**答案：**

一、　填空题（15 分）

1. 0；

2. $-1$;

3. $2$

4. $64$

5. $\arccos\dfrac{2}{3}$

二、选择题（15 分）

1. B
2. B （1456）
3. D
4. A，C
5. D

三、计算题（32 分）

1. 已知 $AX=B, A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\2&5\end{pmatrix}$，求 $X$.

解：

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&1&2\\-3&2&1&\vdots&3&0\\2&0&1&\vdots&2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&1&2\\0&-1&-2&\vdots&6&6\\0&2&3&\vdots&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&1&2\\0&1&2&\vdots&-6&-6\\0&2&3&\vdots&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&-5&-4\\0&1&2&\vdots&-6&-6\\0&0&-1&\vdots&12&13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&-5&-4\\0&1&2&\vdots&-6&-6\\0&0&1&\vdots&-12&-13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&7&9\\0&1&0&\vdots&18&20\\0&0&1&\vdots&-12&-13\end{pmatrix}$$

故 $X=\begin{pmatrix}7&9\\18&20\\-12&-13\end{pmatrix}$.

2. 讨论 $a,b$ 为何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\3&2&a&-1\end{pmatrix}$ 的秩为 2?

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\3&2&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&-1&a-3&b\\0&-1&a-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-1&b+1\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}$

由于 $r(A)=2$，故 $a=1,b=-1$.

3. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-4x_1x_3-2tx_2x_3$ 的正惯性指标为 3，求参数 $t$ 的取值范围.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&t&-2\\t&1&-t\\-2&-t&5\end{pmatrix}$，其惯性指数为 3，则各阶顺序主子式均为正.

$$\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0\Rightarrow -1<t<1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&t&-2\\t&1&-t\\-2&-t&5\end{vmatrix}=5+2t^2+2t^2-4-5t^2-t^2=-2t^2+1>0\Rightarrow 2t^2<1\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$$，

从而 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,3,-2,1),\alpha_2=(-1,-4,2,1),\alpha_3=(1,2,-2,1),\alpha_4=(0,1,3,1),\alpha_5=(1,3,1,2)$ .求该向量组的秩和一个极大无关向量组.

解：将向量组列摆成矩阵

$$A=\left(\alpha_1^T\quad\alpha_2^T\quad\alpha_3^T\quad\alpha_4^T\quad\alpha_5^T\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\3&-4&2&1&3\\-2&2&-2&3&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&3&3\\0&2&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&0&3&3\\0&0&-2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&-1&-1&1&0\\0&0&-2&3&1\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}$$

故 $r(A)=4$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组.

故 $\dim(V)=4$，其基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。

四、(10 分)

当 $a$ 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4, \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解，无解，无穷多解？并在有无穷多解时，求其通解.

解：增广矩阵为

$$\bar{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots 4 \\ -1 & a & 1 & \vdots a^2 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & a+1 & a+1 & \vdots & a^2+4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \\ 0 & a+1 & a+1 & \vdots & a^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & 2-a & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(a+1)(4-a)}{2} & \vdots & a^2-4a \end{pmatrix}$$

故当 $\dfrac{(a+1)(4-a)}{2}\neq 0$，即 $a\neq -1$ 且 $a\neq 4$ 时，$r(A)=r(\bar{A})$，方程有唯一解.

当 $a=-1$ 时，$r(A)=2$，$r(\bar{A})=3$，方程无解.

当 $a=4$ 时，$r(\bar{A})=r(A)=2$，方程有无穷多解. 此时增广矩阵简化为

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

令自由变量 $x_3=0$，可得特解 $\eta^*=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\end{pmatrix}^T$，

令自由变量 $x_3=1$，可得基础解 $\xi=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，故通解为 $\eta^*+k\xi$，$k$ 为任意常数.

五、(14 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，其特征值为 $0,1,4$.

(1) 求 $a$.

(2) 求正交矩阵 $Q$，使得 $Q^{-1}AQ$ 为一对角阵.

(3) 判断方程 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=1$ 代表的曲面类型.

解：(1) 根据 $|A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-1-1-(a-1)+2=0\Rightarrow a=1$.

(2) 此时 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，则

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(1+\lambda)-1-1-(1-\lambda)-(1-\lambda)+(1+\lambda)$$

$$=(\lambda-1)(3-\lambda^2+1)=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

特征值为 $\lambda=-2,1,2$

$\lambda_1=-2$ 时，解齐次方程组 $(A+2E)X=0$，$A+2E=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故特征向量可取为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\end{pmatrix}^T$.

$\lambda_2=1$ 时，解齐次方程组 $(A-E)X=0$，$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故特征向量可取为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

$\lambda_3=2$ 时，解 $(A-2E)X=0$，$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故特征向量可取为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$.

显然$\xi_1,\xi_2,\xi_3$两两正交，将它们单位化，得到

$$Q=\begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=1$，在正交变换下，得到方程为

$y_1^2-2y_2^2+2y_3^2=1$，

该曲面为单叶双曲面。

六、证明题（14 分）

1. 证明：若 $r(A)=n$，根据$AA^*=|A|E,|A|\neq 0$，则有$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$ ，故$r(A^*)=n$

若 $r(A)=n-1$，则$|A|=0,AA^*=|A|E=O$，则有西尔维斯特不等式可知

$r(A^*)\leq n-r(A)=1$，根据$r(A)=n-1$定义可知$A$必至少存在一个$n-1$阶子式不为零，

由伴随矩阵的定义可知$A^*\neq O$，从而$r(A^*)\geq 1$，故$r(A^*)=1$。

若 $r(A)<n-1$，根据$r(A)$定义可知$A$的所有$n-1$阶子式全等于零，则由伴随矩阵的

定义可知$A^*=O$，故$r(A^*)=0$。

2. 若实矩阵$A$为一正定矩阵，且$f(\lambda)=|A-\lambda E|$，证明：$r(f(A))=0$.

证明：实矩阵$A$为一正定矩阵，则$A$为一对称矩阵，从而$A$必定可以对角化，即存在一可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，其中$\lambda_i$为$A$的特征值，从而

$f(\lambda_i)=0$。从而$f(A)$相似对角阵$f(\Lambda)=O$。故$r(f(A))=r(f(\Lambda))=0$.