CONCEPTION PAR RETOUR D'ÉTAT ET PLACEMENT DE PÔLES

GEI-720

Jean de Lafontaine

CHAPITRE 5

Contenu de ce chapitre

5 CONCEPTION PAR RETOUR D'ÉTAT ET PLACEMENT DE PÔLE

5.1 INTRODUCTION ET RAPPELS

- Une fois la modélisation du système dynamique complétée, son asservissement est maintenant traité. Dans ce chapitre, la méthode du retour d'état par placement des pôles est présentée. Premièrement, quelques rappels du chapitre 1 sur la structure de l'asservissement par retour d'état sont nécessaires.

- Commande classique : → entrée/sortie unique (SISO)
  → la conception de l'asservissement vise à placer 1 ou 2 pôles dominants
- Commande moderne : → entrées/sorties multiples (MIMO)
  → la conception de l'asservissement vise à placer <u>tous</u> les pôles du système.

- Sous certaines conditions (voir ci-dessous), la commande moderne permet théoriquement de replacer tous les pôles du système asservi aux endroits désirés. En pratique cependant, il y a des limites imposées par la puissance limitées des actionneurs à réaliser l'asservissement.

- Voici les conditions suffisantes et nécessaires pour placer tous les pôles où le concepteur le désire :

  (1) Le système doit être <u>commandable</u> par retour d'état (« <u>state controllability</u>»).
  (2) Le système doit être <u>observable</u> : tous les états doivent être disponibles pour en faire une rétroaction (« <u>state observability</u> »).

- Si ces deux conditions sont satisfaisantes, tous les n pôles d'un système en boucle ouverte décrit par :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \quad \begin{cases} \underline{x} : n \times 1 & \underline{u} : r \times 1 \\ \underline{A} : n \times n & \underline{B} : n \times r \end{cases} \tag{5.1}$$

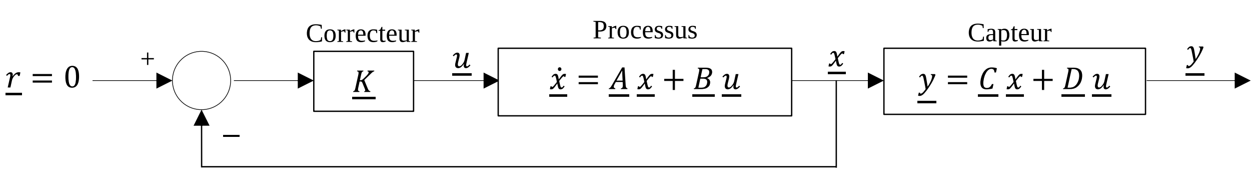
  peuvent être déplacés à n endroits du plan complexe s choisis par le concepteur, avec une rétroaction de type :

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} \qquad K : r \times n \tag{5.2}$$

- **NOTE**
  Ce type de rétroaction peut être vu comme une généralisation de la commande à action proportionnelle classique (commande P). Dans la commande classique, le retour se fait sur une seule sortie. Ici, le retour se fait sur n états, dont certains peuvent être des dérivées ou intégrales les uns des autres, donc des actions dérivées et intégrales sont implicites dans (**5.2**).

- Il y a rn paramètres disponibles dans la matrice $\underline{K}$ pour placer n pôles.

- En se référant au chapitre 1, le schéma-bloc d'un régulateur par retour d'état devient donc :



- Le terme « régulateur » vient du fait qu'un retour de type $u = -Kx$ suppose que la consigne (ou référence) $\underline{r}$ est nulle. On commande le signal à zéro i.e. on commande le système à son point d'équilibre (ou de linéarisation). Le régulateur est donc conçu pour ramener rapidement le système à son point d'équilibre dynamique après une perturbation ou une manœuvre.

- Dans le cas où la référence $\underline{r}$ est constante mais non nulle, un changement de variable en variation autour de cette valeur permet de retrouver ce schéma-bloc.

