Chapter 2 多项式插值

张亚楠*

February 24, 2024

引言

在某个区间 $[a,b]$上给出一系列函数点值

$$y_j = f(x_j), \quad 0 \le j \le n$$

如何寻找某个“指定类型”的函数$p(x)$，使其满足如下条件：

1) $p(x)$在整个区间$[a,b]$上有定义

2) $p(x_j) = f(x_j), \quad j = 0,1,...,n.$

1) 存在性？ 唯一性？
2) 若存在唯一，如何给出？

1 插值法基本原理

定义 1 设函数$y = f(x)$定义在区间$[a,b]$上，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $[a,b]$上取定的$n+1$ 个互异节点，且已知节点处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$；若存函数$\phi(x)$，满足

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

则称ϕ为$f(x)$的一个插值函数，$f(x)$为被插值函数，点x_i为插值节点，上式为插值条件，而误差函数 $R(x) = f(x) - \phi(x)$称为插值余项。

*ynzhang@suda.edu.cn 苏州大学数学科学学院

从计算和理论分析方便的角度出发，多项式插值是最常用的。 也即是：对$n+1$个插值节点选择n次多项式

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

作为插值函数，使其满足插值条件.

1. 多项式$P(x)$ 是否存在唯一?

2. 若存在唯一，如何求$P(x)$?

根据插值条件得到关于系数$\boldsymbol{c}=[c_0,...,c_n]^\top$的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

记为 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{f}$.

定理 1 $(n+1)$个互异节点$x_j \neq x_k$, $j \neq k$, 的多项式插值是存在唯一的.

证明： 此时Vandermonde矩阵$\boldsymbol{V}$是可逆的，则方程组$\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{f}$ 唯一可解. 证明完毕. ∎

```matlab
function [pt, c] = vanderpolyfit(x,y,t)
% % compute interpolation polynomial p
% % via monic basis // Vandermonde Matrix
% input:  x: interp Xnodes
%         y: interp func value on Xnode
%         t: the nodes be evaluated
% output: c: poly coeffs of p:= c0 + c1*x + c2*x.^2 + ...
%         pt = p(t)
% ynzhang@suda.edu.cn  // 2022/10/17
% for example:
%     x = (1:6);    y = [16, 18, 21, 17, 15, 12];
%     t = (0.8:0.01:6.2)';  [pt, c] = vanderpolyfit(x,y,t);
%     figure; fig1 = plot(x,y,'ko','MarkerSize',8); hold on,
%     plot(t,pt,'r-','LineWidth',1.5);
%     legend('interp pts','interp poly'); hold off;  grid on;
n = length(x)-1;          % degree of poly
V = x(:).^(0:n);          % vander matrix: [1 x x^2 ... x^n]
```

```
c = V \ y(:);              % coefs of p(x) = c0 + c1*x + c2*x^2 + ...
Vt = t(:).^(0:n);  pt = Vt*c;  % evluate p(t)
```

两个结论

(1) Good news: 系数矩阵A对互异节点$\{x_j\}$是非奇异的(Vandermonde矩阵)，因此解$\{c_j\}$存在唯一。当$n \lesssim 10$ 时，矩阵的条件数不太大，可以采用。

(2) Bad news: 当n较大时，Vandermonde 矩阵A是极其病态的，求解不准确。

解决方案

(1) Trefethen et al, Vandermonde with Arnoldi: SIAM REVIEW(2021) Vol. 63, No. 2, pp. 405–415

(2) 选择正交多项式（Chebyshev, Legendre）作为基函数，避免选择单项式作为基函数

(3) Other methods: Lagrange, Barycentric formula ...

标注 1 多项式插值的存在唯一性定理至关重要！！由于次数不超过n的多项式空间是$(n+1)$维线性空间，则所求多项式可以由该空间的一组基线性表示。除了刚刚介绍的单项式基，还可以选择其它基函数，每组基对应一种插值法，例如：Lagrange，Newton，barycentric，(带权的或者近似的)正交多项式基。

> 教学内容选择
>
> 1. 本科生：Lagrange插值、Newton插值、两类典型Hermite插值、分段低次插值
> 2. 研究生：Vandermonde矩阵和插值多项式的存在唯一性、Lagrange插值的重心坐标形式、Hermite插值的一般形式和存在唯一性; 不讲但简单评论 Newton插值和 分段低次插值

2 Lagrange 插值多项式

例 1 (线性插值) 已知两点函数值

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1)$$

构造满足插值条件的一次多项式。

解：设$P_1(x) = ax + b$ 利用插值条件得到方程组

$$ax_0 + b = y_0; \quad ax_1 + b = y_1$$

解得斜率, 进而得到点斜式

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

更改形式为

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 := y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x)$$ ■

观察上式结构发现： $P(x)$ 是 一次函数 $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$的线性组合, 而一次函数$l_0(x)$和 $l_1(x)$ 满足 Kronecker delta记号性质，也即

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

据此思想给出三个节点的二次插值多项式

$$P_2(x) = y_0 * l_0(x) + y_1 * l_1(x) + y_2 * l_2(x)$$

并推广到一般$(n+1)$个节点的基函数的构造

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \frac{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}}$$

