第二节 参数假设检验

双边

一、单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

$H_0: \mu = \mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu \neq \mu_0$ （μ_0为已知常数）

1. σ^2已知：$\sigma^2 = \sigma_0^2$（σ_0^2为已知常数）

2. σ^2未知

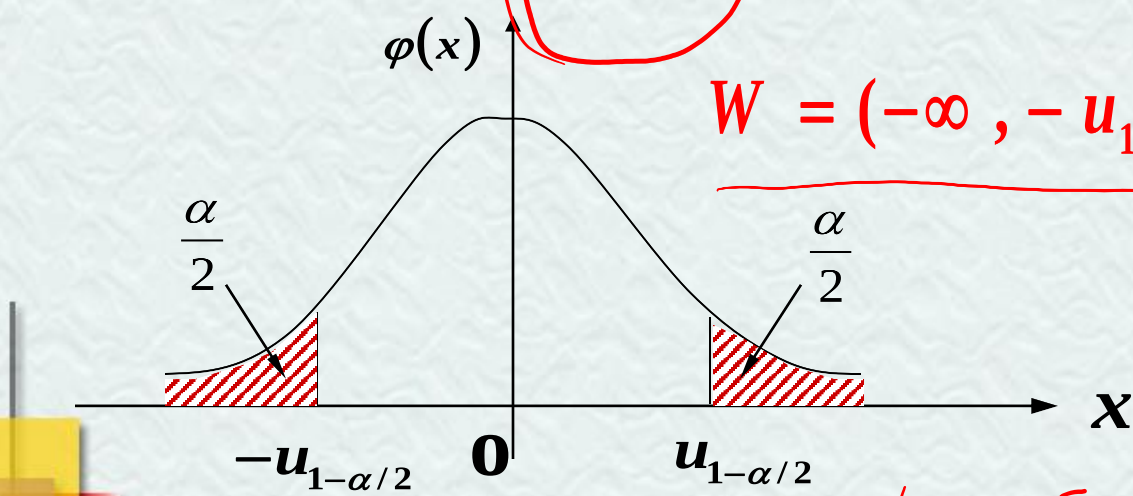
1. $\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知

步骤：(1)、提出假设 $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

(2)、H_0成立时，选用检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(3)、对于给定的显著性水平 α，由 $P\{|U|\geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$ 查表确定临界值 $u_{1-\alpha/2}$，由此得到拒绝域W；

$W=(-\infty,-u_{1-\alpha/2}]\cup[u_{1-\alpha/2},+\infty)$



$(-\infty,-0.975]\cup[\quad)$

$\alpha=0.05$

(4)、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出 U 的值u，

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}},$$

若 $u \in W$，则拒绝 H_0，即认为总体的均值μ与μ_0之间有显著差异；

若$u \notin W$，则接受H_0，即认为总体的均值μ与μ_0之间无显著差异；

上述检验方法称为**U检验法或Z检验法**。

μ σ^2 已知.

例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

设

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,

① 要检验假设 $H_0: \mu = 10.5 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 10.5$,

$C=(-\infty,-1.96]\cup[1.96,+\infty)$

② 选取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{成立}}{\sim} N(0,1)$ 从而拒绝域为

由 $\alpha=0.05$ 知

③ 由 $P\{|U|\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha=0.05$ 查表得 $u_{0.975}=1.96$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.975}=1.96$

④ $n=15,\quad \bar{x}=10.48,\quad \alpha=0.05,$

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{15}}\approx-0.516\in(-1.96\ ,\ 1.96)$$

$\notin C$

故接受 H_0, 认为该机工作正常.

