

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретические вопросы, оцениваемые в 2 балла</b>	<b>3</b>
1.1	Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий? . . . . .	3
1.2	Сформулировать геометрическое определение вероятности. . . . .	3
1.3	Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства. . . . .	3
1.4	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности. . . . .	4
1.5	Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой? . . . . .	4
1.6	Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства. . . . .	4
1.7	Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. . . . .	5
1.8	Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления? . . . . .	5
1.9	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой? . . . . .	5
1.10	Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми? . . . . .	5
1.11	Сформулировать теорему о формуле полной вероятности. . . . .	6
1.12	Сформулировать теорему о формуле Байеса. . . . .	6
1.13	Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний. . . . .	6
1.14	Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из $n$ испытаний а) ровно $k$ успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от $k_1$ до $k_2$ успехов. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла</b>	<b>7</b>
2.1	Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример. . . . .	7
2.2	Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности. . . . .	7
2.3	Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки. . . . .	8
2.4	Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства. . . . .	8
2.5	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события. . . . .	9
2.6	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств. . . . .	9
2.7	Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности. . . . .	10

2.8	Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. . . . .	11
2.9	Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления. .	11
2.10	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе. . . . .	11
2.11	Доказать теорему о формуле полной вероятности. . . . .	12
2.12	Доказать теорему о формуле Байеса. . . . .	12
2.13	Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний по схеме Бернулли. . . . .	13

# 1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 2 балла

## 1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

События  $A$  и  $B$  называются **несовместными**, если  $AB = \emptyset$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **попарно несовместными**, если  $A_i A_j = \emptyset$  при  $i \neq j, i, j = \overline{1, n}$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **несовместными в совокупности**, если  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$ .

Если  $A$  и  $B$  несовместные события (а также  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ ), то они обязательно зависимые. Если  $A$  и  $B$  – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми. Если  $A$  и  $B$  – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

## 1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Пусть:

1.  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ;
2.  $\mu(\Omega) < \infty$  (мера множества  $\Omega$  конечна;  $n = 1 \Rightarrow \mu$  – длина;  $n = 2 \Rightarrow \mu$  – площадь;  $n = 3 \Rightarrow \mu$  – объем);
3. Возможность принадлежности исхода множеству  $M \subseteq \Omega$  пропорциональна мере множества  $M$  ( $\mu(M)$ ) и **не** зависит от формы  $M$  и его расположения внутри  $\Omega$ ;
4.  $A \subseteq \Omega$  – некоторое событие.

**Вероятностью осуществления** события  $A$  называется число  $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ .

## 1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Пусть:

1.  $\Omega$  – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;
2.  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  – набор подмножеств множества  $\Omega$ ;

$\mathcal{B}$  называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1.  $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$ ;
2. Если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ , то  $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$ .

**Свойства:**

1.  $\Omega \in \mathcal{B}$ ;
2.  $\emptyset \in \mathcal{B}$ ;
3. Если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ , то и  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B}$ ;
4. Если  $A, B \in \mathcal{B}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{B}$ .

#### 1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть:

1.  $\Omega$  – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2.  $\mathcal{B}$  – сигма-алгебра на  $\Omega$ .

**Вероятностью** (вероятностной мерой) называют функцию:  $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности)  $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$ ;
2. (аксиома нормированности)  $P(\Omega) = 1$ ;
3. (расширенная аксиома сложения) Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

**Свойства:**

1.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
2.  $P(\emptyset) = 0$ ;
3. Если  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ ;
4.  $\forall A \in \mathcal{B} : 0 \leq P(A) \leq 1$ ;
5.  $\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ;
6.  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i_1=1}^n P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$ .

#### 1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

**Аксиома сложения.** Если  $A_1, \dots, A_n$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$ .

**Расширенная аксиома сложения.** Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

**Аксиома непрерывности.** Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – неубывающая последовательность событий (т.е.  $A_i \subseteq A_{i+1}, i \in \mathbb{N}$ ), а  $A = A_1 + \dots + A_n + \dots$ , то  $P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$ .

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

#### 1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть:

1.  $A, B \in \mathcal{B}$  – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
2. известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие  $B$ .

**Условной вероятностью осуществления события  $A$  при условии, что наступило событие  $B$ , называется число  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ .**

**Свойства:**

1.  $P(A|B) \geq 0$ ;
2.  $P(\Omega|B) = 1$ ;
3. Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

**1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.**

**Теорема о формуле умножения вероятностей для двух событий.** Пусть  $P(A) > 0$ , тогда  $P(AB) = P(A)P(B|A)$ .

**Теорема о формуле умножения вероятностей для  $n$  событий.** Пусть:

1.  $A_1, \dots, A_n$  – события;
2.  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$ .

Тогда:  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$ .

