Chapter 9 常微分方程初值问题数值解

张亚楠*

1 引言和预备知识

考虑如下初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & x > a \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

已知：$f(x, y)$关于x 连续，关于y满足Lipschitz条件, 即

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|.$$

上述问题在有限区间内存在唯一解$y = y(x), \& x \in [a, b]$ [1]. 本章内容学习如何利用数值方法求出(1)的近似解，也称为数值解. 在介绍数值方法之前，我们先回顾一下连续解的唯一性证明, 证明方法对本章介绍的 数值方法的误差分析部分具有参考意义.

Theorem 1 *若$f(x, y)$关于x 连续，关于y 满足Lipschitz条件, 则 (1) 存在唯一解。*

Proof: Hint: 假设上述问题的初值为z_0, 则相应的解记为$z(x)$, 满足

$$z'(x) = f(x, z)$$

记

$$r(x) = z(x) - y(x)$$

有

$$\begin{cases} r'(x) = f(x, z) - f(x, y) \\ r(a) = z(0) - y(0) \end{cases}$$

或者

$$r'(x) = \frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y} r(x) := h(x) \cdot r(x)$$

*ynzhang@suda.edu.cn　苏州大学数学科学学院

[1]可通过构造Picard迭代证明解的存在性，一般《常微分方程》教科书都有介绍

ZYNSUDA

记

$$H(x)=\int_a^x h(x)dx=\int_a^x h(t)dt$$

可得

$$r^{'}(x)e^{-H(x)}=e^{-H(x)}h(x)r(x)$$

进而

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-H(x)}r(x)\right)=0\rightarrow e^{-H(x)}r(x)=\text{constant}$$

即

$$e^{-H(x)}*r(x)=e^{-H(a)}*r(a)=z_0-y_0\rightarrow r(x)=e^{H(x)}(z_0-y_0).$$

代入$H(x)$ 定义可得

$$|z(x)-y(x)|=e^{\int_0^x h(t)dt}*|z_0-y_0|\le e^{L*(x-a)}*|z_0-y_0|$$

上式反应了解对初值的依赖程度，也可直接得到解的唯一性。 ■

例 1 设$f(x)\in C^3([x-h,x+h])$, 则下式成立

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f^{'}(x)+\frac{h}{2}f^{''}(\eta) \tag{2}$$

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=f^{'}(x)-\frac{h}{2}f^{''}(\zeta) \tag{3}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f^{'}(x)+\frac{h^2}{6}f^{'''}(\theta) \tag{4}$$

计算目标： 在有限区间$[a,b]$ 上寻求方程(1)的解$y(x)$ 在一系列点

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

上的近似值

$$y_1,y_2,...,y_n \quad 即 \quad y_k\approx y(x_k),\quad k=1,2,...,n.$$

本章约定，形如上式左端的符号为数值解，右端为精确解.

简单起见， 将区间 $[a,b]$ N等分, 记$h=\frac{b-a}{N}$ 为网格步长，记

$$x_k=a+kh,\quad k=0,1,2,...,N$$

为网格节点. 所谓数值解：寻找一个网格函数(只在网格节点处有定义的函数)，也即是一个向量 $\{y_k\}_{k=1}^N$, 使得 $y_k\approx y(x_k)$, $\quad k=1,2,...,N.$

ZYNSUDA

2 Euler's method 及相关定义

设$y(x) \in C^2[a,b]$, 由Taylor 展开

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k))h + \frac{h^2}{2} f''(\xi_k) \tag{5}$$

略去小量项，用数值解y_k 替换精确解$y(x_k)$, 可得(Forward) Euler 格式

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_0 = \eta \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

求解上式即得到网格函数$[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N]^{\mathrm{T}}$.

