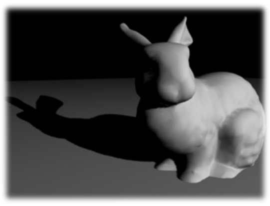
11. Ray Tracing

Local VS Global Illumination

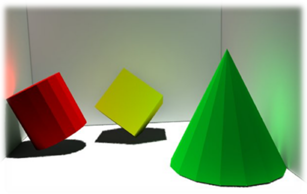
- 지금까지 Local illumination. 주변광 등을 근사
- 오늘 수업은 Global illumination. 주변광을 정확하게 계산. Photo realistic.

Global Illumination

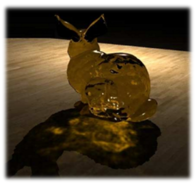
> 💡 아래의 것들은 local illumination 으로는 할 수 없음
>
> ⇒ 따라서 photo realistic 한 이미지를 만들기 위해, **global illumination** 이용
>
> 1. **Ray tracing**
> 2. Path tracing



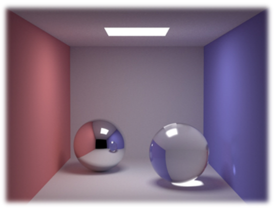
Shadow



Color bleeding



굴절



굴절 반사

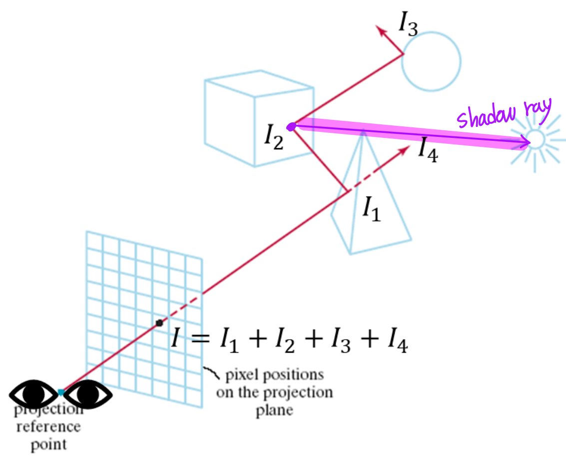
안개

Sub-surface scattering

Basic Ray Tracing Idea

- (물리적 측면)
  - **(Ray 가 광원에서 시작)** 어떤 광원에서 시작된 빛이 어떤 물체들에 반사 및 굴절돼서 그 빛이 눈에 들어온다면, 그 빛이 색상이 된다.
- (컴퓨터과학 측면) 해당 광원에서 나온 ray 중에 과연 몇 개나 눈에 들어올까 그것을 다 계산할 수는 없다.
  - **(Ray 가 눈에서 시작)** light path 를 따라 ray 가 내 눈에 들어왔을 테니까, 이를 광원에서부터가 아닌, 눈에서부터 추적 시작
- (Basic idea)
  - 눈으로부터 픽셀을 향해서 ray 를 쏴서 물체와 만나는 점의 light intensity (phong 등을 이용) 를 구한다.
  - 반사 & 굴절된 ray 를 계속해서 tracing
- GPU 로 ray tracing 가능

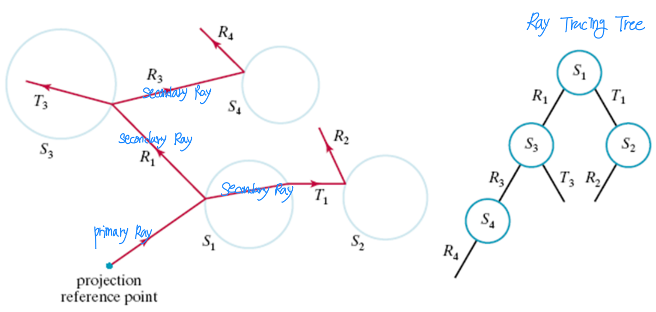
> 💡 **Ray tracing** 이용 시 저절로 해결되는 문제들
>
> 1. **Visible surface**: 어떤 surface 가 보이고 안 보이는지 결정할 필요 x. 알아서 안 보인다.
> 2. **Shadows**: by Shadow ray (교점에서 광원을 향해 쏜 ray)
> 3. **Perspective view**
> 4. **Global illumination**



