# 第七章　　假设检验

第一节　假设检验的基本思想和概念

第二节　参数假设检验（正态总体）

第四节　非参数假设检验

前面，我们介绍了参数估计问题。参数估计是通过样本的观察对总体分布中的未知参数作出估计。在统计推断中还有另一类重要问题，就是假设检验问题。

# 第一节　假设检验的基本思想和概念

一、假设检验的基本问题

二、假设检验的基本原理和思想

三、假设检验的相关概念

四、假设检验的一般步骤

# 一、假设检验的基本问题

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下,为了推断总体的某些性质,提出某些关于总体的假设.

**例如,** 提出总体服从泊松分布的假设;

非参数

又如,对于正态总体提出数学期望等于 $\mu_0$ 的假设等.

参数

**假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断:是拒绝,还是接受.**

null h 虚无

原假设或零假设（$H_0$）：事先对总体某方面的特征提出一个假设。

备择假设（$H_1$）：在原假设被拒绝后可供选择的假设。通常备择假设与原假设是对立的。

若假设是针对总体分布中的未知参数提出的，则称之为参数检验；其他称之为非参数检验。

问题：如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

# 二、假设检验的基本原理和思想

**基本原理：** 实际推断原理："**一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的**".

**基本思想：** 首先**假设"$H_0$为真"**，然后进行统计推断，如果导致一个不合理的现象出现，即**导致一个小概率事件在一次试验中发生了**，这就表明事先假设"$H_0$为真"是错误的，应**拒绝$H_0$**。

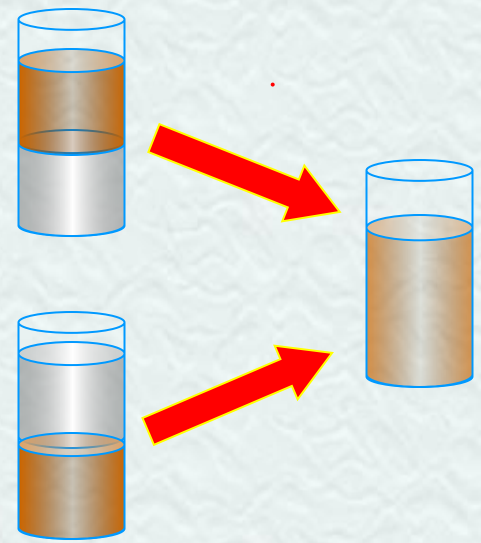
**关键：** 构造小概率事件A，满足：

$$P\{A \mid H_0\text{为真}\} = \alpha \text{（很小）}$$

**例** （女士品茶）一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶冲制而成. 做了10次测试，结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信？

$H_0$: 说法不可信

$H_1$: …可信.



**解** 假设该女士的说法不可信，即纯粹是靠运气猜对的。

在此假设下，每次试验的两个可能结果为：

奶＋茶 或 茶＋奶

若记

$A=\{$10次试验中都能正确分辨出放奶和 $\}$

则 $P(A)=\dfrac{1}{2^{10}}=0.0009766$

由实际推断原理，该女士的说法可信

**实际推断原理**

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生

$X \sim N(\mu, 0.015^2)$

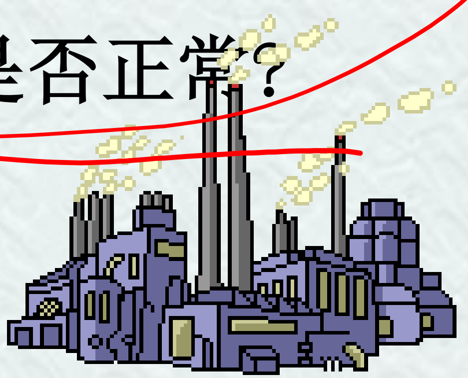


**实例** 某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装糖重是一个随机变量，它服从正态分布. 当机器正常时，其均值为0.5公斤，标准差为0.015公斤. 由长期实践可知，标准差较稳定。某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖9袋，称得净重为(公斤)：

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511

0.520 0.515 0.512， 问机器是否正常?

