Содержание

1 Случайные события

1.1 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное события, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{$«5», «6»$\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Событие A называют **следствием события** B, если из того, что произошло B, следует то, что произошло A, т. е. $B \subseteq A$.

Любое множество Ω содержит в себе два подмножества: $\emptyset$ и Ω. События, соответствующие данным множествам, называются **невозможным и достоверным** соответственно. Эти события называются несобственными событиями. Все остальные события называются собственными.

Пример №5. Из урны, содержащей два красных и три синих шара, извлекают один шар. Возможные события: $A = \{$извлечённый шар является красным или синим$\}$ – является достоверным, $B = \{$извлечён белый шар$\}$ – невозможным.

Операции над событиями

События – множества элементарных исходов. Следовательно, над ними можно выполнять все операции над множествами. При этом вводится следующая терминология.

1. Объединение множеств принято называть суммой событий: $A \cup B = A + B$;

2. Пересечение множеств называют произведением событий: $A \cap B = A \cdot B$;

3. Дополнение A называют событием, противоположным A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Классическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство исходов некоторого случайного эксперимента, $|\Omega| = N < \infty$;

2) все элементарные исходы равновозможны;

3) существует событие $A \subseteq \Omega, |A| = N_A$.

Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P(A) = \frac{N_A}{N}$.

Свойства

1. $P(A) \geq 0$.

   Доказательство. Т. к. $N_A \geq 0, N > 0$, то $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$.

2. $P(\Omega) = 1$.

   Доказательство. $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1, |\Omega| = N_\Omega = N$.

3. Если A, B – несовместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

   Доказательство. Т. к. Ω – конечно, тогда $A, B \subseteq \Omega$ – конечны. Существует формула: $|A+B| = |A| + |B| - |AB|$. Т. к. A, B – несовместны, то $AB = \emptyset \implies N_A + N_B = N_{A+B}$. Таким образом, $P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$.

1.2 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятности. Достоинства и недостатки этих определений.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Нестрогое определение. Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

Пример №4. Бросают игральную кость: $\Omega = \{$«1», «2», «3», «4», «5», «6»$\}, |\Omega| = 6$. Можно определить событие A = {выпавшее число очков равно «5» или «6»}, т.е. $A = \{$«5», «6»$\}, |A| = 2$. Если в результате эксперимента выпавшее число очков равно «5» или «6», то всё событие A целиком «наступило».

Геометрическое определение вероятности

Пусть:

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;

2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ – мера множества;

3) возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию A пропорциональна мере этого события и не зависит от формы A и его расположения внутри Ω.

Тогда вероятностью осуществления события A называется число $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Недостаток геометрического определения заключается в том, что оно не учитывает возможность того, что некоторые области внутри Ω окажутся более предпочтительными, чем другие.

Статистическое определение вероятности

Пусть:

1) некоторый случайный эксперимент произведён n раз;

2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Тогда вероятностью осуществления события A называют эмпирический (т. е. найденный экспериментальным путём) предел: $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{n_A}{n}$.

Недостатки статичестического определения вероятности:

1) никакой эксперимент не может быть произведён бесконечно много раз;

2) с точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.3 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма–алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\beta \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда β называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \beta$.

Простейшие свойства

1. $\Omega \in \beta$.

   Доказательство. $\beta \neq \emptyset$ – по определению $\Rightarrow \exists A \subseteq \Omega : A \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A} \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 2) $A + \overline{A} \in \beta$. Т. к. $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow \Omega \in \beta$.

2. $\emptyset \in \beta$.

   Доказательство. Т. к. $\Omega \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{\Omega} \in \beta, \overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta$.

3. Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \beta$.

   Доказательство. Т. к. $A_1, ..., A_n, ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{A_1}, ..., \overline{A_n}, ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 2) $\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ... \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\Rightarrow \overline{\overline{A_1} + ... + \overline{A_n} + ...} \in \beta \Rightarrow$ (по закону Де Моргана) $\overline{\overline{A_1}} \cdot ... \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot ... \in \beta \Rightarrow A_1 \cdot ... \cdot A_n \cdot ... \in \beta$.

4. Если $A, B \in \beta$, то $A \setminus B \in \beta$.

