

第 2 次作业批改情况

2025 年 9 月 29 日

习题 1.4.3(13) 解答:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{x^n}}{\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}{x^n}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^{m-n} + a_1 x^{m-n-1} + \cdots + \frac{a_m}{x^n}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}} \\ &= \begin{cases} +\infty, & m > n \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m < n \end{cases} \end{aligned}$$

习题 1.4.3(15) 提示: 利用 $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, 即令 $a = (1 + 3x)^{\frac{1}{3}}, b = (1 - 2x)^{\frac{1}{3}}$, 剩下的自行补充。

利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 求下列极限:

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin 2x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\ &= \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k} \cdot (-k)} \\
 &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right]^{-k} \\
 &= e^{-k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \lim_{y \rightarrow 0} (1 - 5y)^{\frac{1}{y}} \\
 &= \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 5y)^{\frac{1}{-5y}} \right]^{-5} \\
 &= e^{-5}
 \end{aligned}$$

第 5 题: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$: 对于任意给定的 $M \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $f(x) > M$ 。

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$: 对于任意给定的 M , 存在 δ , 使得当 $x < \delta$ 时, $f(x) < M$ 。

习题 1.5.4: 虽然 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ 的连续性是显然的, 但在解答的过程中还是得说明这一点。另外从这题也可以注意到: 连续性是局部的, 如果一个函数在某个区间 $[a, b]$ 连续, 那么即使延拓该函数到整个实数域上, 延拓后的函数一定仍然在 (a, b) 连续, 但延拓可能导致端点处的连续性不再成立。

$\text{P69. 2. } \because f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$
$\therefore f(x) - 0 < \varepsilon, \text{ 只要 } x - x_0 < \delta.$

图 1: 习题 1.5.2, 错误示范

习题 1.5.2: 证明连续性和使用连续性是不同的事情, 证明连续性的时候需要指明对于任意 ϵ 都存在一个 δ , 但是使用连续性的时候, 需要

先指定一个具体的 ϵ , 然后由连续性随之确定下来 δ , 本题可以取 $\epsilon = f(x_0)/2, f(x_0)/3, f(x_0), \dots$, 不过一般不取 $f(x_0)$, 大概是遗留下来的习惯, 因为一些比较复杂的问题, 可能需要多次放缩, 多留一点空隙, 最后汇总的时候就可以刚好到所要求的精度。当然在本题取这个数没有任何问题。习题 1.4.2 类似, 需要取定一个 ϵ 再说明。

各位同学如果有任何问题都可以私聊我, 在看到后我会尽快回复的。