Содержание

1 Случайные события

1.1 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное события, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{$«5», «6»$\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Событие A называют **следствием события** B, если из того, что произошло B, следует то, что произошло A, т. е. $B \subseteq A$.

Любое множество Ω содержит в себе два подмножества: $\emptyset$ и Ω. События, соответствующие данным множествам, называются **невозможным и достоверным** соответственно. Эти события называются несобственными событиями. Все остальные события называются собственными.

Пример №5. Из урны, содержащей два красных и три синих шара, извлекают один шар. Возможные события: $A = \{$извлечённый шар является красным или синим$\}$ – является достоверным, $B = \{$извлечён белый шар$\}$ – невозможным.

Операции над событиями

События – множества элементарных исходов. Следовательно, над ними можно выполнять все операции над множествами. При этом вводится следующая терминология.

1. Объединение множеств принято называть суммой событий: $A \cup B = A + B$;

2. Пересечение множеств называют произведением событий: $A \cap B = A \cdot B$;

3. Дополнение A называют событием, противоположным A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Классическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство исходов некоторого случайного эксперимента, $|\Omega| = N < \infty$;

2) все элементарные исходы равновозможны;

3) существует событие $A \subseteq \Omega, |A| = N_A$.

Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P(A) = \frac{N_A}{N}$.

Свойства

1. $P(A) \geq 0$.

   Доказательство. Т. к. $N_A \geq 0, N > 0$, то $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$.

2. $P(\Omega) = 1$.

   Доказательство. $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1, |\Omega| = N_\Omega = N$.

3. Если A, B – несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

   Доказательство. Т. к. Ω – конечно, тогда $A, B \subseteq \Omega$ – конечны. Существует формула: $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$. Т. к. A, B – несовместны, то $AB = \emptyset \Longrightarrow N_A + N_B = N_{A+B}$. Таким образом, $P(A + B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$.

1.2 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{«5», «6»\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Геометрическое определение вероятности

Пусть:

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;

2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ – мера множества;

3) возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию A пропорциональна мере этого события и не зависит от формы A и его расположения внутри Ω.

Тогда вероятностью осуществления события A называется число $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Недостаток геометрического определения заключается в том, что оно не учитывает возможность того, что некоторые области внутри Ω окажутся более предпочтительными, чем другие.

Статистическое определение вероятности

Пусть:

1) некоторый случайный эксперимент произведён n раз;

2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Тогда вероятностью осуществления события A называют эмпирический (т. е. найденный экспериментальным путём) предел: $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{n_A}{n}$.

Недостатки статичестического определения вероятности:

1) никакой эксперимент не может быть произведён бесконечно много раз;

2) с точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.3 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма–алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда $\mathcal{B}$ называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\overline{A} \in \mathcal{B}$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \mathcal{B}$.

Простейшие свойства

1. $\Omega \in \mathcal{B}$.

   Доказательство. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – по определению $\Rightarrow \exists A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 2) $A + \overline{A} \in \mathcal{B}$. Т. к. $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$.

2. $\emptyset \in \mathcal{B}$.

   Доказательство. Т. к. $\Omega \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{\Omega} \in \mathcal{B}, \overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$.

3. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то $A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \mathcal{B}$.

   Доказательство. Т. к. $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A_1}, ..., \overline{A_n}, ... \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 2) $\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ... \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 1) $\Rightarrow \overline{\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ...} \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (по закону Де Моргана) $\overline{\overline{A_1}} \cdot ... \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot ... \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \mathcal{B}$.

4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

   Доказательство. Из свойств операций над множествами: $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow$ (свойство 3) $A \cdot \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\mathcal{B}$ – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

1.4 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6.$

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) : x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35.$

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда $\mathcal{B}$ называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\overline{A} \in \mathcal{B}$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \mathcal{B}$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\mathcal{B}$ – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

Простейшие свойства

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $A + \overline{A} \in \mathcal{B}$ (аксиома 2 сигма–алгебры), $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow$ (по свойству вероятностей) $P(\Omega) = 1 = P(A + \overline{A}) \Rightarrow$ т. к. $A, \overline{A}$ – несовместны, то $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

   Доказательство. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) \Rightarrow$ (свойство 1) $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0, P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности.

3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

   Доказательство. $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$. Тогда $P(B) = P(A + (B \setminus A)) =$ ($A, B \setminus A$ – несовместны, аксиома 3) $= P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

4. $\forall A \in \mathcal{B} : 0 \leq P(A) \leq 1$.

   Доказательство. $P(A) \geq 0$ – из аксиомы 1. $\forall A : A \subseteq \Omega \Rightarrow$ (свойство 3) $P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow$ (свойство 2) $P(A) \leq 1$.

5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \mathcal{B}$.

   Доказательство. $\forall\forall A, B$:

   (а) $A + B = A + (B \setminus A), A \cdot (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

   (б) $B = AB + (B \setminus A), (AB)(B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$.

   Из (а) и (б): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6. $\forall\forall A_1, ..., A_n : P(A_1 + ... + A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - ... - P(A_{n-1}A_n) + $ $+ P(A_1A_2A_3) + ... + (-1)^{n+1}P(A_1A_2...A_n)$.

   Доказательство. Является обобщением свойства 5, может быть доказано с использованием метода математической индукции.

1.5 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$.

Теорема. Пусть:

1) зафиксировано событие $B, P(B) \neq 0$;

2) $P(A|B)$ рассматривается как функция события A.

Тогда $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Доказательство.

1. Докажем, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трём аксиомам вероятности:

   (а) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(AB) \geq 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) \geq 0$.

   (б) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{B} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

   (в) $P(A_1 + ... + A_n + ...|B) = \frac{P((A_1+...+A_n+...)B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1B + A_2B + ... + A_nB + ...) = |A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместны $\Rightarrow$ $A_1B, ...A_nB, ...$ – попарно несовместны, тогда используем расширенную аксиому сложения$| = \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1B) + P(A_2B) + ... + P(A_nB) + ...] = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + ... + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + ... =$
   $= P(A_1|B) + ... + P(A_n|B) + ...$

2. Т.к. свойства безусловной вероятности являются прямыми следствиями из аксиом безусловной вероятности, а условная вероятность этим аксиомам удовлетворяет, то она удовлетворяет свойствам безусловной вероятности.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий. Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Доказательство. Т.к. $P(A) > 0$, то определена условная вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема. Формула умножения вероятностей для n событий. Пусть:

1) $A_1, ..., A_n$ – события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1})$.

Доказательство.

1. $k = \overline{1, n-1} : A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot ... \cdot A_k$. По 3-му свойству вероятности $P(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$. Следовательно, все условные вероятности, входящие в правую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.

2. Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий:

$P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2}) \cdot$
$\cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = ... = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$.

Пример. На семи карточках написаны буквы слова «ШОКОЛАД». Карточки тщательно перемешивают, и по очереди извлекают случайным образом три из них без возвращения первых карточек. Найти вероятность того, что эти три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»:

Событие $A = \{$три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»$\}$.

Введет следующие события: $A_1 = \{$на первой извлеченной карточке написано «Ш»$\}$; $A_2 = \{$на второй извлеченной карточке написано «О»$\}$; $A_3 = \{$на третьей извлеяенной карточке написано «К»$\}$.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$.

1.7 Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих свойств.

События A и B, связанные с некоторым случайным экспериментом и имеющие ненулевую вероятность, называеются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall\forall i, j : i \neq j; i, j \in \{1, ..., n\} : P\{A_iA_j\} = P\{A_i\}P\{A_j\}$.

События $A_1, ..., A_n$, связанные с некоторым случайным экспериментом, называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in 2, ..., n, \forall\forall i_1 < i_2 < ... < i_k : P\{A_{i_1}...A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot ... \cdot P\{A_{i_k}\}$.

Если $A_1, ..., A_n$ независимые в совокупности, то $A_1, ..., A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

Пример Берништейна.

Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры «1», «2», «3» соответственно, а на четвертой написано «123». Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события $A_i = \{$на нижней грани есть $i\}, i \in 1, 2, 3$ – попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$.

2. $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – попарно независимые.

3. $P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – не являются независимыми в совокупности.

Теорема

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Доказательство

Необходимость. A, B – независимые события, т.е. $P(AB) = P(A)P(B)$. $P(A|B) = |$по определению условной вероятности$| = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. $P(A|B) = P(A)$. $P(AB) = |$по формуле умножения вероятностей$| = P(B)P(A|B) = P(B)P(A), P(B) > 0 \Rightarrow A, B$ – независимые.

Доказательство для (2) аналогично.

1.8 Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теоремы о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятностей.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Говорят, что события $H_1, ..., H_n \in \mathcal{B}$ образуют полную группу событий, если:

1) $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;

2) $H_i H_j = \emptyset, i \neq j$;

3) $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Теорема. Формула полной вероятности

Пусть:

1. $H_1, ..., H_n$ – полная группа событий.

2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$.

3. $A \in \mathcal{B}$ – событие.

Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство. $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + ... + H_n)) = P(AH_1 + ... + AH_n) = |H_1, ..., Hn$ – попарно независимые события$| = P(AH_1) + ... + P(AH_n) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Теорема. Формула Байеса

Пусть:

1. Выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности.

2. $A \in \mathcal{B} : P(A) > 0$.

Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{A} = |$числитель – теорема умножения тероятностей, знаменатель – формула полной вероятности$| = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)}$.

Априорная вероятность – это вероятность, которая известна или оценивается до проведения случайного эксперимента.

Апостериорная вероятность – это вероятность события, рассчитанная после того, как был проведён эксперимент.

1.9 Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, т.е. вероятность реализации успеха в i-ом испытании не зависит от исходов первого, второго,...,$i-1$-го испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство

1. Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа $(x_1, ..., x_n)$, где
$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании имел место успех,} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м испытании имела место неудача.} \end{cases}$
2. Пусть $A = \{\text{в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов}\}$. Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц и $n-k$ нулей. В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i, и тогда общая вероятность исхода будет равна: $p^k q^{n-k}$. Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_n^k штук, что означает: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Следствие (1)

Вероятность того, что количество успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено между k_1 и k_2, равна:$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Доказательство

1. Пусть $A_i = \{\text{в серии произошло ровно } i \text{ успехов}\}, \quad i = k_1, \ldots, k_2$, и $P(A_i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}$.
2. Тогда $A = A_{k_1} + A_{k_1+1} + \cdots + A_{k_2}$, где $P(A) = P(A_{k_1} + \cdots + A_{k_2})$.

   Так как события A_i и A_j несовместны при $i \neq j$, то $P(A) = P(A_{k_1}) + \cdots + P(A_{k_2})$.

   Подставим выражение для $P(A_i)$: $P(A) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P\{A_i\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

   Таким образом: $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Следствие (2)

Вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (и неудачи $q = 1 - p$) произойдёт хотя бы один успех, равна:$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.

Доказательство

Пусть $A = \{\text{в серии произошёл хотя бы один успех}\}$. Тогда противоположное событие: $\bar{A} = \{\text{в серии не будет ни одного успеха}\}$.

Вероятность события A равна:$P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Вероятность $P(\bar{A})$ соответствует $P_n(0)$, то есть вероятности того, что в серии из n испытаний не произойдёт ни одного успеха:$P(\bar{A}) = P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0}$.

Подставляя значения, получаем:$P(\bar{A}) = q^n$.

Таким образом:$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q^n$.

2 Случайные величины

2.1 Сформулировать определение случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Доказать свойства функции распределения.

Пусть (Ω, β, P) – вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Случайной величиной называется функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$.

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.

   Доказательство. $F(x)$ определена как вероятность, т.е. $F(x) = P\{...\} \in [0; 1]$.

2. F – неубывающая функция, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

   Доказательство. Если $x_1 \le x_2$, тогда $F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{\underbrace{\{X < x_1\}}_{\text{Событие } A} + \underbrace{\{x_1 \le X < x_2\}}_{\text{Событие } B}\}$.
   События A и B несовместны $\Rightarrow F(x_2) = P\{\underbrace{\{X < x_1\}}_{F(x_1)} + \underbrace{\{x_1 \le X < x_2\}}_{\ge 0}\} \ge F(x_1)$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

   Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_1, x_2, x_3, ...$ такую, что

   (a) $x_1 < x_2 < x_3 < ...$;

   (b) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = +\infty$.

   $A_i = \{X < x_i\}, i \in \mathbb{N}$; $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq ...$ – неубывающая последовательность событий. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = |\text{аксиома непрерывности}| = P\{X < +\infty\} = 1$.

   Т.к. $x_1, x_2, x_3, ...$ – произвольная последовательность (неубывающая и стремящаяся к бесконечности), то в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Вторая часть этого свойства доказывается аналогично.

4. $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$, в каждой точке F непрерывна слева.

   Доказательство. Пусть $x_1, x_2, ...$ – возрастающая последовательность, $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$.

   Пусть $A_i = \{X < x_i\}, i \in \mathbb{N}$. Тогда событие $\{X < x_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, причем последовательность событий $A_1, A_2, ...$ является возраставющей $\Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} F(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = |\text{аксиома непрерывности}| = P\{X < x_0\} = F(x_0)$. Т.к. $x_1, x_2, ...$ - произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 слева, то в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$.

