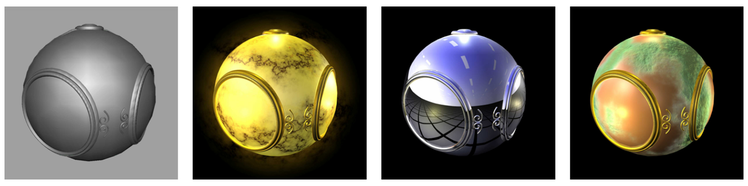
12. Texture Mapping

Three Types of Mapping

1. **Texture mapping**
   - **이미지(Texture)** 로 모델을 **뒤덮는(Mapping)** 방식
2. **Environmental (reflection mapping)**
   - Texel 에 **주변 환경**을 저장
   - **반사**가 심한 surface 를 render 한 것과 같은 효과를 낼 수 있음

> 💡 **Ray Tracing** 이나 **Global Illumination** 은 물리적으로 정확한 빛의 경로를 계산하지만,
> 연산량이 많아 실시간 그래픽에서 부담이 큼
> ⇒ **Environment Mapping** 은 카메라 위치와 반사 벡터를 기반으로 **이미 저장된 환경 텍스처**에서
> 샘플링만 수행하기 때문에 매우 효율적

> 💡 **Texel**: Texture element, 이미지의 픽셀 단위
> - 이미지 정보: RGB 와 같은 색상 정보
> - 3D 객체 표면의 시각적 외형 표현: 표면의 디테일, 색상, 질감



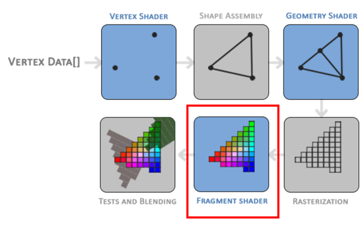
3. **Bump mapping (= Normal mapping)**
   - (보통의 경우) Texture image 에 저장된 RGB 값으로 mapping

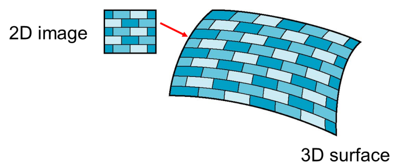
> 💡 (참고) 조명 계산을 위해 RGB 값을 Normal vector 로 매핑 해줘야 함
> (RGB 값은 보통 0~1, Normal vector 는 -1~1 범위를 가지기에 변환이 필요)
> 그럼 굳이 Normal vector 가 아니라 RGB 로 저장하는 이유?
> ⇒ 대부분의 그래픽 시스템은 RGB 이미지를 다루는 데 최적화 되어 있어서

   - 각 Texel 에 RGB 가 아닌, 샘플링한 **Normal vector (x, y, z)** 를 저장
   - Surface 의 원래 Normal 이 아닌, **Texel 에 저장된 Normal 로 render**
   - Surface 를 변형하는 게 아닌, **Texel 에 저장된 Normal 정보를 활용해**
     Local illumination 을 새롭게 계산하여 **울퉁불퉁**한 느낌을 표현

Texture mapping

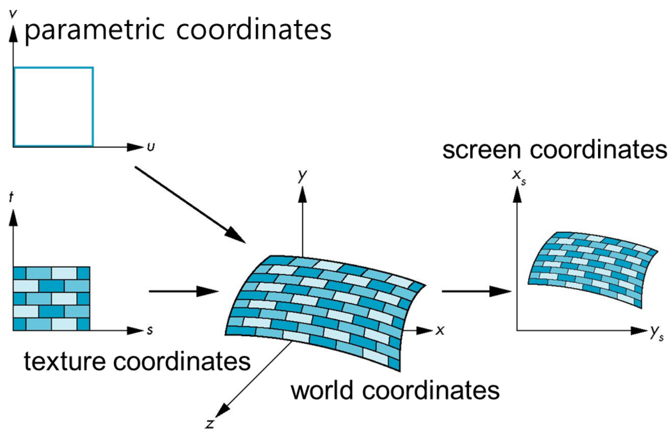
- Texture mapping: **Fragment shader** 에서 진행
  - Phong Illumination Model 을 사용하지 않고, 텍스처 이미지(Texel) 에서 값을 읽어서 해당 Pixel 의 색상을 할당
- (일반적 개념) Target 3D surface 를 2D image 로 덮는다.
  → idea 는 간단하지만, 좌표계 여러 개가 등장해서 복잡





