1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 2 балла

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

События A и B называются **несовместными**, если $AB = \emptyset$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно несовместными**, если $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j, 1, j = \overline{1, n}$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **несовместными в совокупности**, если $A_1 \cdot ... \cdot A_n = \emptyset$.

Если A и B несовместные события (а также $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые. Если A и B – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми. Если A и B – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Пусть:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;
2. $\mu(\Omega) < \infty$ (мера множества Ω конечна; $n = 1 \Rightarrow \mu$ – длина; $n = 2 \Rightarrow \mu$ – площадь; $n = 3 \Rightarrow \mu$ – объем);
3. Возможность принадлежности исхода множеству $M \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества M ($\mu(M)$) и **не** зависит от формы M и его расположения внутри Ω;
4. $A \subseteq \Omega$ – некоторое событие.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;
2. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств множества Ω;

$\mathcal{B}$ называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$;
2. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \mathcal{B}$.

Свойства:

1. $\Omega \in \mathcal{B}$;
2. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
3. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то и $A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \mathcal{B}$;
4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \backslash B \in \mathcal{B}$.

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра на Ω.

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in B : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;
3. (расширенная аксиома сложения) Если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$

Свойства:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. Если $A \subseteq B, \text{то} P(A) \leq P(B)$;
4. $\forall A \in \mathcal{B} : 0 \leq P(A) \leq 1$;
5. $\forall\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
6. $\forall\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + ... + A_n) = \sum_{i_1=1}^{n}(A_{i1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}(A_{i1}A_{i2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n}(A_{i1}A_{i2}A_{i3}) - ... + (-1)^{n-1}P(A_1...A_n)$.

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Аксиома сложения. Если $A_1, ..., A_n$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n)$.

Расширенная аксиома сложения. Если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$

Аксиома непрерывности. Если $A_1, ..., A_n, ...$ – неубывающая последовательность событий (т.е. $A_i \leq A_{i+1}, i \in \mathbb{N}$), а $A = A_1 + ... + A_n + ...$, то $P(A) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$.

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть:

1. $A, B \in \mathcal{B}$ – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
2. известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие B.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Свойства:

1. $P(A|B) \geq 0$;
2. $P(\Omega|B) = 1$;
3. Если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...|B) = P(A_1|B) + ... + P(A_n|B) + ...$.

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема о формуле умножения вероятностей **для двух событий**. Пусть $P(A) > 0$, тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема о формуле умножения вероятностей **для n событий**. Пусть:

1. $A_i, ..., A_n$ – события;
2. $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда: $P(A_1 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$.

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть A, B – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События A и B называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Th.

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$, события A_i, A_j – независимые, т.е.: $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in \{2, ..., n\} \forall\forall i_1, ..., i_k \in \{1, ...n\}$ таких, что $i_1 < i_2 < ... < i_k$ выполняется $P(A_{i1} \cdot ... \cdot A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot ... \cdot P(A_{ik})$.

$A_1, ..., A_n$ –независимые в совокупности $\Rightarrow A_1, ..., A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пространство. Говорят, что события $H_1, ..., H_n \in \mathcal{B}$ образуют **полную группу**, если выполнены следующие условия:

1. $H_iH_j = 0$, при $i \neq j$;

2. $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Поскольку события $H_i, H_j, i \neq j$ несовместные и их вероятность не равна нулю, они обязательно зависимые.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1. $H_1, .., H_n$ – полная группа событий;
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
3. $A \in B$ – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда: $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2. $P(A) > 0$.

Тогда: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+...+P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$.

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Испытание – случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух элементарных исходов (т.е. $|\Omega| = 2$). При этом, один из этих исходов условно называется успехом, а другой – неудачей.

Схемой Бернулли будем называть серию независимых в совокупности однотипных испытаний.

$P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Th Бернулли. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$ – вероятность успеха в одном испытании.

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

Пусть $P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}, q = 1 - p, p$.

Пусть $P_n(k \geq 1)$ – вероятность осуществления хотя бы одного успеха в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.

Пусть $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ – вероятность осуществления от k_1 до k_2 успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Тогда $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} (C_n^k p^k q^{n-k})$.