- NOTE : Ne pas confondre la consigne $\underline{r}$ avec le nombre d'entrées r du système.

- Dans le cas où le système original est non linéaire, on doit le linéariser autour d'un point d'équilibre $\underline{x}_e$ ou d'une trajectoire de référence pour obtenir les matrices A et B du système linéaire associé.

- Dans les deux cas ci-dessus, le schéma-bloc opère donc sur les variations :

$$\Delta\underline{r} = 0,\ \ \Delta\underline{u} = -\underline{K}\,\Delta\underline{x}, \qquad\qquad \Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\Delta\underline{x} + \underline{B}\,\Delta\underline{u}$$

- **IMP :** Si la rétroaction $\Delta\underline{u} = -\,\underline{K}\,\Delta\underline{x}$, est utilisée sur la version non linéaire du système, il faut se souvenir que le gain K doit multiplier des variations $\Delta\underline{x}$ par rapport aux conditions d'équilibre (ou de référence) : $\Delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_e$ $\rightarrow \underline{x}_e$ est l'état à l'équilibre.

  $\rightarrow$ obtenus de la simulation non linéaire, et non pas l'état non linéaire $\underline{x}$ au complet.

- La détermination de la commandabilité d'un système (Condition (1)) sera discutée à la section **5.2**.
- La détermination de l'observabilité d'un système (Condition (2)) sera discutée à la section 5.4.

- Le choix de la matrice $\underline{K}$, l'objet de la conception, peut être fait :

  i. par placement de pôles $\rightarrow$ section 5.6, dans ce chapitre
  ii. par placement optimal $\rightarrow$ chapitre 6

- Quant à la Condition (2), tous les états d'un système ne sont normalement pas directement mesurés :

  - le nombre de capteurs seraient trop élevé (n états exigeraient n capteurs) entrainant ainsi des problèmes de coûts, de masse, de volume et de puissance requis
  - tous les états d'un système ne sont pas nécessairement mesurables

- Pour utiliser un retour d'état $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$, il faut donc « reconstruire » les états à partir de p variables mesurées ($p \ll n$), représentées par l'équation de sortie (on suppose $\underline{D} = 0$):

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \quad \begin{cases} \underline{y} = p \times 1 \\ \underline{C} = p \times n \end{cases} \tag{5.3}$$

- On a donc p mesures pour reconstruire n états avec $p \ll n$.

- Pour ce faire, on utilise un estimateur d'état ou un observateur d'état de la forme :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{\underline{A}}\,\hat{\underline{x}} + \hat{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{K_e}\,\left(\underline{y} - \hat{\underline{C}}\,\hat{\underline{x}}\right) \tag{5.4}$$

ou $\hat{\underline{x}}$ est la reconstruction de l'état à partir des mesures $\underline{y}$.

- La notation ˆ est utilisée pour différencier la connaissance que le concepteur possède de la vraie dynamique du système $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ du système réel (A, B, C, D). L'équation (**5.4**) ci-dessus est implémentée dans le microprocesseur de l'asservissement par le concepteur, basé sur sa meilleure connaissance du modèle dynamique du système réel. En pratique, cette connaissance n'est pas parfaite. Il en sera ainsi dans la conception du gain $\underline{K}$ du régulateur. Ces différences peuvent entrainer une diminution de la stabilité et de la performance attendues du système asservi. C'est le sujet de la ***commande robuste*** qui vise à maintenir stabilité et performance en dépit des différences entre le système dynamique réel et le modèle numérique du système utilisé dans la conception. Ces différences sont causées par des incertitudes, des dynamiques non connues du système ou par des variations dans les paramètres du système dynamique pendant son opération.

- Ici, on supposera une connaissance parfaite de la dynamique réelle du système et donc aucune différence entre le modèle utilisé dans la conception et le modèle réel ($\hat{A} = A,\ \hat{B} = B,\ \hat{C} = C, \hat{D} = D$).