2. σ^2未知

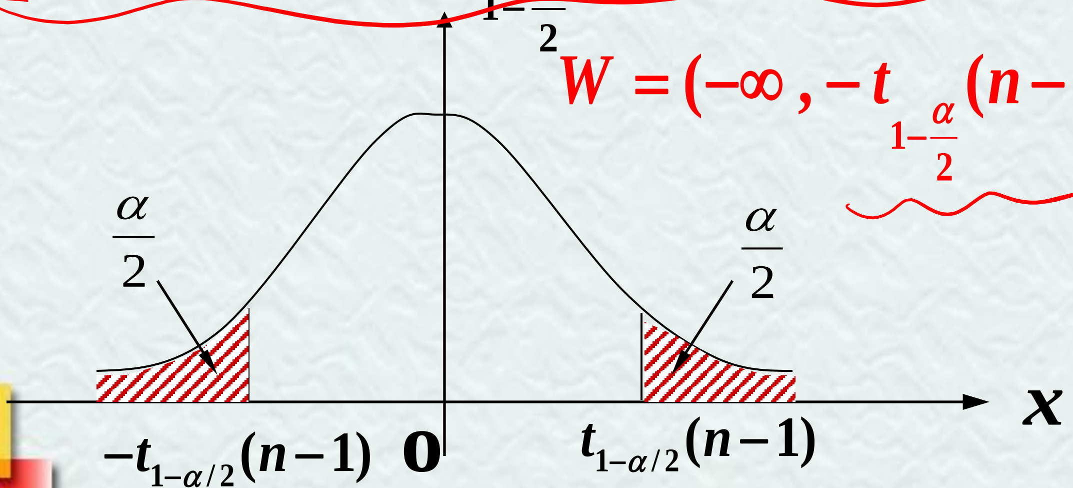
步骤 (1)、提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

(2)、H_0成立时，选用检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S_n^* / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(3)、对于给定的显著性水平 α，由 $P\{|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

查表确定临界值 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，由此得到拒绝域W；

$$W = (-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$



(4)、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出 T 的值 t。

若 $t \in W$ ，则拒绝H_0，即认为总体的均值 μ 与 μ_0 之间有显著差异；

若 $t \bar{\in} W$ ，则接受H_0，即认为总体的均值μ 与 μ_0 之间无显著差异；

上述检验方法称为**T检验法**。

μ

例2 如果在例1中只假定切割的长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

②

解 依题意 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

① 要检验假设 $H_0: \mu = 10.5 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s_n^* = 0.237$,

查表得 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{1-0.025}(14) = 2.1448$ C=( )

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_n^* / \sqrt{n}} = \frac{10.48 - 10.5}{0.237 / \sqrt{15}} \approx -0.327 \in (-2.1448\ ,\ 2.1448)$$

故接受 H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

二、单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$方差σ^2 的检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

1. μ已知

2. μ未知

1. μ已知，对σ^2的检验

μ未知

步骤：(1)、提出假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

$\bar{X}$

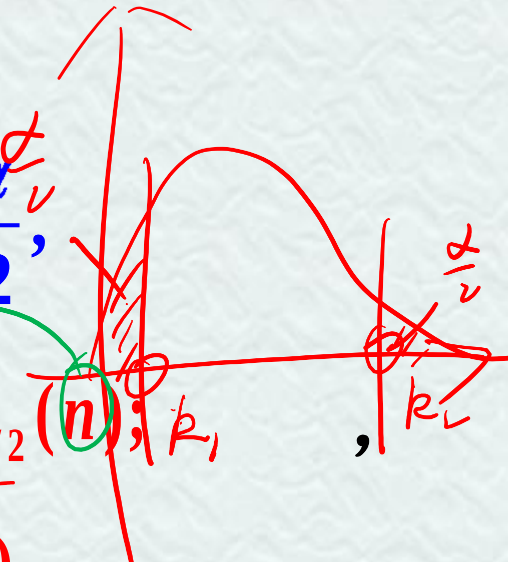
$\chi^2(n-1)$

(2)、H_0成立时，选用检验统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$,

(3)、对于给定的显著性水平α，由

$P\{\chi^2\le k_1\}=\dfrac{\alpha}{2}$, $\quad P\{\chi^2\ge k_2\}=\dfrac{\alpha}{2}$,

$n-1$



查表确定临界值 $k_1=\chi^2_{\alpha/2}(n)$, $k_2=\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$,

由此得到拒绝域 $W=(0,k_1]\cup[k_2,+\infty)$.

(4)、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出χ^2的值。

若$\chi^2 \in W$，则拒绝H_0，即认为总体的方差σ^2与σ_0^2之间有显著差异；

若$\chi^2 \notin W$，则接受H_0，即认为总体的均值σ^2与σ_0^2之间无显著差异；

上述检验方法称为χ^2检验法。

2. μ未知，对σ^2的检验

$\sum(\ )^2$

步骤：(1)、提出假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

(2)、H_0成立时，选用检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$,

(3)、对于给定的显著性水平α，由

$$P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}\leq k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\ P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}\geq k_2\right\}=\frac{\alpha}{2},$$

查表确定临界值 $k_1=\chi^2_{\alpha/2}(n-1),\ k_2=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1).$，

由此得到拒绝域 $W=(0,k_1]\cup[k_2,+\infty)$；

(4)、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出χ^2的值。

若$\chi^2 \in W$，则拒绝H_0，即认为总体的方差σ^2与σ_0^2之间有显著差异；

若$\chi^2 \notin W$，则接受H_0，即认为总体的均值σ^2与σ_0^2之间无显著差异；

上述检验方法称为χ^2检验法。

例3 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差$\sigma^2=5000$ (小时²) 的正态分布，现有一批这种电池，从它生产情况来看，寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s_n^{*2}=9200$(小时²). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化?