观察上式可知

1) 插值节点x_j给定后，插值基函数即确定，写程序时可以预先给出。

2) 需要计算t点的值时，带入计算$(n+1)$个基函数的取值

3) 计算内积即可

以下代码比 polyinterp.m [1] 稳定性更好！ 以Runge函数 为例，选择Chebyshev点为插值节点 当$n = 618$ 时， polyinterp不稳定 而下段代码有效. 但是需要说明，lagrang1.m 效率不高，稳定性也不如接下来要介绍的重心坐标插值法。

[1]Mathwork, Cleve Moler, Matlab创始人

```
function p = lagrange1( x, f, t )
%  Evaluates Lagrange interpolating poly
%  L is baisis 'Vandermonde type' matrix [l0, l1...ln]
  x = x(:); f = f(:);  n = length(x);  m = length(t);
  dX = x - x.' + eye(n);  w = prod(dX,2);
  L = zeros(m,n);
 for j = 1:n
     dX = t(:) - x([1:j-1 j+1:n]).' ;
     L(:,j) = prod(dX,2) / w(j);
 end
 p = L*f;
```

例 2 (1) 已知$\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11$, 求 $\sqrt{115}$

(2) 用抛物插值计算$\sqrt{7}$

想一想：插值多项式与被插函数是否完全相等？ i.e.,

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=0 \quad ?$$

定理 2 设$f^{(n)}(x)$ 在$[a,b]$连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)存在， 则对 $\forall x\in[a,b]$,

$$\boxed{R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)}$$

Hint： $R_n(x)$ 有n+1个零点；因此

$$R_n(x)=K(x)*\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

则只需确定$K(x)$. 为利用Rolle定理, 做辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)+K(x)*\Pi_{j=0}^{n}(t-x_j)$$

观察上式， 除$(n+1)$ 个插值节点， $t=x$ 也是$\varphi(t)$的零点。因为$\varphi(x)$ 有至少$(n+2)$ 个零点，由Rolle定理知道 $\exists\xi\in(a,b)$, s.t., $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$, 即得结论. ■

思考：如果被插值函数本身是次数不超过n的多项式，则余项有何特点？

例 3 (1). 证明：$\sum_{j=0}^{4}(x_j-x)^2*l_j(x)=0$, 其中$l_j(x)$是节点$x_0,x_1,...,x_4$确定的插值基函数。

(2). 证明：

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\|f''\|_\infty$$

2.1 Barycentric Lagrange interpolation *(研究生要求掌握，本科生选学)

本节内容选自文献[2]. 首先给出Lagrange插值的原始形式

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j\ell_j(x), \quad \ell_j(x)=\frac{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}$$

记

$$\ell(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$$w_j=\frac{1}{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)}, \quad j=0,\ldots,n$$

则Lagrange插值基函数可写为

$$\ell_j(x)=w_j\frac{\ell(x)}{x-x_j}=\ell(x)\frac{w_j}{x-x_j}$$

及Lagrange的另一表达式[3]

$$\boxed{p(x)=\ell(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}f_j \qquad \text{BARYCENTRIC FORMULA (I)}}$$

借助于恒等式

$$1=\sum_{j=0}^{n}\ell_j(x)=\ell(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}$$

得到重心坐标形式

$$\boxed{p(x)=\frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}f_j}{\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}} \qquad \text{BARYCENTRIC FORMULA (II)}}$$

该表达式数值稳定性更好，且分子分母具有对称性， 权重向量$\{w_j\}$ 乘以任意常数均不改变上述表达式； 因此，应用代码时通常对权重向量采用归一化避免w_j数值过小溢出(例如：令w的最大模为1). 当插值节点选择Chebyshev零点或者Chebyshev - Lobatto点时，有规范后的权重表达式

$$x_j=\cos(\frac{j\pi}{n}), \qquad w_j=(-1)^j\delta_j, \quad \delta_j=\begin{cases}1/2, & j=0 \text{ or } j=n\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{1}$$

$$x_j=\cos\frac{(j+\frac{1}{2})\pi}{n+1}, \qquad w_j=(-1)^j\sin\frac{(j+\frac{1}{2})\pi}{n+1} \tag{2}$$

[2]Trefethen et al, Barycentric Lagrange Interpolation, SIAM REVIEW (2004) Vol. 46, No. 3, pp. 501–517 文章中提到：Barycentric Lagrange插值形式，应该被广泛知晓； 而实际上很多人不知道，包括一些数值分析学家。

[3]也称为重心坐标. 由于$\ell(x)$是一些节点的乘积，当节点过于密集时数值会很快趋于零，向下溢出underflow.

```matlab
function [ p, w ] = baryinterp0(x,y,t)
%  input: x:interpolation nodes
%          y:f(x)
%          t: nodes be evalued
% output: p = p(u): p:interp poly
x = x(:);    y = y(:);    n = length(x)-1;
% check chebshev pts
x_cheb1 = cos(((n:-1:0)'+0.5) *pi./(n+1) );
x_cheb2 = cos((n:-1:0)'*pi./n);
if norm(sort(x(:))  - x_cheb2(:),inf) < 5*eps
    w = (-1).^(0:n)';     w([1 end]) = 0.5*w([1 end]) ;
elseif norm(sort(x(:))  - x_cheb1(:),inf) < 5*eps
    w = sin( ((n:-1:0)'+0.5) *pi./(n+1) ); w = w.*(-1).^(0:n)';
else
    w = x - x.' +  eye(n+1);
    w = prod(w,2);       % prod_j=0^n j~=i; (x_i - x_j)
    w = 1./w;
    w = w./norm(w,inf);  % scaled normalized as max(w_j) = 1
end
C = t(:) - x.';          [J, K] = find(abs(C) < 5*eps);
C = 1 ./ C;              p = ( C*(y.*w) ) ./ ( C*w );
% % % % % % % % %    known value
p(J) = y(K);
```

当选择Chebyshev点插值，代码稳定性极好，$n \approx 20000$ 依然有效. 但是若是非Chebyshev点，按定义式计算权重w_j 对$n > 1000$时不稳定的； 例如Legendre多项式零点(Guass点)，不可按照定义直接计算，可寻求其它办法 [4]. 实际问题中往往不会采用几百上千个点去做插值，真的遇到这种情况，可以采用正交多项式作为基函数.

