

第 7 次作业批改情况

2025 年 11 月 11 日

定积分的应用这节公式较多，可以小测或者期末考前临时背诵，特别注意公式里积的变量是什么，不要混淆 dx 和 ds ，也不要忽略积分号前面的常量，比如求极坐标下图形面积，有部分同学没有乘以 $\frac{1}{2}$ 。

习题 4.1 第 2 题第 2 小问是一个很好的补充，罗尔定理，拉格朗日中值定理以及柯西中值定理都是有适用条件的，不要胡乱使用，罗尔定理要求开区间可导（因此不要求端点单侧可导），闭区间连续，这里出一个小练习题：

给定一函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续， (a, b) 可导，我们知道：

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

结合拉格朗日中值定理，可以得到：

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi) (a < \xi < x)$$

因此极限存在……(吗)？

下一页给出为什么上述说明是不正确的。

注意以下求导不正确

$$(x^x)' = x \times x^{x-1}$$

这个函数相当于 $f(x)^{g(x)}$ 形式，正确求导应该是将其化成 $e^{g(x)\ln(f(x))}$ 之后再复合求导。

练习题答案：错误的原因是 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi) (a < \xi < x)$ 未必存在，第一没法保证导函数就是连续的（这一点可以对比习题 4.1 的第 12 题，导函数具有介值性，而连续函数也有介值性，但具有介值性的函数未必连续，可以自行搜索，这种例子应该不太好构造），第二即使是在开区间连续的函数在端点处仍然可能不存在极限，比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 。特别取 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 就是一个闭区间连续，但在端点处不存在导数的例子。