5. $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

   Доказательство. $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\} \Rightarrow \underbrace{P\{X < b\}}_{F(b)} = \underbrace{P\{X < a\}}_{F(a)} +$

   $+P\{a \le X < b\} \Rightarrow P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

2.2 Сформулировать определения случайной величины и функции распределения случайной величины. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины. Доказать свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Пусть (Ω, β, P) – вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Случайной величиной называется функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$.

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Случайная величина называется **дискретной**, если множество её значений конечно или счётно.

Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (F – функция распределения вероятностей случайной величины X). При этом f называют функцией плотности распределения вероятности случайной величины X.

Свойства плотности распределения вероятностей

1. $f(x) \geq 0$.

   Доказательство. F – неубывающая функция $\Rightarrow f(x) = F^{'}(x) \geq 0$.

2. $P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx$.

   Доказательство. $P\{x \leq X < b\} = F(b) - F(a) = [f(x) = F^{'}(x)$; по формуле Ньютона–Лейбница$] =$
   $= \int_a^b f(x)dx$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   Доказательство. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = |$свойство 2$| = \lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_2) - \lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1) =$
   $= F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$; x_0 – точка непрерывности функции f, Δx – мало.

   Доказательство. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = |$свойство 2$| = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. Т.к. x_0 – точка непрерывности f, а Δx – мало, то можно считать, что в окрестности $(x_0, x_0 + \Delta x)$ функция $F^{'} = f$ непрерывна. Применим к функции f на $[x_0, x_0 + \Delta x]$ т. Лагранджа $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \underbrace{F^{'}(\xi)}_{f(\xi)} \Delta x$,

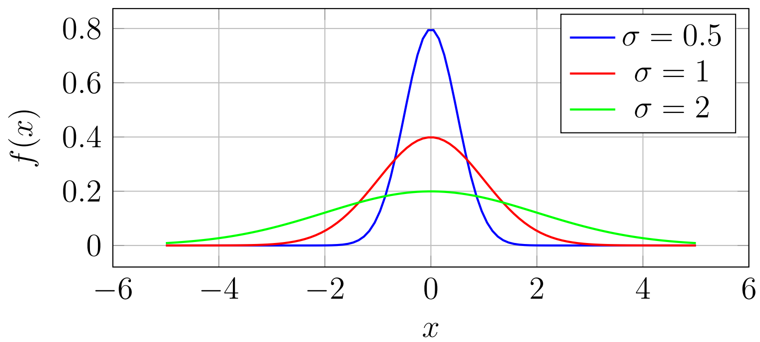
   где $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. Т.к. Δx мало, а f непрерывна в некоторой окрестности x_0, то можно считать, что $f(\xi) \approx f(x_0)$. Таким образом, $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$.

5. Для любого наперед заданного $x_0 \in \mathbb{R}$: $P\{X = x_0\} = 0$.

   Доказательство. $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] = 0$, т.к. F – непрерывна.

2.3 Сформулировать определение нормальной случайной величины, указать геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона. Доказать формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Говорят, что случайная величина X имеет **нормальное распределение** с параметрами m и $\sigma^2 (\sigma > 0)$, если её функция плотности имеет вид $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$. Обозначается $X \sim N(m, \sigma^2)$.



Функция плотности нормального распределения имеет характерную колоколообразную форму; m является координатой x «центра» этого колокола (центра симметрии), а σ характеризует разброс значений случайной величины; чем меньше σ, тем выше экстремум функции плотности.

Распределение $N(0,1)$ называет **стандартным нормальным распределением**; для него функция плотности равна $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$.

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Рассмотрим

$$P\{a \leq X < b\} = \left\langle \text{по свойству плотности распределения} \right\rangle = \int_a^b f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left\langle t = \frac{x-m}{\sigma},\ dx = \sigma\,dt;\ x = a \implies t = \frac{a-m}{\sigma},\ x = b \implies t = \frac{b-m}{\sigma} \right\rangle =$$

$$= \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left\langle \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{0,1}(t)\,dt \right\rangle =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \left\langle \Phi(t) \text{ — стандартное нормальное распределение, такое, что}\right.$$

$$\left.\Phi(0) = \frac{1}{2} \implies \Phi(t) \right\rangle = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Т.к. $X \sim N(m, \sigma^2)$ – непрерывная случайная величина, то

$$P\{a \leq X \leq b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

2.4 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать предельные свойства.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.
2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Свойства

1. $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$.

2. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией;

3. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0.$

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$; при $x_1 \to -\infty$ событие $\{X_1 < -\infty\}$ является невозможным. Произведение невозможного события на событие $\{X_2 < x_2\}$ является невозможным событием, поэтому $F(x_1, x_2)$ стремится к нулю при $x_1 \to -\infty$, $x_2 = \text{const}$.

   $\lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0$ доказывается аналогично.

4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1.$.

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$. Событие $\{X_1 < +\infty\}$ является достоверным, $\{X_2 < +\infty\}$ также является достоверным, а произведение достоверных событий – достоверное событие.

5. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2), \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1),$

   где F_{X_i} – маргинальная функция распределения случайной величины X_i.

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$. Событие $\{X_2 < +\infty\}$ является достоверным, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = P\{X_2 < x_2\} = F_{X_2}(x_2)$.

   Для второго предела – доказывается аналогично.

6. $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\} : Pa_1 \le X < b_1, a_2 \le Y < b_2 = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) -$
   $-F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.

7. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является непрерывной слева в каждой точке;

2.5 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать формулу для вычисления $P\{a_1 \le X_1 < b1, a_2 \le X_2 < b_2\}$.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.

2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Свойства

1. $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$.
2. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией;
3. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0.$
4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1..$
5. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2), \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1),$

   где F_{X_i} – маргинальная функция распределения случайной величины X_i.
6. $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\} : P\{a_1 \le X < b_1, a_2 \le Y < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.
7. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является непрерывной слева в каждой точке;

Формула для вычисления $P\{a_1 \le X_1 < b1, a_2 \le X_2 < b_2\}$

(a) Найдем вероятность попадания случайного вектора (X_1, X_2) в полосу $\{X_1 < x_1, a_2 \le X < b_2\}$

1. $\{X_1 < x_1, X_2 < b_2\} = \{X_1 < x_1, a_2 \le X < b_2\} + \{X_1 < x_1, X_2 < a_2\}$
2. По теореме сложения: $P\{X_1 < x_1, X_2 < b_2\} = P\{X_1 < x_1, a_2 \le X_2 < b_2\} + P\{X_1 < x_1, X_2 < a_2\} \Rightarrow P\{X_1 < x_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)$.