Coordinate Systems

- **Paramertric coordinates**
  - 3D 모델의 surface 를 2D로 펼쳤을 때의 좌표계
  - Surface 를 정의하기 위해 사용하는 좌표계
  - (u, v)
- **Texture coordinates**
  - Texture 가 정의된 좌표계
  - (s, t): Texel
- **World coordinates**
  - 3D 공간에서 실제 객체가 위치한 전역 좌표계
  - 개념적으로 mapping 이 일어나는 곳
- **Screen coordinates**
  - 최종적으로 화면에 표시되는 2D 좌표계
  - 실제로 mapping 이 일어나는 곳 (Fragment shader 에서)



Mapping

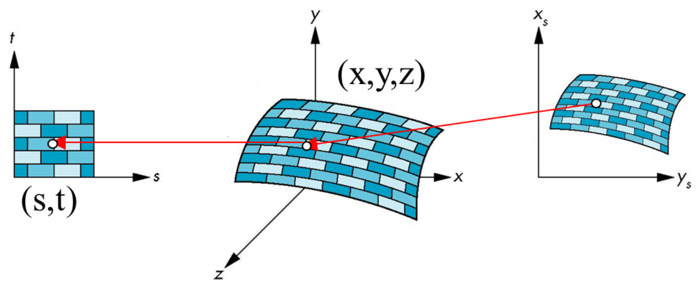
Mapping Function

- Texture coordinate 위의 Texel (s, t) 을 World coordinate 상의 (x, y, z) 로 mapping 하는 function
- (x, y, z) 에 해당하는 (s, t) 를 찾아 저장되어 있는 texel 의 값을 가져옴

> 💡 Mapping function 이 필요한 이유: Surface는 3D 공간에서 정의되고, Texture는 2D 이미지로 별개로 정의되기 때문에, 어떻게 매핑될지 명시적으로 정의해줘야 함.

Backward Mapping 의 두 단계

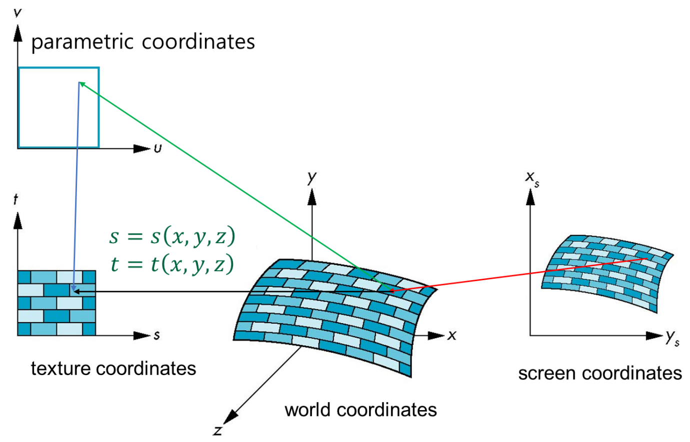
1. Screen coordinate 상의 점 (x_s, y_s) 이 World coordinate 상의 어느 점 (x, y, z) 에서 왔는지 구하기
2. World coordinate 상의 점 (x, y, z) 이 Texture coordinate 상의 어느 점 (s, t) 에서 왔는지 구하기
   - **s = s(x, y, z), t = t(x, y, z)**



> 💡 (비교적 간단한 문제) Screen coordinate → World coordinate
> - Rasterization 을 하며 어떤 점으로 대응되는지 알고 있기 때문
>
> (어려운 문제) World coordinate → Texture coordinate
> - 직접 변환이 어려워서 **중간 단계 (Parametric coordinates) 를 거침**