$(\alpha=0.02)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2=5000 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\sigma^2\neq 5000,$

$n=26, \quad \alpha=0.02, \quad \sigma_0^2=5000,$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{1-0.01}(25)=44.314,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=11.524,$$

拒绝域为: $(0,11.524]\cup[44.314,\infty)$.

因为 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2}=\dfrac{25\times 9200}{5000}=46 \quad > 44.314,$

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例4 某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? ($\alpha = 0.05$)

解 按题意要检验 $H_0: \sigma^2 = 20 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 \neq 20$,

$n = 9, \qquad \bar{x} = 287.89, \quad s_n^{*2} = 20.36,$

查表得 $\chi^2_{0.025}(8) = 2.18,\ \chi^2_{1-0.025}(8) = 17.535,$

于是 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2} = \dfrac{8\times 20.36}{20} = 8.14, \qquad 2.18 < 8.14 < 17.535,$

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

三、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

注意：以下提到的样本方差均指修正样本方差

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 的样本, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$的样本, 且设两样本独立.

又设 $\bar{X},\bar{Y}$ 分别是总体的样本均值, $S_1{}^2,S_2{}^2$是样本方差.

取显著性水平为α.

(一)、σ_1^2,σ_2^2已知,关于μ_1,μ_2的假设检验

1. $H_0: \mu_1-\mu_2=\delta \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu_1-\mu_2\neq\delta$ （δ为已知常数）

常用$\delta=0$的情况. $H_0: \mu_1=\mu_2 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu_1\neq\mu_2$

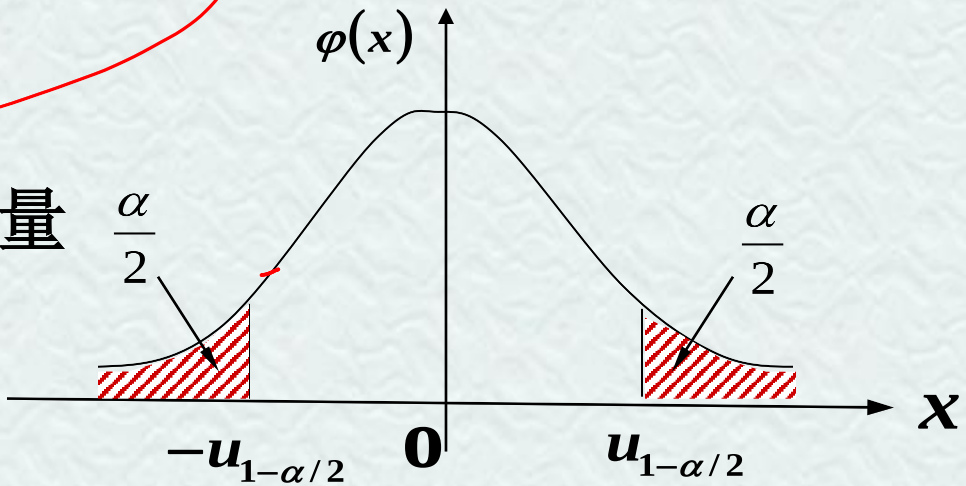
易知 $\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$, $\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ 且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立

$$\text{则 } \overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\boxed{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

所以 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ δ

2. 当 H_0 成立时, 选检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$



3. 由 $P\left\{|U|\geq\lambda\right\}=\alpha \Rightarrow \lambda=u_{1-\alpha/2}$, 得拒绝域: $|u|\geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

4. 计算 $u=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ 的值, 并判断是否落入否定域中.

$C=(-\infty,-u_{1-\frac{\alpha}{2}}]\cup[u_{1-\frac{\alpha}{2}},+\infty)$

例5：

假设 A 厂灯泡寿命 $X\sim N(\mu_1,95^2)$, B 厂灯泡 的寿命 $Y\sim N(\mu_2,120^2)$. 在两厂中各抽取了100只和75只样本, 测得灯泡的平均寿命相应为1180小时和1220小时,问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下, 这两个厂家灯泡的平均寿命有显著差异?

