

CONCEPTION OPTIMALE QUADRATIQUE PAR RETOUR D'ÉTAT

GEI-720

Jean de Lafontaine

CHAPITRE 6

Contenu de ce chapitre

| | | |
|-------|--|------|
| 6 | CONCEPTION OPTIMALE QUADRATIQUE PAR RETOUR D'ÉTAT | 6-1 |
| 6.1 | Introduction..... | 6-1 |
| 6.2 | Quelques définitions | 6-1 |
| 6.3 | Analyse de la stabilité selon Lyapunov | 6-3 |
| 6.4 | Conception d'un régulateur quadratique optimal stationnaire..... | 6-6 |
| 6.5 | Estimateur d'état quadratique optimal (dynamique continue)..... | 6-14 |
| 6.5.1 | Énoncé du problème | 6-14 |
| 6.5.2 | Filtre de Kalman stationnaire | 6-16 |
| 6.5.3 | Filtre de Kalman non stationnaire | 6-19 |
| 6.6 | Estimateur d'état quadratique optimal (dynamique discrète)..... | 6-20 |

6 CONCEPTION OPTIMALE QUADRATIQUE PAR RETOUR D'ÉTAT

6.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, la conception d'un régulateur linéaire quadratique (LQR : *linear quadratic regulator*) et d'un estimateur d'état linéaire quadratique (LQE : *linear quadratic estimator*) est présentée. Le terme quadratique fait référence au fait que le régulateur et l'estimateur sont optimaux au sens qu'ils minimisent un indice de performance exprimé sous une forme quadratique. Le terme « estimateur d'état » est utilisé à la place « d'observateur d'état » dans le cas où ce dernier est optimal. La commande linéaire quadratique-gaussienne (LQG : *linear quadratic gaussian*) est la combinaison du régulateur optimal et de l'estimateur optimal dans un asservissement. La structure du régulateur et de l'estimateur d'état est la même que celle présentée au Chapitre 5, la différence étant dans le calcul des gains du régulateur \underline{K} et de l'observateur \underline{K}_e . Ceux-ci sont calculés de façon à minimiser un indice de performance quadratique spécifié par le concepteur. Ainsi, au lieu de directement spécifier la position de pôles désirés comme ce fut le cas avec la méthode de placement des pôles (Chapitre 5), la technique optimale quadratique place les pôles aux endroits qui vont minimiser l'indice de performance.

6.2 QUELQUES DÉFINITIONS

- **Fonction scalaire positive définie**

Une fonction scalaire $V(\underline{x})$ d'une matrice-colonne d'état \underline{x} est dite « positive définie » dans une région Ω (incluant l'origine $\underline{x} = \underline{0}$) si :

- $V(\underline{x}) > 0$ pour toutes valeurs de $\underline{x} \neq \underline{0}$ dans Ω
- $V(\underline{0}) = 0$.

- **Fonction scalaire négative définie**

Une fonction scalaire $V(\underline{x})$ d'une matrice-colonne d'état \underline{x} est dite « négative définie » si $-V(\underline{x})$ est positive définie.

- **Fonction scalaire positive semi-définie**

Une fonction scalaire $V(\underline{x})$ d'une matrice-colonne d'état \underline{x} est dite « positive semi-définie » si :

- $V(\underline{x}) > 0$ pour toutes valeurs des états \underline{x} dans Ω excepté à l'origine $\underline{x} = \underline{0}$ et à certaines autres valeurs de $\underline{x} \neq \underline{0}$
- $V(\underline{0}) = 0$ à l'origine et à ces certaines autres valeurs de $\underline{x} \neq \underline{0}$.

- **Fonction scalaire négative semi-définie**

Une fonction scalaire $V(\underline{x})$ d'une matrice-colonne d'état \underline{x} est dite « négative semi-définie » si $-V(\underline{x})$ est positive semi-définie.

- **Fonction scalaire indéfinie**

Une fonction scalaire $V(\underline{x})$ d'une matrice-colonne d'état \underline{x} est dite « indéfinie » si dans une région Ω elle a des valeurs positives et négatives, peu importe comment petite on choisit la région Ω .

- **Exemples :**

| | |
|---|-----------------------|
| $V(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ | positive définie |
| $V(\underline{x}) = (2x_1 + 3x_2)^2$ | positive semi-définie |
| $V(\underline{x}) = -x_1^2 - (2x_1^2 + 3x_2)^2$ | négative définie |
| $V(\underline{x}) = 2x_1x_2 + 3x_2^2$ | indéfinie |

- **Forme quadratique**

Classe de fonction scalaire de la forme :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} = [x_1, x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_{1n} & & & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

où \underline{x} est une matrice-colonne de nombres réels

\underline{P} est une matrice carrée réelle symétrique ($p_{ij} = p_{ji}$)

- Selon le critère de Sylvester, une forme quadratique $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est positive définie si tous les déterminants mineurs principaux de la matrice \underline{P} sont positifs i.e.

$$p_{11} > 0 \quad \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \dots \quad \det \underline{P} > 0 \quad (6.2)$$

- La forme quadratique $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est positive semi-définie si la matrice \underline{P} est singulière (i.e. $\det \underline{P} = 0$) et si les déterminants mineurs principaux sont non négatifs.
- $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est négative (semi-) définie si $-V(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est positive (semi-) définie.
- La forme quadratique est utile dans la détermination de la stabilité d'un système non linéaire. Dans un tel cas, le calcul des pôles ou l'application du critère de Routh ne peuvent pas être utilisés pour déterminer la stabilité.
- Le théorème de stabilité de Lyapunov permet de déterminer la stabilité d'un système non linéaire en utilisant la forme quadratique.
- Si $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est positive définie, on dit aussi que la matrice \underline{P} est elle aussi positive définie.

6.3 ANALYSE DE LA STABILITÉ SELON LYAPUNOV

- **Théorème de la stabilité de Lyapunov**

- Soit un système dynamique non linéaire:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (6.3)$$

avec un état d'équilibre à l'origine $\underline{x} = \underline{0}$ défini par :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{0}) = \underline{0} \quad (6.4)$$

- Si l'équilibre n'est pas à l'origine, e.g. $\underline{f}(\underline{x}_e) = \underline{0}$, un changement de variable $\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_e$ permet d'obtenir l'équilibre à l'origine $\underline{\Delta x} = \underline{0}$.
- S'il existe une fonction scalaire $V(\underline{x})$ avec dérivées partielles d'ordre 1 $\partial V / \partial \underline{x}^T$ continues et si :

- i. $V(\underline{x})$ est positive définie
 - ii. $\dot{V}(\underline{x})$ est négative définie
- (6.5)

alors l'équilibre à l'origine est asymptotiquement stable (i.e. l'état \underline{x} tend asymptotiquement vers l'équilibre).