   Доказательство. Из свойств операций над множествами: $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$. $B \in \beta \Rightarrow$ (аксиома 1) $\overline{B} \in \beta \Rightarrow A, \overline{B} \in \beta \Rightarrow$ (свойство 3) $A \cdot \overline{B} \in \beta \Rightarrow A \setminus B \in \beta$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) β – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

1.4 Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма–алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Случайным называют эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать заранее.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют **пространством элементарных исходов**, при этом выполняются следующие условия:

— каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;

— в результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

Пример №1. Бросают монетку. Возможные исходы: выпадение герба или решки. Тогда $\Omega = \{\text{Герб, Решка}\}$ – множество элементарных исходов. $|\Omega| = 2$.

Пример №2. Бросают игральную кость: $\Omega = \{\text{«1», «2», «3», «4», «5», «6»}\}, |\Omega| = 6$.

Пример №3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают 2 карты (без возвращения). Исход можно описать парой (x_1, x_2), где x_i – номер карты при i-ом извлечении. Тогда $\Omega = \{(x_i,\ x_j) :\ x_i,\ x_j \in \{1, ..., 36\},\ i \neq j\}, |\Omega| = 36 \cdot 35$.

Определение сигма–алгебры событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) $\beta \neq \emptyset$ – набор подмножеств в множестве Ω.

Тогда β называется сигма–алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;

2) Если $A_1, ..., A_n, ... \in \beta$, то $A_1 + ... + A_n + ... \in \beta$.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента;

2) β – сигма–алгебра на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to \mathbb{R}$ обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) если $A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместные события, то $P(A_1 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$ (расширенная аксиома сложения).

Простейшие свойства

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $A + \overline{A} \in \beta$ (аксиома 2 сигма–алгебры), $A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow$ (по свойству вероятностей) $P(\Omega) = 1 = P(A + \overline{A}) \Rightarrow$ т. к. $A, \overline{A}$ – несовместны, то $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

   Доказательство. $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) \Rightarrow$ (свойство 1) $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0, P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности.

3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

   Доказательство. $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$. Тогда $P(B) = P(A + (B \setminus A)) =$ ($A, B \setminus A$ – несовместны, аксиома 3) $= P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

4. $\forall A \in \beta : 0 \leq P(A) \leq 1$.

   Доказательство. $P(A) \geq 0$ – из аксиомы 1. $\forall A : A \subseteq \Omega \Rightarrow$ (свойство 3) $P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow$ (свойство 2) $P(A) \leq 1$.

5. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \beta$.

   Доказательство. $\forall\forall A, B$:

   (а) $A + B = A + (B \setminus A), A \cdot (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

   (б) $B = AB + (B \setminus A), (AB)(B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow$ (аксиома 3) $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$.

   Из (а) и (б): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6. $\forall\forall A_1, ..., A_n : P(A_1 + ... + A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - ... - P(A_{n-1}A_n) +$
   $+P(A_1A_2A_3) + ... + (-1)^{n+1}P(A_1A_2...A_n)$.

   Доказательство. Является обобщением свойства 5, может быть доказано с использованием метода математической индукции.

1.5 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$.

Теорема. Пусть:

1) зафиксировано событие $B, P(B) \neq 0$;

2) $P(A|B)$ рассматривается как функция события A.

Тогда $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Доказательство.

1. Докажем, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трём аксиомам вероятности:

   (а) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(AB) \geq 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) \geq 0.$

   (б) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{B} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

   (в) $P(A_1 + ... + A_n + ...|B) = \frac{P((A_1+...+A_n+...)B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1 B + A_2 B + ... + A_n B + ...) = |A_1, ..., A_n, ...$ – попарно несовместны $\Rightarrow$ $A_1 B, ... A_n B, ...$ – попарно несовместны, тогда используем расширенную аксиому сложения$| = \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1 B) + P(A_2 B) + ... + P(A_n B) + ...] = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + ... + \frac{P(A_n B)}{P(B)} + ... =$ $= P(A_1|B) + ... + P(A_n|B) + ...$

2. Т.к. свойства безусловной вероятности являются прямыми следствиями из аксиом безусловной вероятности, а условная вероятность этим аксиомам удовлетворяет, то она удовлетворяет свойствам безусловной вероятности.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести пример использования этой формулы.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Тогда **условной вероятностью** осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0.$

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий. Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A) > 0.$

Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A).$

Доказательство. Т.к. $P(A) > 0$, то определена условная вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow$ $\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B|A).$

Теорема. Формула умножения вероятностей для n событий. Пусть:

1) $A_1, ..., A_n$ – события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0.$

Тогда $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$

Доказательство.

