

אלגוריתמים כלכלייםמטלה 12 – שאלה 4א.

בשיעור למדנו על אלגוריתם המוצא החלפת-כליות בזוגות, כאשר אין סדרי עדיפויות – כל התאמה תיבחר בשמחה, כל עוד היא תביא לשידוך הגדול ביותר בגרף.

בנוסף למדנו את הלמה של ברידג' – שידוך M הוא גדול ביותר אמ"מ אין מסלול שיפור. דרכו האלגוריתם שימצא לנו את השידוך הגדול ביותר בגרף כללי הוא –

כל עוד יש מסלול שיפור, הפוך אותו.

נאמר שהחלק הקשה באלגוריתם יהיה למצוא מסלול שיפור. נאמר גם כי את החלק הזה נוכל לעשות דרך אלגוריתם הפרחים של ג'ק אדמונס, שרץ בזמן לינארי בקלט.

ובכן, ניתן להתייחס באמת לעניין הזה -

בספריית `networkx` ישנו אלגוריתם שהוזכר בכיתה -

`networkx.algorithms.matching.max_weight_matching`.

האלגוריתם, לפי אתר הספרייה, מבוסס על אלגוריתם הפרחים של ג'ק אדמונס, וגם על שיטת ה"primal-dual" של אדמונס, למציאת שידוך במשקל מקסימלי.

האלגוריתם מוצא שידוך במשקל מקסימלי בגרף.

ניתן לחשוב על האלגוריתם שלמדנו בהרצאה ככזה שנעשה על גרף בו משקל כל הצלעות הוא 1. שהרי מציאת שידוך בגודל מקסימלי שווה למציאת שידוך בעל משקל מקסימלי בגרף בו משקל כל הצלעות שווה.

כדי ליישם את מיקסום "רמת השמחה" שנדרשת בשאלה, נוכל להפעיל את אותו האלגוריתם, כאשר נשנה את משקל הצלעות בהתאם לרמת השמחה של הצדדים המשתתפים, בצורה כזו –

משקל כל צלע שווה לסכום רמת השמחה של שני הצדדים שהצלע מקשרת ביניהם.

(לדוגמא, אם קודקוד א' ו-ב' מתאימים, ורמת השמחה שלהם היא 5 ו-10 בהתאמה, משקל הצלע המחברת ביניהם יהיה 15).

מאחר והאלגוריתם בסיפרייה מתחייב למצוא שידוך בעל משקל מקסימלי בגרף, בהכרח נקבל את שרצינו -

בחירת זוגות להחלפת כליות, כך שנמקסם את סכום רמות השמחה של המשתתפים שנבחרו.

סה"כ האלגוריתם יהיה -

- צור גרף לא מכוון, בו כל קודקוד מייצג זוג (תורם וחולה).

- כל קודקוד יקבל משקל השווה לרמת השמחה של אותו זוג.

- כל צלע בגרף מייצגת זוגות תואמים.

- משקל כל צלע יהיה סכום רמות השמחה של שני הקודקודים אותם הצלע מחברת.

- הפעל את על הגרף את הפונקציה `networkx.algorithms.matching.max_weight_matching`.

ב.

בסעיף ב' נתבקשנו לתת דוגמא בה התוצאה שתחזור מהאלגוריתם בסעיף א' תהיה שונה מזו שיחזיר האלגוריתם שראינו בכיתה.

בשלב הזה נתקלתי בתופעה מעניינת. אטען שאין אפשרות לקבל פחות או יותר שידוכים באלגוריתם מסעיף א', ביחס לכמות השידוכים באלגוריתם מההרצאה.

אנסה לפרק למקרים – כמה זוגות יחזיר האלגוריתם מסעיף א'?

יותר – לא אפשרי. האלגוריתם מהכיתה מחזיר כמות שידוכים מקסימלית.

כמות שווה – אומנם פחות מעניין בעיניי, אבל אוכיח שאין דרך אחרת. כשאני אומר שזה פחות מעניין בעיניי, זה מאחר והמשמעות היא שיש כמה דרכים לשדך כך שנקבל כמות X כלשהי של שידוכים. האלגוריתם מהכיתה יחזיר אחד מהם, והאלגוריתם מסעיף א' יחזיר את האחד מבניהם עם השווי הגדול ביותר.