[4]Legendre极值点和零点都没有重心权重的显式表达式！这是 Trefethen2004SIREV文章提到的。是否有可能寻求其显式表达式或者 有某种简单的迭代法来逼近这一权重？若迭代法可行，则Chebyshev对应的权重必定是好的迭代初值！

3 Newton 插值

给定5个插值节点及其函数值，可以得到$L_4(x)$; 由于某种原因，需要加入一个新的插值节点，Lagrange插值法之前的计算结果是否有用?

- R-(1) Newton 插值法可以保留低次插值的结果
- R-(2) Newton插值构造 Hermite插值更加直观和方便
- R-(3) Newton法并不比Lagrange法更稳定！
- R-(4) Lagrange插值基函数不依赖于被插值函数f_j
- R-(5) Lagrange插值不依赖于插值节点的排列顺序，Newton差商理论上等价但不同的排列顺序对稳定性有影响

定义 2 差商：给定节点及其函数值，记

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为一阶差商；

$$f[x_0, x_1, ..., x_m] = \frac{f[x_1, ..., x_m] - f[x_0, ..., x_{m-1}]}{x_m - x_0}$$

为m阶差商；规定 $f[x_i] = f(x_i)$为零阶差商

3.1 差商的几个性质

命题 3.1 函数$f(x)$的 n 阶差商可由函数值的线性组合表示，

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

Hint： 归纳法证明，比较对应系数

$$f[x_1, ..., x_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{\Pi_{j=1, j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)}$$

则 $f(x_k)$的系数

$$\frac{1/\Pi_{j=1, j\neq k}^{n}(x_k - x_j) - 1/\Pi_{j=0, j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)}{x_n - x_0}$$

$$= \frac{1}{\Pi_{j=1, j\neq k}^{n-1}(x_k - x_j)} \left(\frac{1}{x_k - x_n} - \frac{1}{x_k - x_0} \right) \Big/ (x_n - x_0).$$

■

命题 3.2 差商具有对称性

$$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]; \quad f[x_0,x_1,x_2]=f[x_2,x_0,x_1]$$

Hint： 可由上一性质直接给出. ■

命题 3.3 若

$$f[x,x_0,x_1,...,x_k]$$

是x的m次多项式，则

$$f[x,x_0,x_1,...,x_k,x_{k+1}]$$

是x的$m-1$次多项式。

Hint： 由定义

$$f[x,x_0,x_1,...,x_k,x_{k+1}]=\frac{f[x_0,x_1,...,x_k,x_{k+1}]-f[x,x_0,x_1,...,x_k]}{x_{k+1}-x}$$

上式右端分子是x的m阶多项式，且当$x=x_{k+1}$时分子为零，即分子包含分母作为因子。消去即得结果。 ■

命题 3.4 $f(x)$是n次多项式，则$(n+1)$阶差商$f[x,x_0,x_1,...,x_n]$恒为零。

思考： 微积分里是否有类似结果?

3.2 Newton插值公式推导

观察并验证以下两式满足插值条件:

$$P_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$P_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

找规律写出一般形式；如何推导？验证满足插值条件即可。

根据差商的定义写出下列等式

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1);\cdots$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n)$$

最后一式代入前一式（把含有x的差商换掉）得到

$$
\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots \\
& +f[x_0,...x_n](x-x_0)...(x-x_{n-1}) \\
& +f[x,x_0,...,x_n]\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \\
:= & N_n(x)+R_n(x) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