1. $k = \overline{1, n-1} : A_1 \cdot ... \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}$. По 3-му свойству вероятности $P(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot$ $\cdot ... \cdot A_{n-1}) > 0$. Следовательно, все условные вероятности, входящие в правую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n|A_1 A_2 ... A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.

2. Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий:

   $P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot ... \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2}) \cdot P(An-1|A_1 \cdot \cdot ... \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot ... \cdot A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1...A_{n-1})$.

Пример. На семи карточках написаны буквы слова «ШОКОЛАД». Карточки тщательно перемешивают, и по очереди извлекают случайным образом три из них без возвращения первых карточек. Найти вероятность того, что эти три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»:

Событие $A = \{$три карточки в порядке появления образуют слово «ШОК»$\}$.

Введет следующие события: $A_1 = \{$на первой извлеченной карточке написано «Ш»$\}$; $A_2 = \{$на второй извлеченной карточке написано «О»$\}$; $A_3 = \{$на третьей извлеяенной карточке написано «К»$\}$.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$.

1.7 Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих свойств.

События A и B, связанные с некоторым случайным экспериментом и имеющие ненулевую вероятность, называеются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

События $A_1, ..., A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall\forall i \neq j, j \in \{1, ..., n\} : P\{A_iA_j\} = P\{A_i\}P\{A_j\}$.

События $A_1, ..., A_n$, связанные с некоторым случайным экспериментом, называются **независимыми в совокупности**, если $\forall k \in 2, ..., n, \forall\forall i_1 < i_2 < ... < i_k : P\{A_{i_1}, ..., A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\} \cdot ... \cdot P\{A_{i_k}\}$.

Если $A_1, ..., A_n$ независимые в совокупности, то $A_1, ..., A_n$ – попарно независимые. Обратное неверно.

Пример Берништейна.

Рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого написаны цифры «1», «2», «3» соответственно, а на четвертой написано «123». Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани. Докажем, что события $A_i = \{$на нижней грани есть $i\}, i \in 1, 2, 3$ – попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. $P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$.
2. $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – попарно независимые.
3. $P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \Rightarrow A_1, A_2, A_3$ – не являются независимыми в совокупности.

Теорема

1. Если $P(B) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Если $P(A) > 0$, то A, B – независимые $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Доказательство

Необходимость. A, B – независимые события, т.е. $P(AB) = P(A)P(B)$. $P(A|B) = |$по определению условной вероятности$| = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. $P(A|B) = P(A)$. $P(AB) = |$по формуле умножения вероятностей$| = P(B)P(A|B) = P(B)P(A), P(B) > 0 \Rightarrow A, B$ – независимые.

Доказательство для (2) аналогично.

1.8 Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теоремы о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятия априорной и апостериорной вероятностей.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) – вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Говорят, что события $H_1, ..., H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если:

1) $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;

2) $H_i H_j = \emptyset, i \neq j$;

3) $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Теорема. Формула полной вероятности

Пусть:

1. $H_1, ..., H_n$ – полная группа событий.
2. $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$.
3. $A \in \beta$ – событие.

Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство. $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + ... + H_n)) = P(AH_1 + ... + AH_n) = |H_1, ..., Hn$ – попарно независимые события$| = P(AH_1) + ... + P(AH_n) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$.

Теорема. Формула Байеса

Пусть:

1. Выполнены условия теоремы о формуле полной вероятности.
2. $A \in \beta : P(A) > 0$.

Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{A} = |$числитель – теорема умножения тероятностей, знаменатель – формула полной вероятности$| = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)}$.

Априорная вероятность – это вероятность, которая известна или оценивается до проведения случайного эксперимента.

Апостериорная вероятность – это вероятность события, рассчитанная после того, как был проведён эксперимент.