- **NOTE :**

N'importe quelle fonction scalaire $V(\underline{x})$ permet de démontrer la stabilité, pourvu qu'elle remplisse les deux conditions (6.5). Le problème est d'en trouver une. La forme quadratique permet de rencontrer la condition (6.5)(i). Il faut ensuite vérifier $\dot{V}(\underline{x})$.

- Exemple : Système non linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \rightarrow \text{équilibre à l'origine: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

- On choisit la forme quadratique :

$$V(\underline{x}) = (x_1^2 + x_2^2) = \underline{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (6.7)$$

↗ $P > 0$

E1. Démontrer que :

$$\dot{V}(\underline{x}) = -2 (x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (6.8)$$

Conseil : Différencier (6.7) et y remplacer (6.6).

- Vu que $\dot{V}(\underline{x})$ est négative définie, l'équilibre à l'origine est stable.

- E2.** Comparaison avec l'approche « conventionnelle » utilisant la linéarisation. Démontrer qu'en linéarisant (6.6) autour de l'équilibre $x_1 = x_2 = 0$ et qu'en calculant les valeurs propres de la matrice \underline{A} dans :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x},$$

on obtient un système marginalement stable (oscillatoire) avec des pôles imaginaires à $s = \pm j$.

- La linéarisation donne donc une conclusion différente du théorème de Lyapunov. La raison est que la linéarisation enlève complètement la contribution des termes non linéaires ($x_1^2 + x_2^2$) qui ont un effet d'amortissement (donc les pôles sont à gauche de $s = \pm j$ et donc stables).

- E3.** Démontrer qu'en remplaçant ($x_1^2 + x_2^2$) par ε (où ε est supposé constant, petit et positif, $\varepsilon > 0$), la linéarisation donne cette fois un système stable avec amortissement $\zeta = \varepsilon$.

• **Analyse de la stabilité pour système linéaire**

- Le théorème de la stabilité de Lyapunov est utile dans le cas de systèmes non linéaires. Il peut aussi s'appliquer à un système linéaire.
- Le système à analyser est : $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$
- La détermination de la stabilité avec les méthodes classiques pour systèmes linéaires utilise:
 - les valeurs propre de $\underline{A} \rightarrow \mathbf{eig}(\underline{A})$
 - les racines de $\mathbf{det}(\underline{s}\mathbf{1} - \underline{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$
 - le critère de Routh (si les paramètres sont sous forme algébriques).
- Appliquons maintenant le théorème de la stabilité de Lyapunov au système linéaire.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} \\ \underline{x} &= \underline{0} \Rightarrow \text{équilibre}\end{aligned}$$

- On choisit $V(\underline{x})$ comme étant la forme quadratique :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \tag{6.9}$$

où P est une matrice positive définie réelle symétrique.

- On calcule ensuite $\dot{V}(\underline{x})$ et on y remplace $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$:

$$\dot{V}(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}} = \underline{x}^T (\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \underline{x} \tag{6.10}$$

- Selon Lyapunov, le système est stable si $\dot{V}(\underline{x})$ est négative définie i.e. si $-\dot{V}(\underline{x})$ est positive définie. On définit une matrice \underline{Q} comme étant:

$$\underline{Q} = -(\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \tag{6.11}$$

pour réécrire $\dot{V}(\underline{x})$ comme :

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} \quad (6.12)$$

- Donc, selon le théorème de Lyapunov :

Le système $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ est stable si, pour une matrice positive définie \underline{P} dans l'équation (6.9), la matrice \underline{Q} qui satisfait (6.11) est aussi positive définie.

- En pratique, on utilise le théorème à l'inverse :

- On choisit une matrice \underline{Q} qui est positive définie.
- On recherche une solution \underline{P} de l'équation $\underline{Q} = -(\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A})$ qui est positive définie.
- Si on trouve une telle solution, le système est stable autour de son équilibre à l'origine.
- NOTE : On choisit souvent $\underline{Q} = \underline{1}$ comme point de départ.

- L'équation :

$$\underline{Q} = -(\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \quad (6.11)'$$

est appelée : Équation de Lyapunov stationnaire (« steady-state Lyapunov equation »).

- Il existe plusieurs algorithmes numériques pour la solutionner. Sur MATLAB, la fonction « **lyap** » donne cette solution :

$$\underline{P} = \text{lyap}(\underline{A}, \underline{Q})$$

E4. Exemple : Soit deux systèmes $\dot{\underline{x}} = \underline{A}_1 \underline{x}$ et $\dot{\underline{x}} = \underline{A}_2 \underline{x}$ définis par :

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Avec **eig** (**A**), démontrer qu'un des systèmes est stable et l'autre instable.
- Avec la fonction « **lyap** » et $\underline{Q} = \underline{1} = \text{eye}(2, 2)$, démontrer, avec le critère de Sylvester, que \underline{P} est positive définie dans le cas stable et \underline{P} est négative définie dans le cas instable.
- Utiliser la fonction MATLAB « **det** » pour calculer les déterminants.
- Ces notions seront utilisées dans le développement du régulateur et de l'estimateur d'état.

6.4 CONCEPTION D'UN RÉGULATEUR QUADRATIQUE OPTIMAL STATIONNAIRE

• Énoncé du problème

- Soit le système original (en boucle ouverte) d'ordre n à asservir :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad (6.13)$$

- On utilise un retour d'état de la forme :

$$\underline{u} = -\underline{K} \underline{x} \quad (6.14)$$

pour maintenir le système à son point d'équilibre malgré les perturbations.

- L'objectif de la compensation est de choisir la matrice \underline{K} de façon à minimiser un indice de performance de la forme :

$$J = \int_0^{\infty} L(\underline{x}, \underline{u}) dt \quad (6.15)$$

où $L(\underline{x}, \underline{u})$ est une fonction quadratique des états \underline{x} et de la commande \underline{u} .

- Pour un régulateur stationnaire (i.e. la matrice \underline{K} ne varie pas avec le temps), on choisit la forme quadratique :

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \quad (6.16)$$

où \underline{Q} et \underline{R} sont des matrices positives définies.

- La fonction coût à minimiser devient donc :

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt \quad (6.17)$$

- Il peut être démontré que, si le système (6.13) est commandable, il est toujours possible de trouver une matrice \underline{K} dans (6.14) qui stabilise le système (6.13) et minimise J dans (6.17).