2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла

2.1 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Пространством элементарных исходов называется множество Ω возможных исходов этого эксперимента. При этом должны выполняться эти условия:

1. Каждый **элементарный исход** мыслится единым и неделимым, т.е. он не может быть разбит на более «мелкие» в рамках данного эксперимента;

2. При однократном проведении случайного эксперимента реализуется ровно один элементарный исход из Ω.

Пусть:

1. $|\Omega| = N < \infty$;

2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);

3. $A \subseteq \Omega$ – событие, $|A| = N_A$.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

Пример: 2 раза бросают игральную кость, $A =$ сумма выпавших очков ≥ 11. Тогда $\Omega = \{(x_1, x_2), x_i \in \{1, ..., 6\}\}$; $|\Omega| = 36$; $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow \{A\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2.2 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности.

Пусть:

1. $|\Omega| = N < \infty$;

2. По условию эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход другим исходам (все исходы равновозможны);

3. $A \subseteq \Omega$ – событие, $|A| = N_A$.

Вероятностью осуществления события A называется число $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

Некоторые **свойства** вероятности:

1. $\forall A : P\{A\} \geq 0$;

2. $P\{\Omega\} = 1$;

3. Если A_1 и A_2 несовместны, то $P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$.

Доказательства:

1. $P\{A\} = \frac{N_A^{\geq 0}}{N^{>0}}$;

2. $P\{A\} = \frac{N_\Omega}{N} = \left\{ N_\Omega = N \right\} = 1$;

3. Формула включений и исключений $|A_1 + A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 A_2| = \left\{ |A_1 A_2| = 0 \text{ – по условию} \right\}$. Таким образом, $P\{A_1 + A_2\} = \frac{N_{A_1+A_2}}{N} = \frac{N_{A_1}}{N} + \frac{N_{A_2}}{N} = P\{A_1\} + P_{\{}A_2\}$.

2.3 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

Рассмотрим случайный эксперимент, который был проведен n раз, в результате чего событие A наступило n_A раз.

Вероятностью осуществления события A называется эмпирический, то есть известный из опыта предел: $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$.

Недостатки:

1. Никакой эксперимент не может быть проведен бесконечное число раз;

2. С точки зрения современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для развития теории.

2.4 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента;

2. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ – набор подмножеств множества Ω;

$\mathcal{B}$ называется **сигма-алгеброй** событий, если:

1. $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$;

2. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \mathcal{B}$.

Свойства:

1. $\Omega \in \mathcal{B}$;

2. $\emptyset \in \mathcal{B}$;

3. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B}$, то и $A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \mathcal{B}$;

4. Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \backslash B \in \mathcal{B}$.

Доказательства:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ по опр. $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{акс. 1} \right\} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{акс. 2} \right\} \Rightarrow A + \overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$;

2. $\Omega \in \mathcal{B}(\text{св-во } 1) \Rightarrow \left\{ \text{акс. 1} \right\} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$;

3. $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{акс. 1} \right\} \Rightarrow \overline{A_1}, ..., \overline{A_n}, ... \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{акс. 2} \right\} \Rightarrow \overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ... \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{акс. 1} \right\} \Rightarrow \overline{\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ...} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{з-н де Моргана} \right\} \Rightarrow \overline{\overline{A_1}} \cdot ... \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot ... \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \mathcal{B}$;

4. $A, B \in \mathcal{B}(\text{по усл.}) \Rightarrow \left\{ \text{акс. 1} \right\} \Rightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \text{св-во 3} \right\} \Rightarrow A\overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{B}$.

2.5 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра на Ω.

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in B : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;
3. (расширенная аксиома сложения) Если $A_1, ..., A_n$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$.

Свойства:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. Если $A \subseteq B, \text{то} P(A) \leq P(B)$.

Доказательства:

1. $\Omega = A + \overline{A}$, причем $A\overline{A} = \emptyset \Rightarrow 1 = \wr\text{акс. }2\wr = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = \wr\text{акс. }3\wr = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = \wr\text{св-во }1\wr = 1 - P(\Omega) = \wr\text{акс. }2\wr = 1 - 1 = 0$;
3. $B = A + B \backslash A$, причем $A \cdot (B \backslash A) = \emptyset$. Т.о. $P(B) = P(A + B\backslash A) = \wr\text{акс. }3\wr = P(A) + P(B\backslash A) \Rightarrow \wr\text{акс. }1\wr \Rightarrow P(B) = P(A) + (\geq 0) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

2.6 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть:

1. Ω – пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2. $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра на Ω.