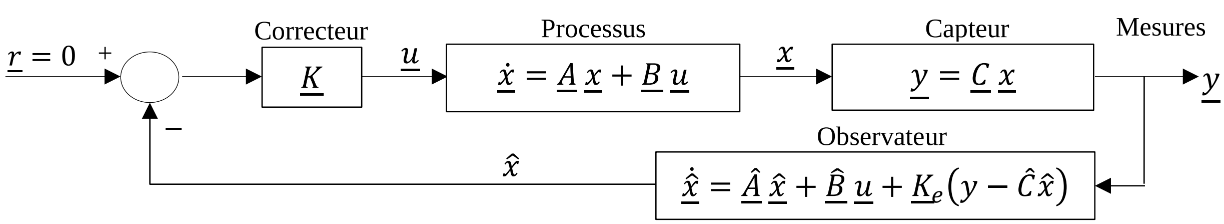
- Le choix du gain $\underline{K_e}$ est fait de façon à minimiser l'erreur $\Delta\underline{x} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$ entre l'état réel x (connu seulement à travers la mesure $\underline{y} = \underline{C}\ \underline{x}$) et l'état estimé $\hat{\underline{x}}$.

- Ce choix de K_e, l'objet de la conception d'un estimateur, peut être fait :

  i. par placement de pôle → section 5.7, dans ce chapitre
  ii. par placement optimal → chapitre 6

- Dans le cas de (i), on l'appelle « observateur d'état » (« state observer »).
- Dans le cas de (ii), on utilise plutôt « estimateur d'état » (« state estimator »).

- Le schéma-bloc d'un régulateur avec estimateur d'état (chapitre 1) devient donc :



- Pour permettre la reconstruction de n variables d'état à partir de p mesures $(n > p \geq 1)$, un système doit rencontrer la condition d'observabilité (« observability »).

- La détermination de l'observabilité d'un système sera discutée à la section 5.4.

- Il sera aussi démontré que les conditions d'observabilité et de commandabilité sont des conditions duales. La section 5.5 en discute.

5.2 COMMANDABILITÉ PAR RETOUR D'ÉTAT

- **Définition :**
  Un système dynamique multivariable :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad \textbf{(5.1)'}$$

est commandable par retour d'état à un temps t_0 s'il est possible de transférer son état initial $\underline{x}(t_0)$ vers n'importe quel autre état final $\underline{x}(t_f)$ pendant un intervalle de temps fini $(t_f - t_0 < \infty)$ en agissant de façon appropriée sur les entrées $\underline{u}$ du système.

- Dans un système complètement commandable, les entrées $\underline{u}$ peuvent agir de façon indépendante sur tous les états (si $\underline{u}$ est bien choisi) pour ainsi commander le système vers n'importe quel état final.

- Il y a au moins 3 façons différentes de déterminer la commandabilité d'un système.

Méthode 1

- Il peut être démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour la commandabilité d'un système est que le rang de la *matrice de commandabilité* $\underline{M}$ doit être égal à l'ordre du système, i.e. pour :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \quad \begin{cases} A : n \times n \\ B : n \times r \end{cases}$$

$$\text{rang}(\underline{M}) = n \qquad (5.5)$$

où

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A}\,\underline{B} & \underline{A}^2\underline{B} & \cdots & \underline{A}^{n-1}\,\underline{B} \end{bmatrix} \qquad (5.6)$$

- Sur MATLAB : On forme la matrice de commandabilité : $M = [B\ A * B\ A * A * B \cdots];$
  $\text{rang} = \text{rank}(\underline{M})$ donne le rang de la matrice de commandabilité.

- La matrice de commandabilité $\underline{M}$ est de dimension $n \times nr$. La condition (**5.5**) demande donc que cette matrice doit avoir n colonnes indépendantes pour que le système soit commandable.