Recursive Ray Tracing - Ray Tracing Tree

> 💡 Ray 를 어떻게 추적해서 Ray Tracing Tree 를 만드는지

- **Primary ray** & **Secondary rays**
  - Primary ray: 픽셀 개수만큼 쏜다. Screen resolution 이 1024x768 이라면, 그만큼 ray 를 쏜다.
  - Secondary rays: (1)반사 reflection, (2)굴절 refraction
- **Ray Tracing Tree**
  - 개념적인 것
  - Ray 가 물체에 닿으면 node 만든다.
  - **R: 반사된 ray, T: 굴절된 ray**



> 💡 Ray termination condition
>
> 1. **No intersection**: 부딪히는 물체가 없을 때
> 2. **Intersects a light source**: 부딪혔는데 light source 일 때
> 3. **Reaches a maximum depth**: tree 의 depth 를 조절. Max depth 를 정해둔다.

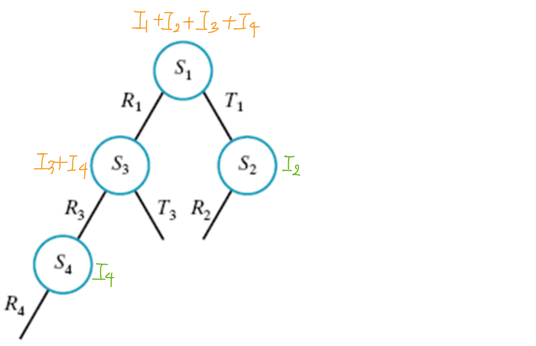
Recursive Ray Tracing - Conceptual Level

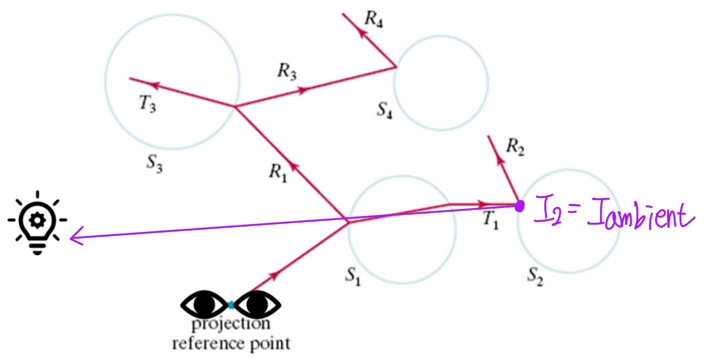
> 💡 Ray Tracing Tree 를 어떻게 사용해서 illumination model 을 적용하는지

1. Construct a ray tracing tree
2. Leaf node 부터 시작해 light intensity 계산
    - **Leaf node**
        - Basic **local illumination model** 적용: Normal **N**, light 방향 **L**, 눈 방향 **V** 이용
        - Shadow ray 계산
            - Shadow ray 쏴서 만나는 물체가 있으면, I = I_ambient
            - Shadow ray 쏴서 만나는 물체가 없으면, I = I_ambient **+ I_diffuse + I_specular**
            - ex) S_2 에서 light source 향해 shadow ray 쏴보면 S_1 과 만난다. 따라서 I = I_ambient

        > 💡 diffuse, specular 는 light source 에 의해 생기는 illumination 을 계산하기 위해 필요한 것이었음.
        > 즉, Shadow ray 가 (중간에 만나는 물체 때문에) light source 에 도달하지 못하면 해당 점은 illumination 이 없고, 그림자만 존재하며, diffuse 와 specular 계산이 제외됨.