실제 Texture Mapping 과정

1. (x, y, z) 와 대응되는 (s, t) 를 바로 찾지 않고, **Parametric coordinates 상의 점 (u, v) 로 mapping**
   - Parametric coordinates: Surface 를 정의하기 위해 사용하는 좌표계
   - **Parametric coordinates 상의 점 (u, v) 이** World coordinates 상의 점 (x, y, z) 으로 대응됨
2. Parametric coordinates 상의 점 (u, v) 에서 Texture coordinates 상의 점 (s, t) 로 mapping



> 💡 (중요한 부분) World coordinates → Parametric coordinates
>
> (간단) Parametric coordinates → Texture coordinates
> - 둘 다 2차원
> - Domain 이 직사각형

Example – Striped Quarter Cylinder

> 💡 (Example 1) ¼ Cylinder surface 가 있을 때, 이 실린더에 Stripped pattern 사각형 이미지를 덮는다고 해보자

1. **¼ 실린더의 Parametric coordinate** (u, v) **정의**

- 매개변수 (u, v) 형태의 함수를 찾음
- 단면: 반지름이 r 인 ¼ 원

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u, \qquad z = v$$

$$0 \le u \le \pi/2, \qquad 0 \le v \le 1$$

실린더 시작점 ~ ¼ 만큼 돌아간 점　　실린더 밑면 ~ 윗면
(실린더를 수평으로 감싸는 과정) (실린더를 세로로 덮는 과정)

2. **Texture coordinate** (s, t) **정의**

- 정사각형 Domain 을 정의

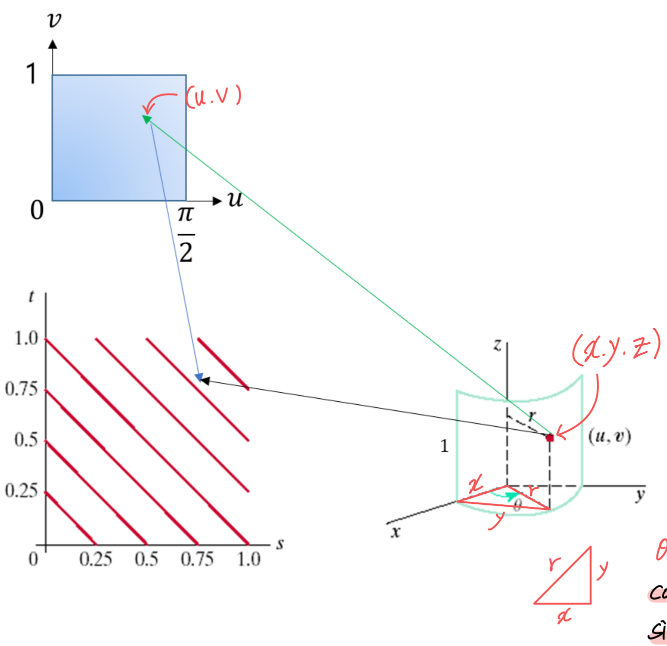
$$0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1$$

3. **World coordinates** (x, y, z) **→ Parametric coordinates** (u, v) **변환**

- (x, y, z) → (u, v)
- 역함수 사용

(x.y.z) → (u.v)

$$\boxed{u = \tan^{-1}(y/x), \qquad v = z}$$



θ → u : parametric 좌표 u를 각으로 변환

$\cos(u) = \frac{x}{r}$

$\sin(u) = \frac{y}{r}$

$\tan(u) = \frac{y}{x}$

4. **Parametric coordinates** (u, v) **→ Texture coordinates** (s, t) **변환**

- u 와 s 의 관계:
  - 0 ≤ u ≤ π/2, 0 ≤ s ≤ 1
  - 변환 식:
    - s → u 방향: u = sπ/2　$(\times\frac{\pi}{2})$
    - u → s 방향: s = 2u/π　$(\times\frac{2}{\pi})$

