MODÉLISATION ET COMMANDE MULTIVARIABLES

GEI-720

Jean de Lafontaine

CHAPITRE 2

LA MODÉLISATION DE SYSTÈMES MULTIVARIABLES

COMPÉTENCES ET CONNAISSANCES DU CHAPITRE

- Modéliser la dynamique de systèmes mécatroniques complexes par la méthode Euler-Newton en utilisant la forme vectorielle et la forme composantes des équations.
- Exprimer les équations dans différents référentiels en utilisant les vectrices.
- Utiliser les angles d'Euler et les quaternions pour représenter les degrés de liberté en rotation.

Table des matières

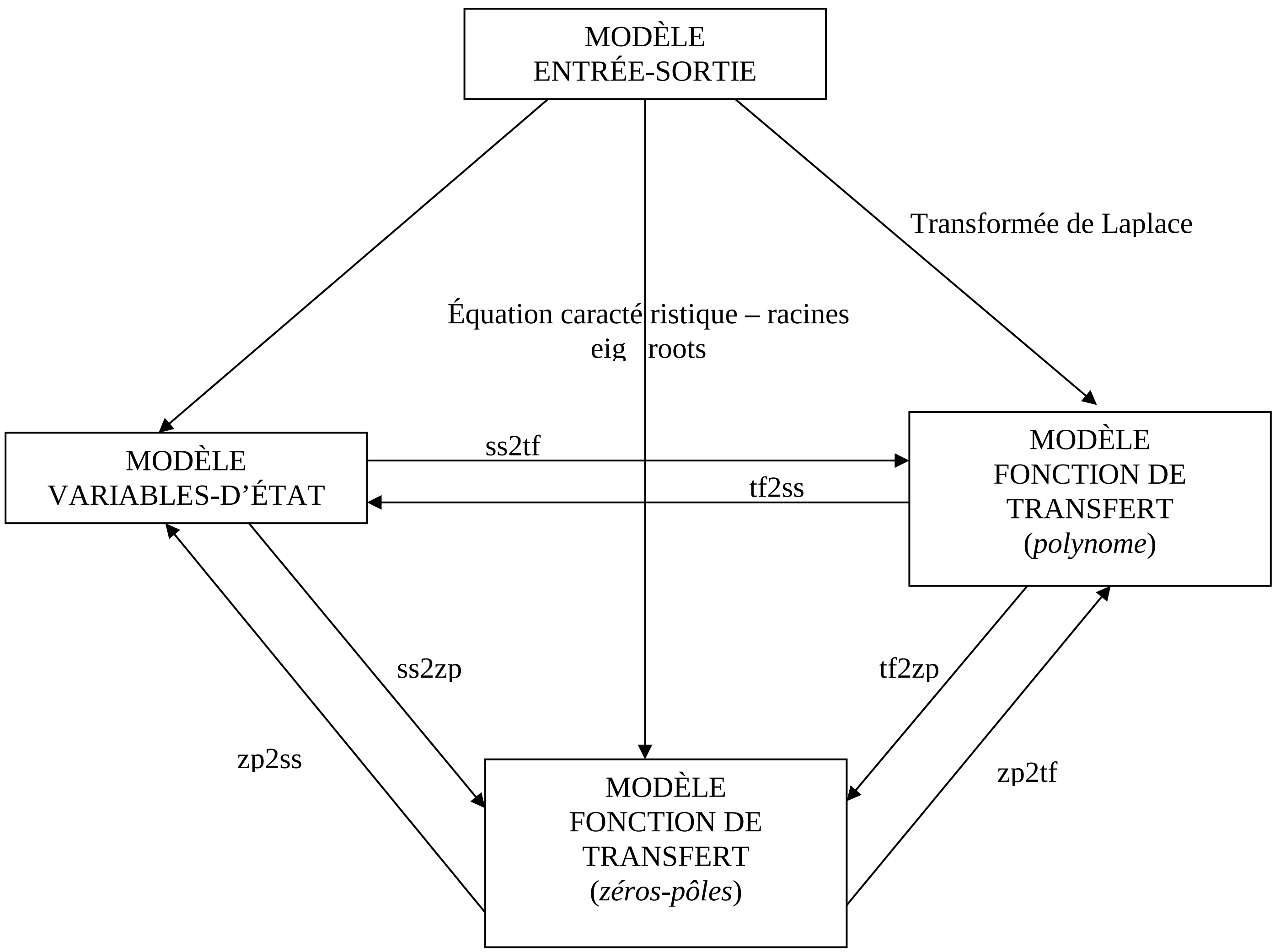
2.1 REVUE DES MODÈLES MATHÉMATIQUES 3
- 2.1.1 La représentation des modèles mathématiques 3
- 2.1.2 Le modèle entrée-sortie ou classique (« *input-output model* ») 4
- 2.1.3 Le modèle variables-d'état (« *state-space model* ») 5
- 2.1.4 Le modèle fonction de transfert (formes polynôme et pôle-zéro) 7
- 2.1.5 Transformation d'un modèle entrée-sortie vers un modèle fonction de transfert 8
- 2.1.6 Transformation d'un modèle entrée-sortie vers un modèle variable d'état 8
- 2.1.7 Transformation entre modèle variables-d'état et fonction de transfert 8
- 2.1.8 Indépendance des variables d'état 8
- 2.1.9 Modèle d'état: Graphe de fluence et forme canonique de Companion 9
- 2.1.10 Modèle d'état avec variables de phase 11
- 2.1.11 Linéarisation d'un modèle non-linéaire 12

