4. 3D Geometric Transformations

Basic Transformations

Translation

$$x' = x + t_x, \qquad y' = y + t_y, \qquad z' = z + t_z$$

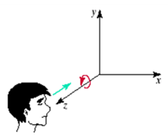
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

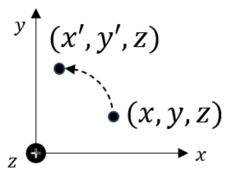
$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

Coordinate-axis Rotation

z-axis

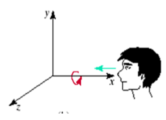
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

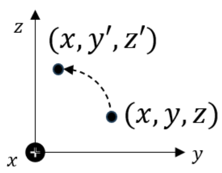




x-axis

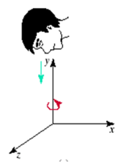
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

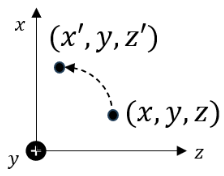




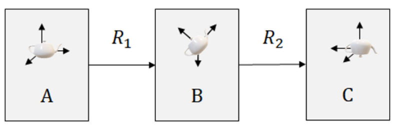
y-axis

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

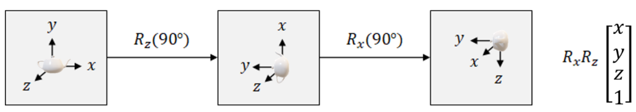




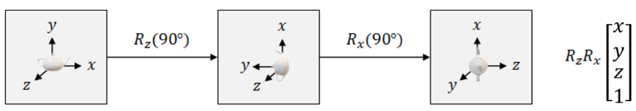
Composite Rotations



1. **Pre-multiplication $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$**
   - $\mathbf{R}_2$ is a rotation with respect to A's frame (world coordinate)



2. **Post-multiplication $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$**
   - $\mathbf{R}_2$ is a rotation with respect to B's frame (modeling coordinate)



Arbitrary Rotation

(방법 1) Rodrigue's Formula

- (의의) 임의의 회전축에 대한 **rotation matrix R 을 공식으로 구할 수 있다.**
- (의의) 임의의 회전축 u **vector** 를 알 때, **R matrix** 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\quad R \quad} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (전제 조건) 임의의 회전축을 $\boldsymbol{u}$ 라 하자 ↗ 크기 1
  - 이때 $\boldsymbol{u}$ 는 (1) 원점을 지나고 (2) unit vector 이다.
  - 만약 $\boldsymbol{u}$ 가 주어지지 않고, 지나는 두 점 P'_1 = (x_1, y_1, z_1) P'_2 = (x_2, y_2, z_2) 만 주어졌다면, 식으로 $\boldsymbol{u}$ 를 구하면 된다.

$$\frac{1}{\|\mathbf{P'}_2-\mathbf{P'}_1\|}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

- (정의) 회전축 $\boldsymbol{u}$ 가 (1) 원점을 지나고 (2) unit vector 이고, 회전각이 θ 일 때

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\hat{\mathbf{u}} + (1-\cos\theta)\ \hat{\mathbf{u}}^2$$

> 💡 **Skew Symmetric Matrix, $\hat{\mathbf{u}}$**
>
> - (정의) $\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$
> - (기하학적 의미) $\hat{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
>
> $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 인 vector $\mathbf{v}$ 에 대해,
> $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 외적 연산을 determinant 등을 이용해 계산하지 않고
> $\mathbf{u}$ 로 $\hat{\mathbf{u}}$ 를 구하고 $\mathbf{v}$ 와 행렬곱 연산을 통해 구할 수 있다.
> 즉, 외적을 계산할 수 있는 또 다른 방법

(문제 풀이 방법)

- STEP1. 원점 지나고, 단위 vector 인 $\boldsymbol{u}$ 를 구하고 ($\boldsymbol{u}$ 는 문제 설명에 주어지는 경우 많음)
- STEP2. $\hat{\mathbf{u}}$ 를 구하고
- STEP3. $\hat{\mathbf{u}}^2$ 를 계산해서
- STEP4. Rodrigue's Formula 적용 $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\hat{\mathbf{u}} + (1-\cos\theta)\hat{\mathbf{u}}^2$

(문제 풀이 예시) z축 회전을 Rodrigue's Formula 로 풀어보자

STEP1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

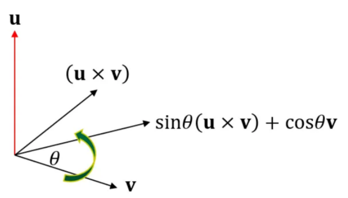
STEP2. $\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

STEP3. $\hat{\mathbf{u}}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

STEP4. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (1) u가 회전축이 맞는지 증명
  - 회전축은 회전하지 않으니, 회전해도 변화 없음을 보이면 됨.
  - 즉, **Ru**=**u**임을 보이자.