标注 2.1 所得向量是否为有效近似？精度如何？

$$\varepsilon_k = y(t_k) - y_k \quad \xrightarrow{?} \quad 0, \quad \text{as} \quad h \to 0$$

Theorem 2 (收敛性) 设$y(x)$ 是问题(1)在区间$[a,b]$上的精确解，$\{y_k\}_{k=0}^N$ 是Euler格式(6) 的数值解，则存在与步长h无关的常数c, 使得下式成立

$$|y(x_k) - y_k| \le c \cdot h \tag{7}$$

Proof: 记$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k$, $k = 0, \ldots, N$, 则 (5)减去(6), 可得

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + h\varepsilon_k F_k + \frac{h^2}{2} f''(\xi_k)$$

其中

$$F_k = \frac{f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)}{y(t_k) - y_k}, \quad 且 \quad |F_k| \le L$$

进而得到

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\le (1 + hL)|\varepsilon_k| + h^2 \frac{\|f''\|_\infty}{2} \\ &:= A|\varepsilon_k| + B \le A\Big(A|\varepsilon_{k-1}| + B\Big) + B \\ &\le A^2|\varepsilon_{k-1}| + (1 + A)B \\ &\le A^{k+1}|\varepsilon_0| + \Big(1 + A + \ldots + A^k\Big)B \\ &= A^{k+1} \cdot \varepsilon_0 + \frac{A^{k+1} - 1}{A - 1} B \end{aligned}$$

代入AB 得到

$$\varepsilon_{k+1} \le \frac{(1 + hL)^{k+1} - 1}{hL} \cdot h^2 \frac{\|f''\|_\infty}{2} \le \frac{e^{L(k+1)h}}{L} \cdot h \frac{\|f''\|_\infty}{2} \le \frac{e^{L(b-a)}}{L} \frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

(7) 得证. 估计式说明Euler方法具有一阶精度. ■

标注 2.2 差分方法的有三个重要概念：相容性（局部截断误差）、收敛性、（Lax）稳定性。我们给出后退Euler、梯形公式、改进的Euler方法等格式之后，观察 这些格式的共同点，对它们进行分类并给出统一的局部截断误差的定义。

ZYNSUDA

2.1 梯形公式和后退Euler公式的推导

在区间$[x_j, x_{j+1}]$上积分得到：

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y)\,dx$$

左端可以Newton-Leibniz 写出，右端采用数值积分公式

$$y(x_{j+1}) - y(x_j) = \frac{h}{2}\left[f(x_j, y(x_j)) + f(x_{j+1}, y(x_{j+1}))\right] + \frac{h^3}{12} y''(\xi_j)$$

丢掉小量项得梯形公式：

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\right] \tag{8}$$

上式是非线性方程，可采用Newton 法、或者二分法计算。 更常用的是简单迭代法， 算法如下：

$$\begin{cases} y_{j+1}^{(0)} = y_j + hf(x_j, y_j) \\ y_{j+1}^{(k+1)} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(k)})\right], \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

类似可得后退Euler公式

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_{j+1}, y_{j+1}) \tag{10}$$

观察发现三个公式都是从y_j出发走一步计算y_{j+1}, 这类方法均可 写成如下形式

$$y_{j+1} = y_j + h\varphi(x_j, h, y_j, y_{j+1})$$

统称为 单步法。 根据是否需要求解非线性方程来区分，又将单步法分为两类： 显式方法(显格式)和隐式方法 (隐格式).

定义 1 *局部截断误差*(Local Truncation Error):

$$T_{k+1} = y(t_{k+1}) - \left[y(x_k) + h\varphi(x_k,\, h,\, y(x_k),\, y(x_{k+1}))\right]$$

LTE表示第$k+1$步的数值解和精确解的差，但是只计算一步计算的误差，假定之前的k步没有误差. 这和收敛性分析的误差估计式是不同的。读者注意理解局部（local）的意义所在.

前文已知 Euler格式的局部截断误差(LTE)

$$|T_{k+1}| = \left|\frac{h^2}{2} f''(\xi_k)\right| \le \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty$$

根据定义可推导给出后退Euler公式，梯形公式 的局部截断误差，并分析其收敛性和相应的误差估计。

例 2 推导梯形方法:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\Big)$$

的局部截断误差.

解： 由LTE定义可得

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= y(x_{k+1}) - \Big\{y(x_k) + \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\Big]\Big\} \\
&= \Big[y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi_k)\Big] - \Big\{y(x_k) + \frac{h}{2}\Big[y'(x_k) + y'(x_{k+1})\Big]\Big\} \\
&= \frac{h}{2}\Big[y'(x_k) + hy''(x_k) - y'(x_{k+1})\Big] + \frac{h^3}{6}y'''(\xi_k)
\end{aligned}$$

代入

$$y'(x_{k+1}) = y'(x_k) + hy''(x_k) + \frac{h^2}{2}y'''(\eta_k)$$

得到

$$T_{k+1} = \frac{h^3}{6}y'''(\xi_k) - \frac{h^3}{4}y'''(\eta_k) = \frac{-h^3}{12}f'''(x_k) + \mathbb{O}(h^4) = \mathbb{O}(h^3)$$

上式表明 $|T_{k+1}| \le ch^3$.