**1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?**

Пусть  $A, B$  – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

Th.

1. Если  $P(B) > 0$ , то  $A, B$  – независимые  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ .
2. Если  $P(A) > 0$ , то  $A, B$  – независимые  $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$ .

**1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?**

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **попарно независимыми**, если  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ , события  $A_i, A_j$  – независимые, т.е.:  $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если  $\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  таких, что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  выполняется  $P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ .

$A_1, \dots, A_n$  – независимые в совокупности  $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$  – попарно независимые. Обратное неверно.

**1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?**

Пусть  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  – вероятностное пространство. Говорят, что события  $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{B}$  образуют **полную группу**, если выполнены следующие условия:

1.  $H_i H_j = 0$ , при  $i \neq j$ ;

$$2. H_1 + \dots + H_n = \Omega.$$

Поскольку события  $H_i, H_j, i \neq j$  несовместные и их вероятность не равна нулю, они обязательно зависимые.

### 1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1.  $H_1, \dots, H_n$  – полная группа событий;
2.  $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$ ;
3.  $A \in B$  – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда:  $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$ .

### 1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2.  $P(A) > 0$ .

Тогда:  $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$ .

### 1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний.

Испытание – случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов (т.е.  $|\Omega| = 2$ ). При этом, один из этих исходов условно называется успехом, а другой – неудачей.

**Схемой Бернулли** будем называть серию независимых в совокупности однотипных испытаний.

$P_n(k)$  – вероятность осуществления ровно  $k$  успехов в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли.

**Th Бернулли.**  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$  – вероятность успеха в одном испытании.

### 1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из $n$ испытаний а) ровно $k$ успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от $k_1$ до $k_2$ успехов.

Пусть  $P_n(k)$  – вероятность осуществления ровно  $k$  успехов в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли. Тогда  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$ .

Пусть  $P_n(k \geq 1)$  – вероятность осуществления хотя бы одного успеха в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли. Тогда  $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$ .

Пусть  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$  – вероятность осуществления от  $k_1$  до  $k_2$  успехов в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли. Тогда  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} (C_n^k p^k q^{n-k})$ .

## 2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла

**2.1 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.**

**Пространством элементарных исходов** называется множество  $\Omega$  возможных исходов этого эксперимента. При этом должны выполняться эти условия:

1. Каждый **элементарный исход** мыслится единым и неделимым, т.е. он не может быть разбит на более «мелкие» в рамках данного эксперимента;
2. При однократном проведении случайного эксперимента реализуется ровно один элементарный исход из  $\Omega$ .

Пусть:

1.  $|\Omega| = N < \infty$ ;
2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);
3.  $A \subseteq \Omega$  – событие,  $|A| = N_A$ .

**Вероятностью осуществления** события  $A$  называется число  $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$ .

**Пример:** 2 раза бросают игральную кость,  $A$  = сумма выпавших очков  $\geq 11$ . Тогда  $\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{1, \dots, 6\}\}$ ;  $|\Omega| = 36$ ;  $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P\{A\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .

**2.2 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.**

Пусть:

1.  $|\Omega| = N < \infty$ ;
2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);
3.  $A \subseteq \Omega$  – событие,  $|A| = N_A$ .

**Вероятностью осуществления** события  $A$  называется число  $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$ .

**Некоторые свойства вероятности:**

1.  $\forall A : P\{A\} \geq 0$ ;
2.  $P\{\Omega\} = 1$ ;
3. Если  $A_1$  и  $A_2$  несовместны, то  $P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$ .

**Доказательства:**

1.  $P\{A\} = \frac{N_A}{N} \geq 0$ ;

$$2. P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \left\langle N_A = N \right\rangle = 1;$$

$$3. \text{ Формула включений и исключений } |A_1 + A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 A_2| = \left\langle |A_1 A_2| = 0 \right\rangle - \text{ по условию } \left\langle \right\rangle.$$

Таким образом,  $P\{A_1 + A_2\} = \frac{N_{A_1+A_2}}{N} = \frac{N_{A_1}}{N} + \frac{N_{A_2}}{N} = P\{A_1\} + P\{A_2\}.$

### 2.3 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

Рассмотрим случайный эксперимент, который был проведен  $n$  раз, в результате чего событие  $A$  наступило  $n_A$  раз.

**Вероятностью осуществления события  $A$**  называется эмперический, то есть известный из опыта предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}.$

#### Недостатки:

1. Никакой эксперимент не может быть проведен бесконечное число раз;
2. С точки зрения современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для развития теории.

