Содержание

1 Случайные события

1.1 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное события, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j):\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{$«5», «6»$\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Событие A называют **следствием события** B, если из того, что произошло B, следует то, что произошло A, т. е. $B \subseteq A$.

Любое множество Ω содержит в себе два подмножества: $\emptyset$ и Ω. События, соответствующие данным множествам, называются **невозможным и достоверным** соответственно. Эти события называются несобственными событиями. Все остальные события называются собственными.

Пример №5. Из урны, содержащей два красных и три синих шара, извлекают один шар. Возможные события: $A = \{$извлечённый шар является красным или синим$\}$ – является достоверным, $B = \{$извлечён белый шар$\}$ – невозможным.

Операции над событиями

События – множества элементарных исходов. Следовательно, над ними можно выполнять все операции над множествами. При этом вводится следующая терминология.

1. Объединение множеств принято называть суммой событий: $A \cup B = A + B$;

2. Пересечение множеств называют произведением событий: $A \cap B = A \cdot B$;

3. Дополнение A называют событием, противоположным A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Классическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство исходов некоторого случайного эксперимента, $|\Omega| = N < \infty$;

2) все элементарные исходы равновозможны;

3) существует событие $A \subseteq \Omega, |A| = N_A$.

Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P(A) = \frac{N_A}{N}$.

Свойства

1. $P(A) \geq 0$.

   Доказательство. Т. к. $N_A \geq 0, N > 0$, то $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$.

2. $P(\Omega) = 1$.

   Доказательство. $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1, |\Omega| = N_\Omega = N$.

3. Если A, B – несовместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

   Доказательство. Т. к. Ω – конечно, тогда $A, B \subseteq \Omega$ – конечны. Существует формула: $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$. Т. к. A, B – несовместны, то $AB = \emptyset \implies N_A + N_B = N_{A+B}$. Таким образом, $P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$.

1.2 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j\ \in\ \{1, ..., 36\},\ i\ \neq\ j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{«5», «6»\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Геометрическое определение вероятности

Пусть:

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;
2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ – мера множества;
3) возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию A пропорциональна мере этого события и не зависит от формы A и его расположения внутри Ω.

Тогда вероятностью осуществления события A называется число $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Недостаток геометрического определения заключается в том, что оно не учитывает возможность того, что некоторые области внутри Ω окажутся более предпочтительными, чем другие.

Статистическое определение вероятности

Пусть:

1) некоторый случайный эксперимент произведён n раз;
2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Тогда вероятностью осуществления события A называют эмпирический (т. е. найденный экспериментальным путём) предел: $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{n_A}{n}$.

Недостатки статичестического определения вероятности:

1) никакой эксперимент не может быть произведён бесконечно много раз;
2) с точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.3 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма–алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}$, $|\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\, x_j) :\, x_i,\, x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\beta \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда β называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \beta$.

Простейшие свойства

1. $\Omega \in \beta$.

   Доказательство. $\beta \neq \emptyset$ – по определению $\Rightarrow \exists A \subseteq \Omega : A \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A} \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 2) $A + \overline{A} \in \beta$. Т. к. $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow \Omega \in \beta$.

2. $\emptyset \in \beta$.

   Доказательство. Т. к. $\Omega \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{\Omega} \in \beta, \overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta$.

3. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \beta$.

   Доказательство. Т. к. $A_1, ..., A_n, ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A_1}, ..., \overline{A_n}, ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 2) $\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\Rightarrow \overline{\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ...} \in \beta \Rightarrow$ (по закону Де Моргана) $\overline{\overline{A_1}} \cdot ... \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot ... \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \beta$.

4. Если $A, B \in \beta$, то $A \setminus B \in \beta$.

