

Содержание

1	Теоретические вопросы, оцениваемые в 2 балла	3
1.1	Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?	3
1.2	Сформулировать геометрическое определение вероятности.	3
1.3	Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.	3
1.4	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.	4
1.5	Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?	4
1.6	Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.	4
1.7	Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	5
1.8	Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?	5
1.9	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?	5
1.10	Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?	5
1.11	Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.	6
1.12	Сформулировать теорему о формуле Байеса.	6
1.13	Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.	6
1.14	Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.	6
2	Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла	7
2.1	Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.	7
2.2	Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.	7
2.3	Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.	8
2.4	Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.	8
2.5	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.	9
2.6	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.	9
2.7	Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.	10

2.8	Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	11
2.9	Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления. .	11
2.10	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.	11
2.11	Доказать теорему о формуле полной вероятности.	12
2.12	Доказать теорему о формуле Байеса.	12
2.13	Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.	13

1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 2 балла

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

События A и B называются **несовместными**, если $AB = \emptyset$.

События A_1, \dots, A_n называются **попарно несовместными**, если $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j, 1, j = \overline{1, n}$.

События A_1, \dots, A_n называются **несовместными в совокупности**, если $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$.

Если A и B несовместные события (а также $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые. Если A и B – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми. Если A и B – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Пусть:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;
2. $\mu(\Omega) < \infty$ (мера множества Ω конечна; $n = 1 \Rightarrow \mu$ – длина; $n = 2 \Rightarrow \mu$ – площадь; $n = 3 \Rightarrow \mu$ – объем);
3. Возможность принадлежности исхода множеству $M \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества M ($\mu(M)$) и **не** зависит от формы M и его расположения внутри Ω ;
4. $A \subseteq \Omega$ – некоторое событие.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;
2. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств множества Ω ;

\mathcal{B} называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$;
2. Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$.

Свойства:

1. $\Omega \in \mathcal{B}$;
2. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
3. Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то и $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B}$;
4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. \mathcal{B} – сигма-алгебра на Ω .

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;
3. (расширенная аксиома сложения) Если A_1, \dots, A_n, \dots – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

Свойства:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;
4. $\forall A \in \mathcal{B} : 0 \leq P(A) \leq 1$;
5. $\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
6. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i_1=1}^n P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$.

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Аксиома сложения. Если A_1, \dots, A_n – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Расширенная аксиома сложения. Если A_1, \dots, A_n, \dots – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

Аксиома непрерывности. Если A_1, \dots, A_n, \dots – неубывающая последовательность событий (т.е. $A_i \subseteq A_{i+1}, i \in \mathbb{N}$), а $A = A_1 + \dots + A_n + \dots$, то $P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$.

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть:

1. $A, B \in \mathcal{B}$ – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
2. известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие B .

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B , называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Свойства:

1. $P(A|B) \geq 0$;
2. $P(\Omega|B) = 1$;
3. Если A_1, \dots, A_n, \dots – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема о формуле умножения вероятностей для двух событий. Пусть $P(A) > 0$, тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема о формуле умножения вероятностей для n событий. Пусть:

1. A_1, \dots, A_n – события;
2. $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда: $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть A, B – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События A и B называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Th.

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

События A_1, \dots, A_n называются **попарно независимыми**, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, события A_i, A_j – независимые, т.е.: $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

События A_1, \dots, A_n называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ выполняется $P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.

A_1, \dots, A_n – независимые в совокупности $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть (Ω, \mathcal{B}, P) – вероятностное пространство. Говорят, что события $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$ образуют **полную группу**, если выполнены следующие условия:

1. $H_i H_j = 0$, при $i \neq j$;

$$2. H_1 + \dots + H_n = \Omega.$$

Поскольку события $H_i, H_j, i \neq j$ несовместные и их вероятность не равна нулю, они обязательно зависимые.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1. H_1, \dots, H_n – полная группа событий;
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
3. $A \in B$ – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда: $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$.

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2. $P(A) > 0$.

Тогда: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$.

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Испытание – случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов (т.е. $|\Omega| = 2$). При этом, один из этих исходов условно называется успехом, а другой – неудачей.

Схемой Бернулли будем называть серию независимых в совокупности однотипных испытаний.

$P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Th Бернулли. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$ – вероятность успеха в одном испытании.

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

Пусть $P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$.

Пусть $P_n(k \geq 1)$ – вероятность осуществления хотя бы одного успеха в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.

Пусть $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ – вероятность осуществления от k_1 до k_2 успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} (C_n^k p^k q^{n-k})$.