Theorem 3 **(梯形方法误差估计)** 设$y(x)$ 是问题(1)在区间$[a,b]$上的精确解， $\{y_k\}_{k=0}^N$ 是梯形方法(8) 的数值解，则存在与步长h无关的常数c, 使得下式成立

$$|y(x_k) - y_k| \le c \cdot h^2 \tag{11}$$

Proof: 记 $\varepsilon_k = y(x_k) - y_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N$. 由局部截断误差定义可得

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\Big[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\Big] + T_{k+1}$$

上式与梯形方法(8)相减, 可得误差方程

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{h}{2}\Big[F_k^1\varepsilon_k + F_k^2\varepsilon_{k+1}\Big] + T_{k+1},$$

其中

$$F_k^1 = \frac{f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)}{y(x_k) - y_k}, \qquad F_k^2 = \frac{f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_{k+1}, y_{k+1})}{y(x_{k+1}) - y_{k+1}}$$

利用Lipschitz条件，得到

$$\begin{aligned}
&|\varepsilon_{k+1}| \le |\varepsilon_k| + \frac{hL}{2}\Big(|\varepsilon_k| + |\varepsilon_{k+1}|\Big) + ch^3 \\
\text{i.e.,}\quad &(1 - \frac{hL}{2})|\varepsilon_{k+1}| \le (1 + \frac{hL}{2})|\varepsilon_k| + ch^3
\end{aligned}$$

当 $hL \le 2/3$ 时，有 $(1 - \frac{hL}{2}) > 3/2$以及 $\frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}} > 1 + \frac{3hL}{2}$, 进而

$$|\varepsilon_{k+1}| \le (1 + \frac{3hL}{2})|\varepsilon_k| + \frac{3}{2}ch^3,$$

类似于Euler方法的误差估计，记

$$|\varepsilon_{k+1}| \le A|\varepsilon_k| + B$$

可得梯形公式误差估计

$$|\varepsilon_{k+1}| \le c\cdot h^2, \quad 0 \le k \le N-1.$$

定义 2 (**相容性**) 若初值问题(1)的数值格式的局部截断误差满足

$$T_k/h \to 0, \text{ as } \quad h \to 0$$

称数值格式和原问题是相容的

偏微分方程数值格式的局部截断误差定义于常微分方程不同，若对偏微分方程数值解定义 相容性，只要LTE是步长h的同阶或者高阶小量即可.

定义 3 (**Lax-stable 稳定性**) 若数值格式的初值有扰动$\varepsilon_0 = y(0) - y^{\varepsilon}(0)$, 所产生的解的变化满足:

$$|y_j - y_j^{\varepsilon}| \le c\cdot \varepsilon_0,$$

其中c与计算区域和Lipschitz常数相关，与ε_0无关, 此时称该数值格式是Lax 稳定的.

Euler方法，后退Euler 和梯形公式均是Lax稳定的，我们以后退的Euler格式为例进行证明，其它格式 留给读者练习.

Theorem 4 (**零稳定性/Lax-稳定性**) 假设y_k, z_k分别由如下格式(不同初值)计算得到

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_{k+1}), \\ y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{k+1} = z_k + hf(x_k, z_{k+1}), \\ z_0 \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

则存在常数c满足

$$|y_k - z_k| \le c|y_0 - z_0|$$

Proof: 记$e_k = y_k - z_k$, 则 两式相减可得

$$\begin{cases} e_{k+1} = e_k + h\Big[f(x_k, y_{k+1}) - f(x_k, z_{k+1})\Big] \\ e_0 = y_0 - z_0 \end{cases}$$

记

$$H_k = \frac{f(x_k, y_{k+1}) - f(x_k, z_{k+1})}{y_{k+1} - z_{k+1}}$$

则得到

$$e_{k+1} = e_k + hH_k e_{k+1} \Rightarrow |e_{k+1}| \le |e_k| + hL|e_{k+1}| \Rightarrow (1-hL)|e_{k+1}| \le |e_k|.$$

当$hL < 1/2$ 时，有$1/(1-hL) \le (1+2Lh)$, 以及

$$|e_{k+1}| \le (1+2Lh)|e_k| \le e^{2L(b-a)}|e_0| \blacksquare$$

ZYNSUDA

Theorem 5 (**Peter Lax 等价定理**) 对问题(1)的相容的数值格式，收敛性与Lax稳定性等价.