思考: $N_n(x)\overset{?}{=}L_n(x)$；两种插值方法的余项 形式上有何不同？

另外，利用

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)$$

有n+1个零点；反复利用Rolle定理，得到

$$f^{(n)}(\xi)-n!f[x_0,x_1,...,x_n]=0$$

进而有如下结论

命题 3.5 *差商与导数的关系*

$$f[x_0,x_1,...,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

利用上述结论，固定x_0，并令(3)式中其它所有插值节点$\{x_j\}_{j=1}^{n}$趋于x_0，会得到什么？

例 4 已知1，4，9的平方根，利用抛物插值求解$\sqrt{7}$. 要求会构造差商表

```
function [p, c, A] = mydifftable(X,fX,t)
% compute Newton Interpolation p on (X, fX);
% output p = p(t), and newton coeffs c
% For Example :
%        X = [1; 4; 9];        fX = [1; 2; 3];      t = 7;
%        figure;  LW = 'LineWidth';  plot(X,fX,'ro');
%        hold on, fplot(@(z) sqrt(z),[1,9],LW,1);  grid on;
%        [p, c, A] = mydifftable(X,fX,t);
%        plot(t,p,'b*'); hold off;
%        legend('X','exact curve','x_{output}','location','best')
%        n1 = length(X);  varName = cell(1,n1+1);
%        varName{1} = 'InterpNodes';  varName{2} = 'FuncValue';
%        for j = 3:n1+1
```

```
%           mj =  [ 'Diff' num2str(j-2) ];
%           varName{j} = mj;
%       end
%       T = array2table(A(:,1:n1+1) ,'VariableNames', varName);
disp(T);

% % step 1. compute difference table // n1 * (n1+1)
n1 = length(X);
A = zeros(n1,n1+1);    A(:,1:2) = [X, fX];
y0 = fX;
for k = 1:n1-1
    y0 = (y0(2:end)-y0(1:end-1) )./ (X(k+1:n1) - X(1:n1-k));
    A(1:n1-k,k+2) = y0;
end
% step 2. output the coeffs of Newton poly N(x), and compute N(t)
c = A(1,2:end);
% % output N(t) = c0 + c1*(t-x0) + c2*(t-x0)*(t-x1) + ...
w = ones(size(t));   p = c(1)*w;
for k = 1:n1-1
    w = w.*(t - X(k));       p = p + c(k+1)*w;
end
```

4 典型的Hermite 插值

例 5 已知节点$\{x_j\}_{j=0}^{2}$处的函数值$\{f(x_j)\}_{j=0}^{2}$和导数值$f'(x_1)$ 试构造三次多项式$P_3(x)$ 使其满足

$$P_3(x_j) = f(x_j), \quad 0 \le j \le 2, \quad P_3'(x_1) = f'(x_1)$$

方法一：构造型

由插值条件可假设目标多项式$P_3(x)$具有如下形式

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

其中A为待定系数，可以检验上述$P_3(x)$ 满足与函数$f(x)$在节点处相等. 只要利用导数条件$P_3'(x_1) = f'(x_1)$，即可得到待定系数

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0) f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

方法二：Newton插值法

将已知导数值点x_1看做重节点；或者

(1) 视插值节点为互异节点$\{x_0, x_1, x_1', x_2\}$

(2) 构造Newton型插值多项式

(3) 令$x_1' \to x_1$, 对所得插值多项式取极限

利用牛顿插值的方法和理论 得到

$$H_3(x) = f(x_0) + f\left[x_0, x_1\right](x - x_0) + f\left[x_0, x_1, x_1\right](x - x_0)(x - x_1) + f\left[x_0, x_1, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1)^2$$

以及插值余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \\ &= f\left[x, x_0, x_1, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \end{aligned}$$

标注 2 $f[x_0, x_1, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_1, x_2]$ 如何定义? 如何计算?

$$f[x_1, x_1] = \lim_{x_1' \to x_1} f[x_1, x_1'] = \lim_{\varepsilon \to 0} f[x_1, x_1 + \varepsilon], \quad f[x_0, x_1, x_1] = \frac{f[x_1, x_1] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0}$$

例 6 已知

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f'(x_0) = \xi_0,\ f'(x_1) = \xi_1,$$

构造三次多项式$H_3(x)$满足

$$H^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j), \quad k,\ j = 0, 1$$

可将x_0, x_1看作是重节点，按照Newton插值法进行。

方法三、Vandermonde矩阵计算Hermite插值

定理 3 [Hermite插值的存在唯一性]对m个插值节点，且满足$2m$个插值条件

$$f(x_j)=p(x_j),\qquad f'(x_j)=p'(x_j),\qquad 0\le j\le m-1$$

的$(2m-1)$次多项式是存在唯一的.

证明： 由Newton插值法可知存在性！下面证明唯一性。假设存在$(2m-1)$次多项式 $q(x)$ 也满足上述插值条件. 记$r(x)=p(x)-q(x)$, 则$r(x)$是次数不超过$(2m-1)$ 的多项式，且

$$r(x_j)=r'(x_j)=0,\qquad 0\le j\le m-1.$$

即次数不超$(2m-1)$的多项式$r(x)$有$2m$个零点(二重节点计算重数)，则$r(x)\equiv 0$. ■

考虑例5, 记

$$p(x)=\sum_{j=0}^{3}c_jx^j=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$$

根据插值条件

$$\sum_{j=0}^{3}c_jx_k^j=f(x_k),\quad k=0,1,2 \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{3}c_j*jx_1^{j-1}=f'(x_1) \tag{5}$$

写出矩阵形式

$$\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3\\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ f'(x_1)\end{bmatrix}$$

此时矩阵规模较小，条件数不大, 可直接计算求解。

标注 3 Vandermonde矩阵实现Hermite插值

1. 优点：需要求解的线性方程组简单清楚！ 代码容易实现！
2. 缺点：线性方程组解的存在唯一性不直观，需要做进一步分析.

定理 4 线性方程组(4)-(5)唯一可解.

提示：化简方法一或者方法二所得的多项式$p(x)$ 为单项式基下形式；由于$p(x)$满足插值条件 则其满足方程组(4)-(5)，可解性得证。 唯一性可由定理3得到. ■

对于例6，根据4个插值条件 可以唯一确定一个3次多项式。我们也可以类似给出更一般的Hermite插值方法。下述代码给出例6的算法，也 可用于计算多个节点.