(b)

1. $\{X_1 < b_1, a_2 \le X < b_2\} = \{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} + \{X_1 < a_1, a_2 \le X_2 < b_2\}$.
2. По формуле сложения: $P\{X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = P\{a_1 \le X_1 < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} + P\{X_1 < a_1, a_2 \le X_2 < b_2\} \Rightarrow$ из пункта (a) : $P\{a_1 \le X_1 < b1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.

2.6 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировть определение непрерывного случайного вектора и доказать свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.

2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ называется **непрерывным**, если существует функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что для каждой точки $(x_1, ..., x_n)$ выполняется $F(x_1, ..., x_n) =$
$= \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, ..., t_n) dt_n$, где F – функция распределения плотности случайного вектора $\vec{X}$. При этом f называется **функцией плотности распределения вероятностей** этого вектора.

Свойства плотности распределения

1. $f(x_1, x_2) \geq 0$.

2. $P\{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$.

3. $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

4. $P\{x_1^0 \leq x_1 < x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq X_2 < x_2^0 + \Delta x_2\} \approx f(x_1^0, x_2^0) \Delta x_1 \Delta x_2$, (x_1^0, x_2^0) – точка непрерывности функции f, $\Delta x_1, \Delta x_2$ достаточно малы.

5. Для любых наперед заданных $x_1^0, x_2^0 : P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = 0$.

6. $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \int\int_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = f_{X_1}(x_1)$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 = f_{X_2}(x_2)$, где f_{X_1}, f_{X_2} – маргинальные функции плотности случайных величин X_1 и X_2 соответственно.

Доказательства

Доказательства свойств 1-5 аналогичны одномерному случаю.

Свойство 6 является обобщением свойства 2 на случай произвольной области D (без доказательства).

Доказательство свойства 7. $F(x_1, +\infty) = F_{X_1}(x_1)$ – по свойству двумерной функции распределения; таким образом (подставим определение функции распределения для двумерного вектора), $F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$.

$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \Big\langle x_1$– точка непрерывности функции $f_{X_1}(x_1)$, и точка по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом$\Big\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2$.

Вторая формула доказывается аналогично.

2.7 Сформулировать определение пары независимых случайных величин. Доказать свойства независимых случайных величин. Понятия попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$, где F – совместная функция распределения X и Y ($\equiv$ функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y – маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

Свойства независимых случайных величин

1. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},$ события$\{X < x\}$ и$\{Y < y\}$ независимы.

   Доказательство. Очевидно следует из определения независимых случайных величин.

2. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$ события$\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независимы.

   Доказательство.

   (a) Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Тогда

$$P\{x_1 \le X < x_2, \, y_1 \le Y < y_2\} = (\text{свойство функции распределения случайного вектора}) =$$

$$= F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) =$$

$$= F_X(x_1)F_Y(y_1)+F_X(x_2)F_Y(y_2)-F_X(x_1)F_Y(y_2)-F_X(x_2)F_Y(y_1) = [F_X(x_2)-F_X(x_1)][F_Y(y_2)-F_Y(y_1)] =$$

$$= (\text{свойство одномерной функции распределения}) = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\}.$$

   (b) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R},$

$$P\{x_1 \le X < x_2, \, y_1 \le Y < y_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\}$$

   Тогда

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} =$$

$$= (\text{при } x_1 = -\infty, x_2 = x, y_1 = -\infty, y_2 = y) =$$

$$= P\{-\infty < X < x\}P\{-\infty < Y < y\} = F_X(x)F_Y(y)$$

3. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall M_1, M_2$ события$\{X \in M_1\}$ и$\{Y \in M_2\}$ независимы, где M_1, M_2 – промежутки или объединения промежутков в $\mathbb{R}$.

   Доказательство. Является обобщением свойств 1 и 2.

4. Если X и Y — дискретные случайные величины, то X, Y независимы $\Leftrightarrow p_{ij} \equiv P_X(x_i)P_Y(y_j)$, где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $P_X(x_i) = P\{X = x_i\}$, $P_Y(y_j) = P\{Y = y_j\}$.

   Доказательство.

(a) Достаточность ($\Leftarrow$). Достаточность была доказана выше, в рассуждениях перед определением независимых случайных величин.

(b) Необходимость ($\Rightarrow$). Необходимость студентам предлагается доказать самостоятельно.

5. Если X и Y — непрерывные случайные величины, то X, Y независимы $\Leftrightarrow f(x, y) \equiv f_X(x) f_Y(y)$.

   Доказательство.

   (a) Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $F(x, y) \equiv F_X(x) F_Y(y)$. По свойству двумерной плоскости:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} [F_X(x) F_Y(y)] = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) f_Y(y)$$

   (b) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. Тогда

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f(t,v)\,dv = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_X(t) f_Y(v)\,dv = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt}_{F_X(x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv}_{F_Y(y)} = F_X(x) F_Y(y)$$

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном вероятностном пространстве, называются:

— **Попарно независимыми**, если X_i и X_j независимы при $i \neq j$;

— **Независимыми в совокупности**, если $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$, где F — совместная функция распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ ($\equiv$ функция распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$); F_{X_i} — маргинальные функции распределения случайных величин $X_i, i = 1, \ldots, n$.

2.8 Понятие условного распределения случайной величины. Сформулировать определение условного ряда распределения компоненты двумерного дискретного случайного вектора. Привести рассуждения, приводящие к такому определению. Сформулировать определение условной плотности распределения компоненты двумерного непрерывного случайного вектора. Сформулировать критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений

Условное распределение случайного вектора (X, Y) описывает распределение одной из случайных величин (или их совокупности) при фиксированном значении другой.

Случай дискретного случайного вектора

Пусть выполняются следующие условия.

1. (X, Y) – дискретный случайный вектор;
2. $X \in \{x_1, ..., x_m\}, Y \in \{y_1, ..., y_n\}$;
3. $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_i)\}, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$.

   $P_{X_i} = P\{X = x_i\}, i = \overline{1; m}$

   $P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}, j = \overline{1; n}$

4. Известно, что $Y = y_j$ для некоторого фиксированного j.

Тогда

$$P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\} = (\text{из определения условной вероятности}) =$$
$$= \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(Y = y_j)} = \frac{P((X,Y) = (x_i, y_j))}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{P_Y}.$$

Условная вероятность того, что случайная величина Y приняла значение y_j при условии $X = x_i$ определяется аналогично.

Набор вероятностей $P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\}, i = \overline{1;m}$ для данного фиксированного j называется условным распределением случайной величины X при условии $Y = y_j$ (аналогично для случайной величины Y при условии $X = x_i$ для данного фиксированного i). По этому набору можно составить ряд распределения, представленного таблицей значений.

Случай непрерывного случайного вектора

В случае непрерывного случайного вектора (X, Y).