### 2.4 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Пусть:

1.  $\Omega$  – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;
2.  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  – набор подмножеств множества  $\Omega$ ;

$\mathcal{B}$  называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1.  $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B};$
2. Если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ , то  $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}.$

#### Свойства:

1.  $\Omega \in \mathcal{B};$
2.  $\emptyset \in \mathcal{B};$
3. Если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ , то и  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B};$
4. Если  $A, B \in \mathcal{B}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{B}.$

#### Доказательства:

1.  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  по опр.  $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 2} \right\rangle \Rightarrow A + \bar{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B};$
2.  $\Omega \in \mathcal{B}(\text{св-во 1}) \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B};$
3.  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 2} \right\rangle \Rightarrow \bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow \overline{\bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{з-н де Моргана} \right\rangle \Rightarrow \overline{\bar{A}_1} \cdot \dots \cdot \overline{\bar{A}_n} \cdot \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B};$
4.  $A, B \in \mathcal{B}(\text{по усл.}) \Rightarrow \left\langle \text{акс. 1} \right\rangle \Rightarrow A, \bar{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\langle \text{св-во 3} \right\rangle \Rightarrow A\bar{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}.$



**2.5 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.**

Пусть:

1.  $\Omega$  – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2.  $\mathcal{B}$  – сигма-алгебра на  $\Omega$ .

**Вероятностью** (вероятностной мерой) называют функцию:  $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности)  $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$ ;
2. (аксиома нормированности)  $P(\Omega) = 1$ ;
3. (расширенная аксиома сложения) Если  $A_1, \dots, A_n$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

**Свойства:**

1.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
2.  $P(\emptyset) = 0$ ;
3. Если  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ .

**Доказательства:**

1.  $\Omega = A + \bar{A}$ , причем  $A\bar{A} = \emptyset \Rightarrow 1 = \langle \text{акс. 2} \rangle = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
2.  $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = \langle \text{св-во 1} \rangle = 1 - P(\Omega) = \langle \text{акс. 2} \rangle = 1 - 1 = 0$ ;
3.  $B = A + B \setminus A$ , причем  $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$ . Т.о.  $P(B) = P(A + B \setminus A) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow \langle \text{акс. 1} \rangle \Rightarrow P(B) = P(A) + (\geq 0) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ .

**2.6 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.**

Пусть:

1.  $\Omega$  – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2.  $\mathcal{B}$  – сигма-алгебра на  $\Omega$ .

**Вероятностью** (вероятностной мерой) называют функцию:  $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности)  $\forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0$ ;
2. (аксиома нормированности)  $P(\Omega) = 1$ ;

3. (расширенная аксиома сложения) Если  $A_1, \dots, A_n$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$

**Свойства:**

- $\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$
- $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i_1=1}^n P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n).$

**Доказательство:**

- а)  $A + B = A + B \setminus A$ , причем  $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$ . Тогда  $P(A + B) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(A) + P(B \setminus A)$ . (1) б)  $B = (B \setminus A) + AB$ , причем  $(B \setminus A) \cdot (AB) = \emptyset$ . Тогда  $P(B) = \langle \text{акс. 3} \rangle = P(B \setminus A) + P(AB) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$ . (2) в) Подставим  $P(B \setminus A)$  из (2) в соотношение (1):  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ .

**2.7 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.**

Пусть:

- $A, B \in \mathcal{B}$  – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
- известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие  $B$ .

**Условной вероятностью осуществления события  $A$  при условии, что наступило событие  $B$ , называется число  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ .**

**Свойства:**

- $P(A|B) \geq 0;$
- $P(\Omega|B) = 1;$
- Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – попарно несовместные события, то  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots|B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

**Доказательства:**

- $P(A|B) = \frac{P(AB) \geq 0(\text{акс. неотр.})}{P(B) > 0} \geq 0;$
- $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \langle \Omega B = B \rangle = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$
- Пусть  $A_1, \dots, A_n, \dots$  – попарно несовместные события.  $P(A_1, \dots, A_n, \dots|B) = \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{P(B)} = \langle \text{счетная дистрибутивность пересечения относительно объединения} \rangle = \frac{P(A_1 B + \dots + A_n B + \dots)}{P(B)} = \langle A_i B \subseteq A_i \rangle = \langle \text{акс. 3} \rangle = \frac{P(A_1 B) + \dots + P(A_n B) + \dots}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_n B)}{P(B)} + \dots = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

## 2.8 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема о формуле умножения вероятностей для двух событий. Пусть  $P(A) > 0$ , тогда  $P(AB) = P(A)P(B|A)$ .

**Доказательство.** Т.к.  $P(A) > 0$ , то определим условную вероятность  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$ .

Теорема о формуле умножения вероятностей для  $n$  событий. Пусть:

1.  $A_1, \dots, A_n$  – события;
2.  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$ .

Тогда:  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$ .

