

# **MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE D'UN AÉRONEF**

**GEI-720**

*Jean de Lafontaine*

## **CHAPITRE 3**

### **Contenu de ce chapitre**

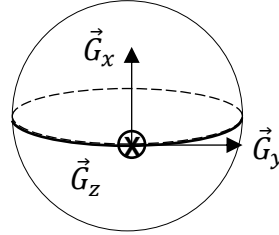
|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3   | INTRODUCTION .....  | 1  |
| 3.1 | Systèmes de référence géographique et structural .....                      | 1  |
| 3.2 | Équations dans $F_B$ .....  | 3  |
| 3.3 | Systèmes de référence « stability axes » $F_S$ et « wind axes » $F_W$ ..... | 5  |
| 3.4 | Équations du mouvement dans $F_W$ .....                                     | 6  |
| 3.5 | Résumé des équations non linéaires .....                                    | 9  |
| 3.6 | Découplage – Vol longitudinal .....   | 11 |
| 3.7 | Linéarisation des équations .....   | 13 |

### 3 INTRODUCTION

#### 3.1 SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE GÉOGRAPHIQUE ET STRUCTURAL

- Référentiel géographique :

- $\vec{\mathcal{F}}_G = [\vec{G}_x \quad \vec{G}_y \quad \vec{G}_z]^T$  fixé à la Terre
- $\vec{G}_x$  vers le Nord
- $\vec{G}_y$  vers l'Est
- $\vec{G}_z$  vers le bas (nadir)
- « NED Frame » : North-East-Down

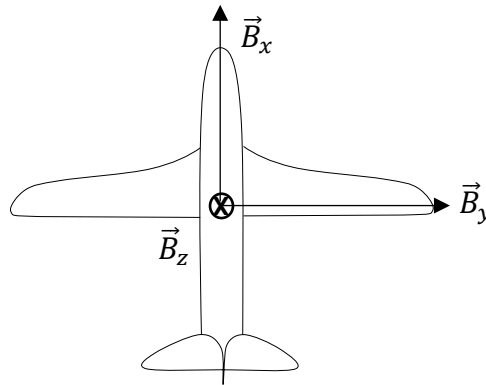
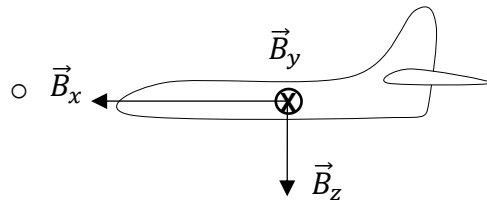


- On suppose  $\vec{\mathcal{F}}_G$  fixe inertiellement. On néglige donc la rotation de la Terre ( $\omega_G = 2\pi/23 \text{ h } 56 \text{ min}$ )

$$\dot{\vec{\mathcal{F}}}_G = \vec{\omega}_G \times \vec{\mathcal{F}}_G \approx \vec{0} \quad (\vec{\omega}_G = 7.3 \times 10^{-5} \vec{G}_x \text{ rad/s} \approx \vec{0})$$

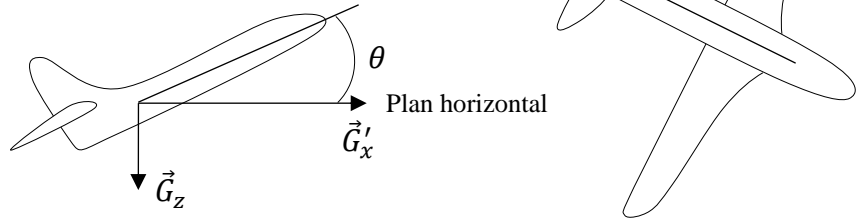
- Référentiel structural (« body frame ») :

- $\vec{\mathcal{F}}_B = [\vec{B}_x \quad \vec{B}_y \quad \vec{B}_z]^T$  fixé au centre de masse de l'aéronef
- $\vec{B}_x$  = axe longitudinal, vers l'avant
- $\vec{B}_y$  = axe latéral, vers l'aile droite
- $\vec{B}_z \Rightarrow$  vers le plancher de l'avion



- On suppose un aéronef rigide, donc tous les éléments de masse de l'avion ne bougent pas relativement à  $\vec{\mathcal{F}}_B$  ( $\vec{r}^0 = \vec{0}$ ).