**分析:** 用 $\mu$ 和 $\sigma$ 分别表示这一天袋装糖重总体 $X$ 的均值和标准差，



则 $\boxed{X \sim N(\mu,\ 0.015^2),\text{ 其中}\mu\text{未知.}}$

**问题**：根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

提出两个对立假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \ .$$

再利用已知样本作出判断是接受 $H_0$(认为机器工作是正常的)，还是拒绝 $H_0$(认为机器工作不正常的).

由于要检验的是关于总体均值的假设, 故可借助于样本均值来判断.

若$H_0$为真

因为 $\overline{X}$ 是 $\mu$ 的无偏估计量,

$|\overline{X} - 0.5|$

所以若 $H_0$ 为真, 则 $|\overline{X} - \mu_0|$ 不应太大,

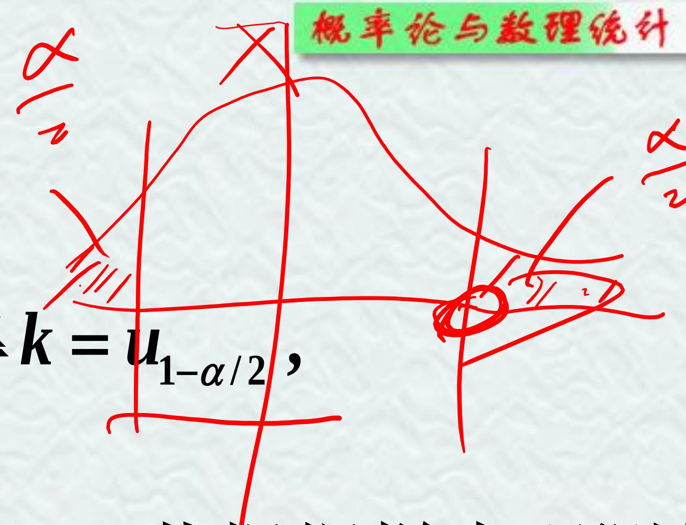
$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

当$H_0$为真时, $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

衡量$|\overline{X} - \mu_0|$的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小,

于是可以选定一个适当的正数$k$, 使得

$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge k\right\}=\alpha$(给定, 很小),



由标准正态分布分位点的定义得 $k=u_{1-\alpha/2}$,

$\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge u_{1-\alpha/2}\right\}$是一个小概率事件，若根据样本观测值

得到 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge u_{1-\alpha/2}$,则认为该小概率事件在一次试验中发生了

从而拒绝$H_0$；若 $\dfrac{\left|\overline{x}-\mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{1-\alpha/2}$时，则接受$H_0$.

假设检验过程如下:

在实例中若取定 $\alpha = 0.05$, 则 $k = u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$,

又已知 $n = 9$, $\sigma = 0.015$, 由样本算得 $\bar{x} = 0.511$,

即有 $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{0.511\text{-}0.5}{0.015/\sqrt{9}}\right| = 2.2 > 1.96$,

于是拒绝假设$H_0$, 认为包装机工作不正常.

# 三、假设检验的相关概念

## 1. 显著性水平

当样本容量固定时，选定$\alpha$后，数 $k$ 就可以确定，然后按照统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的观察值的绝对值大于等于 $k$ 还是小于 $k$ 来作决定.

如果 $|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k$，则称 $\mu$与$\mu_0$的差异是显著的，

则我们拒绝 $H_0$，

反之, 如果$|u| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < k$, 则称$\mu$与$\mu_0$的差异是不显著的, 则我们接受$H_0$,

数 $\alpha$ 称为显著性水平.

上述关于$\mu$与$\mu_0$有无显著差异的判断是在显著性水平$\alpha$之下作出的.

$H_0$

## 2. 检验统计量

统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 称为检验统计量.

## 3. 原假设与备择假设

假设检验问题通常叙述为：在显著性水平$\alpha$下，

检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0.$

或称为"在显著性水平$\alpha$下,针对 $H_1$检验 $H_0$".

$H_0$称为原假设或零假设, $H_1$称为备择假设.