   Доказательство. Из свойств операций над множествами: $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$. $B \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{B} \in \beta \Rightarrow A, \overline{B} \in \beta \Rightarrow$ (свойство 3) $A \cdot \overline{B} \in \beta \Rightarrow A \setminus B \in \beta$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) β – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

1.4 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}$, $|\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\beta \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда β называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \beta$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) β – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

Простейшие свойства

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $A + \overline{A} \in \beta$ (аксиома 2 сигма–алгебры), $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow$ (по свойству вероятностей) $P(\Omega) = 1 = P(A + \overline{A}) \Rightarrow$ т. к. $A, \overline{A}$ – несовместны, то $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

   Доказательство. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) \Rightarrow$ (свойство 1) $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0, P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности.

3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

   Доказательство. $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$. Тогда $P(B) = P(A + (B \setminus A)) =$ ($A, B \setminus A$ – несовместны, аксиома 3) $= P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

4. $\forall A \in \beta : 0 \leq P(A) \leq 1$.

   Доказательство. $P(A) \geq 0$ – из аксиомы 1. $\forall A : A \subseteq \Omega \Rightarrow$ (свойство 3) $P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow$ (свойство 2) $P(A) \leq 1$.

5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \beta$.

   Доказательство. $\forall\forall A, B$:

   (а) $A + B = A + (B \setminus A), A \cdot (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

   (б) $B = AB + (B \setminus A), (AB)(B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$.

   Из (а) и (б): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6. $\forall\forall A_1, ..., A_n : P(A_1 + ... + A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - ... - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + ... + (-1)^{n+1}P(A_1A_2...A_n)$.

   Доказательство. Является обобщением свойства 5, может быть доказано с использованием метода математической индукции.

1.5 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$.

Теорема. Пусть:

1) зафиксировано событие $B, P(B) \neq 0$;

2) $P(A|B)$ рассматривается как функция события A.

Тогда $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Доказательство.

1. Докажем, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трём аксиомам вероятности:

   (а) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(AB) \geq 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) \geq 0.$

   (б) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{B} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

   (в) $P(A_1 + ... + A_n + ...|B) = \frac{P((A_1+...+A_n+...)B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1B + A_2B + ... + A_nB + ...) = |A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместны $\Rightarrow$ $A_1B, ...A_nB, ...$ – попарно несовместны, тогда используем расширенную аксиому сложения$| = \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1B) + P(A_2B) + ... + P(A_nB) + ...] = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + ... + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + ... =$ $= P(A_1|B) + ... + P(A_n|B) + ...$

2. Т.к. свойства безусловной вероятности являются прямыми следствиями из аксиом безусловной вероятности, а условная вероятность этим аксиомам удовлетворяет, то она удовлетворяет свойствам безусловной вероятности.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0.$

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий. Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A) > 0.$

Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A).$

Доказательство. Т.к. $P(A) > 0$, то определена условная вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow$ $\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A).$

Теорема. Формула умножения вероятностей для n событий. Пусть:

1) $A_1, ..., A_n$ – события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0.$

Тогда $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$

Доказательство.

1. $k = \overline{1, n-1} : A_1 \cdot ... \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}$. По 3-му свойству вероятности $P(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$. Следовательно, все условные вероятности, входящие в правую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.

2. Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий:

   $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2}) \cdot P(An-1|A_1 \cdot \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$.

Пример. На семи карточках написаны буквы слова «ШОКОЛАД». Карточки тщательно перемешивают, и по очереди извлекают случайным образом три из них без возвращения первых карточек. Найти вероятность того, что эти три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»:

Событие $A = \{$три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»$\}$.

Введет следующие события: $A_1 = \{$на первой извлеченной карточке написано «Ш»$\}$; $A_2 = \{$на второй извлеченной карточке написано «О»$\}$; $A_3 = \{$на третьей извлеяенной карточке написано «К»$\}$.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$.

1.7 Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих свойств.

События A и B, связанные с некоторым случайным экспериментом и имеющие ненулевую вероятность, называеются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall \forall i \neq j, j \in \{1, ..., n\} : P\{A_iA_j\} = P\{A_i\}P\{A_j\}$.

События $A_1, ..., A_n$, связанные с некоторым случайным экспериментом, называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in 2, ..., n, \forall \forall i_1 < i_2 < ... < i_k : P\{A_{i_1}, ..., A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot ... \cdot P\{A_{i_k}\}$.

Если $A_1, ..., A_n$ независимые в совокупности, то $A_1, ..., A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

Пример Берништейна.

Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры «1», «2», «3» соответственно, а на четвертой написано «123». Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события $A_i = \{$на нижней грани есть $i\}, i \in 1, 2, 3$ – попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$.
2. $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – попарно независимые.
3. $P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – не являются независимыми в совокупности.

Теорема

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Доказательство

Необходимость. A, B – независимые события, т.е. $P(AB) = P(A)P(B)$. $P(A|B) = |$по определению условной вероятности$| = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. $P(A|B) = P(A)$. $P(AB) = |$по формуле умножения вероятностей$| = P(B)P(A|B) = P(B)P(A), P(B) > 0 \Rightarrow A, B$ – независимые.

Доказательство для (2) аналогично.

1.8 Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теоремы о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятностей.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) – вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Говорят, что события $H_1, ..., H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если:

1) $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;

2) $H_iH_j = \emptyset, i \neq j$;

3) $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Теорема. Формула полной вероятности

Пусть:

1. $H_1, ..., H_n$ – полная группа событий.
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$.
3. $A \in \beta$ – событие.

Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство. $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + ... + H_n)) = P(AH_1 + ... + AH_n) = |H_1, ..., Hn$ – попарно независимые события$| = P(AH_1) + ... + P(AH_n) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Теорема. Формула Байеса

Пусть:

1. Выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности.
2. $A \in \beta : P(A) > 0$.

Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+...+P(A|H_n)P(H_n)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{A} = |$числитель – теорема умножения тероятностей, знаменатель – формула полной вероятности$| = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+...+P(A|H_n)P(H_n)}$.

Априорная вероятность – это вероятность, которая известна или оценивается до проведения случайного эксперимента.

Апостериорная вероятность – это вероятность события, рассчитанная после того, как был проведён эксперимент.

1.9 Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, т.е. вероятность реализации успеха в i-ом испытании не зависит от исходов первого, второго,...,$i-1$-го испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство

1. Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа $(x_1, ..., x_n)$, где
$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании имел место успех,} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м испытании имела место неудача.} \end{cases}$$
2. Пусть $A = \{$в серии из n испытаний произошло ровно k успехов$\}$. Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц и $n-k$ нулей. В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i, и тогда общая вероятность исхода будет равна: $p^k q^{n-k}$. Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_n^k штук, что означает: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Следствие (1)

Вероятность того, что количество успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено между k_1 и k_2, равна:$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Доказательство

1. Пусть $A_i = \{$в серии произошло ровно i успехов$\}$, $\quad i = k_1, \dots, k_2$, и $P(A_i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}$.
2. Тогда $A = A_{k_1} + A_{k_1+1} + \dots + A_{k_2}$, где $P(A) = P(A_{k_1} + \dots + A_{k_2})$.

   Так как события A_i и A_j несовместны при $i \ne j$, то $P(A) = P(A_{k_1}) + \dots + P(A_{k_2})$.

   Подставим выражение для $P(A_i)$: $P(A) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P\{A_i\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

   Таким образом: $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Следствие (2)

Вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (и неудачи $q = 1 - p$) произойдёт хотя бы один успех, равна:$P_n(k \ge 1) = 1 - q^n$.

Доказательство

Пусть $A = \{$в серии произошёл хотя бы один успех$\}$. Тогда противоположное событие: $\bar{A} = \{$в серии не будет ни одного успеха$\}$.

Вероятность события A равна:$P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Вероятность $P(\bar{A})$ соответствует $P_n(0)$, то есть вероятности того, что в серии из n испытаний не произойдёт ни одного успеха:$P(\bar{A}) = P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0}$.

Подставляя значения, получаем:$P(\bar{A}) = q^n$.

Таким образом:$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q^n$.

2 Случайные величины

ghbdtn

gjrtf