Условной плотностью распределения случайной величины X при условии $Y = y$ называется функция

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

где f – совместная плотность распределения случайных величин X и Y (плотность распределения случайного вектора (X, Y)), f_Y – маргинальная плотность распределения случайной величины Y.

Аналогичным образом определяется условная плотность распределения случайной величины Y при условии $X = x$.

Критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений

1. Пусть (X, Y) – двумерный случайный вектор. Тогда следующие условия эквивалентны:

   — X, Y – независимые.

   — $F_X(x|Y = y) \equiv F_X(x)$ для всех y, в которых определена $F_X(x|Y = y)$.

   — $F_Y(y|X = x) \equiv F_Y(y)$ для всех x, в которых определена $F_Y(y|X = x)$.

2. Если (X, Y) – непрерывный случайный вектор, то следующие условия эквивалентны:

   — X, Y – независимые.

   — $f_X(x|Y = y) \equiv f_X(x)$ для всех y, в которых определена $f_X(x|Y = y)$.

   — $f_Y(y|X = x) \equiv f_Y(y)$ для всех x, в которых определена $f_Y(y|X = x)$.

3. Если (X, Y) – дискретный случайный вектор ($X \in \{x_1, ..., x_m\}$, $Y \in \{y_1, ..., y_n\}$), то следующие утверждения эквивалентны:

   — X, Y – независимые.

— $P\{X = x_i | Y = y_j\} \equiv P\{X = x_i\}$ для всех $j = \overline{1, n}$.

— $P\{Y = y_j | X = x_i\} \equiv P\{Y = y_j\}$ для всех $i = \overline{1, m}$.

2.9 Понятие функции скалярной случайной величины. Доказать теорему о формуле для вычисления плотности $f_Y(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$, если X – непрерывная случайная величина, а φ — монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Сформулировать аналогичную теорему для кусочно-монотонной функции φ

Пусть:

1. X – некоторая случайная величина;
2. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая известная функция.

Тогда $\varphi(X) = Y$ – некоторая случайная величина.

Если X – **непрерывная** случайная величина, то в зависимости от функции φ случайная величина $Y = \varphi(X)$ может быть как непрерывной случайной величиной, так и дискретной или смешанного типа.

Теорема

Пусть

1. X – непрерывная случайная величина;
2. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
3. φ монотонна и непрерывно дифференцируема;
4. ψ – функция, обратная к φ (так как φ – монотонная, то существует $\psi = \varphi^{-1}$);
5. $Y = \varphi(X)$.

Тогда

1. Y также является непрерывной случайной величиной;
2. Плотность вероятности $f_Y(y)$ задается следующим образом:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)| \,.$$

Доказательство

1. $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\}$
   (a) Если φ – монотонно возрастающая функция, то $\varphi(X) < y \iff X < \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$;
   (b) Если φ – монотонно убывающая функция, то $\varphi(X) < y \iff X > \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$;
2. В случае случая a, $F_Y(y) = P\{X < \psi(y)\} = F_X(\psi(y))$; в случае b $F_Y(y) = P\{X > \varphi(y)\} = 1 - P\{X \preceq \psi(y)\} = \langle X\text{– непрерывна}\rangle = 1 - P\{X < \psi(y)\} = 1 - F_X(\psi(y))$;
3.
$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{d}{dy}[F_X(\psi(y))] = F_X'(\psi(y)) \cdot \psi'(y), & \text{если a} \\ \frac{d}{dy}[1 - F_X(\psi(y))] = -F_X'(\psi(y)) \cdot \psi'(y), & \text{если b} \end{cases} = f_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|.$$

Теорема

Пусть

1. X – непрерывная случайная величина;
2. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является кусочно-монотонной функцией, имеющей n интервалов монотонности;
3. φ дифференцируема;
4. Для данного $y \in \mathbb{R}, x_1 = x_1(y), ..., x_k = x_k(y) (k \leq n)$ – это все решения уравнения $y = \varphi(x)$, принадлежащие интервалам $I_1, ..., I_k$ монотонности функции φ.

Тогда для данного в последнем условии значения y:

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_j(y)) \cdot |\psi_j'(y)|,$$

где $\psi_j(y)$ – функция, обратная к $\varphi(x)$ на интервале $I_j, j = \overline{1, k}$.

2.10 Понятие скалярной функции случайного вектора. Обосновать формулу для вычисления функции распределения случайной величины Y , функционально зависящей от случайных величин X1 и X2, если (X1, X2) – непрерывный случайный вектор. Доказать теорему о формуле свертки

Скалярные функции случайного вектора

Пусть:

1. (X_1, X_2) – двумерный случайный вектор.
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
3. $Y = \varphi(X_1, X_2)$ – некоторая одномерная случайная величина.

Случай непрерывного случайного вектора

Если (X_1, X_2) – непрерывный случайный вектор, то функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

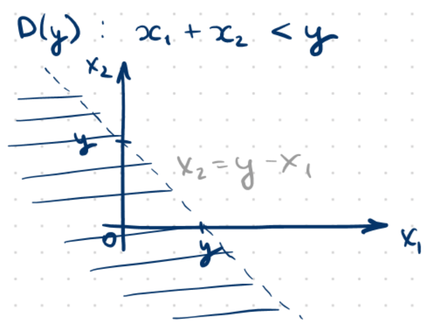
где f – совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2, $D(y) = \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}$.

Пусть есть двумерный случайный вектор (X_1, X_2), и:

1. (X_1, X_2) – непрерывный случайный вектор;
2. X_1, X_2 – независимы;
3. $Y = X_1 + X_2$;
4. $f(x_1, x_2)$ – совместная плотность распределения.

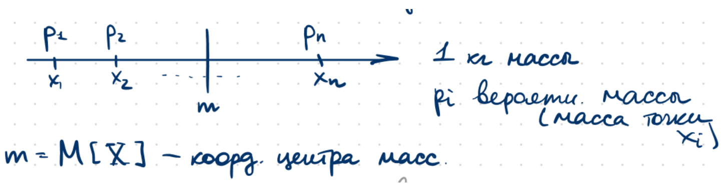
Тогда $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$ – **функция свертки**.

Доказательство. $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X_1 + X_2 < y\} = \int\int_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y - x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \left\{ x_1, x_2 \text{– независимы, } f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f_{X_1}(x_1) \int_{-\infty}^{y - x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1)$. Продифференцируем: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_Y(y)) = [\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1)\, dx_1]' = \left\{ \frac{d}{dy}(F_{X_2}(y - x_1)) = f_{X_2}(y - x_1) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1$.