解: (1)提出假设 $H_0:\mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$

(2)构造的统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{95^2}{100}+\dfrac{120^2}{75}}}\sim N(0,1)$

$\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

在 H_0 成立的条件下

(3)查正态分布表得: $u_{1-\alpha/2}=1.96$

拒绝

故否定 H_0,即认为两厂灯泡的平均寿命有显著差异.

(4)计算 $|u|=\dfrac{|1180-1220|}{\sqrt{\dfrac{95^2}{100}+\dfrac{120^2}{75}}}=2.38>1.96$

（二）、$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，关于μ_1,μ_2的假设检验

1. $H_0: \mu_1-\mu_2=\delta \leftrightarrow H_1: \mu_1-\mu_2\neq\delta$（$\delta$为已知常数）

2. 引入 T 统计量作为检验统计量：

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}},\text{其中 } S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

当H_0为真时，$T\sim t(n_1+n_2-2)$.

$|u| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

3. 由 $P\{|T| \geq k\} = \alpha$, 得 $k = t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$.

故拒绝域为 $C = (\quad] \cup [\quad)$

$$|t| = \frac{|(\bar{x} - \bar{y}) - \delta|}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^{\,2} + (n_2 - 1)s_2^{\,2}}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2).$$

4. 根据样本观测值计算t的值, 并判断时候落入否定域中.

例6 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:*mm*)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 19.925, \quad s_1^2 = 0.216,$$

$$n_2 = 7, \quad \bar{y} = 20.000, \quad s_2^2 = 0.397,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(8-1)s_1^2 + (7-1)s_2^2}{8+7-2} = 0.547,$

查表可知 $t_{1-0.025}(13) = 2.1604,$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{7}}} = -0.265 \in (-2.1604, 2.1604)$$

所以接受 H_0,

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

(三)、两个正态总体方差的假设检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，

且设两样本独立，其样本方差为 S_1^2, S_2^2.

又设 $\boxed{\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{均为未知,}}$

1. 检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$,

2. 当H_0为真时，选取检验统计量

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,\ n_2-1).$$

3. 对于给定的显著性水平α，由

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}. \qquad P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

查表确定临界值

$$k_1 = F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}, k_2 = F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

由此得到拒绝域 $W = (0, k_1] \cup [k_2, +\infty)$.

例7 两台车床加工同一零件，分别取6件和9件测量直径，得：$s_x^2 = 0.345$, $s_y^2 = 0.357$. 假定零件直径服从正态分布，能否据此断定 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. $(\alpha = 0.1)$

解 本题为方差齐性检验：

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

$$F_{1-0.05}(5,\ 8) = 3.69, \quad F_{0.05}(5,\ 8) = \frac{1}{F_{1-0.05}(8,\ 5)} = \frac{1}{4.82} = 0.2075,$$

计算 $\displaystyle f = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0.345}{0.357} = 0.9644,$

$0.2075 < F < 3.69$, 故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

例8 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料, 测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下:

$$\overline{x}=3.097,\quad \overline{y}=3.179,\quad s_x^{\,2}=2.67,\quad s_y^{\,2}=1.21,$$

假定检索时间服从正态分布, 问这两系统检索资料有无明显差别? $(\alpha=0.02)$

解 根据题中条件, 首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0:\sigma_x^{\,2}=\sigma_y^{\,2},\quad H_1:\sigma_x^{\,2}\neq\sigma_y^{\,2}.$

$$F_{1-0.01}(9,\ 9)=5.35,\quad F_{0.01}(9,\ 9)=\frac{1}{5.35}=0.1869,$$

计算 $\mathrm{f}=\dfrac{s_x^{\,2}}{s_y^{\,2}}=\dfrac{2.67}{1.21}=2.12,$

$0.1869 < F = 2.12 < 5.35,$

故接受 H_0， 认为 $\sigma_x^{\ 2} = \sigma_y^{\ 2}.$

再验证 $\mu_x = \mu_y,$

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y, \quad H_1: \mu_x \neq \mu_y.$

取统计量 $\mathrm{T} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}},$

其中 $S_w^{\ 2} = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^{\ 2} + (n_2 - 1)S_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}.$

当H_0为真时， $T \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1=10,\quad n_2=10,\quad t_{1-0.01}(18)=2.5524,$

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{3.097-2.179}{\sqrt{\dfrac{10(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{10}}}$$

$=1.436<2.5524,$ 故接受 H_0,

认为两系统检索资料时间无明显差别.