  ⇒ u 가 0일 때 s = 0, u 가 π/2일 때 s = 1

  즉, **[0, π/2] 범위를 [0, 1] 범위로 normalize**

$$u = s\pi/2, \qquad v = t$$

(u.v) → (s.t)

$$\boxed{s = 2u/\pi, \qquad t = v}$$

즉, $$\boxed{s = \frac{2\tan^{-1}(\frac{y}{x})}{\pi}, \qquad t = z}$$

(x.y.z) → (s, t)
s = s(x.y.z)
t = t(x.y.z)　texture space로 Mapping

- v 와 t 의 관계:
  - 0 ≤ v ≤ 1, 0 ≤ t ≤ 1
  - 변환 식:
    - t → v 방향: v = t
    - v → t 방향: t = v

  ⇒ v 가 0일 때 t = 0, v 가 1일 때 t = 1

  추가적인 normalize 없이 v = t 로 직접 대응

Example – Cylindrical Mapping

💡 (Example 2) Cylinder 전체 surface 가 있을 때, 이 실린더에 Texture mapping 을 한다고 해보자

1. **Cylinder 의 Parametric coordinate (u, v) 정의, Texture coordinate (s, t) 정의**

- (u, v) 를 (s, t) 와 1:1 대응이 되도록 동일하게 0~1로 정의
    - (u, v) (s, t) 를 Scaling 할 필요 없음
- (x, y): 원, z: 높이 h

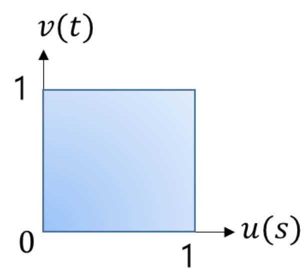
실린더 시작점 ~ 한 바퀴돌아온점

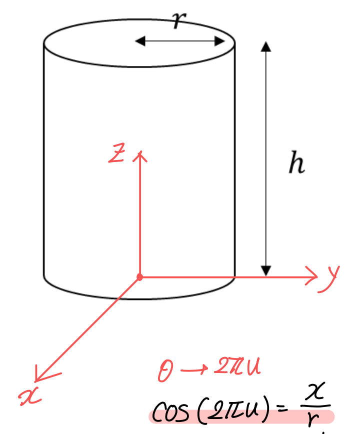
$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$$

실린더 밑면 ~ 윗면

$$x = r\cos 2\pi u$$
$$y = r\sin 2\pi u$$
$$z = vh$$

$$0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1$$





$\theta \rightarrow 2\pi u$

$\cos(2\pi u) = \frac{x}{r}$

$\sin(2\pi u) = \frac{y}{r}$

$v = \frac{z}{h}$

$\tan(2\pi u) = \frac{y}{x}$

2. **World → Parametric, Parametric → Texture 변환**

$$\boxed{u = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{h}} \qquad \boxed{\begin{aligned} s &= u \\ t &= v \end{aligned}}$$

→ Texture space 로 mapping

$$\boxed{s(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}, \quad t(x,y,z) = \frac{z}{h}}$$

Example – Spherical Mapping

💡 (Example 3) 반지름이 r 인 구를 Texture mapping 을 한다고 해보자

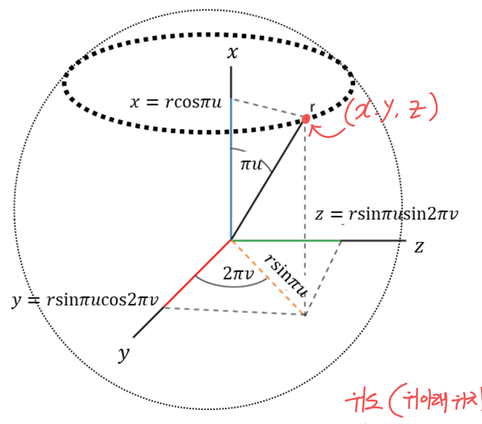
1. **Spherical 의 Parametric coordinate (u, v) 정의, Texture coordinate (s, t) 정의**

- (u, v) 를 (s, t) 와 1:1 대응이 되도록 동일하게 0~1로 정의
- 구의 단면 반지름은 자르는 위치에 따라 다름

$$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$$

북극 ~ 남극　경도 시작점 ~ 한 바퀴돌아온점

$$x = r\cos \pi u$$
$$y = r\sin \pi u \cos 2\pi v$$
$$z = r\sin \pi u \sin 2\pi v$$



