第 3 次作业批改情况

2025 年 10 月 14 日

有界不代表有极限，因此不能直接使用极限的四则运算。

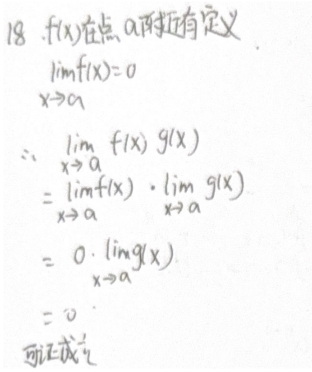

图 1: 总练习题 18

错误示范：如果该方法可行，那么 $x - sinx$ 就会等价于 0，这是荒谬的，实际上等价于 $\frac{1}{6}x^3$ 当 $x \to 0$ 时。后面学到泰勒展开的时候可以解释什么样的替换是有效的, 即用带余项的式子来分析。各位同学需要注意什么时候用等价无穷小才是允许的，胡乱使用就会得到一些错误的分析，有时候你可能瞎撞撞对了，但这不利于你的学习。

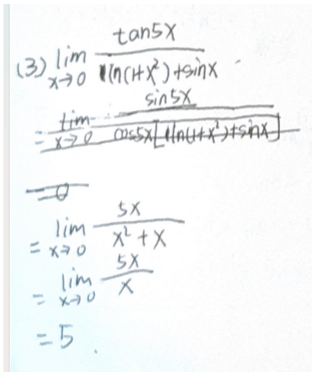

图 2: 总练习题 23(3)

我没看出第一行为什么能这样放缩，不是常见的放缩，写清楚怎么来的，否则一律视为错误。第二行注意到 b_{n+1} 的二项式展开多一项 (有不少同学都忽略了这一点导致证明错误)，就知道即使第三行放缩正确也不能保

证不等式方向。

8. ∵ $a_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1-\frac{1}{n+1})^{-n}=(\frac{n}{n+1})^{-n}=(1+\frac{1}{n})^{n}=a_n$. 故 $a_n<a_{n+1}$

又∵ $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $b_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$, 二项式定理展开: $b_n=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}(\frac{1}{n})^{k}$

$b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^{k}(\frac{1}{n+1})^{k}$, $k\geq 1$, $C_{n+2}^{k}(\frac{1}{n+1})^{k}<C_{n+1}^{k}(\frac{1}{n})^{k}$

∴ $b_{n+1}-b_n<0$, $\{b_n\}$ 单调递减

∴ $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e$

∴ $a_n<e$, $b_n>e$. 得: $a_n<e<b_n$

图 3: P74 第 8 题

如果按照下图的式子展开，对比展开项 (a_{n+1} 比 a_n 多一项，且 a_{n+1} 对应的展开项总是比 a_n 大)，容易得到第一个命题 (单增) 的正确性。另一个方向的不等式就不能这样来证了, 原因参考上一段，忽略了多出来的一项。我在批改的时候也看到有同学利用均值不等式来证明，一并展示:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

图 4: P74 第 8 题

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= (1+\frac{1}{n})^n\times 1\\&\leq [\frac{n\times(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}]^{n+1}\\\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}\times(1+\frac{1}{n+1})\\&\leq [\frac{(n+1)\times\frac{(1+\frac{1}{n+1})}{(1+\frac{1}{n})}+1+\frac{1}{n+1}}{n+2}]^{n+2}\\&=1\end{aligned}$$

习题 2.1 第 10 题，注意只需要在 $x=0$ 求两侧导数，而且也只有在这点上才可以使用偶函数的对称性。在一点 x 展开的，并且没有指明 $x=0$ 的，一律视为错误。

关于零点存在性定理的版本，根据需要选择:

版本 1：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果 $f(a)\cdot f(b)\leq 0$，则存在 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)=0$。

版本 2：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$。

Remark: 版本 1 已经考虑了边界的情况，用的时候就不需要考虑端点是否已经为零点了，可以稍微简化下证明过程。

$sin(x)\leq x$ 成立当且仅当 $x\geq 0$(默认即可，要严格证明不是一件简单的事，课本上的证明也不严谨，感兴趣的同学可以搜索相关资料，通过幂级数 (实际上就是对应的泰勒级数) 定义三角级数，并得到相应的和差化积等公式)，不要跟 $|sin(x)-sin(y)|\geq|x-y|$ 混淆，这个不等式是成立的，但是不能直接从 $sinx\geq x$ 得到，这里给出证明：

$$\begin{aligned}|sin(x)-sin(y)| &= |2cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})| \\ &\leq 2|sin(\frac{x-y}{2})| \\ &\leq 2\times|\frac{x-y}{2}|\end{aligned}$$

这里出一道题：给定一个定义在 (a,b) 上的函数 (注意没说是连续的函数)，$\forall x\in(a,b),\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$(这也意味着这个极限总是存在)，证明:$\forall x,y\in(a,b),x<y$，总是有 $f(x)<f(y)$. 假定你不知道任何关于导数的定理，仅从上述的极限定义出发，尝试解决此问题，感兴趣的同学可以私聊我，可以说说你的想法或者证明，我们可以探讨是否有效。