作业： p376. 7.7，7.13，7.14，7.20

四、正态总体均值和方差的单边检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的样本,给定显著性水平α,

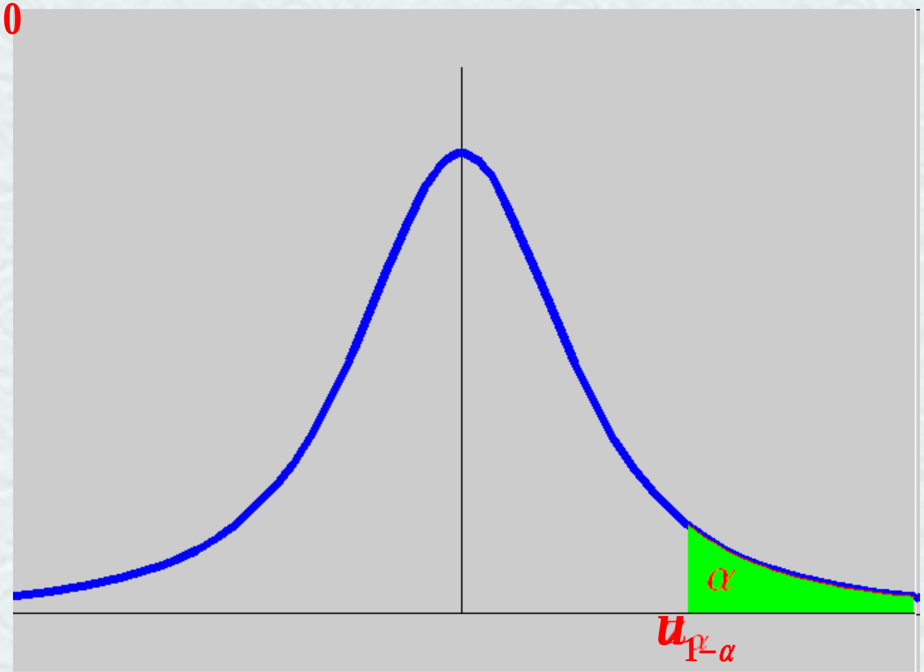
1. σ^2 为已知, 关于 μ 的单边检验

(1)右边检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (或$\mu \le \mu_0$), $H_1: \mu > \mu_0$,

H_0成立时,取检验统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

拒绝域的形式为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge k$, k 待定,

$$H_0: \mu = \mu_0 , H_1 : \mu \boxed{>} \mu_0$$



因为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq u_{1-\alpha}\right) = \alpha,$$

故右边检验的拒绝域为

$$u = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \boxed{\geq} u_{1-\alpha}$$ 即拒绝域为 $[u_{1-\alpha}, +\infty)$

(2)左边检验 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu < \mu_0,$

拒绝域的形式为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le k,$ k 待定,

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -u_{1-\alpha} \right) = \alpha,$$ 得 $k = -u_{1-\alpha},$

故左边检验的拒绝域为$(-\infty, -u_{1-\alpha}]$

即$u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -u_{1-\alpha}$时，拒绝$H_0$

例9 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 40\text{cm/s}$, $\sigma = 2\text{cm/s}$. 现用新方法生产了一批推进器, 随机取 $n = 25$只, 测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x} = 41.25\text{cm/s}$. 设在新方法下总体均方差仍为2cm/s, 问用新方法生产的推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高? 取显著水平 $\alpha = 0.05$.

解 根据题意需要检验假设

$H_0: \mu = \mu_0 = 40$ (即假设新方法没有提高燃烧率),

$H_1: \mu > \mu_0$ (即假设新方法提高了燃烧率),

这是右边检验问题，拒绝域为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > u_{1-0.05} = 1.645$.

因为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{41.25 - 40}{2 / \sqrt{25}} = 3.125 > 1.645$, u值落在拒绝域中,

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0.

即认为这批推进器的燃烧率较以往有显著提高.