위도 (위아래 위치) → πu

경도 (수평회전) → $2\pi v$

$\tan(2\pi v) = \frac{z}{y}$

2. **World → Parametric, Parametric → Texture 변환**

$\pi u = \cos^{-1}(\frac{x}{r})$

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$

$$\boxed{\begin{aligned} u = s &= \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{r} \\ v = t &= \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{z}{y} \end{aligned}}$$

General Solution + Second Mapping

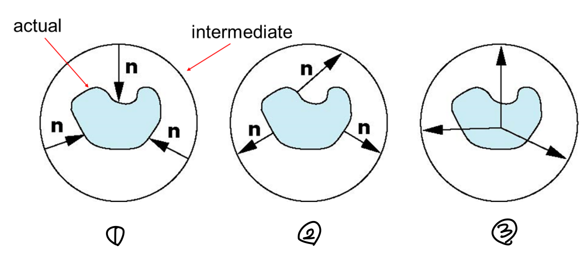
💡
- 복잡한 Target surface 를 상대적으로 Texture mapping 이 쉬운 간단한 Intermediate surface 에 1차 Mapping
- Intermediate object 에서 Actual object 로 2차 Mapping
- **Intermediate object: Sphere, Cylinder** 등 Mapping 이 간단한 object

Second Mapping

💡 Intermediate, Actual object 간의 적절한 Mapping function 을 찾아 할당하는 방식

1. Intermediate 의 수직 방향으로 Ray 를 쏘고 Actual 과 만나는 점에 Mapping
2. Actual 의 수직 방향으로 Ray 를 쏘고 Intermediate 와 만나는 점과 Mapping
3. 구의 중심으로부터 일정한 간격과 방향으로 Ray 를 쏘면 2군데 이상에서 만남
    - Intermediate 상의 Texture color 를 Actual 에 Mapping

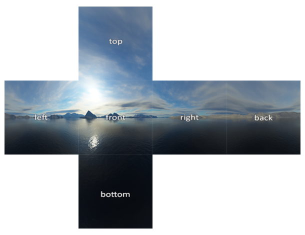
- 작동은 하나 완벽하지는 않음

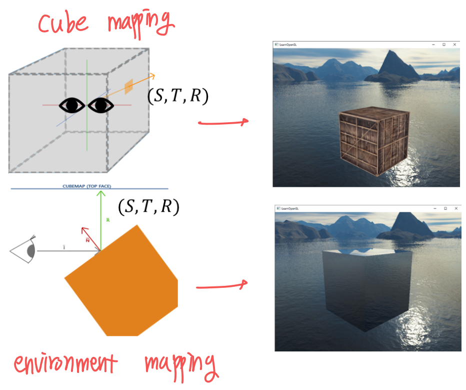


Cube Mapping (Skybox)

- 배경 이미지를 준비해서 정육면체에 Mapping
- 실제 Viewpoint 는 정육면체 안에 존재
  - 주변을 보면 거대한 공간 안에 있는 듯한 효과
- 일반적인 2D Texture coordinate (s, t) 대신, **3D 방향 벡터 (S, T, R)** 사용
  - 큐브 중심에서 각 면을 향하는 방향 벡터로 Mapping
- Environmental map 에 사용 가능

> 💡 Skybox 와 Environmental mapping 차이점
> - Skybox: 사용자가 보는 방향 (S, T, R) 으로 Mapping
> - Environmental mapping: 물체 표면에서 반사된 방향 (S, T, R) 으로 Mapping
>   ⇒ 금속이나 거울 같은 반사 효과 구현 가능