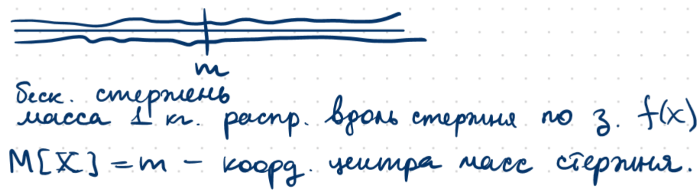


2.11 Сформулировать определение математического ожидания для дискретной и непрерывной случайных величин. Механический смысл математического ожидания. Доказать свойства математического ожидания. Записать формулы для вычисления математического ожидания функции случайной величины и случайного вектора

Пусть X – **дискретная** случайная величина. **Математическое ожидание** (среднее значение) случайной величины X : $M[X] = \sum_i x_i p_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, i пробегает все номера элементов конечного множества значений случайной величины.



Пусть X – **непрерывная** случайная величина, $f_X(x)$ – плотность распределения. **Математическое ожидание** (среднее значение) случайной величины X : $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$.



Свойства:

1. Если $P\{X = x_0\} = 1$ (т.е. если X фактически не является случайной), то $MX = x_0$;
2. $M[aX + b] = a \cdot MX + b$;
3. $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$;
4. Если X_1, X_2 – независимы, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$.

Доказательства:

1. Ряд распределения:

X	x_0
P	1

   По определению: $MX = \sum_i p_i x_i = 1 \cdot x_0 = x_0$;

2. Докажем для случая непрерывной случайной величины:

$$
\begin{aligned}
M[aX+b] &= \langle \varphi(x) = ax+b; aX+b \text{ – непрерывная случайная величина} \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f(x)\, dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \\
&= a \cdot MX + b;
\end{aligned}
$$

3. Доказательство для дискретного случая. Элементы X_1 обозначаются индексами i, пробегающими множество I; для X_2 используются j и J. Запись о:

$$
\begin{aligned}
M[X_1+X_2] &= \langle \varphi(x_1,x_2) = x_1+x_2 \rangle \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(x_{1,i}+x_{2,j})p_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{1,i}p_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{2,j}p_{ij} \\
&= \sum_{i\in I} x_{1,i}\sum_{j\in J} p_{ij} + \sum_{j\in J} x_{2,j}\sum_{i\in I} p_{ij} \\
&= MX_1 + MX_2;
\end{aligned}
$$

4. Докажем для непрерывных случайных величин:

$$
\begin{aligned}
M[X_1X_2] &= \langle \varphi(x_1,x_2) x_1 x_2 \rangle = \int\int_{R^2} x_1x_2 f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \langle X_1, X_2 \text{ – независимы} \Rightarrow f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1)(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2) \\
&= (MX_1)(MX_2).
\end{aligned}
$$

Формулы для вычисления математического ожидания

1. X – случайная величина, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   - $M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)p_i$, если X – дискретная случайная величина;
   - $M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$, если X – непрерывная случайная величина, $f(x)$ – плотность;
2. $\vec{X} = (X_1, X_2)$ – случайный вектор, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, Y = \varphi(X_1, X_2)$. $p_{ij} = P_i\{(X_1,X_2) = (x_{1,i}, x_{2,j})\}$:
   - $M[\varphi(X_1,X_2)] = \sum_{i,j} \varphi(x_{1,i}, x_{2,j})p_{ij}$, если $\vec{X}$ – дискретный вектор;
   - $M[\varphi(X_1,X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$, где $f(x_1,x_2)$ – совместная плотность непрерывного случайного вектора $\vec{X}$.

2.12 Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Механический смысл дисперсии. Доказать свойства дисперсии. Понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины

Дисперсией случайной величины X называется $DX = M[(X-m)^2]$, где $m = MX$.

Если X – **дискретная** случайная величина, то $DX = \sum_i (x_i - m)^2 p_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}$. Если X – **непрерывная** случайная величина, то $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx$, где f – функция плотности случайной величины X.

Механический смысл дисперсии: дисперсия является моментом инерции вероятностной массы относительно точки $m = MX$, т.е. характеризует «разброс» вероятностной массы относительно математического ожидания этой случайной величины. Чем больше D, тем больше «разброс».

Свойства:

1. для любого случайного вектора $X : DX \geq 0$;
2. если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$;
3. $D[aX + b] = a^2 DX, a, b = const$;
4. $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$;
5. если X_1, X_2 – независимые случайные величины, то $D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2]$.

Доказательства:

1. $DX = MY$, где $Y = (X - m)^2$. Т.к. $Y \geq 0$, то следует, что $DX = MY \geq 0$;
2. ...

X	x_0
P	1

   Математическое ожидание $MX = m = x_0$. Дисперсия $DX = \sum_i (x_i - m)^2 p_i = (x_0 = x_0)^2 \cdot 1 = 0$;

3.

$$
\begin{aligned}
D[aX + b] &= M[[(aX + b) - M(aX + b)]^2] = M[[aX + b - a \cdot MX - b]^2] \\
&= M[(a(X - MX))^2] = a^2 M[(X - MX)^2] \\
&= a^2 DX;
\end{aligned}
$$

4. Обозначим $m = MX$, тогда:

$$
\begin{aligned}
DX &= M[(X = m)^2] = M[X^2 - 2mX + m^2] = M[X^2] - 2m \cdot M[X] + m^2 \\
&= M[X^2] - m^2;
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
D(X_1 + X_2) &= \langle \text{по свойству 4} \rangle = M[(X_1 + X_2)^2] - (M(X_1 + X_2))^2 \\
&= M[X_1^2] + M[X_2^2] + 2M[X_1 X_2] - (MX_1)^2 - (MX_2)^2 - 2MX_1 \cdot MX_2 = \\
&= \langle X_2, X_2 \text{ – независимые, тогда } M[X_1 X_2] = MX_1 \cdot MX_2 \rangle \\
&= (M[X_1^2] - (MX_1)^2) + (M[X_2^2] - (MX_2)^2) \\
&= DX_1 + DX_2.
\end{aligned}
$$

DX имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины X. Это не всегда удобно на практике, поэтому рассматривают такую числовую характеристику, как среднеквадратичное отклонение.

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называют число $\sigma_X = \sqrt{D[X]}$.

2.13 Сформулировать определение математического ожидания и дисперсии. Записать законы распределения биномиальной, пуассоновской, равномерной, экспоненциальной и нормальной случайной величин. Найти математические ожидания и дисперсии этих случайных величин

Пусть X – **дискретная** случайная величина. **Математическое ожидание** (среднее значение) случайной величины $X: M[X] = \sum_i x_i p_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, i пробегает все номера элементов конечного множества значений случайной величины.

Пусть X – **непрерывная** случайная величина, $f_X(x)$ – плотность распределения. **Математическое ожидание** (среднее значение) случайной величины $X: M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$.