Вероятностью (вероятностной мерой) называют функцию: $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, обладающую следующими свойствами, которые называются **аксиомами вероятности**:

1. (аксиома неотрицательности) $\forall A \in B : P(A) \geq 0$;
2. (аксиома нормированности) $P(\Omega) = 1$;

3. (расширенная аксиома сложения) Если $A_1, ..., A_n$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$.

Свойства:

1. $\forall A, B \in \mathcal{B} : P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
2. $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{B} : P(A_1 + ... + A_n) = \sum_{i_1=1}^{n}(A_{i1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}(A_{i1}A_{i2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n}(A_{i1}A_{i2}A_{i3}) - ... + (-1)^{n-1}P(A_1...A_n)$.

Доказательство:

1. а) $A + B = A + B \backslash A$, причем $A \cdot (B \backslash A) = \emptyset$. Тогда $P(A + B) = \left\{\text{акс. 3}\right\} = P(A) + P(B \backslash A)$. (1) б) $B = (B \backslash A) + AB$, причем $(B \backslash A) \cdot (AB) = \emptyset$. Тогда $P(B) = \left\{\text{акс. 3}\right\} = P(B \backslash A) + P(AB) \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(AB)$. (2) в) Подставим $P(B \backslash A)$ из (2) в соотношение (1): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2.7 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть:

1. $A, B \in \mathcal{B}$ – события, связанные с некоторым случайным экспериментом;
2. известно, что в результате проведения эксперимента наступило событие B.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Свойства:

1. $P(A|B) \ge 0$;
2. $P(\Omega|B) = 1$;
3. Если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...|B) = P(A_1|B) + ... + P(A_n|B) + ...$.

Доказательства:

1. $P(A|B) = \frac{P(AB)^{\ge 0 (\text{акс. неотр.})}}{P(B)^{>0}} \ge 0$;
2. $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \left\{\Omega B = B\right\} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$;
3. Пусть $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события. $P(A_1, ..., A_n, ...|B) = \frac{P((A_1 + ... + A_n + ...)B)}{P(B)} = \left\{\text{счетная дистрибутивность пересечения относительно объединения}\right\} = \frac{P(A_1B + ... + A_nB + ...)}{P(B)} = \left\{A_iB \subseteq A_i\text{. Т.к. } A_i, i \in \mathbb{N} \text{ попарно несовместны, то и } A_iB, i \in \mathbb{N} \text{ также будут попарно несовместны}\right\} = \left\{\text{акс. 3}\right\} = \frac{P(A_1B) + ... + P(A_nB) + ...}{P(B)} = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + ... + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + ... = P(A_i|B) + ... + P(A_n|B) + ...$.

2.8 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема о формуле умножения вероятностей **для двух событий**. Пусть $P(A) > 0$, тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Доказательство. Т.к. $P(A) > 0$, то определим условную вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема о формуле умножения вероятностей **для n событий**. Пусть:

1. $A_i, ..., A_n$ – события;
2. $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда: $P(A_1 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$.

Доказательство. 1) $\forall k \in \{1, ..., n-1\} : A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \subseteq A_1 \cdot ... \cdot A_{k-1} \Rightarrow (A_1 \cdot ... \cdot A_k)(A_{k+1} \cdot ... \cdot A_{n-1}) \subseteq A_1 \cdot ... \cdot A_k \Rightarrow P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) \leq P(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \Rightarrow \forall k \in \{1, ..., n-1\} : P(A_1 \cdot ... \cdot A_k) > 0$. 2) $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = \left\{P(AB) = P(A)P(B|A)\right\} = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) =$ $\{$ф-ла умножения вероятностей для двух событий$\}$ $= P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = ... = P(A_1) \cdot P(A_2|A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1})$.

2.9 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть A, B – события, связанные с некоторым случайным экспериментом. События A и B называются **независимыми**, если вероятность осуществления их произведения равна: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Th.