2. σ^2 未知，关于 μ 的单边检验

(1)右边检验 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$,

H_0成立时，取检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

拒绝域为 $[t_{1-\alpha}(n-1), +\infty)$

即 $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \boxed{\geq} t_{1-\alpha}(n-1)$时，拒绝$H_0$

(2)左边检验 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$,

拒绝域为 $(-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$

即$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \le -t_{1-\alpha}(n-1)$时，拒绝$H_0$

例10 某种电子元件的寿命X(以小时计)服从正态分布, μ,σ^2均为未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)? $(\alpha=0.05)$

解 依题意需检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0=225 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\mu>225,$$

取 $\alpha=0.05,\quad n=16,\quad \bar{x}=241.5,\quad s=98.7259,$

查表得

$$t_{1-0.05}(15) = 1.7531$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{241.5 - 225}{98.7259 / \sqrt{16}} = 0.6685 < 1.7531$$

故接受 H_0, 认为元件的平均寿命不大于225小时.

在方差已知的条件下，对一个正态总体的均值或两个正态总体均值差的假设检验常用**U 检验法**.

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$　σ^2已知，

若X_1，X_2，…，X_n为取自总体X的样本

给定显著水平α检验以下不同形式的假设问题：

$H_{01}: \mu = \mu_0$　　$H_{11}: \mu \neq \mu_0$

$H_{02}: \mu = \mu_0$　　$H_{12}: \mu > \mu_0$

$H_{03}: \mu \leq \mu_0$　　$H_{13}: \mu > \mu_0$

前两个为简单假设检验问题，我们已求出其拒绝域分别为

$$|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{和}\ u > u_{1-\alpha}$$

其中 $$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (1)$$

下面我们来求H_{03}的拒绝域

H_{03}的拒绝域形式为 $\bar{x} - \mu_0 \geq k_1$

等价形式为 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k$ （k待定）

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

若H_{03}成立，则 $\mu_0 - \mu \geq 0$

$$P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k\right) \leq P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k\right)$$

要控制$P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq k\right)\leq\alpha$

只需令 $P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\geq k\right)=\alpha$

由此得$k=u_{1-\alpha}$

所以H_{03}的拒绝域为 $u\geq u_{1-\alpha}$ （2）

此处 $u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

比较两种假设检验问题：

$$H_{02}: \mu = \mu_0, \quad H_{12}: \mu > \mu_0$$

$$H_{03}: \mu \le \mu_0, \quad H_{13}: \mu > \mu_0$$

可以看出尽管两 者原假设形式不同，实际意义也不一样，但对于相同的显著水平α，它们的拒绝域是相同的。因此，遇到H_{03}与H_{13}的检验问题，可归结为H_{02}与H_{12}来讨论.

对于后面将要讨论的有关正态总体的方差假设检验问题也有类似结果.

3. μ未知，关于σ^2的单边检验

(1)右边检验:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$(或$\sigma^2 \le \sigma_0^2$) $\leftrightarrow$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$，

因为H_0中的全部σ^2都比H_1中的σ^2要小，

当H_1为真时，S^2的观察值s^2往往偏大，

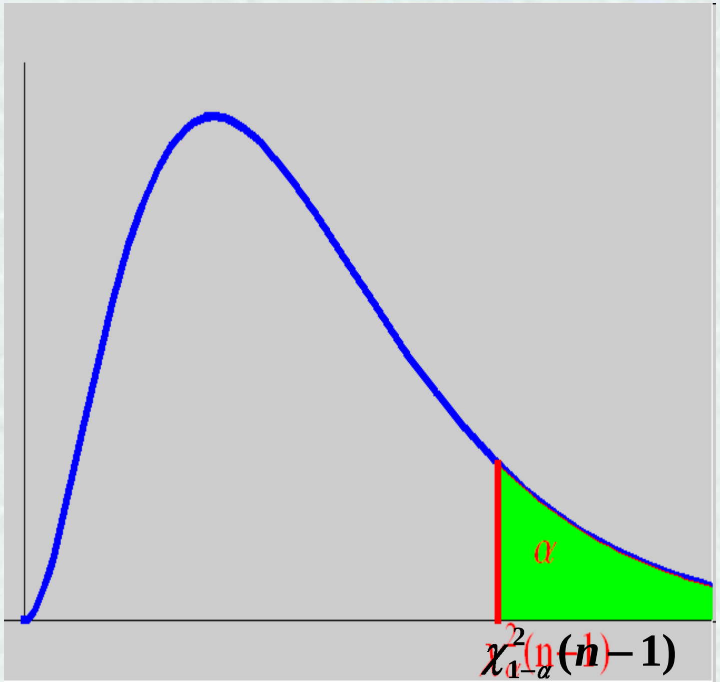
拒绝域的形式为: $s^2 \ge k$.