- (2) **Rv** 가 회전축 **u** 를 중심으로 **v** 를 $\boldsymbol{\theta}$ 만큼 rotate 한게 맞는지 증명 (**u** 와 v 는 수직)
  - 1) **v** 가 **Rv** 가 되어도 길이 변화 없음을 보이기
  - 2) **v** 와 **Rv** 두 벡터의 끼인 각이 임을 θ 보이기



- $\mathbf{Rv}$

$= (\mathbf{I} + \sin\theta\hat{\mathbf{u}} + (1-\cos\theta)\ \hat{\mathbf{u}}^2)\mathbf{v}$
$= \mathbf{v} + \sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (1-\cos\theta)\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
$= \mathbf{v} + \sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (1-\cos\theta)(-\mathbf{v})$
$= \sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v}$

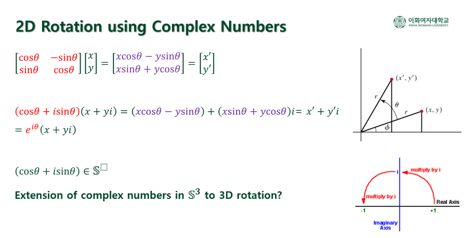
$\boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}$

$\|\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v}\|^2 = (\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v})\cdot(\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v}) = \sin^2\theta\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 + \cos^2\theta\|\mathbf{v}\|^2$
$= \sin^2\theta\|\mathbf{v}\|^2 + \cos^2\theta\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2$ 따라서 1) 이 증명됨

$(\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \cos\theta\|\mathbf{v}\|^2 = \cos\theta\|\sin\theta(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \cos\theta\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|$ 따라서 2) 가 증명됨

(방법 2) Quaternion

> 💡 (참고) 2 차원에서도 rotation 을 표현하는 방법이 여러가지
>
> - 2 × 2 행렬
> - 복소수 i 이용
>
> 마찬가지로, 3D rotation 도 quaternion 을 이용해서 표현 가능

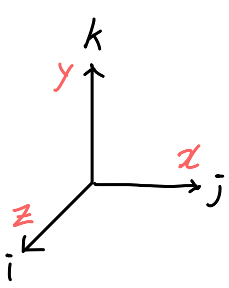


(Quaternion 정의)

$\mathbf{q}_v \in \mathbb{R}^3, q_w \in \mathbb{R}$ 일때

$\mathbf{q} \in \mathbb{H}$
$= (q_w,\ \mathbf{q}_v)$ → $\boxed{(q_x,\ q_y,\ q_z) \text{ 는 3차원 벡터}}$
$= q_w + \mathbf{q}_\mathbf{v}$
실수
$= q_w + iq_x + jq_y + kq_z$
복소수

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j, \qquad ij = -ji = k$$



Quaternion Algebra

- multiplication 곱, addition 합, conjugate 켤레 복소수, norm 크기, identity, inverse

	$\mathbf{q} = q_w + iq_x + jq_y + kq_z = (q_w, \mathbf{q_v})$ $\mathbf{r} = r_w + ir_x + jr_y + kr_z = (r_w, \mathbf{r_v})$	
Multiplication	$\mathbf{qr} = (q_w r_w - \mathbf{q_v} \cdot \mathbf{r_v}, \mathbf{q_v} \times \mathbf{r_v} + r_w \mathbf{q_v} + q_w \mathbf{r_v})$ $\mathbf{qr} = \mathbf{rq}$ iff $\mathbf{q_v} \times \mathbf{r_v} = 0$ (i.e. $\mathbf{q_v}, \mathbf{r_v}$ are parallel)	$(q_w + iq_x + jq_y + kq_z)(r_w + ir_x + jr_y + kr_z)$
Addition	$\mathbf{q} + \mathbf{r} = (q_w + r_w, \mathbf{q_v} + \mathbf{r_v})$	$(q_w + r_w) + (q_x + r_x)i + (q_y + r_y)j + (q_z + r_z)k$
Conjugate	$\mathbf{q}^* = (q_w, -\mathbf{q_v})$	$q_w - iq_x - jq_y - kq_z$
Norm	$\lVert\mathbf{q}\rVert = \sqrt{\mathbf{qq}^*} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2}$	
Identity	$id = (1, \mathbf{0}) = 1$	
Inverse	$\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\lVert\mathbf{q}\rVert^2}\mathbf{q}^*$ 즉, $q^{-1} = q^*$ ($\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$ if $\mathbf{q}$ is a unit quaternion)	$\frac{q_w - iq_x - jq_y - kq_z}{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$