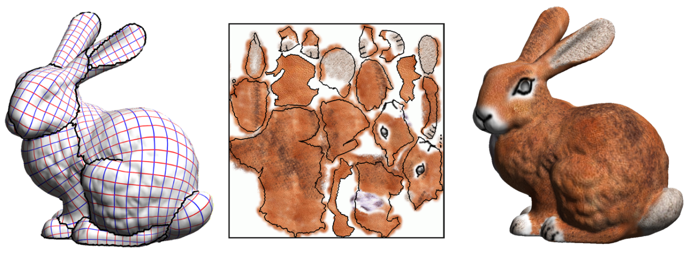




Mesh Parameterization + Chart/Atlas

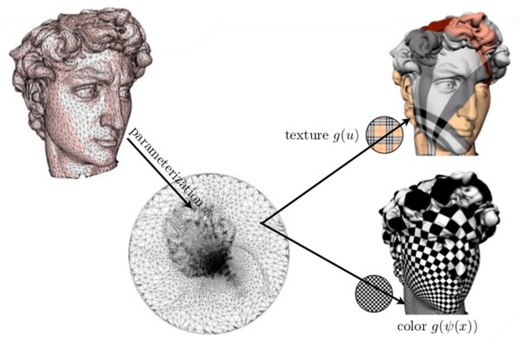
> 💡 Parameterization: 3D Surface 를 2D 평면으로 펼치는 과정
> - 복잡한 3D Mesh 의 경우 직접적인 parameterization 이 어려움
> - 한 번에 전체 Surface 를 2D 로 펼치면 왜곡이 심해질 수 있음

- Chart 와 Atlas 접근법
  - **Chart**: 3D Surface 를 여러 개의 **작은 Domain (Chart)** 으로 분할
  - **Atlas: 여러 Chart** 들을 2D Texture 공간에 배치한 전체 집합 → 큰 Domain

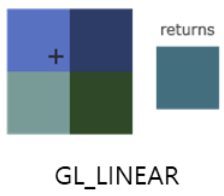


Multiple Charts = Atlas

> 💡 ⇒ 복잡한 형태도 적은 왜곡으로 Mapping 가능



Texture Filtering



> 💡 바닥 Texture Mapping 할 때, 어떻게 Texture Filtering 할 것인지?

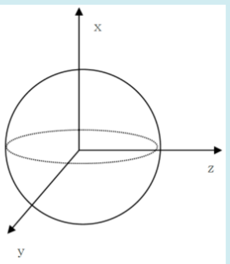
- Bilinear: 2번의 linear (주변 4개의 Texel을 사용)
- Trilinear: 두 개의 다른 mipmap 레벨에서 각각 bilinear filtering 을 수행한 후, 이 두 결과 사이에서 다시 한 번 linear
- 4x Anisotropic: 최대 4개의 추가 샘플링
- 16x Anisotropic: 최대 16개의 추가 샘플링

Quiz - Texture Mapping

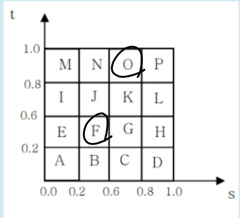
Consider the following parametric representation of a sphere:

$$\begin{cases} x(u,v) = r\cos \pi u \\ y(u,v) = r\sin \pi u \cos 2\pi v \\ z(u,v) = r\sin \pi u \sin 2\pi v \end{cases}$$

$0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1$



We want to texture-map the following image where A~P represent different texels. For instance, the color of (s, t)=(0.3, 0.3) is F, and that of (s,t)=(0.7,0.9) is O.



Texture Coordinate

문제 **1**
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Find a proper relationship between (u,v) and (s,t)?

하나를 선택하세요.

- a. $u = \pi s, v = t$
- b. $u = s, v = \pi t$
- c. $u = \pi s, v = \pi t$
- d. u=s, v=t ✔

정답 : u=s, v=t

$0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1$

$0 \le s \le 1, \quad 0 \le t \le 1$

1:1 대응이니까 u=s, v=t

문제 **2**
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Find u from (x, y, z).

하나를 선택하세요.

- a. $u = \frac{1}{2\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$
- b. $u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(x)$
- c. $u = \cos^{-1}(\frac{x}{r})$
- d. $u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$ ✔

정답 : $u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$

$(x.y.z) \to (u.v)$ 역함수 이용

$x = r\cos(\pi u)$

$\frac{x}{r} = \cos(\pi u)$

$\pi u = \cos^{-1}(\frac{x}{r})$

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$

문제 **3**
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

Find v from (x, y, z).