Lax 等价定理的结论可推广到线性偏微分方程的差分格式.

标注 2.3 我们给出了三个格式：Euler，向后Euler，梯形公式。它们都属于单步法，分别属于显格式和隐格式，他们都是收敛的，Lax稳定的。要求掌握他们的局部截断误差推导，收敛性证明，和Lax稳定性证明。另外，所有单步法均具有如下形式

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(h, x_j, y_j, y_{j+1})$$

读者可证明若上式的局部截断误差满足 $T_j = \mathbb{O}(h^{p+1})$，则数值解满足$|y(x_{j+1}) - y_{j+1}| \le ch^p$. 这也解释了为何把这类格式称为具有$p$阶精度.

3 Runge-Kutta method

从计算方便的角度出发可得一个预测校正公式(改进的Euler)

$$\begin{cases} \bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})\Big) \end{cases}$$

可以证明：改进的Euler公式具有$\mathbb{O}(h^3)$ 的局部截断误差，且其数值解 具有二阶精度.

从计算的角度出发，将上式改写为

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + h, y_k + hK_1) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\Big(K_1 + K_2\Big) \end{cases}$$

上式的计算量是Euler方法的两倍，远远小于后退Euler和梯形方法等隐式方法。 K_1, K_2可视作$y'(x_j), y'(x_{j+1})$ 的近似值. 思考：多计算几次近似导数 如K_1, K_2, K_3, K_4 也许效果会更好? Right!

3.1 二阶Runge-Kutta格式的推导

例 3 寻找参数$\alpha, \beta, , \mu$ 使得如下格式的局部截断误差的阶数尽量高?

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \alpha h, y_k + \beta hK_1) \\ y_{k+1} = y_k + h\Big(\lambda K_1 + \mu K_2\Big) \end{cases}$$

ZYNSUDA

解: 由 Local Truncation Error 定义: 可得

$$T_{k+1}=y(x_{k+1})-\left\{y(x_k)+h\Big[\boxed{f}+\mu f(x_k+\alpha h, y(x_k)+\beta h\boxed{f})\Big]_{(x_k,y(t_k))}\right\} \tag{12}$$

其中 $\boxed{f}=f\big(x_k,y(t_k)\big)$. 由Taylor 展开

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+hy'(x_k)+\frac{h^2}{2}y''(x_k)+\frac{h^3}{6}y'''(x_k)+\mathbb{O}(h^4) \tag{13}$$

利用方程可得

$$y'(x_k)=f(x_k,y(x_k)) \tag{14}$$
$$y''(x_k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_k,y(x_k))+\frac{\partial f}{\partial y}(x_k,y(x_k))y'(x_k) \tag{15}$$

为了书写方便，在不引起歧义情况下，后文推导将略去自变量记号 (x_k)和 $(x_k,y(x_k))$. 由二元函数Taylor展开

$$f(x_k+\alpha h, y(x_k)+\beta hf(x_k,y(x_k)))=f(x_k,y(x_k))+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\alpha h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\beta hf(x_k,y(x_k))+\mathbb{O}(h^2)$$

代入以上结果得到

$$T_{k+1}=y+hy'+\frac{h^2}{2}y''+\mathbb{O}(h^3)-\left\{y+h\Big[\lambda f+\mu\Big(f+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\alpha h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\beta hf+\mathbb{O}(h^2)\Big)\Big]\right\} \tag{16}$$
$$=hf+\frac{h^2}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f\Big)-h\Big[\lambda f+\mu\Big(f+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\alpha h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\beta hf\Big)\Big]+\mathbb{O}(h^3) \tag{17}$$
$$=\Big(1-\lambda-\mu\Big)hf+h^2\frac{\partial f}{\partial x}\Big(1/2-\alpha\mu\Big)+h^2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\Big(1/2-\mu\beta\Big)+\mathbb{O}(h^3) \tag{18}$$