因为H_0成立时，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$，

根据$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = \alpha,$

右边检验问题的拒绝域为

$$\boxed{\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1).}$$



(2)左边检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^{\ 2} \quad \leftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^{\ 2},$

拒绝域为 $$\boxed{\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} \leq \chi^2_{\alpha}(n-1).}$$

例11 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布，按规定产品尺寸的方差 σ^2 不得超过0.1，为检验该自动车床的工作精度，随机的取25件产品，测得样本方差 $s^2=0.1975$，$\overline{x}=3.86$. 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度？ $(\alpha=0.05)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.1,\quad H_1:\sigma^2>0.1,$

$n=25,\qquad \chi^2_{1-0.05}(24)=36.415,$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{24\times 0.1975}{0.1}=47.4>36.415,$

所以拒绝 H_0，

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

例12 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同.先采用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了10炉, 其得率分别为(1)标准方法: 78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4, 78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3; (2)新方法: 79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0, 78.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1; 设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知, 问建议的新操作方法能否提高得率?(取$\alpha=0.05$)

解 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0,\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0.$

分别求出标准方法和新方法下的样本均值和样本方差:

$$n_1 = 10, \quad \bar{x} = 76.23, \quad s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{y} = 79.43, \quad s_2^2 = 2.225,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775,$

查表可知 $t_{1-0.05}(18) = 1.7341,$

拒绝域为 $t \le -t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$. （书表7. 2）

因为 $t = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}} = -4.295,$

$< -t_{1-0.05}(18) = -1.7341,$

所以拒绝 H_0,

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优.

至于在两个假设中用哪一个作为原假设,哪一个作为备择假设, 要看具体的目的和要求而定.

◆ 假如我们的目的是希望能够从样本观测值得到对某一陈述强有力的支持,那么我们把这一陈述的否定作为原假设,而把陈述本身作为备择假设.因为我们用一个子样无法去证实一个陈述,但用一个子样去否定一个陈述的理由就比较充分.

◆ 有时，原假设的选定还要考虑到数学上的处理方便.

补：大样本下的 U 检验

● **首先解除“正态性”约束**。由中心极限定理知，无论总体是正态或非正态，只要其均值 μ 和方差 σ^2 存在，其样本均值 $\bar{x}$ 在大样本场合近似于正态分布，即

$$\bar{x} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad 或 \quad u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0, 1)$$

在总体方差 σ^2 已知下，可用统计量 u 对原假设 H_0：$\mu=\mu_0$ 作出检验。所以 u 检验在大样本场合可对任意总体均值 μ 作出检验。

● **其次还可解除对“已知 σ”限制**。因为在大样本场合，样本方差 s^2 是总体方差 σ^2 的相合估计，故在 σ 未知下，用 s 代替 σ 后对渐近分布没有多大影响，实际上，在大样本场合（$n>30$），$t(n-1)$ 分布与标准正态分布已很接近，故在 σ 未知下，$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0, 1)$，故 u 检验仍可使用。

从上述两点可知：u 检验还是一个大样本检验，无论 σ 已知或未知都可使用。不要小看 u 检验，还可派大用场。

补：基于成对数据的检验（ t 检验 ）

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例 有两台光谱仪 I_x, I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d = x - y(\%)$	0.10	0.09	−0.12	0.18	−0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha = 0.01)$

解 本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 同一对中两个数据的差异可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$,

若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布$N(\mu_d, \sigma^2)$.

这里 μ_d, σ^2均为未知.

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 样本方差 s^2,

按单个正态分布均值的 t 检验, 知拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9$, $t_{1-\alpha/2}(8) = t_{0.995}(8) = 3.3554$, $\bar{d} = 0.06$,

$s = 0.1227$, 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554$, 所以接受 H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

五、 参数假设检验与区间估计的关系

参数假设检验的关键是使得当H_0成立时，构造一个小概率事件，一旦抽样结果使小概率事件发生，就拒绝原假设H_0。

参数的区间估计则是找一个随机区间I，使I包含待估参数 θ是个大概率事件.

对此两类问题，都是利用样本对参数作判断：一个是由小概率事件否定参数θ 属于某范围，另一个则是依大概率事件确信某区域包含参数θ 的真值.