$|u| = 2.2 > 1.96$

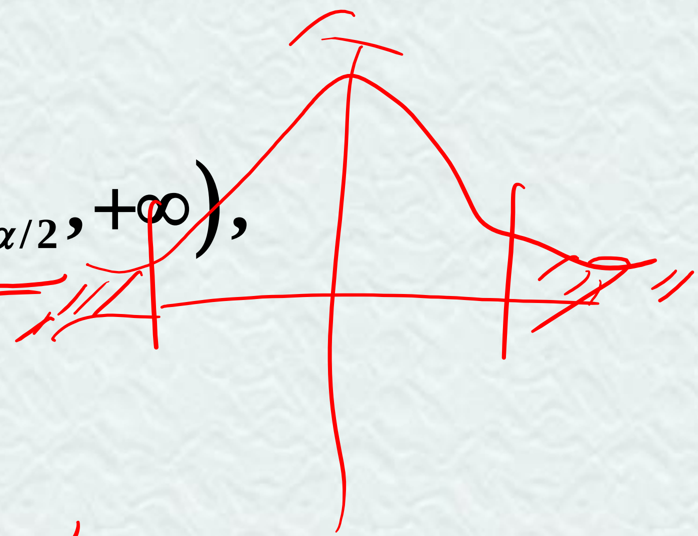
## 4. 拒绝域与临界点

$(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

当检验统计量取某个区域$C$中的值时，我们拒绝原假设$H_0$，则称区域$C$为**拒绝域**，拒绝域的边界点称为**临界点**.

如在前面实例中，

拒绝域为 $\left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right] \cup \left[u_{1-\alpha/2}, +\infty\right)$,



临界点为 $\pm u_{1-\alpha/2}$.

$P(|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$

## 5. 两类错误

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生, 但很难发生不等于不发生, 因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设$H_0$为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝$H_0$的判断, 称做第一类错误, 又叫弃真错误, 犯第一类错误的概率是显著性水平$\alpha$.

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} = P\{小概率事件A \mid H_0为真\} = \alpha$$

(2) 当原假设 $H_0$ 不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受 $H_0$ 的判断, 称做**第二类错误**, 又叫**取伪错误**,

犯第二类错误的概率记为

$$P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 不真}\} = \beta$$

# 假设检验的两类错误

| 真实情况(未知) | 所作决策 | |
|---|---|---|
| | 接受 $H_0$ | 拒绝 $H_0$ |
| $H_0$ 为真 | 正确 | 犯第I类错误 |
| $H_0$ 不真 | 犯第II类错误 | 正确 |

当样本容量 $n$ 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

Neyman-Pearson提出一个原则:**即在控制犯第一类错误的概率$\alpha$的条件下,尽量使犯第二类错误的概率β小**,因为人们常常把拒绝$H_0$比错误地接受$H_0$看得更重要些.

基于Neyman-Pearson的这一原则去寻找最优检验的问题,将在本章末7.5节中进行讨论.有时最优检验法则很难找到,甚至可能不存在.

## 6. 显著性检验

只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑犯第二类错误的概率的检验，称为**显著性检验**.

## 7. 双边备择假设与双边假设检验

在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中，备择假设 $H_1$ 表示 $\mu$ 可能大于 $\mu_0$，也可能小于 $\mu_0$，称为双边备择假设，形如 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双边假设检验.

## 8. 右边检验与左边检验

形如 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 的假设检验称为右边检验.

形如 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 的假设检验称为左边检验.

右边检验与左边检验统称为单边检验.

# 四、假设检验的一般步骤

1、提出原假设$H_0$，必要时写出备择假设$H_1$；

2、建立检验统计量（用来作检验的统计量）；同时在$H_0$成立的条件下确定检验统计量的分布。

3、确定检验的拒绝域；构造小概率事件，依事先给定的概率 $\alpha$（又称为显著性水平，或检验水平，常取 0.05，0.01，0.1 等值），及检验统计量的分布，查表确定临界值，从而得到拒绝域。

4、根据样本数据计算检验统计量的值，若值落入拒绝域，则拒绝$H_0$；否则接受$H_0$。