- Orientation de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  dans  $\vec{\mathcal{F}}_G$  :
  - rotation 3-2-1 avec angles  $(\psi \ \theta \ \phi)$
  - $\psi$  (lacet) autour de  $\vec{G}_z$
  - $\theta$  (tangage) autour de  $\vec{G}'_y$
  - $\phi$  (roulis) autour de  $\vec{G}''_x = \vec{B}_x$



**B1.** Trouver  $\underline{C}_{BG}(\phi, \theta, \psi)$ , la matrice de rotation de  $\vec{\mathcal{F}}_G$  à  $\vec{\mathcal{F}}_B$

**B2.** Trouver la relation cinématique  $\underline{K}_{BG}$  dans :  $\underline{\omega}_B = \underline{K}_{BG} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$

- Note sur la notation :

La notation  $\underline{\omega}_{BI}^B$  dénote les composantes de la vitesse angulaire du repère  $\mathcal{F}_B$  par rapport au repère inertiel  $\mathcal{F}_I$  exprimées dans le repère  $\mathcal{F}_B$ . Pour simplifier la notation, on utilise parfois les conventions suivantes :

- Si les composantes de la vitesse angulaire sont exprimées dans le repère final ou de destination, ce qui est la convention, l'exposant indiquant le repère dans lequel les composantes sont exprimées peut être omis :  $\underline{\omega}_{BI}^B = \underline{\omega}_{BI}$ .
- Si la vitesse est exprimée par rapport à un repère inertiel, on peut aussi omettre l'indice du repère inertiel :  $\underline{\omega}_{BI}^B = \underline{\omega}_B$ .

### 3.2 ÉQUATIONS DANS $\vec{\mathcal{F}}_B$

- Les variables d'état de la dynamique de l'avion sont exprimées dans le repère  $\vec{\mathcal{F}}_B$  pour les vitesses (linéaires et angulaires) et dans  $\vec{\mathcal{F}}_G$  pour la position.

- Définitions  $\underline{\omega}_B^B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$   $\underline{V}_C^B = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$   $\underline{R}_C^G = \begin{bmatrix} p_N \\ p_E \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{position Nord} \\ \text{position Est} \\ \text{position "Down"} \end{bmatrix}$   

↑  
vitesse angulaire

↑  
vitesse  
du c de m  
dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$

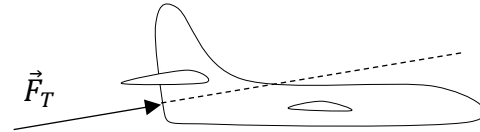
↑  
position  
du c de m  
dans  $\vec{\mathcal{F}}_G$

- Forces appliquées :

○ gravité :  $\vec{F}_g = +mg \vec{G}_z$   $\underline{F}_g^G = mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = m \underline{g}^G$  où  $\underline{g}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$

○ propulsion :  $\vec{F}_T = \vec{\mathcal{F}}_B^T \begin{bmatrix} F_{Tx} \\ 0 \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = F_{Tx} \vec{B}_x + F_{Tz} \vec{B}_z$

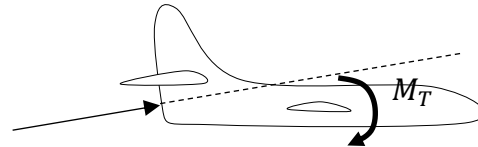
○ aérodynamique :  $\vec{F}_A = \vec{\mathcal{F}}_B^T \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix}$



- Couples appliqués :

○ propulsion :  $\vec{T}_T = M_T \vec{B}_y$

○ aérodynamique :  $\vec{T}_A = \vec{\mathcal{F}}_B^T \begin{bmatrix} \bar{L} \\ M \\ N \end{bmatrix}$

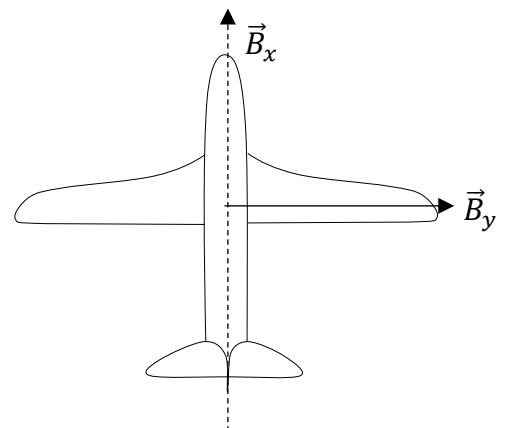


- Par convention,  $\vec{T}$  et  $\underline{T}$  sont utilisés pour dénoter les couples (vecteur ou matrice) et  $L, M, N$  pour leur composantes en  $x, y, z$ . Vu que la notation  $L$  est déjà utilisée pour la portance (lift), les travaux en aérodynamisme utilisent  $\bar{L}$  pour le couple de roulis (... pas idéal mais c'est ainsi dans les publications).

- On suppose une symétrie dans le plan  $\vec{B}_x - \vec{B}_z$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} J_{xy} = 0 \\ J_{yz} = 0 \end{matrix}$$

Les signes négatifs sont par convention, encore...



**B3. OPT.** Développer analytiquement l'inverse de  $\underline{J}$  et démontrer que :

$$\underline{J}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} J_z & 0 & J_{xz} \\ 0 & \frac{D}{J_y} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_x \end{bmatrix}}{D} \quad D = J_x J_z - J_{xz}^2$$

**B4.** À partir des équations vectorielles du mouvement, i.e. les équations (2.57) à la page 2-37 du chapitre 2, prendre  $\vec{\mathcal{G}}_b$  pour obtenir les composantes et démontrer que les équations dynamiques sont :

$$\underline{\dot{v}}_C^B = -\underline{\omega}_B^\times \underline{v}_C + \frac{\underline{F}_A^B}{m} + \frac{\underline{F}_T^B}{m} + \underline{C}_{BG} \underline{g}^G$$

$$\underline{\dot{\omega}}_B^B = \underline{J}^{-1} \left\{ -\underline{\omega}_B^\times \underline{J} \underline{\omega}_B + \underline{T}_A^B + \underline{T}_T^B \right\}$$

**B5.** Démontrer que les équations de translation sont :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= RV - QW - g \sin \theta + \frac{F_{Tx}^B + F_{Ax}^B}{m} \\ \dot{V} &= PW - RU + g \sin \phi \cos \theta + \frac{F_{Ay}^B}{m} \\ \dot{W} &= QU - PV + g \cos \phi \cos \theta + \frac{F_{Tz}^B + F_{Az}^B}{m} \end{aligned} \right\} \text{ DYNAMIQUE}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_N &= Uc\theta c\psi + V(-c\theta s\psi + s\phi s\theta c\psi) + W(s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi) \\ \dot{p}_E &= Uc\theta s\psi + V(c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi) + W(-s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi) \\ \dot{h} &= Us\theta - Vs\phi c\theta - Wc\phi c\theta \end{aligned} \right\} \text{ CINÉMATIQUE}$$

(Note :  $\dot{h} - \dot{p}_D$  :  $p_D$  est selon  $\vec{G}_z$ , donc vers le bas;  $h$  est vers le haut)

**B6.** Démontrer que les équations de rotation sont :

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{D} \{ QR[J_z(J_y - J_z) - J_{xz}^2] + QP[J_{xz}(J_z - J_y + J_x)] \} + \frac{1}{D} (J_z \bar{L} + J_{xz} N) \\ \dot{Q} &= \frac{1}{D} \left\{ PR \left[ \frac{D}{J_y} (J_z - J_x) \right] - (P^2 - R^2) \frac{D}{J_y} J_{xz} \right\} + \frac{1}{J_y} (M + M_T) \\ \dot{R} &= \frac{1}{D} \{ QP[J_x(J_x - J_y) - J_{xz}^2] - QR[J_{xz}(J_z - J_y + J_x)] \} + \frac{1}{D} (J_{xz} \bar{L} + J_x N) \end{aligned} \right\} \text{ DYNAMIQUE}$$

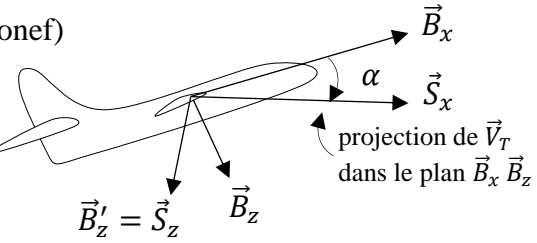
$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = K_{BG}^{-1}(\theta, \phi) \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \text{ CINÉMATIQUE}$$

À noter la singularité quand  $\theta = \pm\pi/2$ , Les vitesses angulaires  $\phi, \psi$  tendent vers l'infini. Les variables d'état sont :  $[U \ V \ W \ \phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R \ p_N \ p_E \ h]^T$ .

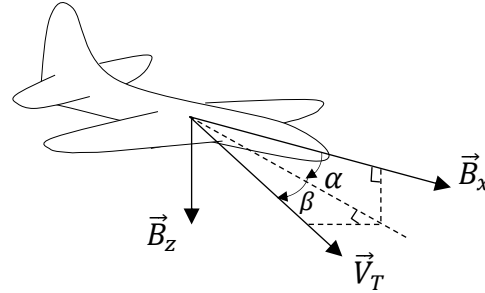
### 3.3 SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE « STABILITY AXES » $\vec{\mathcal{F}}_S$ ET « WIND AXES » $\vec{\mathcal{F}}_W$

- On suppose l'atmosphère stationnaire par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_G$ 
  - vent relatif =  $-\vec{V}_T$  ( $V_T$  = vitesse « totale » de l'aéronef)

- Orientation de  $\vec{\mathcal{F}}_S$  (repère « stability ») par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_B$  :
  - rotation simple  $\alpha$  autour de  $(-\vec{B}_y)$
  - $\alpha$  = angle d'attaque (« angle of attack »)



- Orientation de  $\vec{\mathcal{F}}_W$  (repère « wind ») par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_S$  :
  - rotation simple  $\beta$  autour de  $(\vec{B}'_z = \vec{S}_z)$
  - $\beta$  = angle de glissement latéral ou angle de dérapage (« side slip angle »).



**B7.** Trouver  $\underline{C}_{WB} = \underline{C}_z(\beta) \underline{C}_y(-\alpha) = \underline{C}_{WB}(\alpha, \beta)$  (matrice de rotation de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  à  $\vec{\mathcal{F}}_W$ )

**B8.** Trouver  $\underline{K}_{WB}$  dans :  $\underline{\omega}_{WB} = \underline{K}_{WB} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$  (cinématique)

↑  
vitesse angulaire de  $\vec{\mathcal{F}}_W$  par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_B$

**B9. OPT.** Par la géométrie entre  $\vec{\mathcal{F}}_B$  et  $\vec{\mathcal{F}}_W$  (voir le dessin de la page précédente), démontrer que :

$$\begin{aligned} U &= V_T \cos \alpha \cos \beta \\ V &= V_T \sin \beta \\ W &= V_T \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Conseil : Utiliser la projection de  $\vec{V}_T$  dans le plan  $\vec{B}_x - \vec{B}_z$ .

**B10.** Trouver les composantes de la vitesse dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$  en terme de  $U, V, W$  :

$$\underline{v}_C^W = \underline{C}_{WB} \underline{v}_C^B$$

**B11.** En insérant les résultats de **B9** dans ceux de **B10**, démontrer le résultat attendu :

$$\underline{v}_C^W = \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Le repère « wind axes » } \vec{\mathcal{F}}_W \text{ est défini comme ayant la vitesse totale de l'avion selon son axe } x (\vec{W}_x).$$

**B12.** Démontrer finalement les relations utiles suivantes (l'inverse des relations en **B9**):

$$V_T = (U^2 + V^2 + W^2)^{1/2} \quad \tan \alpha = \frac{W}{U} \quad \sin \beta = \frac{V}{V_T}$$

### 3.4 ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS $\vec{\mathcal{F}}_W$

- Définition :  $\underline{\omega}_B^W = \underline{C}_{WB} \underline{\omega}_B = \begin{bmatrix} P^W \\ Q^W \\ R^W \end{bmatrix}$
- Forces appliquées :
  - gravité :  $\underline{F}_g^W = \underline{C}_{WB} \underline{F}_g^B$
  - propulsion :  $\underline{F}_T^W = \underline{C}_{WB} \underline{F}_T^B$
  - aérodynamique :  $\underline{F}_A^W = \begin{bmatrix} -D \\ +Y \\ -L \end{bmatrix}$ 

$\left\{ \begin{array}{l} D = \text{trainée aérodynamique (« Drag »)} \\ Y = \text{force latérale aérodynamique (« Side force »)} \\ L = \text{portance aérodynamique (« Lift »)} \end{array} \right.$

$\downarrow$

Les forces aérodynamiques sont plus naturelles dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$ .

**B13.** À partir de  $\underline{v}_C^B = \underline{C}_{BW} \underline{v}_C^W$ , trouver l'équation de la dynamique de translation dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$  :

$$\dot{\underline{v}}_C^W = -\underline{\omega}_{WB}^\times \underline{v}_C^W - (\underline{\omega}_B^W)^\times \underline{v}_C^W + g \underline{C}_{WG} \underline{G}_z + \underline{C}_{WB} \frac{\underline{F}_T^B}{m} + \frac{\underline{F}_A^W}{m}$$

Conseils :

- Différencier l'équation  $\underline{v}_C^B = \underline{C}_{BW} \underline{v}_C^W$  par rapport au temps.
- Multiplier par  $\underline{C}_{WB}$  pour transformer de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  à  $\vec{\mathcal{F}}_W$ .
- Utiliser l'identité de l'équation (2.47).

**B14. OPT.** Démontrer que l'on peut aussi arriver à l'équation dans **B13** en dérivant directement l'équation vectorielle  $\dot{\underline{v}}_C = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$  et en prenant les composantes dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$ .

**B15.** Démontrer que les composantes de l'équation dans la question **B13** sont :

$$\begin{aligned} m\dot{V}_T &= -D + F_{Tx}^B c\alpha c\beta + F_{Tz}^B s\alpha c\beta + mgG_{zx}^W \\ m\dot{\beta}V_T &= +Y - F_{Tx}^B c\alpha s\beta - F_{Tz}^B s\alpha s\beta + mgG_{zy}^W - mV_T R^W \\ m\dot{\alpha}V_T c\beta &= -L - F_{Tx}^B s\alpha + F_{Tz}^B c\alpha + mgG_{zz}^W + mV_T Q^W \end{aligned}$$

où :

$$\underline{G}_z^W \begin{bmatrix} G_{zx}^W \\ G_{zy}^W \\ G_{zz}^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\alpha c\beta s\theta + s\phi c\theta s\beta + c\phi c\theta s\alpha c\beta \\ +c\alpha s\beta s\theta + c\beta s\phi c\theta - s\alpha s\beta c\phi c\theta \\ +s\alpha s\theta + c\alpha c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

**B16.** À partir de  $\underline{\omega}_B^B = \underline{C}_{BW} \underline{\omega}_B^W$  et de l'équation de rotation dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$  (2° équation de **B4**), trouver l'équation de la dynamique de rotation dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$  :

$$\underline{J}^W \underline{\dot{\omega}}_B^W = -\underline{J}^W (\underline{\omega}_{WB}^W)^\times \underline{\omega}_B^W - (\underline{\omega}_B^W)^\times \underline{J}^W \underline{\omega}_B^W + \underline{T}_A^W + \underline{C}_{WB} \underline{T}_T^B$$

Conseils : On part de **B4** :  $\underline{J}_{[B]} \underline{\dot{\omega}}_B = -\underline{\omega}_{[B]}^\times \underline{J}_{[A]} \underline{\omega}_B + \underline{T}_A^B + \underline{T}_T^B$

- Terme  $\underline{A}$  : remplacer  $\underline{\omega}_B = \underline{C}_{BW} \underline{\omega}_B^W$  dans  $\underline{A}$ , appliquer l'identité (2.14) et arriver à  $\underline{C}_{BW} (\underline{\omega}_B^W)^\times \underline{J}^W \underline{\omega}_B^W$  où  $\underline{J}^W = \underline{C}_{WB} \underline{J} \underline{C}_{WB} =$  matrice d'inertie dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$
- Terme  $\underline{B}$  : dériver  $\underline{\omega}_B = \underline{C}_{BW} \underline{\omega}_B^W$  par rapport au temps et prémultiplier par  $\underline{J}$  pour obtenir  $\underline{J} \underline{\dot{\omega}}_B$
- Utiliser l'identité (2.47) pour  $\underline{\dot{C}}_{BW}$
- Remplacer  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  dans l'équation de départ
- Pré-multiplier par  $\underline{C}_{WB}$  pour mettre dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$
- Simplifier
- Se reposer...

Noter que  $\underline{J}^W = \underline{C}_{WB} \underline{J} \underline{C}_{BW}$  est maintenant variable, selon la direction du vent, puisque  $\underline{C}_{WB} = \underline{C}_{WB}(\alpha, \beta)$ .

**OPT.** Démontrer que :

$$\underline{J}^W = \begin{bmatrix} J_x^S c^2 \beta + J_y^S s^2 \beta & \frac{1}{2} (J_y^S - J_x^S) s 2\beta & -J_{xz}^S c \beta \\ \frac{1}{2} (J_y^S - J_x^S) s 2\beta & J_x^S s^2 \beta + J_y^S c^2 \beta & J_{xz}^S s \beta \\ -J_{xz}^S c \beta & J_{xz}^S s \beta & J_z^S \end{bmatrix}$$

où  $\underline{J}^S = \begin{bmatrix} J_x^S & 0 & -J_{xz}^S \\ 0 & J_y^S & 0 \\ -J_{xz}^S & 0 & J_z^S \end{bmatrix} =$  matrice d'inertie dans le repère « stability axes »

$$J_x^S = J_x c^2 \alpha + J_z s^2 \alpha - J_{xz} s 2\alpha$$

$$J_y^S = J_y$$

$$J_z^S = J_x s^2 \alpha + J_z c^2 \alpha + J_{xz} s 2\alpha$$

$$J_{xz}^S = \frac{1}{2} (J_x - J_z) s 2\alpha + J_{xz} c 2\alpha$$



**OPT.** En vérifiant que  $\left(\underline{J}^w\right)^{-1} \underline{J}^w$  donne bien la matrice identité  $\underline{1}$ , vérifier que  $\left(\underline{J}^w\right)^{-1}$  est donné par :

$$\left(\underline{J}^w\right)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} J_z^S c^2 \beta + \left(\frac{D}{J_y^S}\right) s^2 \beta & \frac{1}{2} \left(\frac{D}{J_y^S} - J_z^S\right) s 2\beta & J_{xz}^S c \beta \\ \frac{1}{2} \left(\frac{D}{J_y^S} - J_z^S\right) s 2\beta & J_z^S s^2 \beta + \frac{D}{J_y^S} c^2 \beta & -J_{xz}^S s \beta \\ J_{xz}^S c \beta & -J_{xz}^S s \beta & J_x^S \end{bmatrix}$$

**NOTES :**

- Les équations de translations sont parfois utilisées avec les composantes dans  $\vec{\mathfrak{F}}_B$ , parfois dans  $\vec{\mathfrak{F}}_W$ .
- Les équations de rotation sont presque toujours utilisées dans  $\vec{\mathfrak{F}}_B$  parce que  $\underline{J}^B = \text{constante}$  et  $\underline{J}^W = \text{variable} = \underline{J}^W(\alpha, \beta)$ .
- Les équations dans  $\vec{\mathfrak{F}}_W$  permettent plus facilement des analyses théoriques (e.g. linéarisation). Celles dans  $\vec{\mathfrak{F}}_B$  sont utilisées dans les simulateurs.

### 3.5 RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

- On choisit les équations de translation dans  $\vec{\mathcal{F}}_W$  parce que les forces et couples aérodynamiques sont plus naturellement exprimés en termes de  $V_T, \alpha, \beta$ .
- On choisit les équations de rotation dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$  parce que l'inertie de l'aéronef  $\underline{J}^B$  est constante dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$  (elle varie avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\vec{\mathcal{F}}_W : \underline{J}^W = \underline{J}^W(\alpha, \beta)$ ).
- On choisit de simplifier B15 en supposant  $F_{Tz}^B = 0$  (la propulsion  $F_T = F_{Tx}$  est alignée selon l'axe  $\vec{B}_x$ ).
- Les équations dynamiques sont obtenues de B15 ainsi simplifiées et de B6 :

#### ÉQUATIONS DYNAMIQUES

$$\left. \begin{aligned} m\dot{V}_T &= -D + F_T c \alpha c \beta + mg G_{zx}^W \\ mV_T \dot{\beta} &= +Y - F_T c \alpha s \beta + mg G_{zy}^W - mV_T R^W \\ mV_T c \beta \dot{\alpha} &= -L - F_T s \alpha + mg G_{zz}^W - mV_T Q^W \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \dot{P}(P, Q, R; \bar{L}, N) \\ \dot{Q} &= \dot{Q}(P, R; M, T_T) \\ \dot{R} &= \dot{R}(P, Q, R; \bar{L}, N) \end{aligned} \right\} \text{B6 sans changements} \quad (3.2)$$

- Le lien entre  $P^W Q^W R^W$  de (3.1) et  $P Q R$  de (3.2) est donné en début de la section 3.4 :

$$\begin{bmatrix} P^W \\ Q^W \\ R^W \end{bmatrix} = \underline{C}_{WB}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- On peut donc intégrer les 6 équations (3.1) et (3.2) à l'aide de (3.3) pour obtenir la solution de  $V_T, \alpha, \beta, P, Q, R$  en fonction du temps.
- Les équations cinématiques sont obtenues de B5 et de B6 :

#### ÉQUATIONS CINÉMATIQUES

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_N &= \dot{p}_N(U, V, W, \phi, \theta, \psi) \\ \dot{p}_E &= \dot{p}_E(U, V, W, \phi, \theta, \psi) \\ \dot{h} &= \dot{h}(U, V, W, \phi, \theta) \end{aligned} \right\} \text{de B5, pas répétées ici} \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

- Le lien entre  $U, V, W$  de (3.4) et  $V_T, \alpha, \beta$  de (3.1) est donné par **B9** :

$$\begin{aligned} U &= V_T \cos \alpha \cos \beta \\ V &= V_T \sin \beta \\ W &= V_T \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \tag{3.6}$$

- On peut donc intégrer les 6 équations (3.4) et (3.5) à l'aide de (3.6) et de la solution  $V_T, \alpha, \beta$  de (3.1) pour obtenir la solution de  $p_N, p_E, h, \phi, \theta, \psi$  en fonction du temps.
- Le vecteur d'état est donc :  $\underline{x} = [V_T \beta \alpha P Q R \phi \theta \psi p_N p_E h]^T$

### 3.6 DÉCOUPLAGE – VOL LONGITUDINAL

- Les forces/couples aérodynamiques dépendent de l'altitude  $h$  à travers la dépendance de la densité de l'air sur l'altitude. L'intégration des équations (3.4) pour  $p_N$ ,  $p_E$  et  $h$  est donc nécessaire parce qu'elles sont couplées aux équations dynamiques. Cependant, dans le découplage des équations et leur linéarisation, l'objet de la présente section, on suppose que la variation de la densité atmosphérique avec la position de l'aéronef est négligeable et on considère que ces équations (3.4) sont découplées de la dynamique de l'aéronef.
- De plus, dans ce cours, on se limitera à la dynamique du vol longitudinal (3 degrés de liberté) dans le plan  $\vec{B}_x - \vec{B}_z$  plutôt que de considérer la dynamique complète (à 6 DDL) pour se laisser du temps à faire de la commande d'aéronef.
- Dans les conditions de vol normal, les 6 équations dynamiques (3.1) - (3.2) et les 3 équations cinématiques de rotation (3.5) peuvent être découplées en mouvement longitudinal et en mouvement latéral-directionnel.
- Ces conditions de « vol normal » sont :
  - (i) pas de roulis :  $\phi = \dot{\phi} = 0$  (« ailes horizontales »)
  - (ii) pas de glissement latéral :  $\beta = 0$  (« nez dans le vent »)
  - (iii) l'avion maintient le cap :  $\psi = \text{constante}$   
(une conséquence de (i) et (ii))  $\dot{\psi} = 0$

**B17.** Avec les conditions ci-dessus, le résultat en **B2** et l'équation (3.3), démontrer qu'en vol normal :

$$P^W = 0 \quad Q^W = Q = \dot{\theta} = q \quad R^W = 0 \quad (3.7)$$

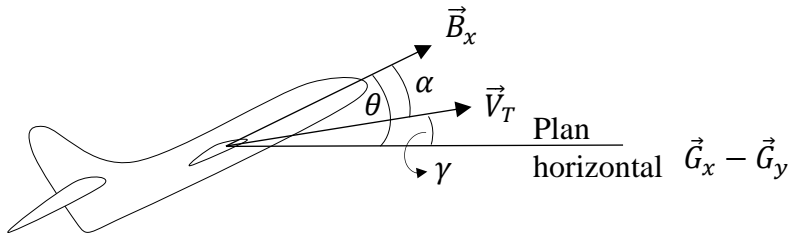
**B18.** En remplaçant ces résultats dans les équations dynamiques (3.1) - (3.2), démontrer que les équations du vol longitudinal (dans  $\vec{B}_x, \vec{B}_z$ ) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} m\dot{V}_T &= -D + F_T \cos \alpha - mg \sin(\theta - \alpha) \\ mV_T \dot{\alpha} &= -L - F_T \sin \alpha + mg \cos(\theta - \alpha) + mV_T \dot{\theta} \\ \dot{\theta} &= q \\ J_y \dot{q} &= M + M_T \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

(Noter qu'on utilise  $q$  plutôt que  $Q$  dans le « vol normal ». Une autre convention...)

#### • NOTES :

- (1) S'il n'y a pas de force ( $Y$ ) ou de couples ( $\bar{L}, N$ ) latéraux, on a que  $\dot{\beta} = 0$ ,  $\dot{P} = 0$ ,  $\dot{R} = 0$  et le mouvement reste longitudinal pur.
- (2) L'angle  $(\theta - \alpha)$  qui apparaît dans (3.8) est le « flight path angle », l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale. Cet angle est souvent dénoté par  $\gamma$  :  $\gamma = \theta - \alpha$ .

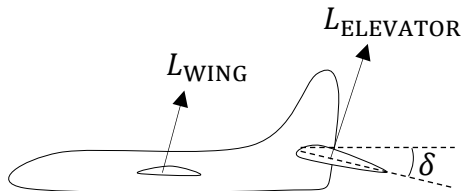


$\gamma > 0$  : l'avion monte       $\gamma < 0$  : l'avion descend

- Le système d'équations (3.8) est d'ordre 4 avec les variables d'état :

$$\underline{X}_{\text{long}} = [V_T \ \alpha \ \theta \ q]^T$$

- Les entrées du système sont :
  - l'angle  $\delta$  du gouvernail de profondeur (« elevator ») qui affecte directement le couple aérodynamique  $M$  et les forces de portance  $L$  et de trainée  $D$  :



- la force de propulsion  $F_T$  et le couple de propulsion  $M_T$  qui sont tous deux affectés par le « throttle », représenté par une variable «  $a$  » qui varie de 0 (moteurs coupés) à 1 (pleine puissance) ou de 0 % à 100 %.

### 3.7 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS

- On définit les conditions d'équilibre en spécifiant la vitesse, l'angle d'attaque et le tangage à l'équilibre :

$$\text{Equilibre : } \{V_{Te} \ \alpha_e \ \theta_e\} = \text{constantes}$$

Le choix de  $\theta_e$  et  $\alpha_e$  définit ainsi  $\gamma_e$  i.e. si l'avion monte ou descend.

Noter qu'avec si  $\theta_e = \text{constante}$ ,  $q_e = 0$ .

**B19.** À partir de (3.8), trouver les 4 conditions d'équilibre qui relient  $D_e, L_e, M_e, F_{Te}$  et  $M_{Te}$  aux états d'équilibre  $V_{Te}, \alpha_e, \theta_e$ . Noter que ces équations sont non linéaires.

- Pour linéariser (3.8) autour de l'équilibre, il faut connaître la dépendance des forces/couple aérodynamiques  $D, L, M$  et de propulsion  $F_T, T_T$  en fonction des variables d'état.
- Les théories aérodynamiques, les expériences en soufflerie et les tests en vol permettent de trouver ces fonctions (non linéaires) de la forme :

$$\begin{aligned} D &= D(V_T, \alpha, \delta) \\ L &= L(V_T, \alpha, \delta, \dot{\theta}) \\ M &= M(V_T, \alpha, \delta, \dot{\theta}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} F_T &= F_T(V_T, a) \\ M_T &= M_T(V_T, a) \end{aligned} \quad (3.9)$$

- La dépendance de  $L$  et  $M$  sur  $\dot{\alpha}$  est négligée ici.
- Les relations (3.9) sont normalement non dimensionnalisées avec la pression dynamique  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_T^2$  ( $\rho$  = densité de l'air), par exemple :

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_T^2 S} = \text{coefficient de trainée aérodynamique} \\ C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_T^2 S} = \text{coefficient de portance aérodynamique} \end{aligned}$$

où  $S$  est une surface caractéristique (e.g. des ailes).

- Ce sont en fait les relations  $C_D = C_D(V_T, \alpha, \delta)$ ,  $C_L = C_L(V_T, \alpha, \delta, \dot{\theta})$ ,  $C_M = C_M(V_T, \alpha, \delta, \dot{\theta})$  qui sont calculées par les aérodynamicien(ne)s.
- Dans ce cours, on ne fait pas d'aérodynamique et on utilisera les variables « dimensionnelles » de (3.9).
- En linéarisant les relations (3.9), on obtient ainsi :

$$D \approx D_e + \left(\frac{\partial D}{\partial V_T}\right)_e \Delta V_T + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)_e \Delta \alpha + \left(\frac{\partial D}{\partial \delta}\right)_e \Delta \delta \quad (3.10)$$

et la même chose pour  $L, M, F_T$  et  $M_T$ .

- Les dérivées partielles  $\left(\frac{\partial}{\partial V_T}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial \delta}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_e$ , etc., sont considérés constantes à l'équilibre. Ce sont les « dimensional stability derivatives ».

**B20.** En utilisant (3.9) et (3.10) dans (3.8), linéariser les équations (3.8) autour du point d'équilibre  $V_{Te}, \alpha_e, \theta_e, F_{Te}, T_{Te}$  pour arriver au modèle variable d'état :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{V}_T \\ V_{Te} \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_V + X_{FV} \cos \alpha_e & X_\alpha & -g \cos \gamma_e & 0 \\ Z_V - X_{FV} \sin \alpha_e & Z_\alpha & -g \sin \gamma_e & Z_q + V_{Te} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_V + M_{TV} & M_\alpha & 0 & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_T \\ \Delta \alpha \\ \Delta \theta \\ \Delta q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_\delta & +X_{Fa} \cos \alpha_e \\ Z_\delta & -X_{Fa} \sin \alpha_e \\ 0 & 0 \\ M_\delta & M_{Ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta a \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où les définitions suivantes ont été utilisées :

$$\gamma_e = \theta_e - \alpha_e$$

$$X_V = -\frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial V_T}$$

$$Z_V = -\frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial V_T}$$

$$M_V = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M}{\partial V_T}$$

$$X_{FV} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_T}{\partial V_T}$$

$$M_{TV} = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_T}{\partial V_T}$$

$$X_\alpha = \frac{1}{m} \left( L_e - \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)$$

$$Z_\alpha = -\frac{1}{m} \left( D_e + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M}{\partial \alpha}$$

$$X_\delta = -\frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial \delta}$$

$$Z_\delta = -\frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial \delta}$$

$$M_\delta = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M}{\partial \delta}$$

$$Z_q = -\frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$M_q = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M}{\partial q}$$

$$X_{Fa} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_T}{\partial a}$$

$$M_{Ta} = \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_T}{\partial a}$$

- Toutes les dérivées partielles sont évaluées au point d'équilibre :  $\left(\frac{\partial}{\partial V_T}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial \delta}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)_e, \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_e$ .
- Les équations linéaires seront requises dans la conception des régulateurs et estimateurs d'état.
- Quelques conseils :

- Revoir les 2 façons « classiques » de linéariser :

(1) Linéariser tous les termes avec la série de Taylor, remplacer, faire changement de variables de  $\underline{x}$  à  $\underline{\Delta x}$ , soustraire l'équation d'équilibre

(2) Linéariser :  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}$  où  $\underline{A} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T}$  et  $\underline{B} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}^T}$ .

- Noter que  $L_e$  et  $D_e$  apparaissent dans  $X_\alpha$  et  $Z_\alpha$ . Pour arriver à ces termes, il faut utiliser les équations d'équilibre trouvées en **B19** pour ainsi insérer  $L_e$  et  $D_e$  dans ces équations linéarisées.