1.9 Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, т.е. вероятность реализации успеха в i-ом испытании не зависит от исходов первого, второго,...,$i-1$-го испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдёт ровно k успехов: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство

1. Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа $(x_1, ..., x_n)$, где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании имел место успех,} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м испытании имела место неудача.} \end{cases}$
2. Пусть $A = \{$в серии из n испытаний произошло ровно k успехов$\}$. Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц и $n-k$ нулей. В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i, и тогда общая вероятность исхода будет равна: $p^k q^{n-k}$. Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_n^k штук, что означает: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Следствие (1)

Вероятность того, что количество успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено между k_1 и k_2, равна:$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Доказательство

1. Пусть $A_i = \{$в серии произошло ровно i успехов$\}$, $\quad i = k_1, \dots, k_2$, и $P(A_i) = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}$.
2. Тогда $A = A_{k_1} + A_{k_1+1} + \dots + A_{k_2}$, где $P(A) = P(A_{k_1} + \dots + A_{k_2})$.

   Так как события A_i и A_j несовместны при $i \ne j$, то $P(A) = P(A_{k_1}) + \dots + P(A_{k_2})$.

   Подставим выражение для $P(A_i)$: $P(A) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P\{A_i\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

   Таким образом: $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

Следствие (2)

Вероятность того, что в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (и неудачи $q = 1-p$) произойдёт хотя бы один успех, равна:$P_n(k \ge 1) = 1 - q^n$.

Доказательство

Пусть $A = \{$в серии произошёл хотя бы один успех$\}$. Тогда противоположное событие: $\bar{A} = \{$в серии не будет ни одного успеха$\}$.

Вероятность события A равна:$P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Вероятность $P(\bar{A})$ соответствует $P_n(0)$, то есть вероятности того, что в серии из n испытаний не произойдёт ни одного успеха:$P(\bar{A}) = P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0}$.

Подставляя значения, получаем:$P(\bar{A}) = q^n$.

Таким образом:$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q^n$.

2 Случайные величины

2.1 Сформулировать определение случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Доказать свойства функции распределения.

Пусть (Ω, β, P) – вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Случайной величиной называется функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$.

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.

   Доказательство. $F(x)$ определена как вероятность, т.е. $F(x) = P\{...\} \in [0; 1]$.

2. F – неубывающая функция, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

   Доказательство. Если $x_1 \le x_2$, тогда $F(x_2) = P\{X < x_2\} = P\{\underbrace{\{X < x_1\}}_{\text{Событие } A} + \underbrace{\{x_1 \le X < x_2\}}_{\text{Событие } B}\}$.

   События A и B несовместны $\Rightarrow F(x_2) = P\{\underbrace{\{X < x_1\}}_{F(x_1)} + \underbrace{\{x_1 \le X < x_2\}}_{\ge 0}\} \ge F(x_1)$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

   Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_1, x_2, x_3, ...$ такую, что

   (a) $x_1 < x_2 < x_3 < ...$;

   (b) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = +\infty$.

   $A_i = \{X < x_i\}, i \in \mathbb{N}$; $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq ...$ – неубывающая последовательность событий. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = |\text{аксиома непрерывности}| = P\{X < +\infty\} = 1$.

   Т.к. $x_1, x_2, x_3, ...$ – произвольная последовательность (неубывающая и стремящаяся к бесконечности), то в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Вторая часть этого свойства доказывается аналогично.

4. $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$, в каждой точке F непрерывна слева.

   Доказательство. Пусть $x_1, x_2, ...$ – возрастающая последовательность, $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$.

   Пусть $A_i = \{X < x_i\}, i \in \mathbb{N}$. Тогда событие $\{X < x_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, причем последовательность событий $A_1, A_2, ...$ является возраставющей $\Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} F(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = |\text{аксиома непрерывности}| = P\{X < x_0\} = F(x_0)$. Т.к. $x_1, x_2, ...$ - произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 слева, то в соответствии с определением предела функции по Гейне $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$.

