答案：

一、　填空题（20分）

1. $(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$;

2. $ab+b+3=0$;

3. 3

4. 1

5. 20

二、选择题（15分）

1. B
2. D
3. D
4. C
5. D

三、计算题（28分）

1. 已知 $AX=B,A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&2&1\\2&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\2&5\end{pmatrix}$，求 X.

解:

$$(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&1&2\\-3&2&1&3&0\\2&0&1&2&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&1&2\\0&-1&-2&6&6\\0&2&3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&1&2\\0&1&2&-6&-6\\0&2&3&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&-5&-4\\0&1&2&-6&-6\\0&0&-1&12&13\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&-5&-4\\0&1&2&-6&-6\\0&0&1&-12&-13\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&7&9\\0&1&0&18&20\\0&0&1&-12&-13\end{array}\right)$$

故 $X=\begin{pmatrix}7&9\\18&20\\-12&-13\end{pmatrix}$.

2. 讨论 a,b 为何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\3&2&a&-1\end{pmatrix}$ 的秩为2?

解: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\3&2&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\0&-1&a-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&b+1\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

由于 $r(A)=2$，故 $a=1,b=-1$.

3. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正惯性指标为3，求参数 t 的取值范围.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{pmatrix}$，其惯性指数为3，则各阶顺序主子式均为正.

$\Delta_1=5>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0,$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=5t+2+2-1-5-4t=t-2>0,$　　从而 $t>2$.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,3,-2,1),\alpha_2=(-1,-4,2,1),\alpha_3=(1,2,-2,1),\alpha_4=(0,1,3,1),\alpha_5=(1,3,1,2)$.求该向量组的秩和一个极大无关向量组.

解：将向量组列摆成矩阵

$$A=\left(\alpha_1^T\quad\alpha_2^T\quad\alpha_3^T\quad\alpha_4^T\quad\alpha_5^T\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\3&-4&2&1&3\\-2&2&-2&3&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&3&3\\0&2&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&3&3\\0&0&-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&-2&3&1\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}$$

故 $r(A)=4$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为一个极大线性无关组.

四、(10分)

当a为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4, \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，有唯一解，无解，无穷多解？并在有无穷多解时，求其通解.

解：增广矩阵为

$$\bar{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots 4 \\ -1 & a & 1 & \vdots a^2 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & a+1 & a+1 & \vdots & a^2+4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \\ 0 & a+1 & a+1 & \vdots & a^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(a+1)(4-a)}{2} & \vdots & a^2-4a \end{pmatrix}$$

故当 $\dfrac{(a+1)(4-a)}{2}\neq 0$，即 $a\neq -1$且$a\neq 4$时，$r(A)=r(\bar{A})$，方程有唯一解.

当 $a=-1$时，$r(A)=2$，$r(\bar{A})=3$，方程无解.

当 $a=4$时，$r(\bar{A})=r(A)=2$，方程有无穷多解. 此时增广矩阵简化为

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4\vdots & 4 \\ 0 & -2 & -2\vdots & -8 \\ 0 & 0 & 0\vdots & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4\vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1\vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0\vdots & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1\vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0\vdots & 0 \end{pmatrix}$$

令自由变量$x_3=0$，可得特解$\eta^*=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\end{pmatrix}^T$，

令自由变量$x_3=1$，可得基础解$\xi=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，故通解为$\eta^*+k\zeta$， k为任意常数.

五、(12分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，其特征值为$0,1,4$.

(1) 求 a,b.

(2) 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

(3) 求正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

解：(1) 根据特征值的性质 $0+1+4=1+a+1$，故 $a=3$.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+b+b-a-1-b^2=0$，故$b=1$.

(2) $\lambda_1=0$时，解齐次方程组$AX=0$， $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T.$$

$\lambda_2=1$时，解齐次方程组$(A-E)X=0$， $A-E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故特征向量可取为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

$\lambda_3=4$时，解$(A-4E)X=0$，$A-4E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故特征向量可取为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$.

令 $P=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) 显然ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交，将它们单位化，得到

$$Q=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

六、证明题（15 分）

1. 若 $A=(a_{ij})_{m\times p}, B=(b_{ij})_{p\times n}$，证明：$r(AB)\le r(B)$.

证明：考虑齐次方程 $BX=0$ 和 $(AB)X=0$，其解空间分别为 V_1,V_2，其维数分别为 $n-r(B)$ 和 $n-r(AB)$. 显然满足 $BX=0$ 的解也一定满足 $ABX=0$，故 $V_1\subset V_2$，从而

$n-r(B)\le n-r(AB)$，得证.

2. 实对称矩阵的特征值必定是实数.

证明：设 λ 为实对称矩阵 A 的任一特征值，α 为对应的特征向量，显然 $A\alpha=\lambda\alpha$，两边分别转置和取共轭，得到

$\alpha^T A^T=\lambda\alpha^T$，$\bar{A}\bar{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\alpha}$

又 $A=A^T=\bar{A}$，故 $\alpha^T A=\lambda\alpha^T$，$A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}\bar{\alpha}$，从而

$\alpha^T A\bar{\alpha}=\bar{\lambda}\alpha^T\bar{\alpha}, \alpha^T A\bar{\alpha}=\lambda\alpha^T\bar{\alpha}$,即 $(\bar{\lambda}-\lambda)\alpha^T\bar{\alpha}=0$.

又 α 非零，故 $\alpha^T\bar{\alpha}>0$，从而 $\bar{\lambda}=\lambda$，得证.