    - **Intermediate node**
        - Leaf node 와 동일한 작업 반복
        - Children node 에서의 intensity 도 합치기
3. 만약 primary hit 없으면 background intensity 이용





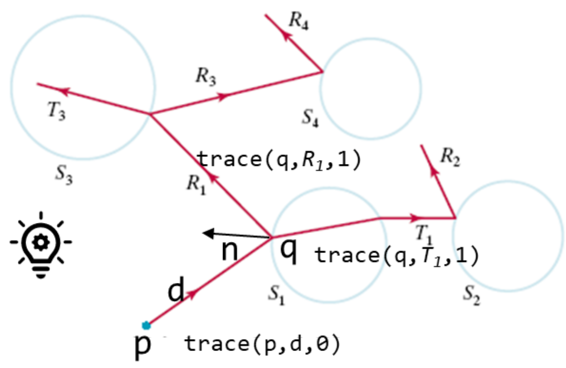
Recursive Ray Tracing - Implementation Level

Ray 시작위치　Ray 방향　몇 번 recursive 반복했는지 (primary ray는 0, 그 후부턴 1.2.3...)

```
color c = trace(point p, vector d, int step)
{
    color local, reflected, refracted;
    point q;
    vector n, r, t;

    if (step > max) return(background_color);       Termination condition(3)

    q = intersect(p, d, status);    교점 q 구하기

    if (status== light_source) return(light_source_color);  Termination condition(2)
    if (status==no_intersection) return(background_color);  Termination condition(1)

    n=normal(q);      Normal vector n 구하기
    r=reflect(q, n);  반사된 ray r 구하기
    t=refract(q, n);  굴절된 ray t 구하기

    local =phong(q, n, r); // consider shadow   이때 shadow ray 고려해야 함.
    reflected = trace(q, r, step+1);   반사빛에서 재귀호출 (시작점 q, 방향 r, step증가)
    refracted= trace(q, t, step+1);    굴절빛에서 재귀호출 (시작점 q, 방향 r, step증가)

    retrun(local+reflected+refracted);
}
```

Direct illumination ← local

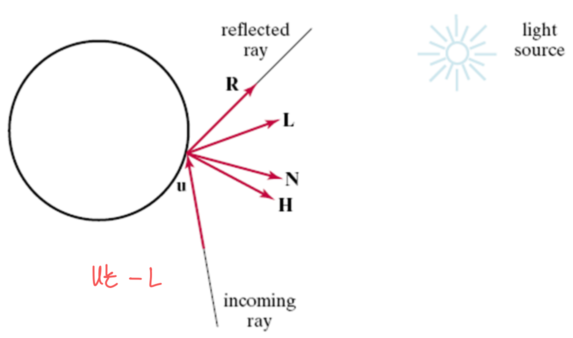
Indirect illumination ← reflected, refracted

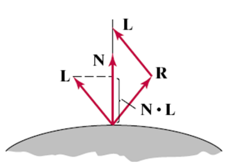


Reflection and Refraction

Reflection

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{u} - (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}}$$



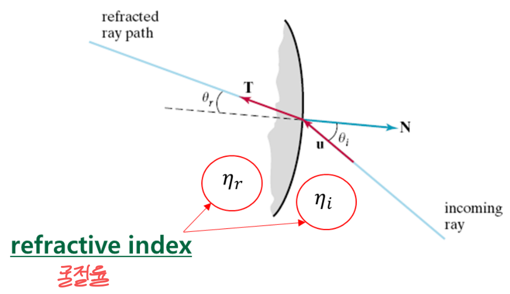


$$\mathbf{R} + \mathbf{L} = (2\mathbf{N} \cdot \mathbf{L})\mathbf{N}$$

$$\mathbf{R} = (2\mathbf{N} \cdot \mathbf{L})\mathbf{N} - \mathbf{L}$$

Refraction

$$\boxed{\mathbf{T} = \frac{\eta_i}{\eta_r}\mathbf{u} - \left(\cos\theta_r - \frac{\eta_i}{\eta_r}\cos\theta_i\right)\mathbf{N}}$$



Snell's law (스넬의 법칙)

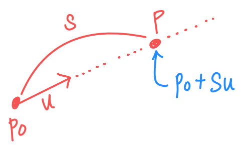
$$\mathbf{T} = \frac{\eta_i}{\eta_r}\mathbf{u} - \left(\cos\theta_r - \frac{\eta_i}{\eta_r}\cos\theta_i\right)\mathbf{N}$$

$$\cos\theta_r = \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_i}{\eta_r}\right)^2 (1 - \cos^2\theta_i)}$$