2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла

2.1 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Пространством элементарных исходов называется множество Ω возможных исходов этого эксперимента. При этом должны выполняться эти условия:

1. Каждый **элементарный исход** мыслится единым и неделимым, т.е. он не может быть разбит на более «мелкие» в рамках данного эксперимента;
2. При однократном проведении случайного эксперимента реализуется ровно один элементарный исход из Ω .

Пусть:

1. $|\Omega| = N < \infty$;
2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);
3. $A \subseteq \Omega$ – событие, $|A| = N_A$.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

Пример: 2 раза бросают игральную кость, A = сумма выпавших очков ≥ 11 . Тогда $\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{1, \dots, 6\}\}$; $|\Omega| = 36$; $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P\{A\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2.2 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.

Пусть:

1. $|\Omega| = N < \infty$;
2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);
3. $A \subseteq \Omega$ – событие, $|A| = N_A$.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

Некоторые свойства вероятности:

1. $\forall A : P\{A\} \geq 0$;
2. $P\{\Omega\} = 1$;
3. Если A_1 и A_2 несовместны, то $P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$.

Доказательства:

1. $P\{A\} = \frac{N_A}{N} \geq 0$;

$$2. P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \left\langle N_A = N \right\rangle = 1;$$

$$3. \text{ Формула включений и исключений } |A_1 + A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 A_2| = \left\langle |A_1 A_2| = 0 \right\rangle - \text{ по условию } \left\langle \right\rangle.$$

Таким образом, $P\{A_1 + A_2\} = \frac{N_{A_1+A_2}}{N} = \frac{N_{A_1}}{N} + \frac{N_{A_2}}{N} = P\{A_1\} + P\{A_2\}.$

2.3 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

Рассмотрим случайный эксперимент, который был проведен n раз, в результате чего событие A наступило n_A раз.

Вероятностью осуществления события A называется эмперический, то есть известный из опыта предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}.$

Недостатки:

1. Никакой эксперимент не может быть проведен бесконечное число раз;
2. С точки зрения современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для развития теории.

2.4 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;
2. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств множества Ω ;

\mathcal{B} называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B};$
2. Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}.$

Свойства:

1. $\Omega \in \mathcal{B};$
2. $\emptyset \in \mathcal{B};$
3. Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то и $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B};$
4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}.$

Доказательства:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ по опр. $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 2} \right\rangle \Rightarrow A + \bar{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B};$
2. $\Omega \in \mathcal{B}(\text{св-во 1}) \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B};$
3. $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 2} \right\rangle \Rightarrow \bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \overline{\bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{з-н де Моргана} \right\rangle \Rightarrow \overline{\bar{A}_1} \cdot \dots \cdot \overline{\bar{A}_n} \cdot \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B};$
4. $A, B \in \mathcal{B}(\text{по усл.}) \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow A, \bar{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{св-во 3} \right\rangle \Rightarrow A\bar{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}.$

2.5 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. \mathcal{B} – сигма-алгебра на Ω .

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;
3. (расширенная аксиома сложения) Если A_1, \dots, A_n – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Свойства:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Доказательства:

1. $\Omega = A + \bar{A}$, причем $A\bar{A} = \emptyset \Rightarrow 1 = \langle \text{акс. 2} \rangle = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = \langle \text{св-во 1} \rangle = 1 - P(\Omega) = \langle \text{акс. 2} \rangle = 1 - 1 = 0$;
3. $B = A + B \setminus A$, причем $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$. Т.о. $P(B) = P(A + B \setminus A) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow \langle \text{акс. 1} \rangle \Rightarrow P(B) = P(A) + (\geq 0) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

2.6 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. \mathcal{B} – сигма-алгебра на Ω .

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;

3. (расширенная аксиома сложения) Если A_1, \dots, A_n – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

Свойства:

- $\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$
- $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i_1=1}^n (A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} (A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$

Доказательство:

- а) $A + B = A + B \setminus A$, причем $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$. Тогда $P(A + B) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(B \setminus A)$. (1) б)
 $B = (B \setminus A) + AB$, причем $(B \setminus A) \cdot (AB) = \emptyset$. Тогда $P(B) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$. (2) в) Подставим $P(B \setminus A)$ из (2) в соотношение (1): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2.7 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть:

- $A, B \in \mathcal{B}$ – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
- известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие B .