Дисперсией случайной величины X называется $DX = M[(X-m)^2]$, где $m = MX$.

Биноминальная случайная величина

Говорят, что случайная величина X имеет биноминальное распределение с параметром $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$, если она принимает значения $0, 1, ..., n$ с вероятностями: $P\{X = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}, q = 1-p$. Обозначается: $X \sim B(n,p)$.

$$MX = M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np$$

$$DX = D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \langle X_i \text{ независимы } \rangle = \sum_{i=1}^{n} DX_i = npq.$$

Пуассоновская случайная величина

Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $0, 1, 2, ...$ с вероятностями: $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Обозначается: $X \sim \Pi(\lambda)$.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}\lambda}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \langle i = k-1 \rangle = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Дисперсия выражается как $DX = M[X^2] - (MX)^2$.

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = ... = \lambda^2 + \lambda. \text{ Тогда } DX = \lambda.$$

.

Равномерное распределение

Говорят, что случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если она является непрерывной случайной величиной с функций плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{где } c = const.$$

Обозначается: $X \sim R(a, b)$.

$X \sim R(0, 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} DX &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \frac{a+b}{2}) f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2\, dx \\ &= \frac{1}{3(b-a)}(x - \frac{a+b}{2})^3 \Big|_b^a = \frac{1}{3(b-a)}(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}) = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Экспоненциальное распределение

Говорят, что случайная величина X распределена по закону с параметром $\lambda > 0$, если X является непрерывной случайной величиной, функция плотности которой имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначается: $X \sim Exp(\lambda)$.

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) x = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{+\infty} x\, de^{-\lambda x} \\ &= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

$DX = M[X^2] - (MX)^2$,

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{+\infty} x^2\, de^{-\lambda x} = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $DX = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Нормальное распределение

Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2, если X – является непрерывной случайной величиной, функция плотности которой имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Обозначается: $X \sim N(m, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \langle x - m = t \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+m)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt + m \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt \\ &= m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} DX &= M[(X - MX)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\ &= \langle \frac{x-m}{\sigma} = t, dx = \sigma\,dt \rangle = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{\frac{t^2}{2}}\,dt^2 \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\,de^{-\frac{t^2}{2}}\,dt^2 = \langle \text{ по частям } \rangle = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} te^{-e^{\frac{t^2}{2}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\ &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.14 Сформулировать определение ковариации и записать формулы для ее вычисления в случае дискретного и непрерывного случайных векторов. Доказать свойства ковариации

Ковариация является числовой характиристикой случайного вектора. Пусть (X_1, X_2) – двумерный случайный вектор. случайной величины X_1 и X_2 называется число $cov(X_1, X_2) = M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$, где $m_i = MX_i, i = \overline{1, 2}$.

Если X_1, X_2 - дискретный случайные величины, то $cov(X_1, X_2) = \sum_{i_1, i_2} (x_{1,i_1} - m_1)(x_{2,i_2} - m_2) p_{i_1 i_2}$, где $p_{i_1 i_2} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2})\}$.

Если X_1, X_2 - непрерывные случайные величины, то $cov(X_1, X_2) = \int\int_{\mathbb{R}} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$, где f – совместная плотность распределения X_1 и X_2.

Свойства:

1. $D[X + Y] = DX + DY + 2cov(X, Y)$;
2. $cov(X, X) = DX$;
3. если X, Y – независимы, то $cov(X, Y) = 0$. Обратное не верно;
4. $cov(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = a_1 a_2 cov(X, Y)$;
5. $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$, причем $|cov(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \equiv$ случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью;

6. $cov(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$.

Доказательства:

1.

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= M[((X+Y) - M[X+Y])^2] = \langle MX = m_1, MY = m_2 \rangle = M[((X-m_1) - M[Y-m_2])^2] \\ &= M[(X-m_1)^2] + M[(Y-m_2)^2] + 2M[(X-m_1)(Y-m_2)] = \\ &= DX + DY + 2cov(X,Y); \end{aligned}$$

2. $cov(X, X) = M[(X-m)(X-m)] = M[(X-m)^2] = DX$;

3.

$$\begin{aligned} cov(X,Y) = M[(X-m_1)(Y-m_2)] = \langle X, Y - \text{независимые } \Rightarrow \\ (X-m_1) \text{ и } (Y-m_2) \text{ тоже независимые } \rangle = [M(X-m_1)][M(Y-m_2)] \\ = 0; \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} cov(a_1X+b_1, a_2X+b_2) &= M[[a_1X+b_1 - M(a_1X+b_1)] \cdot [a_2X+b_2 - M(a_2X+b_2)]] \\ &= M[[a_1X+b_1 - a_1m_1 - b_1][a_2X+b_2 - a_2m_2 - b_2]] \\ &= M[a_1a_2(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)]; \end{aligned}$$

5. (a) Выберем произвольное число $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случайную величину $Z(t) = tX - Y$. Тогда $D[Z(t)] = D[tX - Y] = \langle$ свойство 1 + свойство дисперсии $\rangle = t^2DX + DY - 2t \cdot cov(X,Y) = DX \cdot t^2 - 2t \cdot cov(X,Y) + DY$ – квадратный трехчлен относительно t. Так как $D[X(t)] \geq 0$, следовательно, трехчлен должен быть параболой вверх, т.е. дискриминант $D \leq 0$.

$$\frac{D}{4} = (cov(X,Y))^2 - DX \cdot DY \leq 0 \Rightarrow |cov(X,Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY};$$

   (b) Необходимость ($\Rightarrow$). Если $|cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Rightarrow$ дискриминант $= 0 \Rightarrow D[Z(t)]$ имеет единственный корень. Обозначим его $t = a \Rightarrow Z(a) = aX - Y$ принимает единственное значение с вероятностью 1, обозначим это значение как $-b \Rightarrow Z(a) = aX - Y = -b \Rightarrow Y = aX + b$;

   (c) Достаточность ($\Leftarrow$). Если $Y = aX + b \Rightarrow Z(a) = -b \Rightarrow D[Z(a)] = 0 \Rightarrow$ дискриминант $= 0 \Rightarrow |cov(X,Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$.

6.

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= M[(X-m_1)(Y-m_2)] = M[XY - m_1Y - m_2X + m_1m_2] \\ &= M[XY] - m_1MY - m_2MX + m_1m_2 \\ &= M[XY] - m_1m_2; \end{aligned}$$

2.15 Сформулировать определение ковариации и коэффициента корреляции случайных величин. Сформулировать свойства коэффициента корреляции. Сформулировать определения независимых и некоррелированных случайных величин, указать связь между этими свойствами. Понятия ковариационной и корреляционной матриц. Записать свойства ковариационной матрицы

Ковариация является числовой характеристикой случайного вектора. Пусть (X_1, X_2) – двумерный случайный вектор. случайной величины X_1 и X_2 называется число $cov(X_1, X_2) = M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$, где $m_i = MX_i, i = \overline{1, 2}$.