- Si $\text{rang}(\underline{M}) < n \Rightarrow$ le système n'est pas complètement commandable, l'entrée $\underline{u}$ n'affecte pas tous les modes (pôles) du système et tous les pôles ne peuvent pas être déplacés par rétroaction.

- Sur MATLAB, la commandabilité est vérifiée avec les étapes suivantes:

  ⇨ former la matrice $\underline{M} = [\underline{B}, \underline{AB}, \underline{AAB}, \cdots, \underline{A}^{(n-1)}\underline{B}]$ avec la fonction ***ctrb(A, B)***

  ⇨ calculer le rang de $\underline{M} = \text{rank}(\underline{M})$ avec la fonction ***rank(M)***

  ⇨ vérifier que rang de $\underline{M} = n =$ dimension de $\underline{A}$ $(n \times n)$ ou $\underline{x}$ $(n \times 1)$

  NOTE : La fonction ***ctrb(sys)*** peut aussi s'appliquer à un système ***sys*** où ***sys=ss(A,B,C,D)***

Méthode 2

- Une autre façon consiste à appliquer une transformation de coordonnées à :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad \textbf{(5.1)''}$$

pour le mettre sous forme diagonale (ou modale). On peut y voir si les entrées affectent tous les états. La transformation à appliquer dépend de la nature des valeurs propres comme indiqué ci-dessous.

- **Cas de valeurs propres distinctes** $(\boldsymbol{\lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_n})$
  - Les valeurs propres distinctes peuvent être réelles ou complexes.
  - Former la matrice des vecteurs propres $\underline{P}$ avec la fonction ***eig***.
  - Sur MATLAB, on peut trouver la matrice des vecteurs propres $\underline{\mathrm{P}}$ avec :

$$[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{V}] = \boldsymbol{eig}(\boldsymbol{A})$$

  où $\boldsymbol{V}$ est la matrice $\underline{\mathrm{A}}$ diagonalisée résultante dénotée ici par $\underline{\Lambda}$.
  - La matrice $\underline{P}$ diagonalise la matrice $\underline{A}$ avec la transformation:

$$\underline{P}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{P} = \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \underline{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (5.7)$$

  - On applique donc le changement de coordonnées

$$\underline{x} = \underline{P}\,\underline{w} \qquad (5.8)$$

  à (**5.1**)'' pour obtenir le système équivalent :

$$\boxed{\underline{\dot{w}} = \underline{\Lambda}\,\underline{w} + \underline{P}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}} \qquad (5.9)$$

  avec les nouvelles variables d'état modales $\underline{w}$ qui sont maintenant découplées.

D1. Démontrer que (**5.8**) appliquée à **(5.1)''** ci-dessus donne bien (**5.9**) après quelques manipulations.

  - Dans (**5.9**), les variables d'état $\underline{w}$ sont découplées (i.e $\dot{w}_k$ ne dépend que de w_k, pas des autres $\underline{w_i}$) puisque $\underline{\Lambda}$ est diagonale.
  - L'équation (**5.9**) est la forme <u>modale</u> ou <u>découplée</u> de (**5.1**).
  - Si une rangée quelconque k de la matrice $\underline{P}^{-1}\underline{B}$ de (**5.9**) est complètement zéro (rangée de r zéros), cela veut dire que l'entrée $\underline{u}$ n'affecte pas la variable d'état (ou le mode) w_K. Le mode k n'est donc pas commandable.
  - Cette deuxième façon d'appliquer la condition de commandabilité est donc :

$$\boxed{\text{Aucune rangée de } \underline{P}^{-1}\underline{B} \text{ ne doit être complètement nulle}} \qquad (5.10)$$

- **Cas de vecteurs propres non distincts**

  - Si les vecteurs propres ne sont pas distincts, la matrice A n'est pas diagonalisable avec la matrice des vecteurs propres $\underline{P}$ (la matrice $\underline{P}$ est non singulière et son inverse n'existe pas). Cela indique qu'il y a des valeurs propres répétées. Le mieux que l'on puisse faire, c'est d'obtenir une transformation $\underline{S}$ de vecteurs propres généralisés qui met la matrice $\underline{A}$ sous forme diagonale de blocs de Jordan, par exemple :

$$\underline{J} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{matrix} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \begin{matrix}\lambda_4 & 1\\ 0 & \lambda_4\end{matrix} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \begin{matrix}\lambda_6 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{matrix} \end{bmatrix}$$

    où la valeur propre λ_1 est répétée 3 fois, la valeur propre λ_4 est répétée 2 fois et les autres valeurs propres sont distinctes. Les boîtes en pointillé délimitent les blocs de Jordan. À remarque les coefficients « 1 » sur la super-diagonale des blocs de Jordan.

  - Sur MATLAB, on peut trouver la matrice des vecteurs propres généralisés $\underline{S}$ avec :

$$[\boldsymbol{S},\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{jordan}(\boldsymbol{A})$$

    où $\underline{S}$ est la matrice $\underline{A}$ sous forme Jordan résultante dénotée ici par $\underline{J}$.

  - En appliquant le même changement de coordonnées

$$\underline{x} = \underline{S}\,\underline{w}$$

    on obtient le système sous forme Jordan équivalent :

$$\boxed{\underline{\dot{w}} = \underline{J}\,\underline{w} + \underline{S}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}}$$

    avec les nouvelles variables d'états modales $\underline{w}$.

  - Dans ce cas, la condition de commandabilité devient :

▪ Aucune rangée de $\underline{S}^{-1}\underline{B}$ correspondant à la <u>dernière</u> rangée de chaque bloc Jordan dans $\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}$ doit être complètement nulle (voir les flèches ci-dessous) ▪ Pour les autres valeurs propres distinctes, même condition que **(5.10)** : pas de rangées de zéros ▪ Chaque bloc Jordan doit être associé à des valeurs propres différentes (e.g. $\lambda_1 \neq \lambda_4$ ici).	(5.11)

$$\underline{J} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \multicolumn{2}{c|}{\underline{0}} & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\underline{0}} & \lambda_4 & 1 & & \underline{0} & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & & \\ \hline & & & & & \lambda_6 & & \\ \multicolumn{3}{c|}{\underline{0}} & \multicolumn{2}{c|}{\underline{0}} & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{array}\right]$$

Vérifier les rangées de la matrice $\underline{S}^{-1}\underline{B}$ correspondant à ces flèches.

- Dans cet exemple, on vérifie donc que la 3e, la 5e, la 6e, etc. rangées de la matrice $\underline{S}^{-1}\underline{B}$ ne soit pas entièrement des zéros. Il faut que la dernière rangée de chaque bloc de Jordan soit affecté par au moins une des entrées.

Méthode 3

- Dans le modèle matrice de transfert entre les entrées et les états :

$$\underline{T}(s) = \left(s\,\underline{1} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B}$$

la condition de commandabilité est satisfaite s'il n'y a pas d'annulation de pôle-zéro dans $\underline{T}(s)$.

D2. Pour le système :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = 0$$

déterminer sa commandabilité avec :

i. **rank(M)**
ii. en vérifiant s'il y a annulation pôle-zéro dans la matrice de transfert $\underline{T}(s)$
   - ***[num, den] = ss2tf(A,B,C,D)***
   - ***roots(num)*** et ***roots(den)*** indiquent s'il y a des pôles et zéros communs qui s'annulent.
iii. en vérifiant les rangées de $\underline{P}^{-1}\underline{B}$ où $\underline{P}$ est la matrice de vecteurs propres de $\underline{A}$

- Noter que les conclusions ci-dessus sont inversées si $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ plutôt que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

* * * * *

5.3 Forme canonique de Companion ou forme canonique de commandabilité

- Une autre transformation de coordonnées utile, basée sur la matrice de commandabilité M de l'équation (**5.6**) :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u}$$

sous la forme dite « canonique de Companion » ou « controllability canonical form ».