2.1 REVUE DES MODÈLES MATHÉMATIQUES

(*Extrait des notes de cours de GEI-615 J. de Lafontaine*)

2.1.1 La représentation des modèles mathématiques

- Le modèle entrée-sortie
- Le modèle variables-d'état
- Le modèle fonction de transfert (polynome et pôles-zéros)



2.1.2 Le modèle entrée-sortie ou classique (« *input-output model* »)

- Représentation de la relation entrée-sortie à l'aide d'équations différentielles d'ordre n

- Caractéristiques :
  - obtenu directement de la modélisation du phénomène physique
  - utile pour solution analytique de système simple, d'ordre < 3, avec une entrée et une sortie

- Équations différentielles d'ordre n, avec r entrées et p sorties : version multivariable (MIMO) non-linéaire continue :

$$f_1\,(y_1, Dy_1, D^2y_1,..., D^ny_1, u_1, Du_1, D^2u_1,..., D^mu_1, u_2, Du_2, D^2u_2,..., D^mu_2,..., u_r, Du_r, D^2u_r,..., D^mu_r, t) = 0$$

$$f_2\,(y_2, Dy_2, D^2y_2,..., D^ny_2, u_1, Du_1, D^2u_1,..., D^mu_1, u_2, Du_2, D^2u_2,..., D^mu_2,..., u_r, Du_r, D^2u_r,..., D^mu_r, t) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_p\,(y_p, Dy_p, D^2y_p,..., D^ny_p\; u_1, Du_1, D^2u_1,..., D^mu_1, u_2, Du_2, D^2u_2,..., D^mu_2,..., u_r, Du_r, D^2u_r,..., D^mu_r, t) = 0$$

$m \leq n$ pour systèmes physiques

- Conditions initiales : $D^iy_j = y_j^{(i)}(0)$, i $= 0, 1, ..., n\text{-}1$, j $= 1, 2, ..., p$.

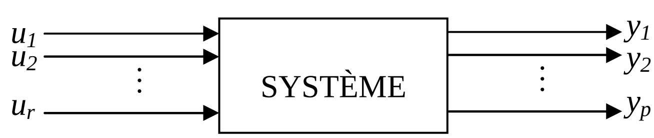
- Équations différentielles d'ordre n, avec r entrées et p sorties : version multivariable linéaire continue:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{1i}\, D^i y_1 = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{1jk}\, D^k u_j$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{2i}\, D^i y_2 = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{2jk}\, D^k u_j$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{pi}\, D^i y_p = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{pjk}\, D^k u_j$$