例 7 给定函数$f(x)$在插值节点$\{x_j\}_{j=0}^N$的函数值$f(x_j)$和导数值 $f^{'}(x_j)$, 求次数不超过$(2N+1)$的多项式$P(x)$, 使其满足

$$P(x_j) = f(x_j), \qquad P^{'}(x_j) = f^{'}(x_j).$$

```
% hermite interp on pts x0, x1,  cubic poly
% 4 conditions y_0,y_1, and y'_0 y'_1
x1 = [0; 1];          % more interp pts: x1 = (0:0.2:1)';
y1 = exp(x1);         dy1 = y1;
% P = c0 + c1*x + c2*x^2 + c3*x^3;
n = length(x1);    [V, dV] = get_vand_diff(x1,2*n-1);
V = [V;  dV];      r = [y1; dy1];     c = V \ r;
t = (0:0.01:1)';   Vt = t.^(0:2*n-1);   pt = Vt*c;
figure; plot(t,pt,'r-', t,exp(t),'k--');    err = norm(pt - exp(t),inf)
%%
 function [V,dV,d2V] = get_vand_diff(x,m)
% for given points x, and intger m
% it computes Vandermonde matrix V(x) with degree from 0\to m,
% and its 1st and 2nd order derivative matrices V'(x), V"(x)
% for example :
% syms x; [V,dV,d2V] = get_vand_diff(x,5)
V = x(:).^(0:m);
% dV = V(:,[end,1:m])*diag(0:m);
E = eye(m+1);   p = [m+1,1:m];   P = E(:,p);
dV = V*P*diag(0:m);                 % [0 1 2x 3x^2 ...]
d2V = dV*P*diag(0:m);
end
```

4.1 一般形式的Hermite插值

给定插值节点 $x_j, 0 \le j \le n$, 以及其函数值y_j, 导数值m_j, 由定理3知道 存在唯一的$(2m+1)$次多项式 $p(x)$ 满足插值条件. 现给出构造性的表达式. 记

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x) \right] \tag{6}$$

令基函数$\alpha(x), \beta(x)$ 均是次数不超$(2m+1)$的多项式，且满足

$$\alpha_j(x_k) = \delta_{jk}, \quad \alpha_j^{'}(x_k) = 0, \quad \beta_j(x_k) = 0, \quad \beta_j^{'}(x_k) = \delta_{jk} \tag{7}$$

例 8 (**留作业**) 若基函数满足上述条件，则(6)定义的多项式满足插值条件.

下面给出基函数构造方法。 记$\ell_j(x)$为节点处的Lagrange插值基函数，则

$$\beta_j(x) = (x - x_j)\ell_j^2(x)$$

满足

$$\beta_j(x_k) = 0, \quad 0 \le k \le n; \qquad \beta_j'(x_k) = \left[\ell_j^2(x) + (x - x_j)2\ell_j(x)\ell_j'(x)\right]_{x=x_k} = \delta_{jk}.$$

令

$$\alpha_j(x) = W(x)\ell_j^2(x) \quad \to \quad \alpha_j(x_k) = \alpha_j'(x_k) = 0, \quad j \ne k.$$

下面由待定系数法计算$W(x)$. 由于次数限制，设$W(x) = ax + b$,

$$\alpha_j(x_j) = 1 \Rightarrow W(x_j) = ax_j + b = 1 \tag{8}$$

$$\alpha_j'(x_k) = 0 \Rightarrow W'(x_j)\ell_j^2(x_j) + W(x_j)2\ell_j(x_j)\ell_j^2(x_j) = a\ell_j^2(x_j) + 2\ell_j(x_j)\ell_j^2(x_j) = 0 \tag{9}$$

得到a, b. 进而 $W(x) = 1 - 2(x - x_j)\ell_j'(x_j)$ 以及

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j)\ell_j'(x_j)\right]\ell_j^2(x).$$

标注 4 如上形式的基函数有显式表达式，可直接计算。其中$\ell_j'(x_j) = \sum_k \frac{1}{x_j - x_k}$. 这一表达式在谱方法课程中有详细推导, 读者也可以自己计算得到. 我们给出代码，但是要说明: 有显式表达式并不代表稳定和高效; 对于Hermite插值，也应当采用正交多项式及其导数作为基函数.

```
f = @(x) 1./(1+25*x.^2);     df = @(x) -f(x).*f(x).*50.*x;
n = 55;              x1 = cos((0:n)'*pi/n);
y1 = f(x1);          dy1 = df(x1);
% P = c0 + c1*T1  + c2*T2 + c3*T3... by lagrange-hermite basis
M = 2001;            t = linspace(-1,1,M)';
ell = lag_basis(x1,t);     t_minus_x = (t(:) - x1.');
bet = t_minus_x.*ell.^2;
%
mj = 1./(x1 - x1.');     mj(isinf(mj)) = 0;
ell_prime  = sum(mj,2);
alp = (1 - 2.*t_minus_x*diag(ell_prime) ).*ell.^2;
% hermite interp by lagrange basis
```

```
pt = alp*y1 + bet*dy1;     e1 = norm(pt - f(t),inf)
%%%
function l = lag_basis( x, xt )
% l is lagrange interp basis m \times n mat
% x: interp pts; xt/ output pts
n = length(x); m = length(xt);
x1 = repmat(x(:),1,n);       dx = x1 - x1';
w = prod(dx + eye(n), 2);    l = zeros(m,n);
for jj = 1 : m
     pt = xt(jj);  B = pt - x1; % basis function  l(x)
     l(jj,:) = prod(B - diag(diag(B)) + eye(n));
end
l = l*diag(1./w);
end
```

标注 5 关于一般形式的Hermite插值的更新的算法和理论分析，可以参考《张雷洪，张亚楠，单项式基下Hermite插值和最小二乘逼近的理论和实现》

5 分段低次插值

例 9 (**Runge现象：等距节点上的高次多项式插值——不稳定！**) 给定$[-1,1]$区间函数

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2},$$

和正整数n, 取$x_j=-1+\frac{2j}{n}$为插值节点，构造n次插值多项式$P_n(x)$； 比较$f(t)$与$P_n(t)$的误差，并画出图像. 其中$n=10,20$ 输出结果时取自变量$t=(-1:0.001:1)$. [5]

为何要介绍分段低次插值?