- Si on utilise la transformation de coordonnées :

$$\underline{T} = \underline{M}\ \underline{Q} \tag{5.12}$$

où $\underline{\mathrm{M}}$ est la matrice de commandabilité déjà discutée :

$$\underline{M} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B \quad] \tag{5.6}'$$

et

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

et les $a_n$sont les coefficients de l'équation caractéristique de $\underline{A}$:

$$\det\left(s\underline{1} - \underline{A}\right) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

les nouvelles matrices d'état du système transformé :

$\underline{\dot{w}} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\ \underline{T}\ \underline{w} + \underline{T}^{-1}\underline{B}\ \underline{u}$ (pas le même $\underline{w}$ que dans (**5.9**) bien sûr $\underline{T} \neq \underline{P}$)

prennent la forme :

$$\underline{T}^{-1}\underline{A}\ \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{T}^{-1}\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

- Sous cette forme canonique, on retrouve tous les coefficients de l'équation caractéristique, en ordre et signe inversés, sur la dernière rangée.

- Cette transformation $\underline{T} = \underline{M}\ \underline{Q}$ sera utile dans le placement des pôles et le calcul de la matrice de gain $\underline{K}$ du régulateur.

- Sur MATLAB, les fonctions requises pour trouver la matrice de transformation $\underline{T}$ sont les suivantes.

    - Les coefficients $\mathrm{a}_0\, \mathrm{a}_1 \;\cdots\; \mathrm{a}_{n-1}$ sont les coefficients de l'équation caractéristique correspondant à la matrice $\underline{\mathrm{A}}$:

$$p = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

où l'équation a été normalisée pour que le coefficient $\mathrm{a_n}$ soit unité (coefficient de $\mathrm{s^n}$). Ce sont les coefficient du dénominateur de la fonction de transfert correspondant au modèle variable d'état.

- Sur MATLAB, ces coefficients sont obtenus avec la fonction poly :

$\boldsymbol{coef} = \mathbf{poly}(\boldsymbol{A})$ → donne la matrice-rangée des valeurs numériques des coefficients dans l'ordre: [1 $a_{n-1} \cdots a_1\ a_0$].

- Pour calculer la matrice $\underline{Q}$, il faut d'abord inverser l'ordre des coefficients :

$$\boldsymbol{cinv} = \boldsymbol{coef}(\boldsymbol{end}: -\mathbf{1}: \mathbf{1})$$

pour obtenir : cinv = [$a_0\ a_1 \cdots\ a_{n-1} 1$]. On peut ensuite créer la matrice :

```
Q = zeros(size(A));          % initialisation
n = length(A);               % ordre du système
for k =1:n
    Q(k,:)=[cinv(k+1:1:n),1,zeros(1,k-1)];
end
```

- On calcule finalement la matrice $\underline{T}$:

$$\underline{T} = \underline{M}\,\underline{Q}$$

5.4 OBSERVABILITÉ

- **Définition**
  Un système dynamique multivariable

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x \qquad & x : n \times 1 \\ y &= Cx \qquad & y : p \times 1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

  est observable si n'importe quel état $\underline{x}(t_0)$ à t_0 peut être déterminé par l'observation (la mesure) de la sortie $y\ (t)$ pendant un intervalle de temps fini $t_0 \leq t \leq\ t_f$.

- Dans un système complètement observable, tous les états du système ont leur trace ou « signature » propre dans les sorties $\underline{y}(t)$ et on peut donc reconstruire tous les états à partir de l'historique temporel de $\underline{y}(t)$ sans que tous les états soient eux-mêmes mesurés directement.

- **NOTE :**
  La dimension p des sorties y est normalement beaucoup plus petite que celle n des états x :

$$p \ll n$$

  donc la reconstruction des états x à partir des sorties y n'est pas un modèle statique de la forme :

$$\underline{x} = \underline{C}^{-1}\underline{y}$$

  puisque $\underline{C}$ n'est pas carrée (dimension $p \times n$). C'est un problème dynamique : il faut mesurer $\underline{y}(t)$ pendant un certain temps (temps de convergence) pour que la reconstruction des états s'approche de la valeur réelle des états internes du système.

- **NOTE :**
  Les matrices $\underline{B}$ et $\underline{D}$ sont associées aux entrées $\underline{u}$ (connues) qui n'affectent en rien l'observabilité du système. C'est pourquoi elles ont été omises dans (**5.15**).

- Il y a au moins 3 façons différentes de déterminer l'observabilité d'un système.

  Méthode 1

- Il peut être démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'observabilité d'un système est que le rang de la *matrice d'observabilité* $\underline{O}$ doit être égal à l'ordre du système, i.e. :

$$\text{rank}(\underline{O}) = n \tag{5.16}$$

  où :

$$\underline{O} = \left[\underline{C}^T \quad \underline{A}^T\underline{C}^T \quad \underline{A}^T\underline{A}^T\underline{C}^T \cdots \left(\underline{A}^T\right)^{n-1}\underline{C}^T\right] \tag{5.17}$$

- La matrice d'observabilité est de dimension $n \times np$. La condition (**5.16**) exige que cette matrice doit avoir n colonnes indépendantes pour que le système soit observable.

- Si $\text{rank}(O) < n$, le système n'est pas complètement observable, il y a des états qui n'ont pas leur trace dans les sorties $\underline{y}$ (et ces états ne pourront donc pas être utilisés dans le retour d'état).

- Sur MATLAB, l'observabilité est vérifiée avec les étapes suivantes:

  ⇨ Former la matrice $\underline{O} = [C^T \;\; A^T C^T \; A^T A^T C^T \cdots (A^T)^{n-1} C^T]$ avec la fonction ***obsv(A, C)***

  ⇨ Calculer rang $= \text{rank}(\underline{O})$ avec la fonction ***rank(O)***

  ⇨ Vérifier que rang de $\underline{O} = n =$ ordre du système

  NOTE : La fonction ***obsv(sys)*** peut aussi s'appliquer à un système ***sys*** où ***sys=ss(A,B,C,D)***

- **Méthode 2**

- Une autre façon consiste à appliquer une transformation de coordonnées à :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned} \quad \textbf{(5.15)'}$$

pour le mettre sous forme diagonale (ou modale). On peut y voir si les états sont présents dans toutes les sorties. La transformation à appliquer dépend de la nature des valeurs propres comme indiqué ci-dessous.

- **Cas de valeurs propres distinctes** $(\boldsymbol{\lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_n})$

  - On applique la transformation (5.7) et (5.8) pour obtenir le système diagonalisé équivalent :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{w}} &= \Lambda\,\underline{w} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{P}\,\underline{w} \end{aligned}} \quad (5.18)$$

  avec les nouvelles variables d'état modales $\underline{w}$ qui sont maintenant découplées.

D3. Démontrer que la transformation (**5.7**) et (**5.8**) transforme **(5.15)'** en (**5.18**):

  - L'équation de sortie $\underline{y} = \underline{C}\,\underline{P}\,\underline{w}$ peut-être réécrite :

$$\underline{y} = \left[\underline{col}1 \;\; \underline{col}2 \;\cdots\; \underline{col}n\right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w_1\,\underline{col}1 + w_2\,\underline{col}2 + \cdots + w_n\,\underline{col}n \quad (5.19)$$

  où $\underline{col}1, \underline{col}2 \;\cdots\; \underline{col}n$ sont les colonnes de $\underline{C}\,\underline{P}$.

  - À partir de (**5.19**), il est évident que si une colonne quelconque k de $\underline{C}\,\underline{P}$ est complètement nulle, la variable d'état w_k n'apparaîtra jamais (n'aura pas sa trace) dans la sortie.