Note : Dans un même système dynamique,

$a_{1i} = a_{2i} = ... = a_{pi}$, $\quad i = 1, 2, ..., n.$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_{i}\, D^i y_1 &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{1jk}\, D^k u_j \\ \sum_{i=0}^{n} a_{i}\, D^i y_2 &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{2jk}\, D^k u_j \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^{n} a_{i}\, D^i y_p &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m} b_{pjk}\, D^k u_j \end{aligned}}$$

- Une entrée, une sortie : version linéaire continue

$$a_n\, D^ny + a_{n-1}\, D^{n-1}y + ...+ a_1\, Dy + a_0\, y = b_m\, D^mu + b_{m-1}\, D^{m-1}u + ... + b_1\, Du + b_0\, u$$

- Une entrée, une sortie : version linéaire discrète

$$a_n\, y_{k-n} + a_{n-1}\, y_{k-n+1} + ...+ a_1\, y_{k-1} + a_0\, y_k = b_m\, u_{k-m} + b_{m-1}\, u_{k-m+1} + ... + b_1\, u_{k-1} + b_0\, u_k$$

2.1.3 Le modèle variables-d'état (« *state-space model* »)

- Représentation de la relation entrée-sortie par l'intermédiaire de n variables d'état, exprimée sous forme de n équations différentielles d'ordre 1.

- Variables d'état $x_1, x_2, \ldots, x_n$:
  Le plus petit ensemble de variables indépendantes qui décrivent complètement l'état d'un système dynamique à partir des conditions initiales et de l'évolution de l'entrée u dans le temps.

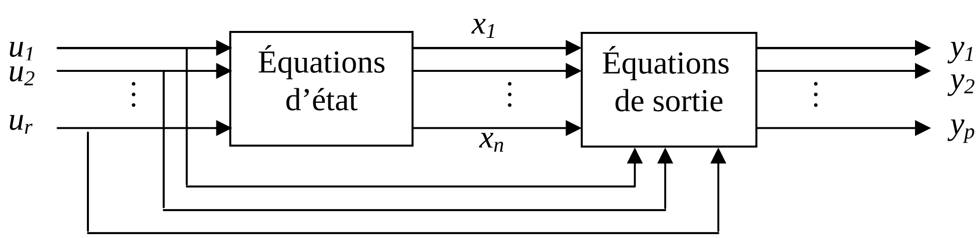
- Système d'ordre n, avec r entrées et p sorties – version multivariable <u>non-linéaire continue</u> :

  – équations d'état :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$

  – équations de sortie :

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$
$$y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$
$$\vdots$$
$$y_p = g_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t)$$



- Système d'ordre n, avec r entrées et p sorties – version multivariable <u>linéaire continue</u>:

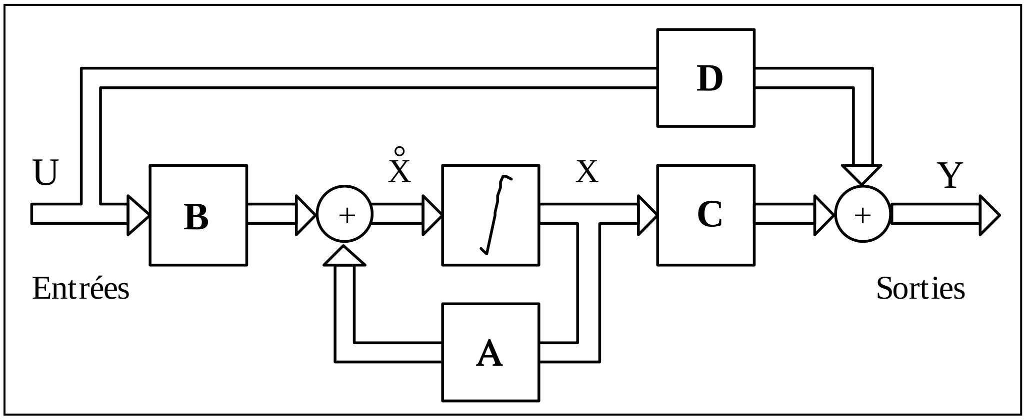
  – Équations d'état : $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$
  – Équations de sortie : $Y(t) = CX(t) + DU(t)$

  A = matrice d'état (n x n)
  B = matrice d'entrée (n x r)
  C = matrice de sortie (p x n)
  D = matrice de transmission directe (p x r)
  X = matrice des variables d'état (n x 1)
  U = matrice des variables d'entrée (r x 1)
  Y = matrice des variables de sortie (p x 1)

- Système d'ordre n, avec r entrées et p sorties – version multivariable <u>linéaire discrète</u>:

  – Équations d'état : $\boldsymbol{X_{k+1} = F\, X_k + H\, U_k}$
  – Équations de sortie : $\boldsymbol{Y_k = C\, X_k + DU_k}$

- Représentation du modèle variable d'état linéaire continu sous forme de schéma-bloc:

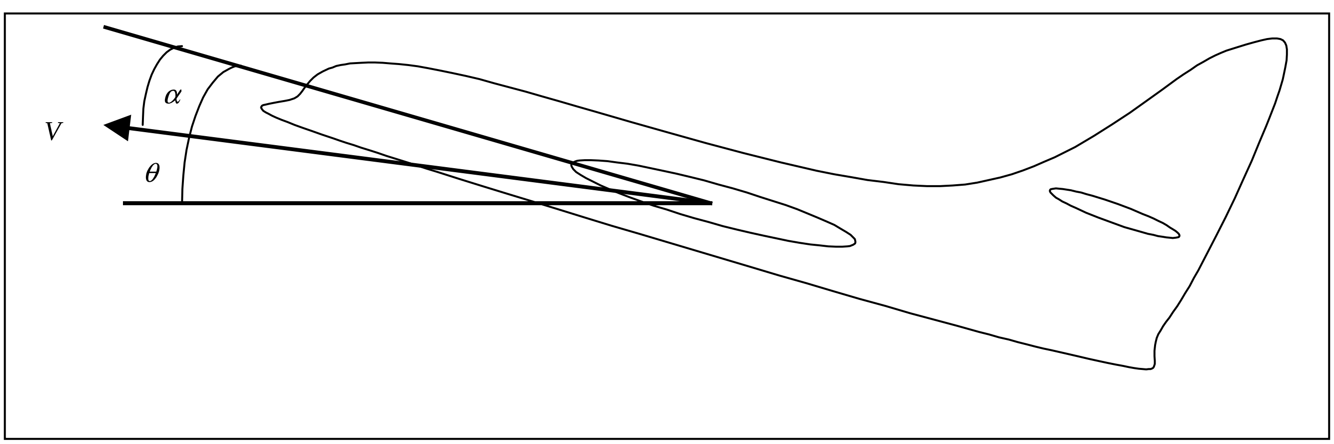


- **Exemple 2.1**: Dynamique et commande du vol longitudinal d'un avion : modèle linéaire

$$U = \begin{bmatrix} thr \\ del \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} V \\ \alpha \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} V \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V = \text{vitesse longitudinale} \\ \alpha = \text{angle d'attaque} \\ \theta = \text{angle de tangage} \\ \dot{\theta} = \text{vitesse de rotation} \\ thr = \text{position du "throttle"} \\ del = \text{gouvernail de profondeur} \\ \gamma = \text{angle de vol} = \alpha - \theta \end{bmatrix}$$

Dimensions des matrices? : A : , B : , C : , D:
Equations pour C et D ?



2.1.4 Le modèle fonction de transfert (formes polynôme et pôle-zéro)

- Représentation de la relation entrée-sortie sous la forme d'un rapport algébrique de fonctions polynomiales de l'opérateur *D* (domaine temporel) ou de la variable *s* (domaine Laplace).

- Le modèle entrée-sortie continu:

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 Dy + a_0 y = b_m D^m u + b_{m-1} D^{m-1} u + \ldots + b_1 Du + b_0 u$$

est représenté par les fonctions de transfert suivantes:

- Domaine temporel, une entrée, une sortie : opérateur différentiel *D*.

