定可以找到图 G 中的某个节点 u，使得该树 T 是从这个节点 u 出发的最短路径树？证明你的结论或者举出反例。（5 分）

（提示：Dijkstra 算法结束后可以得到一棵生成树，称之为最短路径树。）

（2）在实数轴上给定 n 个区间$[a_1, b_1],\cdots$， $[a_n, b_n]$，设计一个时间复杂度为$O(n \log n)$的算法找到一个点数最小的点集 P，使得每个区间$[ai, b_i]$至少包含一个属于 P 的点。证明算法的正确性和时间复杂度为 $O(n \log n)$。（5 分）

（3）假设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 n 个互不相等的数字，如果 $i < j$ 但是 $a_i > a_j$，a_i 和 a_j 称为 “颠倒”。“冒泡” 排序算法交换相邻的颠倒的数字，直到没有颠倒的数字为止。假设“冒泡” 排序算法的输入序列是一个随机的排列，即 $a_1, a_2, ..., a_n$ 的 $n!$种排列等概率出现。（6 分）

(a) 一对数字被交换的概率是多大？（3 分）

(b) 这个算法的期望运行时间是多少？（3 分）

装订线内

不要答题

（4）旋转序列（6 分）

给定一个整数序列 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$，已知它是由一个递增序列通过顺时针“旋转”若干位得到的。例如给定序列是 A=(3,4,5,6,7,1,2)，它是由(1,2,3,4,5,6,7)旋转得到。设计尽量快的算法，在该序列的查找最小元素 x。请写出伪代码，并且分析时间复杂度。为了简单起见，可以假设原序列中的最小元素是唯一的。

（5）独立集合（6 分）

给定一个集合 $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$，其中每一个元素 S_i 是一个有限的整数集合。例如：

$S=\{\{10, 3, 230\}, \{2, 50\}, \{4, 1, 2, 20\}, \{3, 10, 230\}, \{0\}, \{\}, \{50, 2\}\}$，

其中 $S_1=\{10, 3, 230\}$, $S_2=\{2, 50\}$, $S_3=\{4, 1, 2, 20\}$, $S_4=\{3, 10, 230\}$, $S_5=\{0\}$, $S_6=\{\}$, $S_7=\{50, 2\}$。

通过分析可知 $S_1=S_4$, $S_2=S_7$，剩下的元素都是“唯一”的。请设计一个尽可能优化的算法，求出集合 S 中所有“唯一”的元素（即所有不与其他元素相同的元素）。

装订线内

不要答题

（6）最大积问题（6 分）

给定**整数**序列 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$，求一个连续子序列 $A_a, A_{a+1}, \ldots, A_b$（$a <= b$）使得他们的乘积$\prod_{i=a}^{b} A_i$最大。请给出算法描述和时间复杂度分析。

装订线内 不要答题

（7）最优三叉树（6 分）

有 n 堆石子，第 i 堆有 A_i 个。每一次操作可以选择当前的不超过 3 堆石子进行合并，合并的代价为参与合并的石子总数。例如，有 5 堆石子，每堆的石子个数为 5, 1, 10, 4, 2，下面是一个可能的合并过程：

Step 1：当前石子堆：5, 1, 10, 4, 2　　合并 5, 10, 2，　　代价为 5+10+2 = 17

Step 2：当前石子堆：1, 4, 17　　合并 1, 4，　　代价为 1+4 = 5

Step 3：当前石子堆：5, 17　　合并 5, 17，　　代价为 5+17=22

Final：　当前石子堆：22

上述过程的总代价为 17+5+22=44.当然这个合并过程不是最优的。请你设计一个算法，对于 n 堆石子找出最优的合并策略使得总代价最小。请简要证明你的算法。

（8）最小队列（10 分）

队列是一个先进先出线性表，支持 O(1)时间复杂度的进队、出队操作。但是在队列中查找当前的最小元素需要 O(n)的时间复杂度，即遍历当前的整个队列。请为队列设计一个辅助的数据结构，使得整体的进队、出队和取最小值操作的均摊时间复杂度都是 O(1)。

装订线内不要答题

（9）评选奖学金（10 分）

某个系有 n 个名学生，要从中评选出最多 k 个学生获得奖学金。该系包括 p 个班级，每个学生属于并且只能属于一个班级，设第 i 个学生所属班级编号为 t_i。该系开设了 m 门课程，每个学生可以选任意多门课程，设第 i 个学生所选课程集合为 S_i。现在要求你设计一个评选奖学金的算法，使得：

a) 每个班级获奖人数不超过 U_i 个。

b) 每门课程的学生中至少有 L 个人获奖，但是最多不能超过 H 个人。每个学生只能占用一门课程的获奖资格。

c) 在满足以上条件的前提下，推选出尽可能多的学生获奖，但是获奖总人数不能超过前面给定的奖学金名额 k 个。

请给出算法的详细描述，并阐明如何判断能否选出一个符合要求的获奖学生集合。