• NOTE : Interprétation de la fonction coût J

- Selon l'équation (6.17), on peut voir que l'indice de performance (ou fonction coût) J est directement proportionnel à l'intégrale de :
 - i. l'erreur entre l'état actuel \underline{x} et l'état d'équilibre final $\underline{x} = \underline{0}$ [Rappel : Si l'état d'équilibre \underline{x}_e est différent de $\underline{0}$, un changement de variable $\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_e$ remet l'équilibre à l'origine.]
 - ii. l'énergie dépensée par l'actionneur pour réguler le système vers l'équilibre :

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt$$

contribution de l'erreur au carré ($q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots$)

contribution de l'amplitude de la commande au carré ($r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \dots$)

\sim intégrale de l'erreur pondérée au carré

\sim intégrale de « l'énergie » pondérée au carré

- Les matrices \underline{Q} et \underline{R} , choisies par le concepteur, permettent de mettre une pondération relative entre l'importance de l'erreur vs l'effort à dépenser pour compenser le système :

$\underline{Q} \gg \underline{R}$: On pénalise beaucoup plus l'erreur donc on améliore la performance mais l'effort de commande sera important (danger de saturation, consommation élevée).

$\underline{Q} \ll \underline{R}$: On pénalise beaucoup plus l'effort de commande donc on réduit l'énergie pour asservir avec la conséquence d'une performance réduite (erreur plus importante).

- Le calcul de la matrice de gains optimale \underline{K} est basé sur le théorème de Lyapunov, section 6.3.
- On remplace la rétroaction **(6.14)** dans l'équation d'état **(6.13)** et la fonction coût **(6.17)**:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} - \underline{B} \underline{K} \underline{x} = (\underline{A} - \underline{B} \underline{K}) \underline{x} \quad (6.18)$$

$$J = \int_0^{\infty} \underline{x}^T (\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K}) \underline{x} dt \quad (6.19)$$

- On veut choisir \underline{K} pour minimiser J tout en s'assurant que les pôles de $\underline{A} - \underline{B} \underline{K}$ soient stables.
- On suppose une fonction quadratique $V(\underline{x})$ de la forme:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \quad (6.20)$$

où \underline{P} est une matrice positive définie à déterminer.

- On calcule ensuite $\dot{V}(\underline{x})$, tout comme dans **(6.10)** :

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{P} \underline{x}) = \underline{x}^T (\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \underline{x} \quad (6.10)'$$

- Selon Lyapunov, le système est stable si $\dot{V}(\underline{x})$ est négative définie i.e. si $-\dot{V}(\underline{x})$ est positive définie.

- Tout comme dans l'équation (6.11), on égalise $-\dot{V}(\underline{x})$ à une matrice positive définie choisie par le concepteur. Dans (6.11), on avait choisit une matrice \underline{Q} , ici, on choisit l'intégrant de (6.19) :

$$\underbrace{\dot{V}(\underline{x}) = \frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{P} \underline{x})}_{\text{on veut négative définie}} = -\underline{x}^T \underbrace{\left(\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K} \right)}_{\text{positive définie}} \underline{x} \quad (6.21)$$

- L'avantage de ce choix astucieux est de simplifier la fonction coût J . En remplaçant (6.21) dans (6.19), on obtient :

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{P} \underline{x}) dt = -\underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \Big|_0^\infty = -\underline{x}(\infty)^T \underline{P} \underline{x}(\infty) + \underline{x}^T(0) \underline{P} \underline{x}(0)$$

- Vu que $\dot{V}(\underline{x})$ est négative définie par choix et qu'on démontrera que $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ est positive définie, le théorème de Lyapunov garantie que la solution sera stable et que la trajectoire des états finira à l'équilibre, donc à l'origine $\underline{x} = 0$. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{x}(\infty) = 0 \quad \uparrow \text{l'équilibre est à } \underline{x} = 0$$

- En remplaçant $\underline{x}(\infty) = 0$ ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{J = \underline{x}^T(0) \underline{P} \underline{x}(0)} \quad (6.22)$$

- Notre choix « astucieux » a permis de réécrire la fonction coût (à minimiser) en terme de :

- la matrice \underline{P} (toujours inconnue, mais on y arrive)
- les conditions initiales $\underline{x}(0)$

- Il est normal de s'attendre à ce que le coût de la commande soit proportionnel à la « distance » entre l'état initial $\underline{x}(0)$ et l'état final $\underline{x}(\infty) = 0$. Pour les conditions initiales données $\underline{x}(0)$:

$$\boxed{\text{MINIMISER LE COÛT } J \text{ EST ÉQUIVALENT À MINIMISER } \underline{P}}$$

ou, de façon mathématique,

LE GAIN \underline{K} QUI MINIMISE J MINIMISE AUSSI \underline{P} :

$$\boxed{\text{LA SOLUTION OPTIMALE } \frac{\partial J}{\partial \underline{K}^T} = 0 \text{ EST ÉQUIVALENTE À } \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} = 0} \quad (6.23)$$

- Il reste maintenant à trouver une solution \underline{P} qui est positive définie.
- On retourne à l'équation (6.21) :

$$\frac{d}{dt} (\underline{x}^T \underline{P} \underline{x}) = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}} = -\underline{x}^T (\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K}) \underline{x} \quad (6.21)'$$

- On y remplace l'équation d'état en boucle fermée (6.18) :

$$\underline{x}^T (\underline{A} - \underline{B} \underline{K})^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} (\underline{A} - \underline{B} \underline{K}) \underline{x} = -\underline{x}^T (\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K}) \underline{x}$$

- Cette équation est une forme quadratique puisqu'on peut la réécrire comme suit :

$$\underline{x}^T \left\{ (\underline{A} - \underline{B} \underline{K})^T \underline{P} + \underline{P} (\underline{A} - \underline{B} \underline{K}) + (\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K}) \right\} \underline{x} = 0$$

qui doit être valide pour toutes valeurs de \underline{x} .