Ray/Surface Intersection

> 💡 Ray tracing 을 real time 으로 하기 어려운 이유가, intersection 을 구하는데 시간이 오래 걸리기 때문 (95% 의 시간을 차지함)

- 어떤 primitive 를 render 하는 지에 따라서 intersection 을 구하는 방법이 다르다.
  - (case 1) **Ray/sphere intersection**
  - (case2) **Ray/triangle intersection**
- Acceleration techniques
- Ray equation
  - P = P_0+s**u**
    - P_0: initial ray position
    - **u**: unit ray direction vec , $s \geq 0$



Ray/Sphere Intersection

$$|\mathbf{P}-\mathbf{P}_c|^2 - r^2 = 0$$ 원의 방정식

P = Po+Su 대입

$$|\mathbf{P}_0 + s\mathbf{u} - \mathbf{P}_c|^2 - r^2 = 0$$

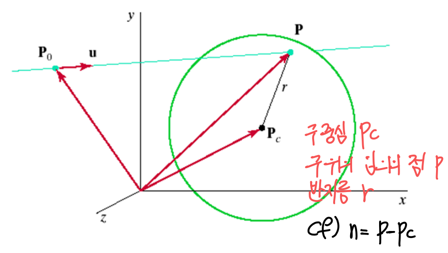
P_c-P_0=ΔP 라고 하자.
이를 S에 대해 정리하자.

$\|Su-\Delta p\|^2$
$= (Su-\Delta p)\cdot(Su-\Delta p)$
$= S^2 - 2(u\cdot\Delta p)s + \|\Delta p\|^2$

$$s^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{P})\,s + (|\Delta\mathbf{P}|^2 - r^2) = 0$$

S에 대한 이차방정식이 됨. 이를 풀면,

$$s = \mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{P} \pm \sqrt{(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{P})^2 - |\Delta\mathbf{P}|^2 + r^2}$$



If the determinant < 0 or $s < 0$, no intersection Determinant ≥0, S≥0 이어야 교점이 있는 것

Otherwise, take s^- between s^- and s^+ and $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + s^-\mathbf{u}$ S값이 작은 S값, 큰 값 S값이 나오게 되면, 둘 중 작은 S값을 선택

> 💡
> 1. 이차방정식을 통해 s 값을 계산한다.
> 2. s>0 인지 확인해 유효성을 검사한다.
> 3. 두 개의 근이 양수일 경우, **작은 s_** 를 선택해 **가장 먼저 교차한 점**을 구한다.
> 4. 교차가 없다면 해당 광선은 구와 만나지 않는다.

Ray/Triangle Intersection

cf) $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ 를 단위벡터로 만들면 $\vec{n}$

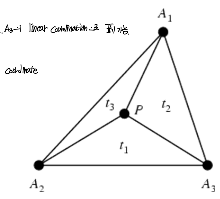
$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{P} = -D$$

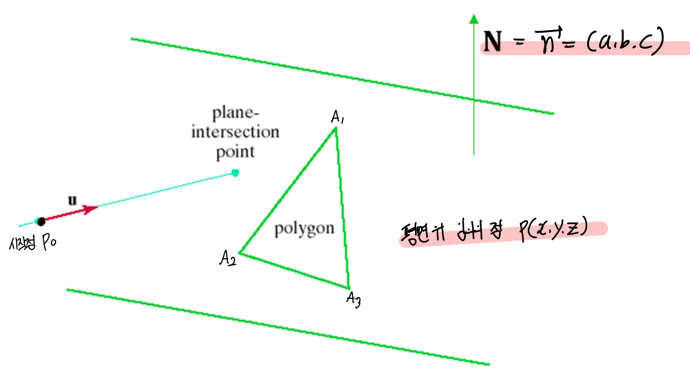
$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{P}_0 + s\mathbf{u}) = -D$$

$$s = -\frac{D + \mathbf{N}\cdot\mathbf{P}_0}{\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}}$$