**Доказательство.** 1)  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} : A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1} \Rightarrow (A_1 \cdot \dots \cdot A_k)(A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \subseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_k \Rightarrow P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \leq P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n-1\} : P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) > 0$ . 2)  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = \left\langle P(AB) = P(A)P(B|A) \right\rangle = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = \left\langle \text{ф-ла умножения вероятностей для двух событий} \right\rangle = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = \dots = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$ .

## 2.9 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть  $A, B$  – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

Th.

1. Если  $P(B) > 0$ , то  $A, B$  – независимые  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$ .
2. Если  $P(A) > 0$ , то  $A, B$  – независимые  $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$ .

**Доказательство.** Докажем 1.

Необходимость. Дано:  $A, B$  – независимые, т.е.  $P(AB) = P(A)P(B)$ .  $P(A|B) = \left\langle \text{опр. усл. вер-ти} \right\rangle = \frac{P(AB)}{P(B)} = \left\langle A, B \text{ – независимые} \right\rangle = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$ .

Достаточность. Дано:  $P(A|B) = P(A)$ .  $P(AB) = \left\langle P(B) > 0 \Rightarrow \text{ф-ла умножения вер-тей} \right\rangle = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow A, B$  – независимые.

## 2.10 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **попарно независимыми**, если  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ , события  $A_i, A_j$  – независимые, т.е.:  $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ .

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если  $\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  таких, что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  выполняется  $P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ .

$A_1, \dots, A_n$  – независимые в совокупности  $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$  – попарно независимые. Обратное неверно.

**Пример Берништейна.** Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры "1" "2" "3" соответственно, а на четвертой написано "123". Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события  $A_i = \{\text{на нижней грани есть } i\}, i \in \{1, 2, 3\}$  – попарно независимы, но **не** являются независимыми в совокупности.

1.  $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$ ;
2.  $P(A_1 A_2) = \left\langle A_1 A_2 = \{\text{на нижней грани есть и 1 и 2 рядом}\} \right\rangle = \frac{1}{4} = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3)$ ;
3.  $P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4}$ ;
4.  $P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2), P(A_1 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3), P(A_2 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$  – попарно независимые;
5.  $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$  – неверно!  $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$  – **не** являются независимыми в совокупности.

## 2.11 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1.  $H_1, \dots, H_n$  – полная группа событий;
2.  $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$ ;
3.  $A \in B$  – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда:  $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$ .

**Доказательство.**  $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = \left\langle AH_i \subseteq H_i, AH_j \subseteq H_j \Rightarrow (AH_i) \cdot (AH_j) = 0 \right\rangle = \left\langle \text{акс. сложения} \right\rangle = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = \left\langle P(H_i) > 0 \Rightarrow \text{используем формулу умножения вер-тей} \right\rangle = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$ .

## 2.12 Доказать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2.  $P(A) > 0$ .

Тогда:  $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$ .

**Доказательство.**  $P(H_i|A) = \left\langle P(A) > 0 \Rightarrow \text{эта условная вероятность определена} \right\rangle = \left\langle \text{опр. условной вер-ти} \right\rangle = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \left\langle \text{числитель расписываем по теореме умножения вер-тей, а знаменатель – по формуле полной вер-ти} \right\rangle = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$ .

**2.13 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно  $k$  успехов в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли.**

$P_n(k)$  – вероятность осуществления ровно  $k$  успехов в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли.

**Th Бернулли.**  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $q = 1 - p$ ,  $p$  – вероятность успеха в одном испытании.

**Доказательство.**

1. Опишем результат серии с использованием кортежа  $(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i = 1$ , если в  $i$ -ом испытании произошел успех и 0, иначе.  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}\}$ ;
2.  $A = \{\text{в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов}\}$ .  $(x_1, \dots, x_n) \in A$  – тут ровно  $k$  единиц и  $n - k$  нулей.  $P\{\text{одного исхода из } A\} = P\{\{\text{в первом испытании } x_1 \text{ успехов}\} \cdot \dots \cdot \{\text{в } n\text{-ом испытании } x_n \text{ успехов}\}\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{отдельные испытание независимы в совокупности} \end{array} \right\} = P\{x_1 \text{ успех в первом испытании}\} \cdot \dots \cdot P\{x_n \text{ успехов в } n\text{-ом испытании}\} = p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow \text{одинаковая для всех исходов из } A$ .
3.  $|A| = ?$  Каждый исход из  $A$  однозначно определяется номерами  $k$  позиций кортежа, в которых записаны "1". То есть, число исходов в  $A$  равно числу способов выбрать  $k$  чисел из  $n$  чисел  $\Rightarrow |A| = C_n^k$  (число сочетаний без повторений из  $n$  по  $k$ );
4.  $P_n(k) = P(A) = |A| \cdot P\{\text{одного исхода из } A\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ .