第 8 次作业批改情况

2025 年 11 月 12 日

利用泰勒公式求极限的时候，展开的时候一定要保留小 o 项，代表此时是作为等式代入，即:

$$f(x) = f(a) + ... + o(x^k)$$

$$f(x) \sim g(x)$$

是不同的，等价替换本质上也可以视为泰勒展开的应用，只不过直接找到了对应的阶数做替换，而泰勒展开多用于两个同阶的无穷小相减之后来确定对应的无穷小，例如 $x \sim sinx$, 那么要确定 $x - sinx$ 的等价无穷小呢，此时就可以使用泰勒公式了，$sinx$ 展开的第一项被 x 消掉后，第二项就作为主导项了。可以说，泰勒展开是整个一元微积分的顶峰，其它方法能求解的极限那么泰勒公式也一定可以，只要你有耐心展开足够多的项.

此外如果一个函数可以泰勒展开到第 k 项，就代表了这个函数在这点有 k 阶导，更高阶的导数则没法保证。反过来，如果一个函数在一点有 k 阶导，那么其也一定能泰勒展开到第 k 项。注意这一段说的泰勒展开都是带小 o 项的展开，如果考虑一个区间内的展开，即给定一个定义在 $[a, b]$ 的函数 $f(x)$，足够光滑 (即任意阶导数存在)，问:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + ... + f^{(n)}(a)(x - a)^n + ...$$

是否总是成立，这个问题将会在下学期的高数课程中的幂级数一节讨论，因此这块务必好好学习。同时注意区分拉格朗日余项的展开与上述式子的区别。

以下的证明是不正确的，作为练习，找出证明中错误的部分。(Hint: 可能出现 $x_2 - x_1$ 小的时候,$f'(c)$ 才比较大，此时一大一小相乘是否足够大是未知的)

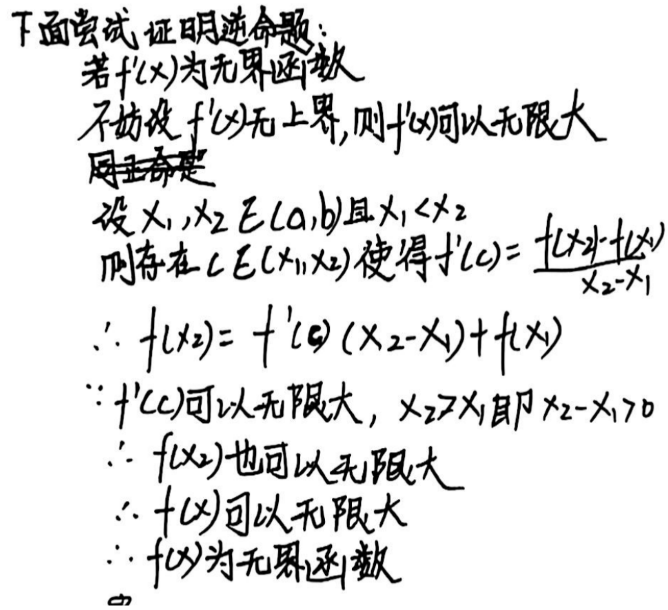

图 1: 总练习题 8