

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题 (20 分)
(把答案写在下面的下划线上)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____
2. 若 $\alpha = (a, 1, -1), \beta = (1, 0, b), \gamma = (-1, 1, 2)$ 线性相关, 则参数 a, b 满足 _____
3. 若 A, B, C 均为 5 阶方阵, $r(B) = 2, r(C) = 5, A = BC$, 则方程 $AX = 0$ 线性无关解向量个数为 _____
4. 若 3 阶实对称阵 A 的特征值为 $1, -2, 2$, $f(A) = A^2 + A - 2E$, 则 $r(f(A)) =$ _____
5. 若 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (4, 3, 2, 1)^T$, Q 为一四阶正交矩阵, 令 $\beta_1 = Q\alpha_1, \beta_2 = Q\alpha_2$, 则向量 β_1, β_2 的内积为 _____

得分	阅卷人

二、选择题 (15 分)
(把答案写在下面的下划线上)

1. 若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 且 $r(A) = m$, 则下列描述中正确的是 _____
(A) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 一定有非零解.
(B) 非齐次线性方程组 $AX = b$ 一定有非零解.
(C) 非齐次线性方程组 $AX = b$ 一定有无穷多解.
(D) 矩阵 A 的列向量组一定线性无关.
2. 下面叙述中正确的个数为 _____
(1) 若方阵 A, B 可逆, 则 $(A^{-1}B^{-1})^T = (A^T B^T)^{-1}$
(2) 若 A, B 为实对称矩阵且有相同的秩, 则 A, B 一定合同
(3) 若 $AB = 0$, 则 A 的行向量组必定线性相关

(4) 若 A 的列向量组能由 B 的列向量组线性表示, 则 $r(A) \leq r(B)$

(5) 若对称矩阵 A, B 合同, 则 A, B 一定具有相同的正定性

(6) 任何一个方阵均可写成一个对称矩阵和反对称矩阵的和

(7) 向量空间的维数有可能大于向量的维数

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4

3. 下列关于矩阵乘法说法正确的是 _____

(A) 设 $AB = C$, 则 $BA = C$. (B) 设 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$.

(C) 设 $AC = BC$, 且 $C \neq O$, 则 $A = B$. (D) $A(B + C) = AB + AC$.

4. 设矩阵 A 是一个 4 阶正交矩阵, 则下列说法正确的是 _____

(A) A 可能是个奇异矩阵. (B) A 一定是一个对称矩阵.

(C) 其列向量组或行向量组一定是线性无关的单位向量组. (D) A 一定是正定矩阵.

5. 若 A 为一正定矩阵, 则下列不正确的是 _____

(A) A 的特征值全部是正数. (B) A 的逆和伴随均是正定矩阵.

(C) A 必定合同于单位阵. (D) A 的不同特征值的特征向量必线性无关但可能不正交.

得分	阅卷人

三、计算题 (28 分)
(把答案写在答题纸上)

1. 已知 $AX = B, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 求 X .

2. 讨论 a, b 为何值时, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & b \\ 3 & 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2?

3. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正惯性指标为 3, 求参数 t 的取值范围.

4. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, -2, 1), \alpha_2 = (-1, -4, 2, 1), \alpha_3 = (1, 2, -2, 1), \alpha_4 = (0, 1, 3, 1), \alpha_5 = (1, 3, 1, 2)$. 求该向量组的秩和一个极大无关向量组.

姓名

学号

级

专业

学院

得分	阅卷人

四、(10 分)
(把答案写在答题纸上)

当 a 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4, \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ 有唯一解, 无解, 无穷多解? 并在有无穷

多解时, 求其通解.

得分	阅卷人

五、(12 分)
(把答案写在答题纸上)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 其特征值为 $0, 1, 4$.

(1) 求 a, b .

(2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

(3) 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

得分	阅卷人

六、证明题 (15 分)
(把答案写在答题纸上)

1. 若 $A = (a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{p \times n}$, 证明: $r(AB) \leq r(B)$.

2. 实对称矩阵的特征值必定是实数.