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Доказательство. Докажем 1.

Необходимость. Дано: A, B – независимые, т.е. $P(AB) = P(A)P(B)$. $P(A|B) =$ $\{$опр. усл. вер-ти$\}$ $= \frac{P(AB)}{P(B)} = \{A, B$ – независимые$\} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. Дано: $P(A|B) = P(A)$. $P(AB) = \{P(B) > 0 \Rightarrow$ ф-ла умножения вер-тей$\}$ $= P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow A, B$ – независимые.

2.10 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$, события A_i, A_j – независимые, т.е.: $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in \{2, ..., n\} \forall\forall i_1, ..., i_k \in \{1, ...n\}$ таких, что $i_1 < i_2 < ... < i_k$ выполняется $P(A_{i1} \cdot ... \cdot A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot ... \cdot P(A_{ik})$.

$A_1, ..., A_n$ –независимые в совокупности $\Rightarrow A_1, ..., A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

Пример Берништейна. Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры "1 "2 "3"соответственно, а на четвертой написано "123". Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события $A_i = \{\text{на нижней грани есть} i\}, i \in \{1, 2, 3\}$ – попарно независимы, но **не** являются независимыми в совокупности.

1. $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$;
2. $P(A_1A_2) = \Big\{A_1A_2 = \{\text{на нижней грани есть и 1 и 2 рядом}\}\Big\} = \frac{1}{4} = P(A_1A_3) = P(A_2A_3)$;
3. $P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}$;
4. $P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2), P(A_1A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3), P(A_2A_32) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – попарно независимые;
5. $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ – неверно! $\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – **не** являются независимыми в совокупности.

2.11 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть:

1. $H_1, .., H_n$ – полная группа событий;
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
3. $A \in B$ – событие, связанное с некоторым случайным экспериментом.

Тогда: $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство. $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + ... + H_n)) = P(AH_1 + AH_2 + ... + AH_n) = \Big\{AH_i \subseteq H_i, AH_j \subseteq H_j \Rightarrow (AH_i) \cdot (AH_j) = 0\Big\} = \Big\{\text{акс. сложения}\Big\} = P(AH_1) + ... + P(AH_n) = \Big\{P(H_i) > 0 \Rightarrow$ используем формулу умножения вер-тей$\Big\} = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

2.12 Доказать теорему о формуле Байеса.

Пусть:

1. выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности;
2. $P(A) > 0$.

Тогда: $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+...+P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $P(H_i|A) = \Big\{P(A) > 0 \Rightarrow$ эта условная вероятность определена$\Big\} = \Big\{$опр. условной вер-ти$\Big\} = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \Big\{$числитель расписываем по теореме умножения вер-тей, а знаменатель – по формуле полной вер-ти$\Big\} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+...+P(A|H_n)P(H_n)}$.

2.13 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

$P_n(k)$ – вероятность осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Th Бернулли. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0,n}, q = 1-p, p$ – вероятность успеха в одном испытании.

Доказательство.

1. Опишем результат серии с использованием кортежа $(x_1, ..., x_n)$, где x_i = 1, если в i-ом испытании произошел успех и 0, иначе. $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}\}$;

2. A = {в серии из n испытаний произошло ровно k успехов}. $(x_1, ..., x_n) \in A$ – тут ровно k единиц и $n-k$ нулей. $P\{\text{одного исхода из} A\} = P\{\{\text{в первом испытании } x_1 \text{ успехов}\} \cdot ... \cdot \{\text{в } n\text{-ом испытании } x_n \text{ успехов}\}\} = \big\{\text{отдельные испытание независимы в совокупности}\big\} = P\{x_1 \text{успех в первом испытании}\} \cdot ... \cdot P\{x_n \text{успехов в } n\text{-ом испытании}\} = p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow$ одинаковая для всех исходов из A.

3. $|A| =?$ Каждый исход из A однозначно определяется номерами k позиций кортежа, в которых записаны "1". То есть, число исходов в A равно числу способов выбрать k чисел из n чисел $\Rightarrow |A| = C_n^k$ (число сочетаний без повторений из n по k);

4. $P_n(k) = P(A) = |A| \cdot P\{\text{одного исхода из } A\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.