逐项比较系数可得

参数满足的方程

$$\begin{cases}1--\mu=0\\ \frac{1}{2}-\mu\alpha=0\\ \frac{1}{2}-\mu\beta=0\end{cases}$$

$$\mu\neq 0\Rightarrow\alpha=\beta\quad\&\quad\mu=2\alpha\quad\&\quad\lambda=1-\mu$$

1) 当 $\alpha=\beta=1, \& \mu=\lambda=1/2$时，即为改进的Euler公式、也是 TVD(Total variation diminishing)、Strong stability preserving (ssp)

2) 当 $\alpha=\beta=1/2, \& \mu=1 \& \lambda=0$时，即为中点公式

标注 3.1 改进的Euler公式 为什么有其它、更神气的名字？ 记Euler方法为算子 E,

$$E(y_k)=y_k+hf(x_k,y_k)$$

将改进的Euler法改写为

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}\Big[y_k + hf(x_k, y_k) + hf(x_{k+1}, E(y_k))\Big] \\
&= \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}\Big[E(y_k) + hf(x_{k+1}, E(y_k))\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[y_k + E(E(y_k))\Big]
\end{aligned}
$$

可以看作是从y_k出发，作用两步Euler方法，再和y_k做平均. 若Euler方法的算子范数$\|E\| \le 1$, 则改进的Euler公式保持这一性质：

$$
\begin{aligned}
\|y_{k+1}\| &\le \frac{1}{2}(\|y_k\| + \|E(E(y_k))\|) \le \frac{1}{2}(\|y_k\| + \|E\| \cdot \|E(y_k)\|) \\
&\le \frac{1}{2}(\|y_k\| + \|E\| \cdot \|E\| \cdot \|y_k\|) \le \|y_k\|
\end{aligned}
$$

所以RK2(改进Euler，2阶Runge-Kutta)也称为强稳定性保持算法(ssp).

RK2即保持了和梯形公式同样的二阶精度，又和显式Euler法一样计算简单，是非常受欢迎的算法之一。 实用中，最受欢迎的是同样计算简单且具有更高精度的4阶Runge-Kutta方法. 我们只给出格式， 不做推导和收敛性证明[2].

$$
\begin{cases}
K_1 = f(x_k, y_k) \\
K_2 = f(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3) \\
y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{6}\Big(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\Big)
\end{cases}, \qquad \text{经典4阶RK方法}
$$

4 常微分方程组的计算

从理论和计算的难易程度上，我们对本课程涉及到的“方程组”进行简要的对比

1. 最简单：线性代数方程组[3]
2. 较为困难：非线性代数方程组
3. 最为困难：非线性常微分方程组

本章介绍的对单个微分方程的单步法均可“不加修改”的应用于求解微分方程组.

我们通过例子，介绍向前求解ODEs(常微分方程组)的Euler方法.

[2]读者可参考RK2的LTE推导过程，体会一下RK4的推导过程复杂程度.

[3]大规模问题有其自身的特点和难度， 此处对比的未知量个数相同的情况

例 4 考虑如下问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(x^2+y^2-1\right)^2, \quad t>0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(x^2+y^2-1\right)^2, \quad t>0 \\ x(0)=0.2; \quad y(0)=0.2 \end{cases}$$

记$\Delta t>0$是网格步长，$t_j = j\Delta t$, 记 $x_j \approx x(t_j)$, $y_j \approx y(t_j)$, 我们给出计算

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y), \quad t>0 \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y), \quad t>0 \end{cases}$$

的Euler方法

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \Delta t * f_1(t_j, x_j, y_j), \quad j \ge 0 \\ y_{j+1} = y_j + \Delta t * f_2(t_j, x_j, y_j), \quad j \ge 0 \\ (x_0,\ y_0) \quad \text{known initial values} \end{cases}$$

和单个方程的Euler方法一样是显格式，循环递推计算即可. 这里给出演示代码供参考.

```
1  clear, close all,
2  f1 = @( u,v)  v + u.*(u.^2 + v.^2 -1).^2;
3  f2 = @( u,v) -u + v.*(u.^2 + v.^2 -1).^2;
4  % % % % % % % %  lines 5-7 is not used for solve ODEs
5  m1 = 81; x1 = linspace(-2,2,m1); y1 = x1';
6  F1 =  f1(x1,y1); F2 =  f2(x1,y1);
7  figure(1); streamslice(x1,y1,F1,F2); hold on, axis equal,
8  dt = 0.01;  N = 985;  t0 = (0:dt:N*dt)';
9  X0 = [0.2 0.2]';
10 for j = 1:N
11     x = X0(1,j); y = X0(2,j);   f11 = f1(x,y); f12 = f2(x,y);
12     X0(:,j+1) = X0(:,j) + dt*[f11; f12];
13 %     for k = 1:11
14 %         mj =  X0(:,j) + dt*[f11; f12];
15 %         f11 = f1(mj(1),mj(2)); f12 = f2(mj(1),mj(2));
16 %     end
17 %     X0(:,j+1) = mj;
18 end
19 u = X0(1,:); v = X0(2,:);  figure(1); plot(u,v,'r-','LineWidth',2);
```

读者可测试代码发现，当时间步长过大时，数值格式不稳定.

ZYNSUDA

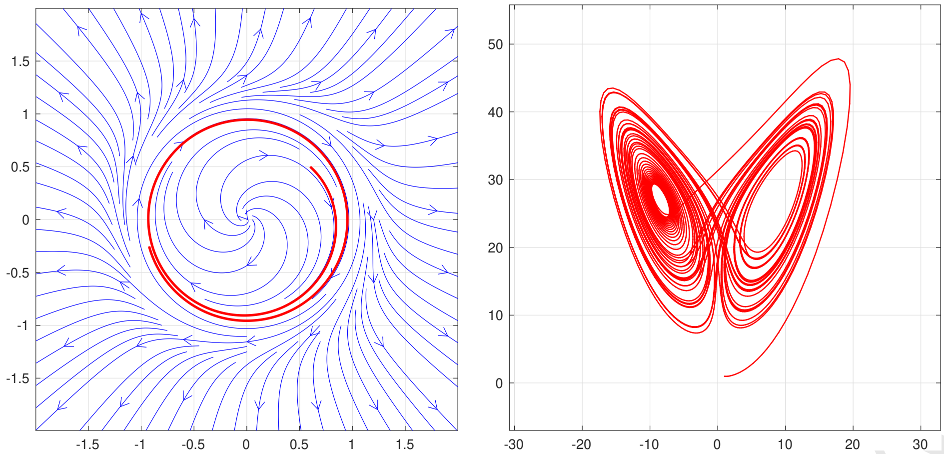

Figure 1: 左图由上一代码生成，可以测试当时间步长$dt=0.02$时Euler方法不稳定， 数值解趋于无穷大；而采用隐式后退Euler法计算(代码13-17行)，是稳定的；右图是Lorenz方程的数值解，方程表达式见例5.

例 5 考虑如下问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10y - 10x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 28x - y - xz, \quad t > 0 \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z, \\ [x(0), y(0), z(0)] = [1, 1, 1] \end{cases}$$

5 稳定性区域 A-stable

例 6 应用Euler方法计算

$$\begin{cases} y' = -100y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

精确解 $y(x) = e^{-100x}$ 取步长 $h = 0.025$，则Euler格式满足

$$y^{j+1} = -1.5 * y^j.$$

由此得到数值解 $y^j = (-1.5)^j$.

Euler法计算出了错误结果！ 想一想：相容、收敛、Lax 稳定等 条件都满足，为何算出错误的结果？ 上节方程组的例子，为何同样的步长，显式Euler不稳定而隐式Euler稳定?

定义 4 (稳定性区域) 对固定步长h和复数λ, 将数值方法

$$y_{j+1} = y_j + h\varphi(y_j, y_{j+1}, h)$$

ZYNSUDA

应用到模型问题

$$y' = \lambda y$$

并计算数值解. 若得到的数值解$\{y_j\}$ 数列一致有界，即 存在与h无关的常数使得

$$|y^j| < c, \quad j = 1, 2, \ldots$$

成立， 则称该数值方法对一组数(h, λ) 是绝对稳定的(Absolute-stability); 满足绝对稳定条件的$\mu = h\lambda$ 的所有元素组成的集合， 对应复平面的一个区域，称为——稳定性区域. 与实数轴的交集称为稳定性区间.

两点解释:

- 为何只考虑线性问题?
- λ为何要取复数?

标注 5.1 针对非线性问题可采用局部线性化方法:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (y - \bar{y}) + \mathbb{O}(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2) \\ &\approx Ay + Bx + C \end{aligned}$$

记(待定系数法): $z = y + Dx + E = y + \frac{B}{A}x + \frac{C + B/A}{A}$ 得到模型问题形式:

$$z' = Az$$

因此，只要考虑线性问题即可。

标注 5.2 若考查的是非线性微分方程组

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}, \qquad \frac{d}{dx}Y = F(Y)$$

同样可以考虑线性化, 得到如下形式的线性微分方程组

$$\frac{d}{dx}Y = AY, \quad \text{其中} \quad Y \text{ 为向量值函数} \quad A = (a_{ij})_{n\times n}$$

设矩阵A 可对角化为 $A = S\Lambda S^{-1}$, 即

$$\frac{d}{dx}(S^{-1}Y) = \Lambda(S^{-1}Y), \quad \frac{d}{dx}Z = \Lambda Z$$

实数矩阵的特征值λ_j可能为复数(complex number), 因此需要考虑复数情况。

ZYNSUDA

将数值格式应用到线性问题

$$y' = \lambda y$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. 由于问题是线性的，则可得如下分离形式

$$y_{j+1} = E(h\lambda) y_j$$

若要y_{j+1}一致有界，则必要 $|E(h\lambda)| \le 1$. 另外，$\mu = h\lambda$是一个整体，稳定性区域是μ在复平面上满足的区域.

5.1 Euler方法的稳定性区域

将Euler方法应用到模型问题得到:

$$y_{j+1} = y_j + h\lambda y_j = (1 + h\lambda) y_j = (1+\mu)^{j+1} y_0$$

若要绝对问题得到等价条件:

$$|1 + h\lambda| = |1 + \mu| \le 1$$

该条件对应图像：复平面上，以$(-1, 0)$为圆心，以$\mu = h$ 为变量的单位圆, 也即是Euler方法的稳定性区域. 若$\lambda < 0$ 取实数，则

$$-1 < 1 + \mu < 1, \quad -1 \le \mu \le 0$$

称为稳定性区间.

[练习:] 应用后退Euler方法到模型问题，推导稳定性区域, 即 $\mu = h\lambda$满足的不等式.

5.2 中点、梯形公式的稳定性区域

梯形公式应用到模型问题可得:

$$y_{j+1} - y_j = \frac{h}{2}(y_{j+1} + y_j) \qquad \Rightarrow y_{j+1} = E(h\lambda) \cdot y_j = \frac{1 + \lambda h}{1 - \lambda h} y_j$$

则稳定性区域满足的不等式为

$$\left|\frac{1 + \lambda h}{1 - \lambda h}\right| \le 1, \qquad \text{or} \quad |1 + \lambda h| \le |1 - \lambda h|.$$

记$\mu = \lambda h = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ 得

$$(1 + x)^2 + y^2 \le (1 - x)^2 + y^2 \Rightarrow x \le 0.$$

即得 梯形方法的稳定性区域为$h\lambda$−复平面的左半平面. 若$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, 可得 $h\lambda \le 0$. 梯形公式的稳定性区间为$(-\infty, 0]$.

ZXNSUDA

例 7 显式中点公式

$$y_{j+1} = y_j + h\left[f(x_{j+1/2}, y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j))\right]$$

隐式中点公式:

$$y_{j+1} = y_j + h\left[f(x_{j+1/2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2})\right]$$

试推导以上格式的稳定性区域满足的方程，并给出$Re(\lambda) < 0$时的稳定性区间。

定义 5 如果数值方法的绝对稳定区域包含了集合$\{h\lambda |\ \mathrm{Re}(h\lambda) < 0\}$, 也即是对步长$h$没有限制，则称该方法是A-稳定的，或者绝对稳定的.

