第 4 次作业批改情况

chen

2025 年 11 月 2 日

命题 0.1. 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\exists x_0 \in [a,b], s.t. f(x_0) > 0$，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

在给出证明之前，给出一个稍显奇怪的例子，定义 $Riemann$ 函数为:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & 若 x = \dfrac{p}{q} \text{ 为最简分数 (即} p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, \gcd(p,q) = 1) \\ 0, & 若 x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

其中 $gcd(x,y)$ 为整数对 (x,y) 的最大公约数. 可以验证该函数在 $[0,1]$ 区间上是 $Riemann$ 可积的 (要验证可能得花点功夫，感兴趣的同学自行搜索), 并且该函数在 [0,1] 上的积分为 0，看起来跟上边的命题不太吻合，这是因为不符合处处连续的条件.

证明. 首先连续性保证了该函数一定可积，且 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ 也是平凡的. 不妨假设 $x_0 \in (a,b)$，端点处的情况类似. 由连续性，存在区间

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$$

且在这个区间内

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

因此有

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq f(x_0) \times \delta > 0$$

□

习题 2.7(18): 注意到 $(xf(x))' = x^3 + 1$, 如果改用除法得到:

$$\frac{xf'(x) + f(x)}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}$$

注意左侧的式子不等于:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

习题 2.8(5): 不少同学的证明都是不完善的，严格的不等号需要用到上边的命题 0.1.

习题 2.9(2): 事实上在证明的过程中仅需要用到 $f(x)$ 在 $x_0 = a$ 处右连

续，而之所以题目给的条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续是因为得保证 $F_0(x)$ 有意义，因为不是所有的函数都是可积的，例如 $Dirchlet$ 函数就不是可积的.

习题 2.10(2): 漏掉该问题后半部分的同学请自行查看老师的解答，这也给我们一个提醒，定理是有适用条件的，不要胡乱使用，否则会得到一些奇怪的结果. 再补充一点, 被积函数在 $x=0$ 无定义，所以从某种程度上来看对于这个函数的积分定义就不是良好的，可以从两方面看待这件事：从瑕积分的角度来看待这点 (这会在下学期学习), 另一个方面, 忽略掉这一点，或者说重新定义该函数在 $x=0$ 的值，随意取一个数，可以验证该函数仍然可积，并且积分结果与在 $x=0$ 的重新赋值无关，这里举一个简单的例子：

$$f(x)=\begin{cases}x, x\in(0,1)\\ \alpha, x=1\\ \beta, x=0\end{cases}$$

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,f(x) 总是可积的，并且积分的值总是 $\frac{1}{2}$.

第二章总练习题 (3): 不能使用求导的四则运算，题目没有说 $f(x)$ 是可导的，一些处处连续但处处不可导的函数：魏尔斯特拉斯函数,Takagi(高木贞治) 函数. 这题需要按照导数的定义去求解.

习题 2.5(5)，微分符号用 dx，不要用 Δx.

总练习题 (10): 这里给出一种比较通用的方法，只要你证明了离散的情况，那么就可以直接从离散形式的不等式推广到积分不等式.

证明. 将 $[a,b]n$ 等分,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 则:

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}\right]^2\\&\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\frac{b-a}{n}\\&=\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

第一个不等号由 Cauchy 不等式得到, 只要令:

$$a_i = f(x_i)\sqrt{\frac{b-a}{n}}, b_i = g(x_i)\sqrt{\frac{b-a}{n}}$$

注意不要漏掉极限符号，毕竟积分就是通过黎曼和来定义的，上边的黎曼函数积分也只能通过这种定义来计算，无法直接使用牛顿-莱布尼兹公式. 值得一提的是，Cauchy 不等式也可以用类似的判别法来证明，即老师的解答里边对于积分形式的证明。 □

习题 2.7(18), 有同学指出最后的答案代入 $x = 0$ 可以得到 $c = 0$,，如果题目有说 $f(x)$ 是定义在整个实数域上的函数，那么没有问题，如果仅定义在 $x > 0$ 的区间，那么代入 $x = 0$ 就不行了。本题确实有歧义，一般来说都是默认整个实数域.

习题 2.5(10)(3): 有同学直接把 x 和 y 给解出来，这当然也是可行的，但解的时候错误使用了以下公式:

$$arccos(cos(\theta)) = \theta$$

这个式子并不成立，因为 $arccos(x)$ 的值域为 $[0, \pi]$，只有 $\theta \in [0, \pi]$ 时才成立。