1. 等距节点下的高次多项式插值不稳定！
2. 实际问题往往涉及都等距节点！

分段低次插值数学理论简单，但是实用性强，程序(高效代码)稍复杂.

[5]为书写方便，在不引起歧义的前提下， 本文会采用Matlab的符号和命令来表达数组.

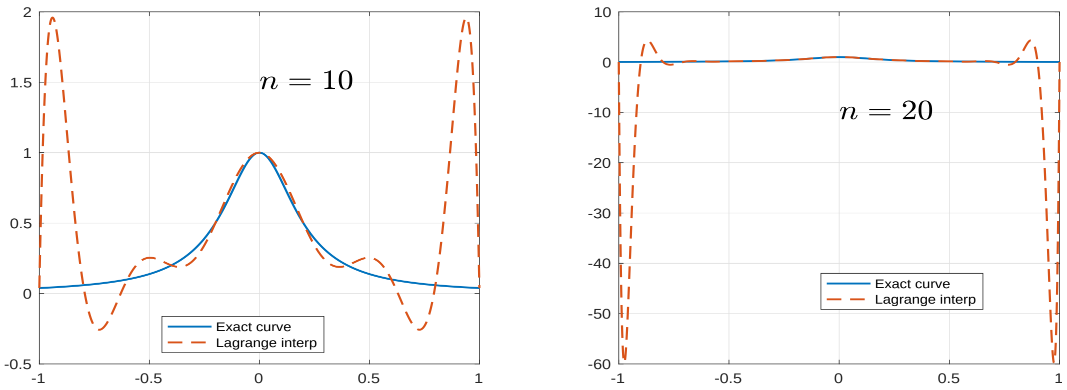

Figure 1: 等距节点下对 Runge函数插值结果

5.1 分段线性插值

通过插值点的折线连接起来得到分段函数; 在每一个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上

$$I(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1})$$

$$R_k(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

记 $h = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |x_{k+1} - x_k|$, 则

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - I(x) \right| = \max_k |R_k(x)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$$

matlab code: piecelin.m

```
clear,
f = @(x) 1./(1 + 25*x.^2);
N = 11;  x1 = linspace(-1,1,N)';   y1 = f(x1);
figure;  plot(x1,y1,'ro');  hold on,
fplot(f,[-1,1],'r-','LineWidth',1);
%  Find subinterval indices k so that x(k) <= t < x(k+1)
t = (-1:0.01:1)';     n = length(x1);   k = ones(size(t));
for j = 2:n-1
    k(x1(j) <= t) = j;
end
%  Evaluate interpolant
%  del = diff(y1)./diff(x1);
%         p = y1(k) + ( t - x1(k) ).*del(k);
p = y1(k).*(t - x1(k+1))./(x1(k) - x1(k+1)) + ...
```

```
    y1(k+1).*(t - x1(k) )./(x1(k+1) - x1(k));
e1 = norm(p - f(t),inf),
plot(t,p,'b--','LineWidth',1);
```

5.2 分段Hemite插值

问题: 已知函数在 $(n+1)$个节点处的值以及一阶导数值，如何构造一阶连续可导函数满足节点处的函数值和导数值相等?

方法: 根据插值条件在每个小区间上进行Hemite插值. piecehermite.m

结论: 已知$(2n+2)$个插值条件，只得到一阶连续可微函数； 条件太多，结果太差！！

```
f = @(x) 1./(1 + 25*x.^2);
df = @(x) -1./(1+25*x.^2).^2*50.*x;
N = 41;  x1 = linspace(-1,1,N)';
y1 = f(x1); dy1 = df(x1);
figure;  LW = 'LineWidth';
plot(x1,y1,'ro');  hold on, fplot(f,[-1,1], 'r-',LW,1);
t = (-1:0.01:1)';        % output vars
ppc = zeros(N-1,4);      % coefs of 3rd degree polys in subinterval
ppt = cell(N-1,1);
for j = 1:N-1
    tp = t( t>=x1(j) & t<x1(j+1) ) ;
    [pt,c] = hermite2p(x1(j:j+1), y1(j:j+1), dy1(j:j+1), tp  );
    ppt(j,1) = {pt};
    ppc(j,:) = c.';
end
% pp = mkpp(x1, ppc); % x1 is breaks, ppc(k,:) is the coefs in k-th interval
% p = ppval(pp,t);     % computes the piecewise polys on t,
p = [];
for j = 1:N-1
    p = [p; ppt{j,:}];
end
p = [p; y1(end)];
e1 = norm(p - f(t),inf),  plot(t,p,'b-',LW,1);
```

```
%% %%%
function [pt,c] = hermite2p(x1,y1,dy1,t)
% input: x1 = [a; b]; y1 = f(x1); dy1 = f'(x1);
% output: pt = p(t); p = c0 + c1*x + c2*x^2 + c3*x^3
n = length(x1);    V = x1(:).^(0:2*n-1); dV = V*0;
dV(:,2:2*n) = V(:,1:2*n-1)*diag(1:2*n-1);
H = [V;  dV];      r = [y1; dy1];
c = H \ r;         c = flip(c);     Vt = t.^(2*n-1:-1:0);  pt = Vt*c;
end
```

5.3 三次样条插值(spline)

例 10 给定$(n+1)$个插值节点，能否构造一个多项式插值函数，既满足插值条件，本身又是光滑的(例如：有二阶连续导数)?