5. $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

   Доказательство. $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\} \Rightarrow \underbrace{P\{X < b\}}_{F(b)} = \underbrace{P\{X < a\}}_{F(a)} +$

   $+P\{a \le X < b\} \Rightarrow P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

2.2 Сформулировать определения случайной величины и функции распределения случайной величины. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины. Доказать свойства плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Пусть (Ω, β, P) – вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Случайной величиной называется функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$.

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F_X(x) = P\{X < x\}$.

Случайная величина называется **дискретной**, если множество её значений конечно или счётно.

Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (F – функция распределения вероятностей случайной величины X). При этом f называют функцией плотности распределения вероятности случайной величины X.

Свойства плотности распределения вероятностей

1. $f(x) \geq 0$.

   Доказательство. F – неубывающая функция $\Rightarrow f(x) = F^{'}(x) \geq 0$.

2. $P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx$.

   Доказательство. $P\{x \leq X < b\} = F(b) - F(a) = [f(x) = F^{'}(x)$; по формуле Ньютона–Лейбница$] =$
   $= \int_a^b f(x)dx$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   Доказательство. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to +\infty}} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = |$свойство 2$| = \lim\limits_{x_2 \to +\infty} F(x_2) - \lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1) =$
   $= F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

4. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$; x_0 – точка непрерывности функции f, Δx – мало.

   Доказательство. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = |$свойство 2$| = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. Т.к. x_0 – точка непрерывности f, а Δx – мало, то можно считать, что в окрестности $(x_0, x_0 + \Delta x)$ функция $F^{'} = f$ непрерывна. Применим к функции f на $[x_0, x_0 + \Delta x]$ т. Лагранджа $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \underbrace{F^{'}(\xi)}_{f(\xi)} \Delta x$,

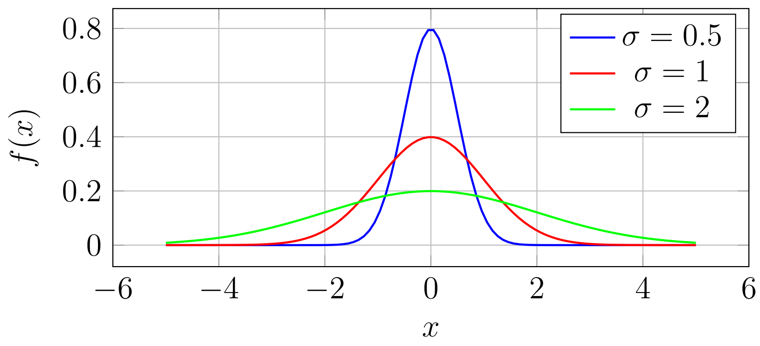
   где $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. Т.к. Δx мало, а f непрерывна в некоторой окрестности x_0, то можно считать, что $f(\xi) \approx f(x_0)$. Таким образом, $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$.

5. Для любого наперед заданного $x_0 \in \mathbb{R}$: $P\{X = x_0\} = 0$.

   Доказательство. $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)] = 0$, т.к. F – непрерывна.

2.3 Сформулировать определение нормальной случайной величины, указать геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона. Доказать формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Говорят, что случайная величина X имеет **нормальное распределение** с параметрами m и $\sigma^2 (\sigma > 0)$, если её функция плотности имеет вид $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$. Обозначается $X \sim N(m, \sigma^2)$.



Функция плотности нормального распределения имеет характерную колоколообразную форму; m является координатой x «центра» этого колокола (центра симметрии), а σ характеризует разброс значений случайной величины; чем меньше σ, тем выше экстремум функции плотности.

Распределение $N(0,1)$ называет **стандартным нормальным распределением**; для него функция плотности равна $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$.

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал.

Рассмотрим

$$P\{a \le X < b\} = \left\langle \text{по свойству плотности распределения} \right\rangle = \int_a^b f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left\langle t = \frac{x-m}{\sigma},\ dx = \sigma\,dt;\ x = a \implies t = \frac{a-m}{\sigma},\ x = b \implies t = \frac{b-m}{\sigma} \right\rangle =$$

$$= \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left\langle \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{0,1}(t)\,dt \right\rangle =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Big\langle \Phi(t) \text{ — стандартное нормальное распределение, такое, что}$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \implies \Phi(t) \Big\rangle = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Т.к. $X \sim N(m, \sigma^2)$ – непрерывная случайная величина, то

$$P\{a \le X \le b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

2.4 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать предельные свойства.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.
2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Свойства

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$.

2. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией;

3. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0.$

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$; при $x_1 \to -\infty$ событие $\{X_1 < -\infty\}$ является невозможным. Произведение невозможного события на событие $\{X_2 < x_2\}$ является невозможным событием, поэтому $F(x_1, x_2)$ стремится к нулю при $x_1 \to -\infty$, $x_2 = \text{const}$.

   $\lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0$ доказывается аналогично.

4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1..$

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$. Событие $\{X_1 < +\infty\}$ является достоверным, $\{X_2 < +\infty\}$ также является достоверным, а произведение достоверных событий – достоверное событие.

5. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2), \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1),$

   где F_{X_i} – маргинальная функция распределения случайной величины X_i.

   Доказательство. По определению, $F(x_1, x_2) = P(\{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\})$. Событие $\{X_2 < +\infty\}$ является достоверным, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = P\{X_2 < x_2\} = F_{X_2}(x_2)$.

   Для второго предела – доказывается аналогично.

6. $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\} : Pa_1 \leq X < b_1, a_2 \leq Y < b_2 = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - -F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.

7. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является непрерывной слева в каждой точке;

2.5 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения двумерного случайного вектора. Доказать формулу для вычисления $P\{a_1 \leq X_1 < b1, a_2 \leq X_2 < b_2\}$.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.

2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Свойства

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$.
2. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией;
3. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to -\infty}} F(x_1, x_2) = 0.$
4. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1..$
5. $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = \text{const}}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2), \quad \lim\limits_{\substack{x_1 = \text{const} \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1),$

   где F_{X_i} – маргинальная функция распределения случайной величины X_i.
6. $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\} : P\{a_1 \leq X < b_1, a_2 \leq Y < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) -$ $-F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.
7. (a) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

   (b) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является непрерывной слева в каждой точке;

Формула для вычисления $P\{a_1 \leq X_1 < b1, a_2 \leq X_2 < b_2\}$

(a) Найдем вероятность попадания случайного вектора (X_1, X_2) в полосу $\{X_1 < x_1, a_2 \leq X < b_2\}$

  1. $\{X_1 < x_1, X_2 < b_2\} = \{X_1 < x_1, a_2 \leq X < b_2\} + \{X_1 < x_1, X_2 < a_2\}$
  2. По теореме сложения: $P\{X_1 < x_1, X_2 < b_2\} = P\{X_1 < x_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} +$ $+P\{X_1 < x_1, X_2 < a_2\} \Rightarrow P\{X_1 < x_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)$.

(b)
  1. $\{X_1 < b_1, a_2 \leq X < b_2\} = \{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} + \{X_1 < a_1, a_2 \leq X_2 < b_2\}$.
  2. По формуле сложения: $P\{X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = P\{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} +$ $+P\{X_1 < a_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} \Rightarrow$ из пункта (a) $: P\{a_1 \leq X_1 < b1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) -$ $-F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2)$.

2.6 Сформулировать определение случайного вектора и функции распределения вероятностей случайного вектора. Сформулировть определение непрерывного случайного вектора и доказать свойства плотности распределения вероятностей для двумерного случайного вектора.

Пусть:

1. (Ω, β, P) – вероятностное пространство.

2. $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ – случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Тогда n-мерным **случайным вектором** называется кортеж $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Функцией распределения вероятностей случайного вектора называют отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенное правилом $F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$.

Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ называется **непрерывным**, если существует функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что для каждой точки $(x_1, ..., x_n)$ выполняется $F(x_1, ..., x_n) =$
$= \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, ..., t_n)dt_n$, где F – функция распределения плотности случайного вектора $\vec{X}$. При этом f называется **функцией плотности распределения вероятностей** этого вектора.

Свойства плотности распределения

1. $f(x_1, x_2) \geq 0$.

2. $P\{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2$.

3. $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1$.

4. $P\{x_1^0 \leq x_1 < x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq X_2 < x_2^0 + \Delta x_2\} \approx f(x_1^0, x_2^0)\Delta x_1 \Delta x_2$, (x_1^0, x_2^0) – точка непрерывности функции f, $\Delta x_1, \Delta x_2$ достаточно малы.