标注 5.3 一般来说，显式格式都不能满足对所有$h > 0$ 是绝对稳定的，例如改进的Euler格式， 4阶Runge-Kutta分别对应($\mu = \lambda h$)

$$E(\lambda h) = 1 + \mu + \mu^2/2, \quad E(\lambda h) = 1 + \mu + \mu^2/2 + \mu^3/6 + \mu^4/24$$

其稳定性区域即是满足 $|E(\mu)| \leq 1$ 在复平面上围成的区域。 给出μ的显式表达式是困难的，我们利用Matlab函数fimplicit 画出 一些单步方法所对应的稳定性区域。

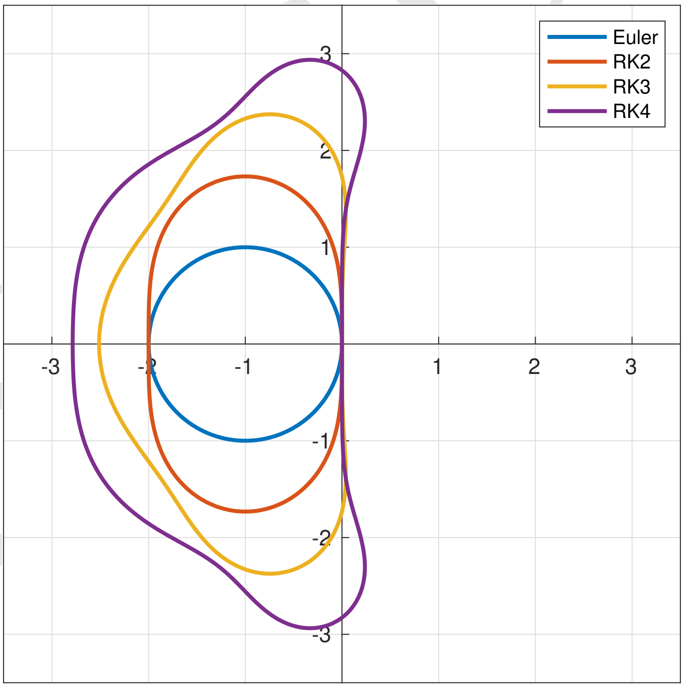

Figure 2: 彩色曲线围成的区域从小到大依次为Runge-Kutta方法1阶到4阶方法 的稳定性区域

ZJU DA

6 刚性 (Stiff) 问题(略)

考虑如下线性微分方程组:

$$\begin{cases} y_1' = -10y_2 \\ y_2' = 100y_1 - 1001y_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 100 & -1001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dx}Y = A * Y$$

初值取 $y_1(0) = y_2(0) = 1$, 或者 $Y(0) = [1;1]$.

计算得到矩阵的特征对 $AS = S\Lambda$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 100 & -1001 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix}$$

记 $Z(x) = S^{-1} * Y(x)$ 得到

$$\frac{d}{dx}Z = \Lambda Z \rightarrow Z(x) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{-1000x} \end{bmatrix}$$

根据初值条件 $Z(0) = S^{-1} * Y(0)$确定常数$c_1 = 11/111$, $c_2 = 1/111$. 进而得到精确解:

$$Y(x) = S * Z(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{111}e^{-x} + \frac{1}{111}e^{-1000x} \\ \frac{11}{111}e^{-x} + \frac{100}{111}e^{-1000x} \end{bmatrix}$$

思考: 对$x \in [0,1]$, 应用Euler方法或者改进的Euler方法求解上述问题, 是否需要对步长进行限制? 效率如何? 对$\lambda_1 = -1$, Euler方法要求步长$h < 2$ 即可, 而 对$\lambda_1 = -1000$, Euler方法要求步长$h < 0.002$. 由于方程组需要同时求解两个方程, 整体对步长限制$h < 0.002$.

标注 6.1 对于方程组情形, 线性化后的矩阵若最大和最小特征值比值过大则称为刚性问题。 所有显格式均不是A稳定的, 不适合求解刚性问题。 刚性比越大, 方程越病态, 最好采用A-stable方法, 例如后退Euler, 梯形方法。

上机练习

1. 分别用Euler方法, 改进的Euler方法, 经典4阶Runge-Kutta方法计算

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x}, & 1 \le x \le 2, \\ y(1) = 1; \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$, 画出数值解图像.

2. 分别用 Euler方法、RK4、以及后退的Euler方法求解刚性方程组（第四节例子）, 初值取

$$y(0) = z(0) = 1$$