하나를 선택하세요.

- a. $v = \tan^{-1}(\frac{z}{y})$
- b. $v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{z}{y})$ ✔
- c. $v = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\frac{y}{z})$
- d. $v = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(\frac{z}{y})$

정답 : $v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{z}{y})$

$\frac{z}{y} = \frac{r\sin(\pi u)\sin(2\pi v)}{r\sin(\pi u)\cos(2\pi v)}$

$= \tan(2\pi v)$

$2\pi v = \tan^{-1}(\frac{z}{y})$

$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{z}{y})$

문제 **4**
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

What is the texel color texture-mapped from a point (0, -r, 0) on the sphere?

하나를 선택하세요.

- a. F ✔
- b. G
- c. K
- d. J

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1} 0, 0 \le u \le 1$
$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}$
$u = \frac{1}{2} (\because 0 \le u \le 1)$
$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1} 0, 0 \le v \le 1$
$\tan^{-1} 0 = 0$ or π
$v = 0$ or $\frac{1}{2}$, but $y(\frac{1}{2}, 0) = r, y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -r$
$\therefore v = \frac{1}{2}$

Therefore, $(u,v) = (s,t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. The textured color = F.

정답 : F

문제 **5**
정답
총 1.00 점에서 1.00 점 할당
문제 표시

What is the texel color texture-mapped from a point $(\frac{\sqrt{2}}{2}r, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}r)$ on the sphere?

하나를 선택하세요.

- a. G
- b. F
- c. J ✔
- d. K

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}), u = \frac{1}{4} (\because 0 \le u \le 1)$
$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\infty, v = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$
But $v = \frac{3}{4} (\because z(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}r, z(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}r)$
$\therefore (u,v) = (s,t) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

The color = J.

정답 : J

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{x}{r})$

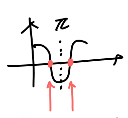
$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{z}{y})$

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{0}{r}), \quad 0 \le u \le 1$

$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3}{2}\pi$

$\therefore u = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

$u = \frac{1}{\pi} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}$



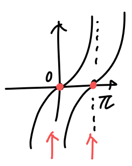
y가 0인 x 값이 $\cos^{-1}(0)$

$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{0}{-r}), \quad 0 \le v \le 1$

$\tan^{-1}(0) = 0$ or π

$\therefore v = \frac{1}{2\pi} \times 0 = 0$

$v = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$



y가 0인 x값이 $\tan^{-1}(0)$

$y(u.v) = r\sin(\pi u)\cos(2\pi v)$

1. $r \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(2\pi \cdot 0) = r \cdot 1 \cdot 1 = r$
2. $r \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(2\pi \cdot \frac{1}{2}) = r \cdot 1 \cdot -1 = -r$ → 따라서 $\frac{1}{2}$

$\therefore v = \frac{1}{2}$

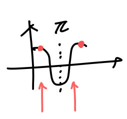
$(u.v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (s,t)과 1:1 대응이니까 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에 있는 F

$u = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{r}), \quad 0 \le u \le 1$

$\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ or $\frac{7}{4}\pi$

$\therefore u = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$

$u = \frac{1}{\pi} \times \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}$



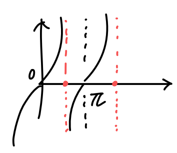
y가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 x 값이 $\cos^{-1}(0)$

$v = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}r}{0}), \quad 0 \le v \le 1$

$\tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ or $\frac{3}{2}\pi$

$\therefore v = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$

$v = \frac{1}{2\pi} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}$



y가 ∞인 x값이 $\tan^{-1}(\infty)$

$z(u.v) = r\sin(\pi u)\sin(2\pi v)$

1. $r \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}r$
2. $r \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{3}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}r$ → 따라서 $\frac{3}{4}$

$\therefore v = \frac{3}{4}$

$(u.v) = (s.t) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 에 있는 J