On doit donc avoir :

$$\boxed{(\underline{A} - \underline{B} \underline{K})^T \underline{P} + \underline{P} (\underline{A} - \underline{B} \underline{K}) = -(\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K})} \quad (6.24)$$

• NOTES

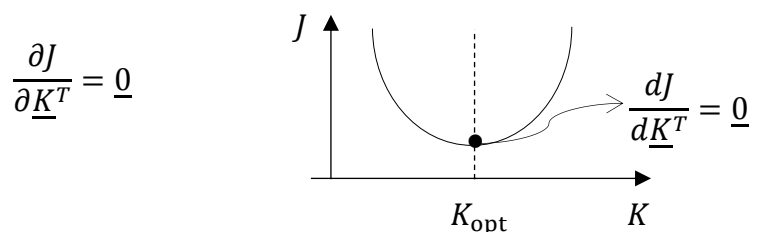
- Cette équation donnera la solution \underline{P} optimale.
- On peut voir que cette équation est la généralisation en boucle fermée de l'équation de Lyapunov (6.11) du système en boucle ouverte. En comparant l'équation (6.24) à l'équation de Lyapunov (6.11), on voit :

| | | |
|-----------------|-------------|---|
| \underline{A} | est devenue | $\underline{A} - \underline{B} \underline{K}$ |
| \underline{Q} | est devenue | $\underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K}$ |
| ↑ | | ↑ |
| (6.11) | | (6.24) |

- L'équation (6.24), sous forme optimale, mènera à l'équation de Riccati. Sa solution, pour une matrice \underline{P} positive définie (tout comme l'équation de Lyapunov à l'équation (6.11), assurera un système stable.
- Pour trouver la solution optimale, on réécrit (6.24) au long :

$$\boxed{\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{K}^T \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{B} \underline{K} + \underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R} \underline{K} = 0} \quad (6.25)$$

- La solution optimale est celle où le gain \underline{K} donne un minimum pour la fonction coût J , i.e.



- On a vu à l'équation (6.23) que cela est équivalent à :

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} = \underline{0}$$

- On prend donc la dérivée de l'équation (6.25) ci-dessous par rapport à \underline{K} et on trouve \underline{K} pour que $\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} = \underline{0}$:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{K}^T} (6.25) = \underline{A}^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} \underline{A} - \underline{B}^T \underline{P} - (\underline{P} \underline{B})^T + \underline{0} + 2 \underline{R} \underline{K} = \underline{0}$$

- On y insère la condition optimale $\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{K}^T} = \underline{0}$, ce qui donne :

$$-2 \underline{B}^T \underline{P} + 2 \underline{R} \underline{K} = \underline{0}$$

que l'on réarrange pour trouver le \underline{K} optimal :

$$\boxed{\underline{K}_{\text{opt}} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}} \quad (6.26)$$

- L'inverse de \underline{R} existe toujours puisque cette matrice est positive définie et elle est de plus le choix du concepteur.
- On remplace la solution optimale de \underline{K} , équation (6.26), dans l'équation (6.25) pour obtenir :

$$\boxed{\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} + \underline{Q} = \underline{0}} \quad (6.27)$$

- Cette équation est l'ÉQUATION DE RICCATI.
- Une fois les matrices \underline{Q} et \underline{R} choisies par le concepteur, la seule inconnue qui reste est la matrice \underline{P} .
- La solution de l'équation de Riccati, la matrice \underline{P} (positive définie), complète le design.
- Une fois \underline{P} obtenue, on calcule ensuite:

$$\text{i. le gain optimal :} \quad \underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \quad (6.26)'$$

$$\text{ii. le coût minimum :} \quad J = \underline{x}^T(0) \underline{P} \underline{x}(0) \quad (6.22)'$$

- Il existe plusieurs algorithmes numériques pour solutionner l'équation de Riccati. Sur MATLAB, la fonction « **care** » (*continuous algebraic riccati equation*) donne cette solution :

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \text{solution} \\ \underline{vp} &= \text{valeurs propres (pôles en b.f.)} \\ \underline{K} &= \text{gain optimal} \end{aligned} \quad [\underline{P}, \underline{vp}, \underline{K}] = \mathbf{care}(\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R})$$

E5. Exemple :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \quad J = \int_0^\infty (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{R} = [1]$$

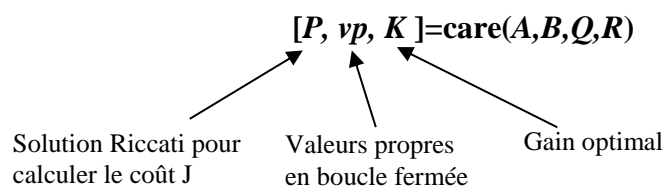
Démontrer que (avec la fonction « **care** ») que:

- i. la commande optimale est : $u = -x_1 - x_2$
- ii. le coût minimum est : $J = 2x_{10}^2 + 2x_{10}x_{20} + x_{20}^2$
- iii. les pôles en boucle fermée sont à : -1 et -1

- **RÉSUMÉ : ALGORITHME DE SOLUTION DU RÉGULATEUR**

(1) Choisir les matrices de pondération \underline{Q} et \underline{R} (voir conseils ci-dessous).

(2) Solutionner l'équation de Riccati pour \underline{P} avec **care**



(3) Calculer le gain optimal : $\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}$ aussi donné par **care**

(4) Calculer le coût $J = \underline{x}(0)^T \underline{P} \underline{x}(0)$ pour des conditions initiales $\underline{x}(0)$, si désiré.
Cela suppose que $\underline{x}(0)$ est une matrice-colonne.

(5) Calculer les pôles en boucle fermée du régulateur avec $\underline{vp} = \text{eig}(\underline{A} - \underline{B} \underline{K})$, si désirés, aussi donnés par **care**.

- La fonction **lqr** donne le même résultat (attention à l'ordre des arguments de sortie qui est différent):

$$[\underline{K}, \underline{P}, \underline{vp}] = \text{lqr}(\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R})$$

E6. Valider les résultats en **E5** avec « **lqr** » cette fois.

- **Choix des matrices de pondération \underline{Q} et \underline{R}**

- Les principes de bases ont été énoncés dans la note après l'équation (6.17).
- Si les variables d'états sont normalisées i.e. varient à peu près dans les mêmes plages de valeurs, une pondération uniforme de type : $\underline{Q} = \underline{1}_{n \times n}$ est utile.
- Si les variables d'états ne sont pas normalisées, elles pourraient contribuer de façon disproportionnées à la fonction coût. On peut les faire contribuer de façon équivalente avec :

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1/x_{1\max} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/x_{n\max} \end{bmatrix} \quad \text{où } x_{i\max} = \text{valeur absolue max de } x_i$$

- Si certaines variables d'état sont plus importantes que d'autres, on peut aussi mettre des poids plus importants. Dans l'inconnu, le choix $\underline{Q} = \underline{1}_{n \times n}$ est un bon départ.
- Pour le choix de \underline{R} , un bon point de départ est :

$$\underline{R} = (\underline{1}_{r \times r}) \rho$$

où ρ est un scalaire et où r = nombre d'entrées dans \underline{u} .