עם זאת, כאמור, אוכיח כי אין דרך אחרת. משקל מקסימלי יגיע מכמות שידוכים מקסימלית.

כמות קטנה יותר – אפשרי?

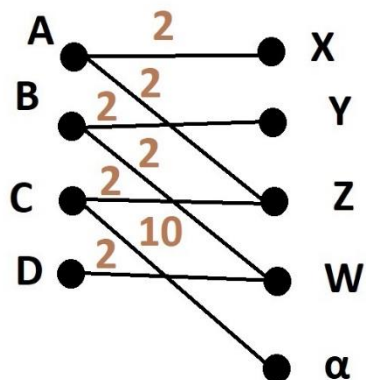
1. נניח כי מצאנו מסלול עם משקל גדול ביותר, ובו יש X צלעות, דרך האלגוריתם מסעיף א'.
2. נטען בשלילה כי קיים בגרף שידוך גדול יותר, ובו יש $1+X$ צלעות (בלי קשר למשקל שלו).
3. לפי הלמה של ברדג' זה אומר שקיים מסלול שיפור לתוצאה של אלגוריתם א'. ניקח את מסלול השיפור שקיבלנו, שהוא החלפה של צמתים משודכים ולא משודכים, ונחליף שוב את הצלעות שכן ולא בתוך השידוך. נקבל עדיין $1+X$ צלעות.
4. קיבלנו ב3 את כל אותם הקודקודים שמצאנו מאלגוריתם מסעיף א', עם תוספת של קודקודים שלא היו בו קודם. כלומר קיבלנו שידוך עם משקל גדול יותר מזה שיחזיר אלגוריתם מסעיף א' – סתירה!

הנחנו רק כי קיים מסלול שיפור עבור התוצאה מאלגוריתם מסעיף א', כלומר שקיים מסלול שיפור לאלגוריתם שיחזיר תוצאה עם משקל מקסימלי בגרף. לכן נסיק כי שידוך עם משקל מקסימלי הוא בהכרח שידוך בגודל (כמות צלעות) מקסימלי.

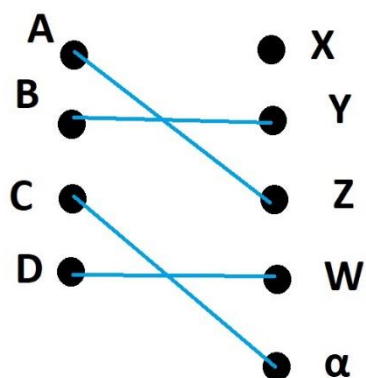
סה"כ אין דרך לקבל פחות שידוכים, וגם לא יותר שידוכים. נקבל אם כך כמות שווה של שידוכים – אם יש כמה אופציות לבחור X שידוכים בגרף, האלגוריתם מהכיתה יבחר אחד מהם, והאלגוריתם מסעיף א' יבחר את האחד מבניהם בעל המשקל המקסימלי.

נדרשנו להביא דוגמא והנה אחת –

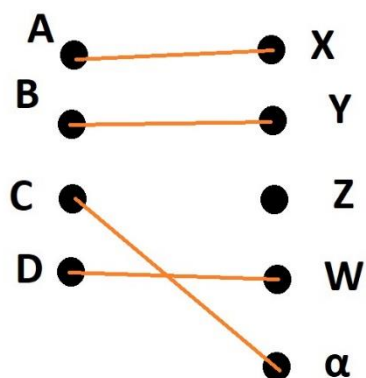
הרצתי את האלגוריתם מהכיתה (כלומר – משקל כל צלע שווה 1) ואת האלגוריתם מסעיף א' (משקלים שונים לצלעות שונות) על אותו הגרף, והתוצאה היא הנ"ל -



Options and worth of each
(for algo from lecture - all weights are 1)



Chosen by algo shown in class



Chosen by algo from previous paragraph

למעשה קיבלנו 2 תוצאות בעלות סכום שמחה (משקל) שווה, כאשר ההבדל היחיד הוא בצלע אחת. כמות השידוכים בתוצאה אכן שווה בין 2 האופציות.

אופיר פלר

בע"ה

ג.

בקוד.