- Cette deuxième façon d'appliquer la condition d'observabilité est donc :

$$\boxed{\text{Aucune colonne de } \underline{C}\ \underline{P} \text{ doit être complètement nulle.}} \qquad (5.20)$$

- **Cas de vecteurs propres non distincts**

  - Dans ce cas les colonnes $\underline{C}\ \underline{S}$ doivent être analysées où $\underline{S}$ est la matrice de transformation de Jordan

  - La condition d'observabilité est donc :

> - Aucune colonne de $\underline{C}\ \underline{S}$ correspondant à la <u>première</u> colonne de chaque bloc Jordan doit être complètement nulle.
> - Pour les autres valeurs propres distinctes, même condition que (**5.20**) : pas de colonne de zéros
> - Chaque bloc Jordan doit être associé à des valeurs propres différentes.

(5.21)

- Dans le modèle matrice de transfert :

$$\underline{T}(s) = \underline{C}\left(s\underline{1} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B}$$

entre les entrées et les sorties, la condition d'observabilité est satisfaite s'il n'y a pas d'annulation de pôle-zéro dans $\underline{T}(s)$.

D4. Démontrer (par la méthode au choix) que le système en **D2** est observable.

Changer la matrice $\underline{C}$ pour $\underline{C} = [0 \quad 1]$ et déterminer l'observabilité avec :

i. rank (O)
ii. en vérifiant s'il y a annulation pôle-zéro
iii. en vérifiant les colonnes de $\underline{C}\ \underline{P}$.

5.5 DUALITÉ DE LA COMMANDABILITÉ ET DE L'OBSERVABILITÉ

- Supposons deux systèmes :

  Système 1 :

$$\begin{matrix} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \end{matrix} \qquad \begin{cases} x : n \times 1 \;\; A : n \times n \\ u : r \times 1 \;\; B : n \times r \\ y : p \times 1 \;\; C : p \times n \end{cases}$$

  Système 2 :

$$\begin{matrix} \dot{\underline{w}} = \underline{A}^T\underline{w} + \underline{C}^T\underline{v} \\ \underline{z} = \underline{B}^T\underline{w} \end{matrix} \qquad \begin{cases} w : n \times 1 \;\; A^T : n \times n \\ v : p \times 1 \;\; B^T : n \times r \\ z : r \times 1 \;\; C^T : p \times n \end{cases}$$

  (Pas le même $\underline{w}$ qu'avant...)

- Les systèmes 1 et 2 sont « duaux » l'un de l'autre.

- Le système 1 est commandable <u>ssi</u> le système 2 est observable.

- Le système 1 est observable <u>ssi</u> le système 2 est commandable.

- Système 1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}\,B] \\ \mathrm{O} &= \left[C^T \quad A^T C^T \cdots (A^T)^{n-1}\underline{C}^T\right] \end{aligned}$$

- Système 2 :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \left[C^T \quad A^T C^T \cdots (A^T)^{n-1}\underline{C}^T\right] \\ \mathrm{O} &= [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \end{aligned}$$

- On peut donc déterminer l'observabilité d'un système par la vérification de la commandabilité de son modèle dual et vice-versa :

  - La commandabilité d'un système (A, B, C) est la même que l'observabilité d'un système (A^T, C^T, B^T).
  - L'observabilité d'un système (A, B, C) est la même que la commandabilité d'un système (A^T, C^T, B^T).

5.6 CONCEPTION D'UN RÉGULATEUR PAR PLACEMENT DE PÔLES

- **Énoncé du problème pour régulateur**

  - Le système original (en boucle ouverte) d'ordre n à compenser est :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \qquad \textbf{(5.1)''}$$

  - On utilise un retour d'état de la forme (on suppose tous les états disponibles pour l'instant)

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x} \qquad \textbf{(5.2)''}$$

    pour maintenir le système à un point d'opération désiré (équilibre statique ou trajectoire de référence).

  - