# 渐进行为分析

2025 年 11 月 15 日

Model:

$$\begin{cases} d_S\Delta S-\beta(x)Sf(I)+\gamma(x)I=0 \\ d_I\Delta I+\beta(x)Sf(I)-\gamma(x)I=0 \end{cases} \tag{1}$$

则由 $Lou$ 的最大（最小）值原理，有:

$$\min(\frac{\gamma}{\beta})\frac{1}{f'(0)}\leq S\leq \max(\frac{\gamma}{\beta})\frac{I_{max}}{f(I_{max})}$$

又知道：

$$\begin{cases} -d_I\Delta I=\beta(x)\Big[\frac{N}{|\Omega|}+\big(\frac{d_I}{d_S}-1\big)\frac{\int_\Omega I\,\mathrm{d}x}{|\Omega|}-\frac{d_I}{d_S}I\Big]f(I)-\gamma(x)I, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial I}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

同样，利用 $Lou$ 的最大最小值原理，有：

$$I\leq \frac{d_S}{d_I}\frac{N}{|\Omega|}+\frac{\int_\Omega Idx}{|\Omega|} \tag{3}$$

子情况 1:$d_S\to 0$

由上述估计，可知 $S,I$ 关于 $d_S\to 0$ 一致有界，由 $W^{2,p}$ 估计及嵌入定理，可以得出 $I$ 的 $C^{1,\alpha}$ 估计关于 $d_S$ 一致有界, 结合紧嵌入定理，随着 $d_S\to 0$, 可以抽出一个子列 $d_{S_n}\to 0$，使得对应的解

$$I_n\to I^* \text{ in } C^1(\overline{\Omega})$$

对式 (1)使用 $Harnack$ 不等式，可知存在不依赖 $d_S$ 的正常数 $C$ 成立以下式子:

$$C\inf I\geq \sup I$$

因此或者 $I^*=0$ 或者 $I^*$ 是正函数。

定义

$$\begin{aligned} &\kappa=d_SS+d_II, \\ &\overline{S}=\frac{S}{\kappa}, \\ &\overline{I}=\frac{I}{\kappa}. \end{aligned} \tag{4}$$

同时积分得到:

$$\kappa|\Omega| \leq d_I N \tag{5}$$

即：$\kappa \leq \frac{N}{|\Omega|}d_I$, 从中抽出一个子列使得 $\kappa_n$ 收敛到 $\kappa^*$，结合 $S_n$ 一致有界，有 $I_n$ 一致收敛到 $I^* = \frac{\kappa^*}{d_I}$, 即 $I^*$ 为一非负常函数，接下来可分为以下两种情况:

(a) 存在子序列 $d_{S_n} \to 0$，使得对应的 $\frac{\kappa}{d_{S_n}} \to \infty$, 此时 $\overline{I}$ 一致收敛于 $\frac{1}{d_I}$，对式 (1)做变量代换，有以下方程:

$$\frac{d_{S_n}}{\kappa}\Delta S + [\gamma(x) - \beta(x)S\frac{f(I)}{I}]\overline{I} = 0 \tag{6}$$

结合奇异摄动定理，有 $S_n$ 一致收敛于 $S^* = \frac{\gamma I^*}{\beta f(I^*)}$，因此有：

$$\int_\Omega \frac{\gamma I^*}{\beta f(I^*)} + I^* = N \tag{7}$$

注意被积函数关于 $I^*$ 严格递增，因此至多有一解。

(b) 存在子序列 $d_{S_n} \to 0$，使得对应的 $\frac{\kappa}{d_{S_n}} \to C^*$，其中 $C^*$ 为正常数（这由下面的式子可以看出，因为 $S$ 有正下界），有：

$$\frac{\kappa}{d_S} = S + d_I\frac{I}{d_S} \tag{8}$$

claim：$\frac{\|I\|}{d_S}$ 有严格正下界，否则考虑如下方程：

$$d_I\Delta u + [\beta S\frac{f(d_S I_S)}{d_S I_S} - \gamma]u = 0$$

其中 $I_S = \frac{I_n}{d_{S_n}}$，显然 $I_S$ 是上述方程的一个正解，但注意到这同时是一个特征方程，其主特征值满足：

$$\lambda^* = \min\left\{\int_\Omega d_I|\nabla\phi|^2 - (\beta S\frac{f(d_S I_S)}{d_S I_S} - \gamma)\phi^2 dx : \varphi \in H^1(\Omega) \text{ and } \int_\Omega \varphi^2 dx = 1\right\}$$

由 $R_0 > 1$ 可知原文 (CL) 式 1.4 的主特征值小于 0，而由 (8), 可知 $S \to \frac{N}{|\Omega|}$，则上述的变分表达式在 $d_{S_n} \to 0$ 时，应该严格小于 0，这与 0 是主特征值矛盾.

接下来考虑将式 (1)作 $W^{2,p}$ 估计，因此可以得到 $(S, I_S) \to (S^*, I_S^*)$, 结合前

边的叙述及 $Harnack$ 定理，可知 $I_S^*$ 是正函数，再做 $Schauder$ 估计，结合紧嵌入定理及(6)，成立:

$$\Delta S^* + [\gamma(x) - \beta(x)S^* f'(0)]I^* = 0 \tag{9}$$

子情况 2：$d_S \to \infty$ 因为:

$$S = \frac{N}{|\Omega|} + (\frac{d_I}{d_S} - 1)\frac{\int_\Omega I dx}{|\Omega|} - \frac{d_I}{d_S} I$$

因此当 $d_S \to \infty$ 时，$S$ 的上界一致，然后对 (1)使用 $Harnack$ 不等式，有：

$$C \inf I \geq \sup I$$

因此 $I$ 也有上界。结合椭圆估计及嵌入定理，可以抽出子列使得: $(S_n, I_n) \to (S^*, I^*)$ 在 $C^2(\overline{\Omega})$ 意义下，断言 $I^* = 0$ 不可能成立，证法类似前边 $\frac{\|I\|}{d_S}$ 有严格正下界. 其满足以下方程:

$$d_I \Delta I^* + \beta(x)\frac{N - \int_\Omega I^*}{|\Omega|} f(I^*) - \gamma I^* = 0 \tag{10}$$

这里证明若 $\frac{f(x)}{x}$ 严格递减，则上述方程有且只存在一个正解，存在性由上述说明得到，接证唯一性，考虑带参数的方程:

$$d_I \Delta u + [\beta(x)\frac{N - \tau}{|\Omega|}\frac{f(u)}{u} - \gamma(x)]u = 0$$

其中 $0 \leq \tau \leq N$. 假设该方程存在正解 $u$ 和 $v$，则由于 $\epsilon u (0 < \epsilon \leq 1)$ 与 $Mu(M \geq 1)$ 分别是下解与上解 (这是由 $\frac{f(u)}{u}$ 的单调性保证的，此处不需要严格单调)，因此可以取足够小的 $\epsilon$ 与足够大的 $M$ 使得 $v$ 被夹到这两个函数之间，因此不妨设 $u \leq v$，在对应的方程分别乘上 $v$ 与 $u$，然后积分，可得:

$$\int_\Omega uv\beta \frac{N - \tau}{|\Omega|}[\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v}]dx = 0$$

由严格单调性即可得到 $u = v$, 这样便证明了对于固定的 $\tau$，该方程至多有一解，另一方面，若有:

$$d_I \Delta u + [\beta \frac{N - \tau_1}{|\Omega|}\frac{f(u)}{u} - \gamma]u = 0$$

$$d_I \Delta v + [\beta \frac{N - \tau_2}{|\Omega|}\frac{f(v)}{v} - \gamma]v = 0$$

不妨设 $\tau_1 > \tau_2$, 将 $u$ 代入到第二个方程，则 $u$ 为下解，取足够大的 $M$ 使得 $Mv \geq u$，则由上下解方法及至多唯一性，有 $u \leq v \leq Mv$，因此式 (10)唯一性成立。

子情况 3:$d_I \to \infty, d_S \to \infty$, 且 $\frac{d_I}{d_S} \to d \in [0, \infty]$

如果 $d > 0$，则由 (3)可知，$I$ 有上界，则 $S$ 也有上界，则由椭圆估计，可以抽出子列使得 $(S_n, I_n) \to (S^*, I^*)$ 在 $C^2(\overline{\Omega})$ 意义下，且 $S^*, I^*$ 均为非负常数，令 $\tilde{I} = \frac{I}{\|I\|_\infty}$，则以下方程成立:

$$d_I \Delta \tilde{I} + [\beta S \frac{f(I)}{I} - \gamma] \tilde{I} = 0$$

利用椭圆估计，不难得到 $\tilde{I} \to 1$ 在 $C(\Omega)$ 意义下，对上述方程积分，取极限得到：

$$\int_\Omega \beta S^* \frac{f(I^*)}{I^*} - \gamma dx = 0$$

即:

$$S^* = \frac{\int_\Omega \gamma}{\int_\Omega \beta} \frac{I^*}{f(I^*)}$$

结合守恒，便得到:

$$\frac{\int_\Omega \gamma}{\int_\Omega \beta} \frac{I^*}{f(I^*)} + \int_\Omega I^* = N$$

严格递增便得到 $I^*$ 的唯一性.