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B , называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Свойства:

- $P(A|B) \geq 0;$
- $P(\Omega|B) = 1;$
- Если A_1, \dots, A_n, \dots – попарно несовместные события, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

Доказательства:

- $P(A|B) = \frac{P(AB) \geq 0(\text{акс. неотр.})}{P(B) > 0} \geq 0;$
- $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \langle \Omega B = B \rangle = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$
- Пусть A_1, \dots, A_n, \dots – попарно несовместные события. $P(A_1, \dots, A_n, \dots|B) = \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{P(B)} = \langle \text{счетная дистрибутивность пересечения относительно объединения} \rangle = \frac{P(A_1 B + \dots + A_n B + \dots)}{P(B)} = \langle A_i B \subseteq A_i \rangle = \langle \text{акс. 3} \rangle = \frac{P(A_1 B) + \dots + P(A_n B) + \dots}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_n B)}{P(B)} + \dots = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

2.8 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема о формуле умножения вероятностей для двух событий. Пусть $P(A) > 0$, тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Доказательство. Т.к. $P(A) > 0$, то определим условную вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема о формуле умножения вероятностей для n событий. Пусть:

1. A_1, \dots, A_n – события;
2. $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда: $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

Доказательство. 1) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} : A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1} \Rightarrow (A_1 \cdot \dots \cdot A_k)(A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \subseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_k \Rightarrow P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \leq P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n-1\} : P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) > 0$. 2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = \left\langle P(AB) = P(A)P(B|A) \right\rangle = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = \left\langle \text{ф-ла умножения вероятностей для двух событий} \right\rangle = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = \dots = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$.

2.9 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть A, B – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События A и B называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Th.

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Доказательство. Докажем 1.

Необходимость. Дано: A, B – независимые, т.е. $P(AB) = P(A)P(B)$. $P(A|B) = \left\langle \text{опр. усл. вер-ти} \right\rangle = \frac{P(AB)}{P(B)} = \left\langle A, B \text{ – независимые} \right\rangle = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. Дано: $P(A|B) = P(A)$. $P(AB) = \left\langle P(B) > 0 \Rightarrow \text{ф-ла умножения вер-тей} \right\rangle = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow A, B$ – независимые.

2.10 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

События A_1, \dots, A_n называются **попарно независимыми**, если $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, события A_i, A_j – независимые, т.е.: $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

События A_1, \dots, A_n называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ выполняется $P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.

A_1, \dots, A_n – независимые в совокупности $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

Пример Берништейна. Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры "1" "2" "3" соответственно, а на четвертой написано "123". Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события $A_i = \{\text{на нижней грани есть } i\}, i \in \{1, 2, 3\}$ – попарно независимы, но **не** являются независимыми в совокупности.

1. $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$;
2. $P(A_1 A_2) = \{A_1 A_2 = \{\text{на нижней грани есть и 1 и 2 рядом}\}\} = \frac{1}{4} = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3)$;
3. $P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4}$;
4. $P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2), P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3), P(A_2 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – попарно независимые;
5. $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ – неверно! $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – **не** являются независимыми в совокупности.

2.11 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1. H_1, \dots, H_n – полная группа событий;
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
3. $A \in B$ – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда: $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство. $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = \{AH_i \subseteq H_i, AH_j \subseteq H_j \Rightarrow (AH_i) \cdot (AH_j) = 0\} = \{\text{акс. сложения}\} = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = \{P(H_i) > 0 \Rightarrow \text{используем формулу умножения вер-тей}\} = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$.

2.12 Доказать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2. $P(A) > 0$.

Тогда: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $P(H_i|A) = \{P(A) > 0 \Rightarrow \text{эта условная вероятность определена}\} = \{\text{опр. условной вер-ти}\} = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \{\text{числитель расписываем по теореме умножения вер-тей, а знаменатель – по формуле полной вер-ти}\} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$.

2.13 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

$P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Th Бернулли. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$, $q = 1 - p$, p – вероятность успеха в одном испытании.

Доказательство.

1. Опишем результат серии с использованием кортежа (x_1, \dots, x_n) , где $x_i = 1$, если в i -ом испытании произошел успех и 0, иначе. $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}\}$;
2. $A = \{\text{в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов}\}$. $(x_1, \dots, x_n) \in A$ – тут ровно k единиц и $n - k$ нулей. $P\{\text{одного исхода из } A\} = P\{\{\text{в первом испытании } x_1 \text{ успехов}\} \cdot \dots \cdot \{\text{в } n\text{-ом испытании } x_n \text{ успехов}\}\} = \left\{ \text{отдельные испытание независимы в совокупности} \right\} = P\{x_1 \text{ успех в первом испытании}\} \cdot \dots \cdot P\{x_n \text{ успехов в } n\text{-ом испытании}\} = p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow \text{одинаковая для всех исходов из } A$.
3. $|A| = ?$ Каждый исход из A однозначно определяется номерами k позиций кортежа, в которых записаны "1". То есть, число исходов в A равно числу способов выбрать k чисел из n чисел $\Rightarrow |A| = C_n^k$ (число сочетаний без повторений из n по k);
4. $P_n(k) = P(A) = |A| \cdot P\{\text{одного исхода из } A\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.