Quaternion Rotation

💡 앞서 배운 quaternion 으로 rotation 을 표현해보자

💡 Rotation 을 표현하는 방법 중에 matrix 도 있는데, 왜 quaternion 을 이용할까? (= quaternion rotation 의 장점)
- 저장 공간이 덜 필요하다.
- 산술 연산이 덜 필요하다.
- 회전을 쉽게 interpolate 할 수 있다. 따라서 더 자연스러운 애니메이션을 만들 수 있다.

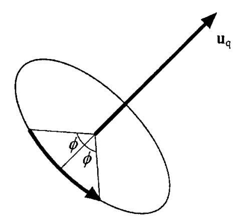
- unit **quaternion q**

$\mathbf{u_q}$: 회전축, $\lVert\mathbf{u_q}\rVert = 1$
$\boldsymbol{\varphi}$: 회전각

$\rightarrow$

$$\mathbf{q} = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{u_q}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$$

$$\lVert\mathbf{q}\rVert = 1, (\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{q})^2 = -1$$



- Rotation 을 어떻게 quaternion 으로 표현하는가?

p= $(p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$를 회전축 $\mathbf{u_q}$, 회전각 $\boldsymbol{\varphi}$ 에 대해 rotate 해보자

STEP1. 주어진 점 p= (p_x, p_y, p_z) 를 quaternion 으로 바꾸기.

$$\mathbf{p} = (0, p_x, p_y, p_z)$$

STEP2. 주어진 회전축을 이용해 unit quaternion 인 $\mathbf{q}$ 를 구하기.

$$\mathbf{q} = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{u_q}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{q}$$

STEP3. 회전을 나타내는 quaternion $\mathbf{q}$ 에 대해

$$\mathbf{qpq}^{-1} = \mathbf{qpq}^*$$

를 계산하면

$$(0, p'_x, p'_y, p'_z)$$

i, j, k 의 계수가 p'_x, p'_y, p'_z 이고 (p'_x, p'_y, p'_z) 가 회전된 점의 좌표가 된다.

- (예시) Rotate $\mathbf{p}$=(1, 0, 0) ∈ $\mathbb{R}^3$ by 90 degrees around z-axis $\rightarrow u_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

STEP1. 주어진 점 p= (p_x, p_y, p_z) 를 quaternion 으로 바꾸기. $\mathbf{p} = (0, p_x, p_y, p_z)$

$$\mathbf{p} = (0, 1, 0, 0)$$

STEP2. 주어진 회전축을 이용해 unit quaternion 인 $\mathbf{q}$ 를 구하기. $\mathbf{q} = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{u_q}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{q}$

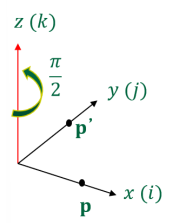
$$\mathbf{q} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \left(\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)(0i + 0j + 1k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)$$

STEP3. 회전을 나타내는 quaternion $\mathbf{q}$ 에 대해 $\mathbf{qpq}^{-1} = \mathbf{qpq}^*$ 계산하기.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{qpq}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + k)(1i + 0j + 0k)\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - k)$$

$$= \tfrac{1}{2}(i + j)(1 - k) = \tfrac{1}{2}(i - ik + j - jk) = \tfrac{1}{2}(i + j + j - i) = j = 0i + 1j + 0k$$

따라서 (0, 1, 0) 이 답이 된다.



Matrix to/from Unit Quaternion

💡 회전축 방향, 회전각을 알면 Rotation R 을 구할 수 있음.