5. Для любых наперед заданных $x_1^0, x_2^0 : P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = 0$.

6. $P\{(X_1, X_2) \in D\} = \int\int_D f(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = f_{X_1}(x_1)$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = f_{X_2}(x_2)$, где f_{X_1}, f_{X_2} – маргинальные функции плотности случайных величин X_1 и X_2 соответственно.

Доказательства

Доказательства свойств 1-5 аналогичны одномерному случаю.

Свойство 6 является обобщением свойства 2 на случай произвольной области D (без доказательства).

Доказательство свойства 7. $F(x_1, +\infty) = F_{X_1}(x_1)$ – по свойству двумерной функции распределения; таким образом (подставим определение функции распределения для двумерного вектора), $F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$.

$f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = \Big\langle x_1$– точка непрерывности функции $f_{X_1}(x_1)$, и точка по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом$\Big\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2)dt_2$.

Вторая формула доказывается аналогично.

2.7 Сформулировать определение пары независимых случайных величин. Доказать свойства независимых случайных величин. Понятия попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, где F – совместная функция распределения X и Y ($\equiv$ функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y – маргинальные функции распределения случайных величин X и Y.

Свойства независимых случайных величин

1. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R},$ события$\{X < x\}$ и$\{Y < y\}$ независимы.

   Доказательство. Очевидно следует из определения независимых случайных величин.

2. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$ события$\{x_1 \le X < x_2\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2\}$ независимы.

   Доказательство.

   (a) Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Тогда

$$P\{x_1 \le X < x_2,\, y_1 \le Y < y_2\} = (\text{свойство функции распределения случайного вектора}) =$$

$$= F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) =$$

$$= F_X(x_1)F_Y(y_1) + F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) = [F_X(x_2) - F_X(x_1)][F_Y(y_2) - F_Y(y_1)] =$$

$$= (\text{свойство одномерной функции распределения}) = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\}.$$

   (b) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$P\{x_1 \le X < x_2,\, y_1 \le Y < y_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\}P\{y_1 \le Y < y_2\}$$

   Тогда

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} =$$

$$= (\text{при } x_1 = -\infty, x_2 = x, y_1 = -\infty, y_2 = y) =$$

$$= P\{-\infty < X < x\}P\{-\infty < Y < y\} = F_X(x)F_Y(y)$$

3. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall M_1, M_2$ события$\{X \in M_1\}$ и$\{Y \in M_2\}$ независимы, где M_1, M_2 – промежутки или объединения промежутков в $\mathbb{R}$.

   Доказательство. Является обобщением свойств 1 и 2.

4. Если X и Y — дискретные случайные величины, то X, Y независимы $\Leftrightarrow p_{ij} \equiv P_X(x_i)P_Y(y_j)$, где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $P_X(x_i) = P\{X = x_i\}$, $P_Y(y_j) = P\{Y = y_j\}$.

   Доказательство.

(a) Достаточность (⇐). Достаточность была доказана выше, в рассуждениях перед определением независимых случайных величин.

(b) Необходимость (⇒). Необходимость студентам предлагается доказать самостоятельно.

5. Если X и Y — непрерывные случайные величины, то X, Y независимы $\Leftrightarrow$ $f(x, y) \equiv f_X(x) f_Y(y)$.

Доказательство.

(a) Необходимость (⇒). Пусть $F(x, y) \equiv F_X(x) F_Y(y)$. По свойству двумерной плоскости:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}[F_X(x)F_Y(y)] = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) f_Y(y)$$

(b) Достаточность (⇐). Пусть $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. Тогда

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f(t,v)\, dv = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_X(t) f_Y(v)\, dv = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt}_{F_X(x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\, dv}_{F_Y(y)} = F_X(x) F_Y(y)$$

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном вероятностном пространстве, называются:

— **Попарно независимыми**, если X_i и X_j независимы при $i \neq j$;

— **Независимыми в совокупности**, если $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot F_{X_n}(x_n)$, где F — совместная функция распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ ($\equiv$ функция распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$); F_{X_i} — маргинальные функции распределения случайных величин $X_i, i = 1, \ldots, n$.

gjrtf