考虑样条函数$S(x)$，要求S(x)在每个区间上都是三次多项式；且满足$S(x) \in C^2[x_0, x_n]$

$$S(x_j) = f(x_j), \qquad 0 \le j \le n;$$

$$S(x_j+0) = S(x_j-0), \quad S'(x_j+0) = S'(x_j-0), \qquad 1 \le j \le n-1$$

$$S''(x_j+0) = S''(x_j-0), \qquad 1 \le j \le n-1$$

需要加条件：已知端点处的一阶导数值或二阶导数值；或者

1. 自然边界条件：$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$
2. 周期条件：$S'(x_0) = S'(x_n)$; $\quad S''(x_0) = S''(x_n)$

标注 6 周期边界条件一般不用，周期函数更适合三角插值; MATLAB: (not a knot) 给出另一种更为合理的边界条件.

$$S'''(x_1-0) = S'''(x_1+0),\ S'''(x_{n-1}-0) = S'''(x_{n-1}+0)$$

5.4 样条插值的导出

在区间$[x_j, x_{j+1}]$上考虑$S(x)$, 根据要求 $S''(x)$在小区间上是线性函数，记

$$M_j = S''(x_j), \qquad 0 \le j \le n,$$

则

$$S''(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} M_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} M_{j+1}, \quad 0 \le j \le n-1.$$

为书写方便记$h_j = x_{j+1} - x_j$ 则[6]

$$S''(x) = \frac{x_{j+1} - x}{h_j} M_j + \frac{x - x_j}{h_j} M_{j+1}, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]$$

上式积分一次得到

$$S'(x) = -\frac{M_j}{2h_j}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_j}(x - x_j)^2 + c_j$$

再积分一次

$$S(x) = \frac{M_j}{6h_j}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j}(x - x_j)^3 + c_j x + d_j$$

其中c_j, d_j为待定系数。 代入$S(x_j) = y_j$; $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ 可得

$$\begin{cases} y_j = \frac{M_j}{6h_j} h_j^3 + c_j x_j + d_j \\ y_{j+1} = \frac{M_{j+1}}{6h_j} h_j^3 + c_j x_{j+1} + d_j \end{cases}$$

解得 c_j, d_j 与M_j的关系. 代入得到:

$$S(x) = \frac{M_j}{6h_j}\left(x_{j+1} - x\right)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j}(x - x_j)^3 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{x - x_j}{h_j}$$

只需确定M_j即得到 $S(x)$. 问题转化为求解M_j.

在$[x_j, x_{j+1}]$上，对$S(x)$求导

$$S'(x) = \frac{-M_j}{2h_j}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_{j+1}}(x - x_j)^2 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

进而

$$S'(x_j + 0) = -M_j h_j/2 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

$$S'(x_{j+1} - 0) = M_{j+1} h_j/2 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{-1}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{1}{h_j}$$

即[7]

$$S'(x_j - 0) = M_j h_{j-1}/2 + (y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_{j-1}^2}{6})\frac{-1}{h_{j-1}} + (y_j - \frac{M_j h_{j-1}^2}{6})\frac{1}{h_{j-1}}$$

[6]此定义表明$S''(x)$节点x_j处的值固定，由于两边都是多项式，则二阶导数连续且左右极限值相等。

[7]注意: $S'(x_j - 0)$ 的计算对应小区间$[x_{j-1}, x_j]$ 的右端点。

由一阶导数连续的条件，即

$$S'(x_j+0)=S'(x_j-0)$$

得到

$$\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{h_{j-1}+h_j}{3}M_j+\frac{h_j}{6}M_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

上式两端同时除以 $(h_j+h_{j-1})/6$, 并记 $\lambda_j=\dfrac{h_j}{h_j+h_{j-1}}$ 得到简洁形式

$$(1-\lambda_j)M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=6f\left[x_{j-1},x_j,x_{j+1}\right]=F_j,\ 1\le j\le n-1$$

此时方程欠定，读者可自己补充合理条件，并推导出样条插值的计算步骤。

matlab 函数 spline: not a knot

$$S^{(3)}(x_1+0)=S^{(3)}(x_1-0);\quad S^{(3)}(x_{N-1}+0)=S^{(3)}(x_{N-1}-0)$$

计算得

$$S^{(3)}(x)=\frac{-M_j}{h_j}+\frac{M_{j+1}}{h_j}=\frac{M_{j+1}-M_j}{h_j},\quad x\in[x_j,x_{j+1}]$$

进而

$$\frac{M_1-M_0}{h_0}=\frac{M_2-M_1}{h_1},\quad \frac{M_N-M_{N-1}}{h_{N-1}}=\frac{M_{N-1}-M_{N-2}}{h_{N-2}},$$

关于M_j的线性方程组系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -h_0 & h_0+h_1 & -h_1 & & \\ 1-\lambda_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1-\lambda_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & -h_{N-1} & h_{N-1}+h_{N-2} & -h_{N-2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式解出M_j, 代入表达式$S(x)$即可。 Matlab code : spline.m

```
function s = myspline1(x,fx,t)
% % cubic spline interpolation on (x,fx)
% s = P(t); P: piecewise cubic polys
% for example:
%       f   = @(z) 1./(1+25*z.^2);
```

```
%       N = 11;   x = linspace(-1,1,N);   fx = f(x);
%       t = (-1 : 0.01: 1).';
%       s = myspline1(x,fx,t);
%       s1 = spline(x,fx,t);   %  matlab  spline
%       error = norm(s - s1(:), inf),
x = x(:); fx = fx(:); t = t(:);
% ==== compute M_j refer f''(x_j)
n1 = length(x) - 1;      h = diff(x);   f1 = diff(fx)./h;
rhs = 6*(f1(2:n1) - f1(1:n1-1))./(x(3:n1+1) - x(1:n1-1));
rhs = [0; rhs(:); 0];
lam = h(2:n1)./(h(2:n1) + h(1:n1-1));
A = 2*speye(n1+1) + sparse(1:n1,2:n1+1,[2;lam],n1+1,n1+1)...
    + sparse(2:n1+1,1:n1,[1-lam;2],n1+1,n1+1);
% === not a knot on BC
A(1,1:3) = [-h(2), h(2)+h(1), -h(1)];
A(n1+1,n1-1:n1+1) = [-h(n1), h(n1)+h(n1-1), -h(n1-1)];
% A(1,1) = 1; A(n1+1,n1+1) = 1;  % natural boundary
M = A \ rhs(:);
%  Find subinterval indices k so that x(k) <= t < x(k+1)
   k = ones(size(t));
   for jj = 2:n1
       k(x(jj) <= t) = jj;
   end
%     ====== Evaluate spline
t1 = x(k+1) - t;   t2 = t - x(k);
s = M(k).*t1.^3  + M(k+1).*t2.^3 + ...
         (6*fx(k) - M(k).*h(k).^2).*t1 + ...
         (6*fx(k + 1) - M(k+1 ).*h(k).^2).*t2;
s = s./(6*h(k));
```

5.5 Shape-Preserving Piecewise Cubic(阅读材料，不要求掌握)

本节内容参考F. N. Fritsch and R. E. Carlson, "Monotone Piecewise Cubic Interpolation", SIAM J. Numerical Analysis 17, 1980, 238-246. David Kahaner, Cleve Moler and Stephen Nash, Numerical Methods and Software, Prentice Hall, 1988.

给定插值条件:

$$f(x_j) = y_j, \quad 0 \le j \le N$$

目标：得到分段三次多项式 $S(x)$, 满足：（1）插值条件；（2）$S(x)$有一阶连续导数.

几点说明:

(1) 三次样条插值(spline)有二阶连续导数, 因此上述目标可以达到。

(2) 分片Hermite 插值也符合上述目标，但是条件太多: $f'(x_j) = d_j, 0 \le j \le N$.

(3) 不加一阶导数的条件，如何实现分段三次多项式?

(4) 如果可以，与spline比较，连续、区别和优点?

记一阶差商

$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, ..., N$$

一阶导数由一阶差商的加权平均给出; 例如等距网格下的内点一阶导数定义如下

$$d_k = \begin{cases} 0, & \delta_{k-1} * \delta_k \le 0 \\ \frac{2}{1/\delta_{k-1} + 1/\delta_k}, & \delta_{k-1} * \delta_k > 0 \end{cases}$$

由上式给出一阶导数d_k, 进而可直接利用分片Hermite插值即可得到目标。 需要注意的是上式没有给出边界d_0, d_N的一阶导数值。为了保证整体的进度， d_0可由δ_0, δ_1二阶外推得到。 一旦$d_j = f'(x_j), 0 \le j \le N$得到， 即可按照分段Hermite插值方式给出算法. 参考Matlab code : pchip.m 该方法 保持离散数据的局部单调性.

小结

1. 插值法基本原理、插值条件: Vandermonde矩阵、barycentric formular
2. 多项式插值: Lagrange, Newton, Hermite 插值
3. 分段低次插值: piecewise linear / Hermite / spline / pchip
4. 插值法是重要的基本数值方法，读者在后文学习了正交多项式理论后，可尝试自己完善补充 基于正交多项式插值的理论和算法

上机题

1. 编程Lagrange型，Newton型插值多项式； 在区间[-1,1]上等距取$n = 10, 20, 40$ 个点构造$f(x) = e^x$的插值多项式，并与精确曲线比较误差。

2. (1) 与第一题同样取点构造插值多项式近似Runge函数并比较误差

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

（2）在[-1,1]上取非等距节点(Chebyshev零点)$\{x_j = \cos(\frac{2j-1}{2n}\pi)\}_{j=1}^{n}$或者 (Chebyshev-Lobatto点)

$$x_j = \cos(\frac{j\pi}{n}) \quad j = 0, 1, ..., n$$

取 $n = 10, 20, 30$ 构造插值多项式逼近Runge函数并比较误差。

3. 编写分段线性插值、分段Hermite插值程序； 在区间[-1,1]上等距取$n = 10, 20, 40$ 个点计算 上一题Runge函数的分段插值多项式，并与精确曲线比较误差。

4. （本科生选做/研究生必做）编写三次样条插值，计算上例.