1. **Unit Quaternion → Matrix**

   unit quaternion $\mathbf{q} = w + xi + yj + zk$ 를 rotation matrix R 로 바꾸면

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

2. **Matrix → Unit Quaternion**

Rotation matrix $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ 을 $\mathbf{q} = w + xi + yj + zk$ 로 바꾸면, w, x, y, z 를 아래와 같이 구할 수 있다

$\text{tr}(\mathbf{R}) := r_{11} + r_{22} + r_{33}$ 이라 하자. (trace 라 부르며, 대각선을 다 더하면 된다)

$w = \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R})+1}}{2}$

$x = (r_{32} - r_{23})/(4w)$

$y = (r_{13} - r_{31})/(4w)$

$z = (r_{21} - r_{12})/(4w)$

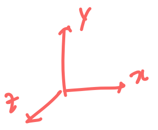
Other Transformations - Scaling, Reflection

Scaling

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reflection

💡 2D 에서 (x, y축, 원점) 와 달리, **평면**을 중심으로 대칭 이동



$$R_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{zx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affine Transformation

💡 transformed coordinate 가 input coordinate 에 대한 **linear** function 일 때
그 transformation 을
affine transformation 이라 한다.

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z + b_x \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z + b_y \\ z' &= a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z + b_z \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} & b_x \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} & b_y \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒ translation, rotation, reflection, scaling, shear : 앞서 본 모든 transformation 은 affine transformation 에 해당된다.

- (성질 1) collinearity: line 을 affine transformation 해도 line 이다.
- (성질 2) parallelism: 두 개의 평행한 line 이 있다면, 그 두 line 을 affine transformation 해도 여전히 평행하다.

- Rotation, Translation: rigid body transformation 에 해당
- Rotation, Reflection: Orthogonal matrix. $AA^\wedge T = I$.

  ⇒ Rotation, Reflection 의 역행렬을 구하고 싶으면 transpose 를 구하면 된다.

$AA^T = I$
$A^{-1} = A^T$

QUIZ) 3D Transformations

What is the 4×4 homogeneous matrix that rotates in 3D about the x-axis in 90 degrees?

하나를 선택하세요.

a.
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

답이 맞습니다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

정답 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rotate (1, 1, 1) using the result from question 1.

하나를 선택하세요.

a. (1, -1, -1)

b. (-1, -1, 1)

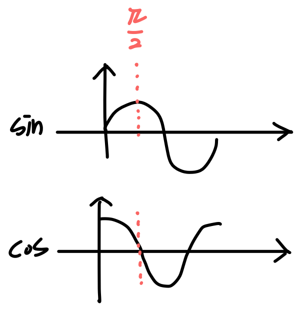
c. (1, -1, 1)

d. (1, 1, -1)

답이 맞습니다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

정답 : (1, -1, 1)



$\sin\frac{\pi}{2} = 1.\ \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (1, -1, 1)$

QUIZ) Quaternion and Affine Transformation

문제 1
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

What is the unit quaternion $\mathbf{q}$ that rotates around the x-axis in 90 degrees, and its conjugate?

하나를 선택하세요.

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

b. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

c. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

d. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ✔

답이 맞습니다.

정답 : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

회전축, 회전각 $\Rightarrow$ $\mathbf{q} = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{u_q}) = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\bar{\mathbf{u}}_\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$

x-axis $\Rightarrow$ $u_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \left(\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)(1i + 0j + 0k)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 켤레 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

문제 2
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Rotate the quaternion $\mathbf{p} = i + j + k$ (i.e. (1, 1, 1) in 3D Euclidean coordinate) using the result of question 1.

하나를 선택하세요.

a. $\mathbf{p}' = -i + j + k$

b. $\mathbf{p}' = i - j + k$ ✔

c. $\mathbf{p}' = i + j - k$

d. $\mathbf{p}' = i - j - k$

답이 맞습니다.

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(i+j+k)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \frac{1}{2}(i+2k-1)(1-i) = i - j + k$

정답 : $\mathbf{p}' = i - j + k$

주어진 점 $P = (1.1.1)$

$$\begin{aligned} qpq^* &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\ (1i + 1j + 1k)\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \\ &= \frac{1}{2}(i + j + k + i^2 + ij + ik)(1-i) \\ &= \frac{1}{2}(i + j + k - 1 + k - j)(1-i) \\ &= \frac{1}{2}(i + 2k - 1)(1-j) \\ &= i - j + k \end{aligned}$$

문제 3
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Convert the unit quaternion $\mathbf{q} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$ to a 3×3 rotational matrix.

하나를 선택하세요.

a.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. ✔
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

답이 맞습니다.

$w = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = z = 0$

정답 : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + 0k \end{aligned}$$

$\therefore w = y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = z = 0$ 위 식에 대입

문제 4
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Which of the following is not an affine transformation?

하나를 선택하세요.

a. Orthogonal matrix

b. Rigid body transformation

c. A linear function of input coordinates

d. Projective transformation ✔

답이 맞습니다.

Projective transformation generally does not preserve parallelism due to perspectivity.

정답 : Projective transformation