- Si certains actionneurs coûtent plus cher à opérer que d'autres, on peut mettre des poids différents.
- Avec $\underline{Q} = \underline{1}_{n \times n}$ et $\underline{R} = (\underline{1}_{r \times r}) \rho$, on a que :

$$\begin{aligned} \rho > 1 &\rightarrow \text{l'effort de commande est plus pénalisé que l'historique de l'erreur } \underline{x}(t) \\ \rho < 1 &\rightarrow \text{l'historique de l'erreur } \underline{x}(t) \text{ est plus pénalisé que l'effort de commande.} \end{aligned}$$

- On peut faire des itérations sur le choix de \underline{Q} et \underline{R} (ce qu'on fait en pratique) et regarder l'évolution de la fonction coût $J = \underline{x}(0)^T \underline{P} \underline{x}(0)$ et de l'effort de commande (par simulation) pour trouver le meilleur compromis.

- **Comparaison avec la conception par placement de pôles.**

- Pour un système à n états et r entrées, le concepteur qui utilise le placement de pôles (Chapitre 5) doit imposer n conditions (n positions de pôles en boucle fermée) pour solutionner un problème où il y a rn paramètres de commande dans la matrice de gain K ($r \times n$) à déterminer.
- Dans le cas de la conception quadratique optimale, il y a $(n + r)$ paramètres à imposer : n dans \underline{Q} (supposée diagonale) et r dans \underline{R} (supposée diagonale). En pratique, seulement le rapport entre les éléments de \underline{Q} et \underline{R} ont de l'importance. Dans le cas le plus simple, un seul paramètre, ρ , permet de placer les n pôles du système de façon optimale.

- Le régulateur conçu avec les techniques décrites jusqu'ici s'appelle : « régulateur linéaire quadratique stationnaire » (« steady-state linear quadratic regulator » ou simplement : « steady-state *LQR* »).
- Dans le cas d'un régulateur stochastique optimal stationnaire, le système en boucle ouverte a en plus la contribution d'une entrée bruitée :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} + \underline{G} \underline{\omega}(t)$$

où $\underline{\omega}(t)$ est un bruit blanc avec covariance

$$\mathbb{E} \{ \underline{\omega}(t) \underline{\omega}(t + \tau)^T \} = \underline{W} \delta(\tau) \text{ et } \mathbb{E} \{ \} = \text{opérateur espérance}$$

- Dans ce cas la fonction coût est :

$$J = \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) dt \right\}$$

et la solution décrite ci-dessus permet aussi de minimiser ce coût, et donc l'effet du bruit sur le système.

6.5 ESTIMATEUR D'ÉTAT QUADRATIQUE OPTIMAL (DYNAMIQUE CONTINUE)

6.5.1 Énoncé du problème

- On suppose le modèle de la réalité ci-dessous:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} + \underline{G} \omega(t) \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} + \underline{v}(t)\end{aligned}\tag{6.28}$$

où $\underline{v}(t)$ et $\omega(t)$ indépendants.

- $\omega(t)$ est un bruit blanc qui affecte (perturbe) la dynamique du système (« plant noise ») :

$$\mathbb{E} \{ \underline{\omega}(t) \underline{\omega}(t + \tau)^T \} = \underline{W} \delta(\tau)\tag{6.29}$$

- $\underline{v}(t)$ est un bruit blanc qui affecte (perturbe) les mesures des capteurs (« measurement noise »)

$$\mathbb{E} \{ \underline{v}(t) \underline{v}(t + \tau)^T \} = \underline{R} \delta(\tau)\tag{6.30}$$

- L'équation du filtre est la même que celle de l'observateur d'état vu au Chapitre 5:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\underline{x}}} &= \underline{A} \hat{\underline{x}} + \underline{B} \underline{u} + \underline{K}_e (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) \\ \hat{\underline{y}} &= \underline{C} \hat{\underline{x}}\end{aligned}\tag{6.31}$$

- Ici, on suppose une connaissance parfaite du modèle de la réalité i.e. $\hat{\underline{A}} = \underline{A}$, $\hat{\underline{B}} = \underline{B}$, $\hat{\underline{C}} = \underline{C}$
- L'erreur d'estimation est définie par :

$$\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}\tag{6.32}$$

- L'objectif du design est de choisir la matrice de gain \underline{K}_e du filtre de façon à minimiser une fonction coût J qui est la moyenne statistique de l'erreur d'estimation au carré :

$$J = \mathbb{E} \{ \underline{e}^T \underline{e} \}\tag{6.33}$$

- La moyenne des erreurs au carré $\underline{e}^T \underline{e}$ est aussi donnée par la trace ^{*} de la matrice de covariance de l'erreur P :

$$\mathbb{E} \{ \underline{e}^T \underline{e} \} = \text{trace}\{P\}$$

où

$$P = \mathbb{E} \{ \underline{e} \underline{e}^T \} = \mathbb{E} \{ [\underline{x} - \hat{\underline{x}}] [\underline{x} - \hat{\underline{x}}]^T \}$$

^{*} Rappel : La trace d'une matrice est la somme de ses éléments sur la diagonale. Pour toute matrice-colonne \underline{v} , on a : $\underline{v}^T \underline{v} = \text{trace}\{\underline{v} \underline{v}^T\}$.

- La fonction coût peut donc être réécrite ainsi:

$$\begin{aligned} J &= \text{trace } \underline{P} = \text{trace} \left[\mathbb{E} \left\{ (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \right\} \right] \\ &= \text{trace} \left[\mathbb{E} \left\{ \underline{e} \underline{e}^T \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

- Au lieu de minimiser J dans (6.33), l'estimateur tentera de minimiser de façon équivalente la matrice de covariance \underline{P} dans (6.34).
- L'équation dynamique de l'erreur \underline{e} est obtenue des équations (6.28), (6.31) et (6.32) :

$$\boxed{\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{A} - \underline{K}_e \underline{C}) \underline{e} + \underline{G} \underline{\omega} - \underline{K}_e \underline{v}}$$

(6.35)

Même résultat que pour un observateur d'état (Chapitre 5) mais avec le bruit en plus.

- En redéfinissant $\tilde{\underline{A}} = \underline{A} - \underline{K}_e \underline{C}$, on peut écrire la solution analytique de (6.35) :

$$\underline{e}(t) = \exp(\tilde{\underline{A}}t) \underline{e}(0) + \int_0^t \exp[\tilde{\underline{A}}(t - \tau)] [\underline{G} \underline{\omega}(\tau) - \underline{K}_e \underline{v}(\tau)] d\tau$$

où on a utilisé $\exp(\tilde{\underline{A}}t)$ pour $e^{\tilde{\underline{A}}t}$ pour éviter la confusion entre l'erreur \underline{e} et l'exponentielle.