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0}$$

- Domaine Laplace, une entrée, une sortie : variable de Laplace *s*.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{\text{num(s)}}{\text{den(s)}}$$

- Les polynomes au numérateur et dénominateur de la fonction de transfert peuvent être exprimés en termes de facteurs sous forme de zéros et de pôles :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)\ldots(s - p_n)}$$

- Le modèle entrée-sortie discret:

$$a_n y_{k-n} + a_{n-1} y_{k-n+1} + \ldots + a_1 y_{k-1} + a_0 y_k = b_m u_{k-m} + b_{m-1} u_{k-m+1} + \ldots + b_1 u_{k-1} + b_0 u_k$$

est représenté par la fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{Z\{y_k\}}{Z\{u_k\}} = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-(m-1)} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-(n-1)} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0} = \frac{\text{num(z)}}{\text{den(z)}}$$

où les indices des coefficients sont associés aux puissances de l'opérateur retard z^{-1}:

2.1.5 Transformation d’un modèle entrée-sortie vers un modèle fonction de transfert

- Cette transformation n'implique que la simple application de la transformée de Laplace.

2.1.6 Transformation d’un modèle entrée-sortie vers un modèle variable d’état

- Le cas simple où le modèle entrée-sortie n'a aucune dérivée de l'entrée est considéré en premier.
- Le cas plus général où il y a des dérivées de l'entrée est ensuite démontré.
- Dans le cas général, il y a deux possibilités:
  - l'ordre des dérivées de l'entrée m est inférieur à l'ordre du système: $m<n$
  - l'ordre des dérivées de l'entrée m est égal à l'ordre du système: $m = n$.

- Voir les pages manuscriptes séparées.

2.1.7 Transformation entre modèle variables-d’état et fonction de transfert

- De variables d’état à fonction de transfert :
  - transformer dans le domaine Laplace
  - résoudre les équations d’état pour les variables d’état
  - remplacer dans les équations de sortie; résultat:

$$\boldsymbol{Y(s) = [C(s1-A)^{-1}B + D]\, U(s)}$$

- De fonction de transfert à variables d’état :
  - même technique qu’en 2.1.6, en partant cette fois du modèles sous forme Laplace.

2.1.8 Indépendance des variables d'état

- Modèle dynamique linéaire multivariable, forme générale:

$$\frac{dX}{dt} = A\,X(t) + B\,U(t) \qquad \text{équation d'état}$$
$$Y(t) = C\,X(t) + D\,U(t) \qquad \text{équation de sortie}$$

- L'ordre du système = la dimension du vecteur d'état.
- Les n variables d'état $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_n(t)$ doivent être **indépendantes** i.e. aucune des variables d'état ne doit pouvoir se faire exprimer par une combinaison linéaire des autres variables d'état. Cela est équivalent à dire que la seule solution à l'équation:
$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}(t) + \alpha_n x_n(t) = 0$$
est $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$, pour toute valeur de t.
- S'il existe des constantes α_i non nulles telles que cette relation soit vérifiée pour tout t, les variables sont dépendantes (il y en a au moins une qui est une combinaison linéaire des autres).
- L'état du système représente la quantité minimale d'information qu'il faut avoir au temps t_0 pour déterminer la réponse du système pour tout $t \geq t_0$ en connaissant les entrées pour $t \geq t_0$.

2.1.9 Modèle d'état: Graphe de fluence et forme canonique de Companion

- Considérons un système ayant la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s \;\; + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s \;\; + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- Cette fonction de transfert représente l'équation différentielle:

$$\overset{(n)}{y}(t) + a_{n-1} \overset{(n-1)}{y}(t) + \cdots + a_1 \overset{(1)}{y}(t) + a_0 y(t) = b_n \overset{(n)}{u}(t) + b_{n-1} \overset{(n-1)}{u}(t) + \cdots + b_1 \overset{(1)}{u}(t) + b_0 u(t)$$

où

$$\frac{d^i y(t)}{dt^n} = \overset{(i)}{y}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d^i u(t)}{dt^n} = \overset{(i)}{u}(t) .$$

- Comme on peut trouver plusieurs graphes de fluence équivalents pour cette fonction de transfert, on peut aussi trouver plusieurs représentations d'état correspondantes.

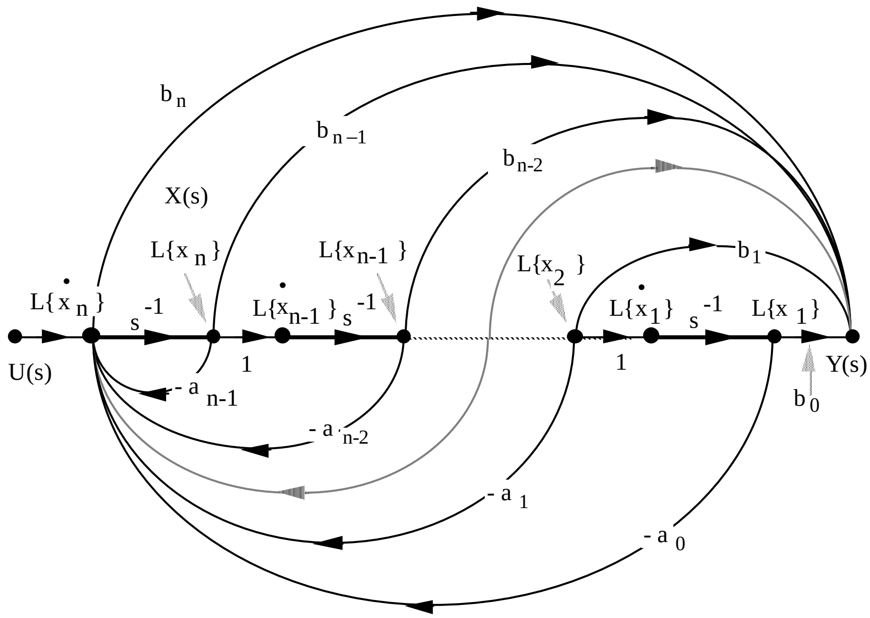
- On peut décrire cette représentation d'état par un graphe. Considérant la fonction de transfert initiale, on peut la transformer pour ne faire apparaître que des puissances négatives de s:

$$G(s) = \frac{b_n + b_{n-1} s^{-1} + \cdots + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_0 s^{-n}}$$

- En premier lieu, l'application de la règle de Mason permet de trouver un graphe simple avec (n) boucles L_j et (n+1) chemins direct P_j passant tous par un nœud commun tel que:

$$G(s) = \frac{P_0 + P_2 + \cdots + P_n}{1 - L_1 - \cdots - L_n}$$

- Le graphe suivant correspond à cette forme:



Graphe correspondant à la fonction de transfert

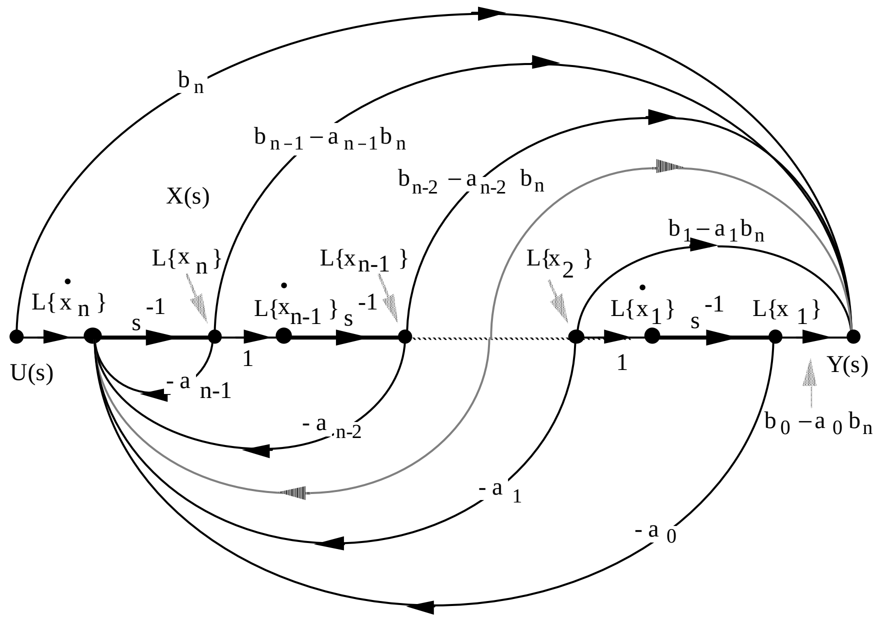
- On associe une variable d'état à la sortie de chaque intégrateur (branche s^{-1})
- Ce graphe ne correspond cependant pas à une représentation d'état adéquate puisque la sortie est fonction des dérivées de l'état: $d[x_n(t)]/dt$. La matrice C doit être une constante et ne doit pas contenir d'opérateurs de dérivation (s ou D).
- On peut modifier ce graphe et le faire correspondre la forme recherchée. Pour y arriver, le plus simple est de décomposer au préalable la fonction de transfert par forme suivante:

$$G(s) = b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1}b_n)s^{-1} + \cdots + (b_0 - a_0 b_n)s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \cdots + a_0 s^{-n}}$$

qui met en évidence une fonction ou le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur:

$$G(s) = b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1}b_n)s^{n-1} + \cdots + (b_0 - a_0 b_n)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

- Cette modification permet de retrouver le schéma-bloc obtenu par la méthode du Chapitre 2 quand il y a des dérivées de l'entrée.



Graphe de fluence correspondant au modèle d'état

2.1.10 Modèle d'état avec variables de phase

- La représentation par <u>variables de phase</u> est très courante. Les variables de phase sont constituées d'une variable { $x_1(t)$ } et de ses (n-1) dérivées pour un système d'ordre n. On définirait ainsi le vecteur d'état

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tel que $\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t)$.

- L'équation du modèle, déduite du graphe, est alors:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{aligned}$$

- Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- La sortie est définie par:

$$y(t)=\left[(b_0-a_0b_n)\;\;(b_1-a_1b_n)\;\;\cdots\;\;(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+b_n u(t)$$

- Cette forme est appelée forme canonique de Companion.

- On peut noter que dans la majorité des modèles de processus avec inertie, le terme b_n est nul et la branche directe de gain b_n n'apparait pas dans le graphe. C'est la présence de ce terme qui induit aussi la matrice D dans le modèle d'état. Cette dernière est donc souvent nulle.

2.1.11 Linéarisation d'un modèle non-linéaire

- Les outils d'analyse pour systèmes linéaires sont nombreux (transformée de Laplace, calcul des valeurs propres, lieu des racines, réponse fréquentielle, etc).
- La majorité des systèmes physiques "réels" sont non-linéaires.
- Le développement d'un "modèle de design" nécessite la linéarisation des termes non-linéaires.

2.1.11.1 Cas d'un modèle "quasi-linéaire"

- La constante c rend le modèle quasi-linéaire:

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 Dy + a_0 y + c = u(t)$$

- On fait un changement de variable de y à Δy où Δy représente les variations de y autour de son point d'équilibre statique.

- **Équilibre statique:**
  - Conditions où la variable dépendante y atteint une valeur constante d'équilibre y_e pour une entrée constante u_e.
  - À l'équilibre statique, $D^k y = 0$ pour k=1, 2, …, n (toutes les dérivées sont nulles).

- Condition d'équilibre:

$$a_0 y_e + c = u_e$$
$$D^k y_e = 0; \quad k>0$$

- **NOTE:** y_e et u_e sont des **constantes.**

- Avec le changement de variable pour $\Delta y = y - y_e$, et $\Delta u = u - u_e$, l'équation devient:

$$a_n D^n \Delta y + a_{n-1} D^{n-1} \Delta y + \ldots + a_1 D\Delta y + a_0 \Delta y = \Delta u(t)$$

2.1.11.2 Linéarisation d'un modèle entrée-sortie autour d'un équilibre statique

- Modèle entrée-sortie non-linéaire:

$$f\,(D^n y, D^{n-1} y, \ldots Dy, y) = u(t)$$

- Étapes de la linéarisation:

(1) Trouver l'équation d'équilibre:

$$f(0, 0, \ldots, 0, y_e) = u_e$$

(2) Linéariser tous les termes non-linéaires de l'équation autour du point d'équilibre avec la série de Taylor (2 premiers termes):

$$f(D^n y, D^{n-1} y, \ldots Dy, y) \approx f(y_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e (y - y_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial Dy}\right)_e Dy + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial D^n y}\right)_e D^n y,$$

utilisant le fait que $D^k y_e = 0$, k>0.

(3) Remplacer dans l'équation différentielle originale les termes non-linéaires par leur approximation linéaires. L'équation est maintenant quasi-linéaire (terme constant y_e)
(4) Faire un changement de variable pour des variations Δy autour du point d'équilibre y_e.
(5) Annuler les termes constants de l'équation d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial Dy}\right)_e D\Delta y + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial D^n y}\right)_e D^n \Delta y = \Delta u(t)$$

- La solution de cette équation différentielle donne ainsi les variations de y autour de y_e. Pour récupérer la variable originale, il faut faire le changement de variable inverse:

$$y = y_e + \Delta y .$$

2.1.11.3 Linéarisation d'un modèle entrée-sortie non-linéaire autour d'un point d'opération

- La procédure de linéarisation est la même. La seule différence est que le point de linéarisation, autour duquel on développe la série de Taylor, n'est pas un point d'équilibre constant y_e, mais une trajectoire de référence connue $y_r(t)$ qui satisfait l'équation:

$$f(D^n y_r, D^{n-1} y_r, \ldots Dy_r, y_r) = u_r(t)$$

où u_r est l'entrée de référence qui génère cette trajectoire.

2.1.11.4 Linéarisation d'un modèle variable-d'état non-linéaire autour d'un point d'opération

- Modèle variable-d'état entrée-sortie non-linéaire:

$$\frac{dX}{dt} = F[X(t), U(t)]$$

- Étapes de la linéarisation:

(1) Trouver la trajectoire de référence qui satisfait l'équation:

$$\frac{dX_r}{dt} = F[X_r(t), U_r(t)]$$

(2) Linéariser tous les termes non-linéaires de l'équation autour du point d'équilibre avec la série de Taylor (2 premiers termes):

$$F[X(t),U(t)] \approx F[X_r(t),U_r(t)] + \left(\frac{\partial F}{\partial X^T}\right)_r \Delta X + \left(\frac{\partial F}{\partial U^T}\right)_r \Delta U\ ,$$

où $\Delta X = X - X_r$ et $\Delta U = U - U_r$.

- La composante j de l'équation est:

$$f_j(X, U) = f_j(X_r, U_r) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)_r \Delta x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)_r \Delta x_n + \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_1}\right)_r \Delta u_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_m}\right)_r \Delta u_m$$

et par conséquent:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X^T}\right)_r = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_r & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_r & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_r \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial U^T}\right)_r = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_r & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_r & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_r \end{bmatrix}$$

(3) Remplacer dans l'équation différentielle originale les termes non-linéaires par leur approximation linéaires.

(4) Faire un changement de variable pour des variations ΔX autour de la trajectoire X_r et ΔU autour de l'entrée de référence U_r.

(5) Annuler les termes de la trajectoire pour obtenir:

$$\frac{d\Delta X}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial X^T}\right)_r \Delta X + \left(\frac{\partial F}{\partial U^T}\right)_r \Delta U$$

$$\frac{d\Delta X}{dt} = A\Delta X + B\Delta U$$

- La solution de cette équation différentielle donne ainsi les variations de X autour de X_r. Pour récupérer la variable originale, il faut faire le changement de variable inverse:

$$X(t) = X_r(t) + \Delta X(t).$$