Недостатком ковариации является то, что она имеет размерность равную произведению разностей случайных величин X и Y. Часто рассматривают аналогичную безразмерную характеристику, которая называется коэффициентом корреляции случайных величин X и Y:

$$\rho(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}},$$

где $DX \cdot DY > 0$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{XX} = 1$;
2. Если X, Y – независимые, то $\rho_{XY} = 0$;
3. $\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) \pm \rho(X, Y)$, причем $\pm$ заменяется на
   — $+$, если $a_1a_2 < 0$;
   — $-$, если $a_1a_2 > 0$;
4. $\rho_{XY} \leq 1$, причем:
$$\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & \text{когда } Y = aX + b, \text{где } a > 0 \\ -1, & \text{когда } Y = aX + b, \text{где } a < 0 \end{cases}$$

Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если $cov(X, Y) = 0$.

$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, где F – совместная функция распределения X и Y ($\equiv$ функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y – маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

Из свойства 3 ковариации следует, что еслим X, Y – независимые, то X, Y – некоррелированные. Обратное неверно.

Ковариационной матрицей случайного вектора $\vec{X}$ называется матрица

$$\sum_{\vec{X}} = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}},$$

где $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\sigma_{ii} = DX_i$;
2. $\sum_{\vec{X}} = \sum_{\vec{X}}^T$;

3. Если $\vec{Y} = \vec{X}B + \vec{c}$, где $\vec{Y} = (Y_1, ..., Y_m), \vec{X} = (X_1, ..., X_n), B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ (т.е. $\vec{Y}$ является линейной функцией от вектора $\vec{X}$), то $\sum_{\vec{Y}} = B^T \sum_{\vec{X}} B$;

4. Матрица $\sum_{\vec{X}}$ является неотрицательной определенной, т.е. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^w : \vec{b}^T \sum_{\vec{X}} \vec{b} \geq 0$;

5. Если все компоненты вектора $\vec{X}$ попарно независимы, то $\sum_{\vec{X}}$ – диагональная матрица.

Корреляционной матрицей вектора $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ называют матрицу

$$P = (\rho_{ij})_{i,j=\overline{1,n}},$$

где $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$.

2.16 Понятие условного распределения компоненты двумерного случайного вектора (дискретный и непрерывный случаи). Сформулировать определения значений условного математического ожидания и условной дисперсии. Сформулировать определения условного математического ожидания и условной дисперсии. Записать формулы для вычисления условных математического ожидания и дисперсии для компоненты двумерного нормального вектора

Пусть (X, Y) – двумерный случайный вектор. Рассмотрим распределение компоненты X этого вектора при условии, что $Y = y$. Т. к. условное распределение обладает всеми свойствами безусловного распределения, то для него также можно рассмотреть числовые характеристики.

Дискретный случай. (X, Y) – дискретный случайный вектор. Условное распределение компоненты X при условии $Y = y_j : \pi_{ij} = P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}}$. Значением условного математического ожидания случайной величины X при условии $Y = y_j$ называется число $M[X|Y = y_j] = \sum_i \pi_{ij} x_i$. Значение условного математического ожидания $M[Y|X = x_j]$ определяется аналогично.

Непрерывный случай. Пусть (X, Y) – непрерывный случайный вектор. Была определена условная плотность: $f_X(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$. Значением математического ожидания случайной величины X при условии $Y = y$ называют число: $M[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|Y = y)\, dx$.

Условным математическим ожиданием случайной величины относительно случайной величины Y называют функцию $g(Y) = M[X|Y]$ которая:

1. имеет область определения, совпадающую со множеством значений случайной величины Y;

2. для каждого возможного значения y случайной величины Y значение $g(Y) = M[X|Y = y]$ является значением условного математического ожидания.

Условное математическое ожидание $M[Y|X]$ определяется аналогично.

Условной дисперсией случайной величины X относительно случайной величины Y называют случайную величину $D[X|Y] = M[(X - M[X|Y])^2]$.

Значение условной дисперсии:

— для дискретного случайного вектора: $D[X|Y = y_j] = \sum_i \pi_{ij}(x_i - M[X|Y = y_j])^2$;

— для непрерывного случайного вектора: $D[X|Y = y_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X|Y = y_j])^2 f_X(X|Y = y_j)\, dx$.

Если (X, Y) – непрерывный случайный вектор и $\vec{m} = (m_1, m_2)$ и $\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, тогда:

— условное распределение X при $Y = y$ будет нормальным;

— $M[X|Y = y] = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$;

— $D[X|Y = y] = \sigma_1^2(1 = \rho^2)$.

2.17 Понятие n-мерного нормального распределения. Сформулировать основные свойства многомерного нормального распределения

Случайный вектор $(X_1, ..., X_n)$ имеет нормальное распределение, если его функция плотности распределения имеет вид:

$f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{det\sum}}e^{-\frac{1}{2}Q(\vec{x}-\vec{m})}$, где

$\vec{} = (x_1, ..., x_n)$

$\vec{m} = (m_1, ..., m_n)$

$Q(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}\cdot\sum^{\sim}\vec{\alpha}^T$ квадр форма от n перем., $\sum^{\sim} = \sum^{-1}$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

$\sum$ – положительно опред. матрица порядка n

Свойства многомерного нормального распределения

1. Если $(x_1, ..., x_n)$ – нормальный случайный вектор, то существует его компонента $x_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ – тоже нормальная случайная величина;

2. Пусть $\vec{x} \sim N(\vec{m}, \sum)$. Тогда, если $\sum$ диагональная, то случайная величина $x_1, ..., x_n$ независимы;

3. Пусть $\vec{x} \sim N(\vec{m}, \sum)$ – n-мерный случайный вектор. Тогда $\vec{x}' = (x_1, ..., x_{n-1})$ нормальный случайный вектор с $\vec{m}' = (m_1, ..., m_{n-1})$ и ковариационной матрицей: $\sum'$, которая получена из $\sum$ отбрасыванием последней строчки и столбца;

4. Пусть $\vec{x} \sim N(\vec{m}, \sum)$, $\vec{Y} = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + \lambda_0$. Тогда $\vec{Y}$ – нормальная случайная величина;

5. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2)$ двумерный случайный вектор с $\vec{m} = (m_1, m_2)$ и $\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ Тогда:

   (a) условное распределение X при условии $Y = y$ будет нормальным;

   (b) $M[X|Y = y] = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$;

   (c) $D[X|Y = y] = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$.