第六章 点估计
§6.5 拉奥-勃拉克维尔(Rao-Blackwell)定理和一致最小方差无偏估计

程东亚
dycheng@suda.edu.cn
苏州大学数学科学学院

May 9, 2024

有效估计平均说来是比较接近参数真值θ 的一个估计，但并不是每个参数都能有有效估计.

【两个问题：】

1、如果知道一个无偏估计, 能否构造一个新的无偏估计,其方差比原来估计的方差小;

2、一个无偏估计虽不是有效估计, 但是可考察它的方差在一切无偏估计类中能够达到最小的条件.

定理6. 5(拉奥- 勃拉克维尔定理)

设ξ 与η 是两个随机变量，且$E\eta = \mu, D\eta > 0$.

设$\boxed{E[\eta \mid \xi = x] = \varphi(x)}$，则

$$E[\varphi(\xi)] = \mu, D[\varphi(\xi)] \leqslant D\eta$$

η

$$\boxed{\varphi(\xi)} = E(\eta|\xi) \quad r.v.$$

定理6. 6

设总体概率函数是$f(x;\theta), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是其样本，$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是θ 的充分统计量，则对θ 的任一无偏估计$\hat\theta = \hat\theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，令$\tilde\theta = \boxed{E(\hat\theta \mid T)}$，则$\tilde\theta$也是$\theta$ 的无偏估计，且

$$\mathrm{Var}(\tilde\theta) \leqslant \mathrm{Var}(\hat\theta).$$

$\varphi(T)$

定理6.6 说明,如果无偏估计不是充分统计量的函数,则将之对充分统计量求条件期望可以得到一个新的无偏估计,该估计的方差比原来的估计的方差要小,从而降低了无偏估计的方差.换言之,考虑θ的估计问题只需要在基于充分统计量的函数中进行即可,该说法对所有的统计推断问题都是成立的,这便是所谓的充分性原则.

问题：

能否在无偏估计类的全体中找到一个达到最小方差的无偏估计呢?

$N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\theta \in \Theta$

定义（Uniformly Minimum-Variance Unbiased Estimator）

$E\hat{\theta}=\theta$ $E\hat{\theta}=\theta$

对参数估计问题，设$\hat{\theta}$ 是θ 的一个无偏估计，如果对另外任意一个θ的无偏估计$\tilde{\theta}$，在参数空间Θ上都有

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) \leqslant \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta}),$$

$\forall \theta \in \Theta$

则称$\hat{\theta}$ 是θ 的**一致最小方差无偏估计**，简记为**UMVUE**.

$\hat{\theta}$

$\varphi(\eta_1)$ $E\varphi(\eta_1) = \theta$

系 2

设$\eta_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是$\theta \in \Theta$ 的一个充分统计量，$\varphi(\eta_1)$ 是θ 的唯一一个可以表示为η_1 的函数的无偏估计，则$\varphi(\eta_1)$ 是θ 的一个一致最小方差无偏估计.

UMVUE

$f(x) \neq \varphi(x)$ $E(f(\eta_1)) \neq \theta$

思考：

有效估计与**UMVUE**的关系