- La matrice de covariance $\underline{P}(t)$ devient :

$$\begin{aligned} \underline{P}(t) &= \mathbb{E} \{ \underline{e} \underline{e}^T \} = \exp(\tilde{\underline{A}}t) \underline{P}(0) \exp(\tilde{\underline{A}}^T t) + \\ &+ \int_0^t \exp[\tilde{\underline{A}}(t - \tau)] [\underline{G} \underline{W} \underline{G}^T - \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T] \exp[\tilde{\underline{A}}^T (t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

où $\underline{P}(0) = \mathbb{E} \{ \underline{e}(0) \underline{e}(0)^T \}$ est la matrice de covariance initiale et où on a utilisé les équations (6.29), (6.30) et le fait que $\underline{v}(t)$ et $\underline{\omega}(t)$ sont indépendants.

- À partir de cette équation, il est possible de démontrer que la dérivée de \underline{P} , $\dot{\underline{P}}$, est donnée par :

$$\dot{\underline{P}} = \tilde{\underline{A}} \underline{P} + \underline{P} \tilde{\underline{A}}^T + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T - \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T \quad (6.36)$$

- Le principe d'opération de l'estimateur est de choisir le gain \underline{K}_e qui minimisera la matrice de covariance \underline{P} . Deux solutions sont traitées :
 - filtre de Kalman stationnaire : cas où la matrice \underline{K}_e est constante,
 - filtre de Kalman non-stationnaire : cas où la matrice \underline{K}_e est variable.

6.5.2 Filtre de Kalman stationnaire

- Pour un estimateur stationnaire (« steady-state filter »), on trouve la solution en régime permanent i.e. quand la matrice de covariance ne varie plus $\dot{\underline{P}} = \underline{0}$. Dans ce cas, (6.36) devient :

$$\tilde{\underline{A}} \underline{P} + \underline{P} \tilde{\underline{A}}^T + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T - \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T = \underline{0} \quad (6.37)$$

et on cherche \underline{K}_e qui minimisera \underline{P} , sujet à cette contrainte pour \underline{P} et \underline{K}_e .

- Si on remet $\tilde{\underline{A}} = \underline{A} - \underline{K}_e \underline{C}$ dans cette equation (on a utilisé $\tilde{\underline{A}}$ pour simplifier la notation), on obtient :

$$(\underline{A} - \underline{K}_e \underline{C}) \underline{P} + \underline{P} (\underline{A} - \underline{K}_e \underline{C})^T + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T + \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T = \underline{0}$$

ou au long :

$$\boxed{\underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T - \underline{K}_e \underline{C} \underline{P} - \underline{P} \underline{C}^T \underline{K}_e^T + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T + \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T = \underline{0}} \quad (6.38)$$

- Si on compare l'équation (6.38) de l'estimateur à l'équation (6.25) du régulateur, on remarque que les deux équations ont la même forme si on fait la correspondance :

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}^T & \leftrightarrow & \underline{A} \\ \underline{C}^T & \leftrightarrow & \underline{B} \\ \underline{K}_e^T & \leftrightarrow & \underline{K} \\ \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T & \leftrightarrow & \underline{Q} \end{array} \quad (6.39)$$

\uparrow
 Eq. (6.38)
 ESTIMATEUR

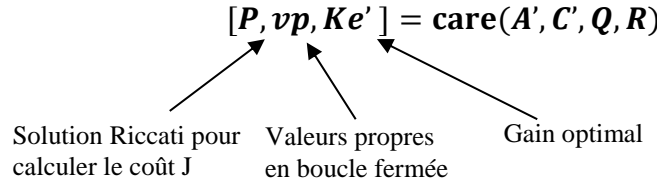
\uparrow
 Eq. (6.25)
 RÉGULATEUR

- On retrouve la dualité entre le régulateur et l'observateur que l'on a vue au Chapitre 5.
- La solution à la Section 6.4 pour le régulateur (équation de Riccati, etc.) s'applique donc aussi dans le cas de l'estimateur d'état. Si on fait les correspondances (6.39).

• **RÉSUMÉ : ALGORITHME DE SOLUTION DE L'ESTIMATEUR STATIONNAIRE**

(1) Choisir les matrices de pondération $\underline{Q} = \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T$ et \underline{R} (voir conseils ci-dessous).

(2) Solutionner l'équation de Riccati pour la matrice de covariance stationnaire \underline{P} avec **care** :



avec $\underline{Q} = \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T$ et où la notation MATLAB ()' représente la transposée :

$$\underline{Ke}' = (\underline{K_e})^T, \underline{A}' = (\underline{A})^T, \underline{C}' = (\underline{C})^T.$$

(3) Calculer le gain optimal : $\underline{K_e} = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1}$ aussi donné par **care**.

(4) Calculer le coût $J = \text{trace} \underline{P} = \text{trace}[\mathbb{E} \{ \underline{e} \underline{e}^T \}]$ = somme des covariances des états :

$$J = \text{trace}\{\underline{P}\} = p_{11}^2 + p_{22}^2 + \dots + p_{nn}^2 = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \quad (6.40)$$

(5) Calculer les pôles en boucle fermée de l'estimateur avec **eig**($\underline{A} - \underline{K_e} \underline{C}$) aussi donnés par **care**.

• La fonction **lqr** donne le même résultat (attention à l'ordre des arguments de sortie qui est différent):

$$[\underline{Ke}', \underline{P}, \underline{vp}] = \text{lqr}(\underline{A}', \underline{C}', \underline{Q}, \underline{R})$$

• **Choix des matrices $\underline{Q} = \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T$ et \underline{R}**

○ Par définition, $\underline{R} = \mathbb{E}\{\underline{v}(t)\underline{v}(t)^T\}$, équation (6.30), donc \underline{R} est la matrice de covariance du bruit des capteurs. On a donc un sens physique à donner aux éléments de \underline{R} .

○ Dans la majorité des cas, les bruits des capteurs différents sont non corrélés, donc la matrice \underline{R} est diagonale. On a donc :

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

où σ_i^2 ($i = 1, \dots, p$) est la variance du bruit dans le capteur i (total de p mesures, p capteurs).

○ Par définition, $\underline{Q} = \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T = \underline{G} \mathbb{E}\{\underline{\omega}(t)\underline{\omega}(t)^T\} \underline{G}^T$, équation (6.29) où \underline{G} est une matrice connue.

\underline{W} est la matrice de covariance du « bruit » dans la dynamique. Cela peut être un bruit réel (e.g. « ripple torque » dans une roue à réaction, etc.). En pratique, \underline{W} (ou \underline{Q}) représente le « bruit » introduit dans le système par les erreurs de modélisation i.e. dû au fait que $\hat{\underline{A}} \neq \underline{A}$, $\hat{\underline{B}} \neq \underline{B}$, etc.

- En pratique, on utilise \underline{Q} comme paramètre d'ajustement, comme une mesure de notre confiance dans la qualité et précision du modèle dynamique, comme un ajustement fin qui indique au filtre de favoriser plus le modèle dynamique que les mesures ou vice-versa :
 - ⇒ Si \underline{Q} (imprécision du modèle) est grand par rapport à \underline{R} (imprécision des mesures): on indique au filtre que la qualité du modèle dynamique est faible et le filtre va mettre plus de poids sur les mesures (mais amplifiant aussi leur bruit) et moins sur le modèle dynamique.
 - ⇒ Si \underline{Q} (imprécision du modèle) est petit par rapport à \underline{R} (imprécision des mesures): on indique au filtre que la qualité du modèle dynamique est élevée et le filtre va mettre moins de poids sur les mesures (mais est plus lent à réagir aux erreurs) et plus sur le modèle dynamique.
- Cela peut être observé mathématiquement. Supposons que le système dynamique a une seule mesure (\underline{R} est un scalaire) et que ces mesures correspondent aux états ($\underline{C} = \underline{1}$). On a donc que l'équation du gain optimal $\underline{K}_e = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1}$ devient :

$$\underline{K}_e = \frac{\underline{P}}{\underline{R}}$$

On voit que, quand l'incertitude dans les états (P) est élevée par rapport au bruit de mesure (R), le gain K_e est élevé et la contribution des mesures est plus importante dans la dynamique du filtre :

$$\hat{\underline{x}} = \underline{A} \hat{\underline{x}} + \underline{B} \underline{u} + \underline{K}_e (\underline{y} - \hat{\underline{y}})$$

À l'inverse, quand la covariance des états est petite par rapport au bruit de mesures, le gain K_e est faible et la contribution des mesures à la dynamique virtuelle du filtre sera petite et la dynamique naturelle du modèle aura plus d'importance.

- Il est noté que, dans le cas du filtre stationnaire, la matrice de covariance stationnaire (donc constante) \underline{P} a été utilisée puisqu'on a mis $\dot{\underline{P}} = \underline{0}$. dans (6.36). Le gain \underline{K}_e est donc constant.
- Le filtre non stationnaire permet d'adapter le gain \underline{K}_e à la variation de la matrice de covariance \underline{P} pour tenir compte de son évolution dans le temps.
- Typiquement, la matrice de covariance initiale $\underline{P}(0)$ est très élevée, pour indiquer au filtre que la connaissance initiale des états est faible, et la matrice de gain \underline{K}_e est aussi élevée. À mesure que le filtre converge et que la matrice de covariance \underline{P} diminue, la matrice de gain \underline{K}_e diminue aussi pour arriver à un équilibre optimal entre l'incertitude sur les états et les incertitudes sur les mesures ($K_e = P/R$).
- Le filtre non stationnaire est traité à la section suivante.

6.5.3 Filtre de Kalman non stationnaire

- Dans le cas plus général d'un filtre non stationnaire, la matrice de covariance \underline{P} évolue dans le temps et les gains optimaux \underline{K}_e évoluent aussi dans le temps.
- Dans ce cas, au lieu de minimiser la trace de $\underline{P}(\infty)$, on minimise la trace de $\dot{\underline{P}}$. La solution de l'équation de Riccati est donc la même et le gain optimal est aussi donnée par $\underline{K}_e = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1}$.
- Les matrices \underline{P} et \underline{K}_e doivent être calculées en temps réel pendant l'opération du filtre. La matrice de covariance doit être propagée avec l'équation (6.36) et la matrice de gains optimaux correspondants calculés à chaque pas d'intégration.
- L'équation (6.36) exprimée au long avec l'équation (6.38) a la forme :

$$\dot{\underline{P}} = (\underline{A} - \underline{K}_e \underline{C}) \underline{P} + \underline{P} (\underline{A} - \underline{K}_e \underline{C})^T + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T + \underline{K}_e \underline{R} \underline{K}_e^T \quad (6.36)$$

- Elle peut être simplifiée si on y remplace gain optimal $\underline{K}_e = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1}$, ce qui donne:

$$\dot{\underline{P}} = \underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T - \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{P} + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T \quad (6.41)$$

- Ainsi, les équations du filtre de Kalman **non stationnaire** pour systèmes **continus linéaires** sont :

| | | | |
|----------------------|--|--|--------|
| Modèle | $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} + \underline{G} \omega(t)$ $\underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{v}(t)$ | $\mathbb{E} \{ \omega(t) \omega(t + \tau)^T \} = \underline{W} \delta(\tau)$ $\mathbb{E} \{ v(t) v(t + \tau)^T \} = \underline{R} \delta(\tau)$ | (6.42) |
| Conditions initiales | $\hat{\underline{x}}_0(0) = \hat{\underline{x}}_0$ $\underline{P}(0) = \mathbb{E} \{ [\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0] [\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0]^T \}$ | | |
| Gain | $\underline{K}_e = \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1}$ | | |
| Covariance | $\dot{\underline{P}} = \underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T - \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{P} + \underline{G} \underline{W} \underline{G}^T$ | | |
| Mesures estimées | $\hat{\underline{y}} = \underline{C} \hat{\underline{x}}$ | | |
| États estimés | $\hat{\underline{x}} = \underline{A} \hat{\underline{x}} + \underline{B} \underline{u} + \underline{K}_e (\underline{y} - \hat{\underline{y}})$ $= \underline{A} \hat{\underline{x}} + \underline{B} \underline{u} + \underline{K}_e (\underline{y} - \underline{C} \hat{\underline{x}})$ | $\underline{y} = \text{mesures}$ | |

6.6 ESTIMATEUR D'ÉTAT QUADRATIQUE OPTIMAL (DYNAMIQUE DISCRÈTE)

- La version continue du filtre de Kalman développée dans la section précédente permet de voir clairement qu'un estimateur d'état peut être vu comme l'asservissement d'un système virtuel soumis aux mesures comme consignes.
- Cependant, dans le cas habituel d'une implémentation sur un calculateur numérique, les équations du filtre doivent être discrétisées.
- La dynamique continue du système original, équations (6.28) doit donc être discrétisée sur une période d'échantillon T . Ces équations discrétisées deviennent:

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \underline{F}_k \underline{x}_k + \underline{H}_k \underline{u}_k + \underline{J}_k \underline{\omega}_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k\end{aligned}\quad (6.43)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\underline{\omega}_k \underline{\omega}_j^T\} &= \underline{W} \delta_{ij} \\ \mathbb{E}\{\underline{v}_k \underline{v}_j^T\} &= \underline{R} \delta_{ij}\end{aligned}\quad (6.44)$$

et

$$\begin{aligned}\underline{F}_k &= \exp(\underline{A}_k T) \\ \underline{H}_k &= \int_0^T \exp(\underline{A}_k \tau) \underline{B}_k d\tau \\ \underline{J}_k &= \int_0^T \exp(\underline{A}_k \tau) \underline{G}_k d\tau\end{aligned}\quad (6.45)$$

- Les indices k qui indique le temps discret $t = kT$ a été ajouté aux matrices $\underline{A}_k, \underline{B}_k, \underline{G}_k, \underline{C}_k$ en prévision de la présentation du filtre de Kalman étendu (« Extended Kalman Filter ») pour lequel les équations linéaires (6.43) sont dérivées de la linéarisation du système original non linéaire évaluée au temps k . Dans ce cas, ces matrices sont évaluées à chaque intervalle de temps k d'où l'ajout de l'indice où elles sont évaluées.
- Une autre différence dans le cas d'une implémentation discrète est le fait que l'estimation d'état se fait en deux étapes :
 - l'étape de **propagation** (« state propagation ») dans laquelle la matrice de covariance et les états estimés sont propagés avec le modèle dynamique du système,
 - l'étape de **recalage** ou de **correction** (« state update ») dans laquelle la matrice de covariance et les états estimés sont recalés avec les mesures pour bénéficier de l'information qu'elles apportent sur l'état du système.
- Les états avant le recalage sont identifiés par le symbole $()^-$ et les états après le recalage sont identifiés par le symbole $()^+$.
- À partir de ces deux différences, la dérivation des équations discrètes du filtre de Kalman non-stationnaire suit le même raisonnement que celle des équations continues.
- Les équations du filtre de Kalman **non-stationnaire** pour systèmes **discrétisés linéaires** sont :

| | | |
|---|--|--------|
| Modèle | $\underline{x}_{k+1} = \underline{F}_k \underline{x}_k + \underline{H}_k \underline{u}_k + \underline{J}_k \underline{\omega}_k \quad \mathbb{E} \{ \underline{\omega}_k \underline{\omega}_j^T \} = \underline{W} \delta_{ij}$ $\underline{y}_k = \underline{C}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \quad \mathbb{E} \{ \underline{v}_k \underline{v}_j^T \} = \underline{R} \delta_{ij}$ | (6.46) |
| Conditions initiales | $\hat{\underline{x}}_0(0) = \hat{\underline{x}}_0$ $\underline{P}(0) = \mathbb{E} \{ [\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0] [\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0]^T \}$ | |
| Calcul du Gain | $\underline{K}_{ek} = \underline{P}_k^- \underline{C}_k^T [\underline{C}_k \underline{P}_k^- \underline{C}_k^T + \underline{R}]^{-1}$ | |
| Recalage | $\hat{\underline{x}}_k^+ = \hat{\underline{x}}_k^- + \underline{K}_{ek} [\underline{y}_k - \underline{C}_k \hat{\underline{x}}_k^-] \quad \underline{y}_k = \text{mesures}$ | |
| Propagation des états estimés et de la covariance | $\hat{\underline{x}}_{k+1}^- = \underline{F}_k \hat{\underline{x}}_k^+ + \underline{H}_k \underline{u}_k$ $\underline{P}_{k+1}^- = \underline{F}_k \underline{P}_k^+ \underline{F}_k^T + \underline{J}_k \underline{W} \underline{J}_k^T$ | |

- Les équations **(6.46)** représentent la version classique rencontrées dans la littérature. Cependant, pour une meilleure précision, la propagation des équations d'état est souvent implémentée par intégration numérique de type Runge-Kutta où Kutta-Felberg.
- Le terme $[\underline{y}_k - \underline{C}_k \hat{\underline{x}}_k^-]$, appelé *résidu* (« residues ») est la différence entre les mesures \underline{y}_k et les mesures estimées $\underline{C}_k \hat{\underline{x}}_k^-$. Dans un réglage parfait d'un filtre de Kalman, les résidus représentent le bruit de mesures dans les capteurs qui est rejeté par le filtre.
- Le terme $\underline{K}_{ek} [\underline{y}_k - \underline{C}_k \hat{\underline{x}}_k^-]$, appelé *innovation* (« state innovations »), représente la correction aux états.
- Pour comprendre le sens de ces équations, considérons le cas simplifié où :
 - Le système n'a qu'un état.
 - La mesure y_k correspond à l'état et donc : $\underline{C}_k = C_k = 1$ et $y_k = x_k^m$.
 - Avec ces suppositions, les équations de recalage deviennent :

$$K_{ek} = \frac{P_k^-}{[P_k^- + R]}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_{ek} [x_k^m - \hat{x}_k^-]$$

- Supposons que la mesure x_k^m est de très bonne qualité (peu bruitée), et donc R est petit, et la méconnaissance de la dynamique du système est grande, et donc W est grand et P_k^- est grand. Dans ce cas, $K_{ek} = \frac{P_k^-}{[P_k^- + R]} \approx \frac{P_k^-}{P_k^-} = 1$ et l'équation de recalage devient :

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_{ek} [x_k^m - \hat{x}_k^-] = \hat{x}_k^- + 1[x_k^m - \hat{x}_k^-] = x_k^m$$

Ainsi, l'état recalé est entièrement calqué sur la mesure ce qui a du sens puisque la mesure est de très bonne qualité par rapport à ce que la propagation de l'état \hat{x}_k^- par le modèle a donné.

- Inversement, supposons que la mesure est de très mauvaise qualité (très bruitée), et donc R est grand, et la méconnaissance de la dynamique du système est petite, et donc P_k^- est petit. Dans ce cas, $K_{ek} = \frac{P_k^-}{[P_k^- + R]} \approx \frac{0}{R} = 0$ et l'équation de recalage devient :

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_{ek}[x_k^m - \hat{x}_k^-] = \hat{x}_k^- + 0[x_k^m - \hat{x}_k^-] = \hat{x}_k^-$$

Ainsi, l'état recalé est entièrement calqué sur l'état propagé ce qui a du sens puisque la mesure est de très mauvaise qualité par rapport à ce que la propagation de l'état \hat{x}_k^- par le modèle a donné.