Step1) ray & 평면 교점 구하기
$\vec{n} = (a, b, c)$ 이용해 평면의 방정식 구하면,
$ax+by+cz+d=0$
이를 평면 vector로 표현하면,
$(a,b,c)\cdot(x,y,z) = -d$
$N\cdot P = -D$
여기에 $P = P_0 + s\vec{u}$, $s\geq 0$ 대입
$N\cdot(P_0 + s\vec{u}) = -D$
이를 만족하는 S를 구하면,
$S = -\frac{D + N\cdot P_0}{N\cdot u}$
조건 1) S가 존재하려면, $N\cdot u \neq 0$
cf) $N\cdot u = 0$ 라면, 평면과 ray가 평행한 것
조건 2) S≥0

Step2) 해당 교점이 삼각형 안에 있는가?
· Barycentric coordinate 이용
· 평면에 포함된 점 P는 삼각형의 세 vertex인 A_1, A_2, A_3의 linear coordination으로 표기 가능.
$P = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3$
여기서 (t_1, t_2, t_3)를 쓰면 그게 Barycentric coordinate
· 항상 $t_1+t_2+t_3 = 1$
· P가 삼각형 내부에 있으면 t_1, t_2, t_3 다 양수
셋 중 하나라도 음수면 삼각형 외부
→ 다 양수일 때 기하학적 의미
$t_1 : t_2 : t_3$ 는 P로 나뉘지는 삼각형의 넓이비
ex) P가 무게중심이면 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$





Plug s back into the ray equation and find a plane-intersection point, **p**

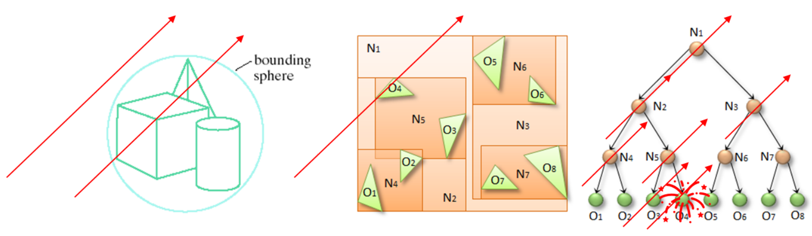
Check whether **p** belongs to the interior of the triangle using the Barycentric coordinate

1. Find t_1, t_2, t_3 such that **p** = $t_1\mathbf{A}_1 + t_2\mathbf{A}_2 + t_3\mathbf{A}_3$ or alternatively solve $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^x & A_2^x & A_3^x \\ A_1^y & A_2^y & A_3^y \\ A_1^z & A_2^z & A_3^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$
2. See if $t_1, t_2, t_3 \geq 0$

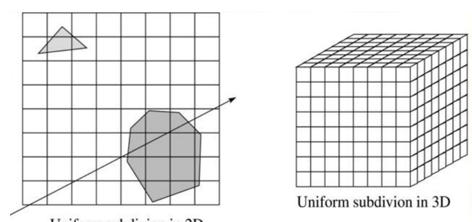
> 💡
> 1. 광선과 평면이 교차하는 s 값을 구한다.
> 2. s>0 인 경우, 교차점 P를 계산한다.
> 3. 교차점이 삼각형 내부인지 확인하여 최종적으로 교차 여부를 결정한다.

Acceleration Techniques

(1) Use a BVH (Bounding Volume Hierarchy)



(2) Spatial Subdivision



Uniform subdivion in 2D

Uniform subdivion in 3D

Quiz) Ray Tracing

Consider the following ray tracing problem. We shoot a ray **R** from the origin **O**=(0,0,0) along a unit direction **u** = (0,0, -1). In this space, we also have a triangle $\triangle A_1A_2A_3$ with three vertices, $A_1(-1, -1, -1)$, $A_2(1, -1, -1)$, $A_3(0, 1, -1)$, in CCW order.

문제 1
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Compute the normal vector **N** of the plane embedding the triangle $\triangle A_1A_2A_3$.

하나를 선택하세요.
- a. N=(1, 0, 0)
- b. N=(0, 0, 1) ✔
- c. N=(0, 0, -1)
- d. N=(0, 1, 0)

답이 맞습니다.
The normal **N** of the plane T embedding $\triangle A_1A_2A_3$ is:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

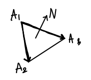
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

정답 : N=(0, 0, 1)

$$\overrightarrow{A_{1,2}} = A_2 - A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_{1,3}} = A_3 - A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



외적
$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (0-0)i + (0-0)j + (4-0)k$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \div \sqrt{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

normalize

문제 2
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Find the first intersecting point **P** of the ray **R** with the triangle $\triangle A_1A_2A_3$.

하나를 선택하세요.
- a. P=(0, 0, -1) ✔
- b. P=(0, 0, 1)
- c. P=(0, -1, 0)
- d. P=(0, 1, 0)

답이 맞습니다.
The plane equation of T is:

$$0x + 0y + 1z = -1 \rightarrow T : z = -1$$

Then,

$$s = -\frac{D + \mathbf{N} \cdot \mathbf{O}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{u}} = -\frac{1 + (0,0,1) \cdot (0,0,0)}{(0,0,1) \cdot (0,0,-1)} = 1$$

$$\mathbf{P} = (0,0,0) + s(0,0,-1) = (0,0,-1)$$

정답 : P=(0, 0, -1)

$0x + 0y + 1z + D = 0$
$A_1 = (-1, -1, -1)$ 대입
$D = 1$
$\therefore z = -1$

$N \cdot P = -D$
$N \cdot (P_0 + su) = -D$
$$s = -\frac{D + N \cdot P_0}{N \cdot u}$$
$$= -\frac{1 + (0,0,1)(0,0,0)}{(0,0,1)(0,0,-1)} = 1$$
$P = (0,0,0) + 1 \cdot (0,0,-1)$
$= (0,0,-1)$

문제 3
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

What is the Barycentric coordinate of **P** in (2)?

하나를 선택하세요.
- a. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
- b. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ✔
- c. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- d. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

답이 맞습니다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

정답 : $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

① $-t_1 + t_2 = 0$
$t_1 = t_2$
② $-t_1 - t_2 + t_3 = 0$
$t_3 = 2t_1$
③ $-t_1 - t_2 - t_3 = -1$
$-2t_1 - t_3 = -1$
$-2t_1 - 2t_1 = -1$
$t_1 = \frac{1}{4}$

$\therefore t_1 = \frac{1}{4}$
$t_2 = \frac{1}{4}$
$t_3 = \frac{1}{2}$
셋 다 양수 → 내부

Consider the following, simplified Blinn-Phong illumination model:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}),$$

where **N** is a normal vector, **L** is the light direction vector, **H** is Blinn's halfway vector and the viewing direction is given as $\mathbf{V} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

문제 4
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

A point light source **K** is located at (1, 0, 0) and find the light direction vector $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{P}}{||\mathbf{K} - \mathbf{P}||}$ where **P** is the intersecting point in (2).

하나를 선택하세요.
- a. $\mathbf{L} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- b. $\mathbf{L} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- c. $\mathbf{L} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- d. $\mathbf{L} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ✔

답이 맞습니다.

$$\mathbf{L} = \frac{(1,0,0) - (0,0,-1)}{||(1,0,0) - (0,0,-1)||}$$

정답 : $\mathbf{L} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$K - P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \div \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

문제 5
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Find Blinn's halfway vector **H**.

하나를 선택하세요.
- a. $\mathbf{H} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
- b. $\mathbf{H} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- c. $\mathbf{H} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- d. $\mathbf{H} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ✔

답이 맞습니다.

$$\mathbf{H} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}{||(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)||}$$

정답 : $\mathbf{H} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$H = \frac{L + V}{||L + V||}$$

$$L + V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$||L + V|| = \frac{1}{\sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = 1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

문제 6

정답

총 1.00 점에서 1.00 점 할당

문제 표시

Find the light intensity at the intersecting point **P** (determined at (1)~(3)) using the above illumination model. Since the R, G, B values are identical, show only one of the R, G, B values.

하나를 선택하세요.

- a. I =0.5
- b. I =1 ✔
- c. I $=\frac{1}{\sqrt{2}}$
- d. I =0.1

답이 맞습니다.

$$\mathbf{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{H})=\frac{1}{\sqrt{2}}((0,0,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}))+\frac{1}{\sqrt{2}}((0,0,1)\cdot(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}))$$

정답 : I =1

$$\mathbf{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{H}),$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((0,0,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((0,0,1)\cdot(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$