如设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ σ已知，给定容量n的样本

样本均值为$\overline{x}$,则参数μ的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

对假设检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0,$

当$\dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$时， 接受$H_0: \mu = \mu_0,$

也就是说，当 $\mu_0 \in \left(\overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$ 时接受$H_0: \mu = \mu_0$

此区间正是μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

		枢轴量	临界值	置信区间
μ	σ^2已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$P\left\{\lvert U\rvert<u_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$.
	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$P\left\{\lvert T\rvert<t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$.
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$P\left\{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}$ $=1-\alpha$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$.
	μ已知	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$	$P\left\{\chi^2_{\alpha/2}(n)<\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right\}$ $=1-\alpha$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$.

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert u\rvert\geq u_{1-\alpha/2}$
2	$\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert t\rvert\geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$
3	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2\leq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
4	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ已知)	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$或 $\chi^2\leq\chi^2_{\alpha/2}(n)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$u\ge u_{1-\alpha}$ $u\le -u_{1-\alpha}$ $\lvert u\rvert\ge u_{1-\alpha/2}$
2	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知)	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$t\ge t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$ $t\le -t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\ge t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
3	$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$	$F\ge F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\le F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F\le F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

典型例题

例1 设某次考试的考生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取36位考生的成绩, 算得平均成绩为66.5分, 标准差为15分, 问在显著性水平0.05下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分? 并给出检验过程.

解 设该次考试的学生成绩为 X, $\alpha = 0.05$,

则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本标准差为 S,

需检验假设: $H_0 : \mu = 70$, $H_1 : \mu \neq 70$.

因为σ^2未知，故采用t检验法，当H_0为真时，

统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

拒绝域为 $|t|\geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$,

由 $n=36$, $\bar{x}=66.5$, $s=15$, $t_{1\text{-}0.025}(35)=2.0301$,

得 $t=\dfrac{\bar{x}-70}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4\in(-2.0301,\ 2.0301)$

所以接受H_0，认为全体考生的平均成绩是70分.

例2　根据长期的经验，某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$(单位：kg).已知 $\sigma = 8$ kg，现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取10个样品，测得样本均值 $\bar{x} = 575.2$ kg.问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是570kg？（$\alpha = 5\%$）

例3　某炼铁厂的铁水含碳量 X 在正常情况下服从正态分布。现对操作工艺进行了某些改进，从中抽取 5 炉铁水测得其含碳量如下：

4.420,　4.052,　4.357,　4.287,　4.683.

据此是否可以认为新工艺炼出来的铁水含碳量的方差为 $0.108^2\left(\alpha = 0.05\right)$?

例4 某砖厂制成两批机制红砖,抽样检查测量砖的抗折强度(千克),得到结果如下:

第一批: $n_1 = 10,\ \ \bar{x} = 27.3,\ \ S_1 = 6.4;$

第二批: $n_2 = 8,\ \ \bar{y} = 30.5,\ \ S_2 = 3.8;$

已知砖的抗折强度服从正态分布,试检验:

(1)两批红砖的抗折强度的方差是否有显著差异?

(2)两批红砖的抗折强度的数学期望是否有显著差异? (均取$\alpha = 0.05$)

解 (1) 检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

用 F 检验法， 当 H_0 为真时,

统计量 $F = \dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1)$,

拒绝域为

$F \geq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1,\ n_2 - 1)$ 或 $F \leq F_{\alpha/2}(n_1 - 1,\ n_2 - 1)$,

由 $n_1 = 10, n_2 = 8, S_1^2 = 40.96, S_2^2 = 14.44$,

$F_{0.975}(9,7) = 4.82$, $F_{0.025}(9,7) = \dfrac{1}{F_{0.975}(7,9)} = \dfrac{1}{4.2} = 0.283$,

得 $F=\dfrac{40.96}{14.44}=2.837$, 显然 $0.283<2.837<4.82$,

所以接受 H_0, 认为抗折强度的方差没有显著差异.

(2) 检验假设: $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$,

用 t 检验法, 当 H_0 为真时,

统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

拒绝域为 $|t| \geq t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$.

由 $t_{1-0.025}(10+8-2) = t_{1-0.025}(16) = 2.1199$,

$$s_w^2 = \frac{9\times 40.96 + 7\times 14.44}{16} = 29.3575, \quad s_w = 5.418,$$

得 $|t| = \dfrac{|\overline{x}-\overline{y}|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{|27.3-30.5|}{5.418\times 0.474} = 1.245 < 2.1199$,

所以接受 H_0, 认为抗折强度的期望无显著差异.

作业： p376．7.8，7.10，7.11*，7.12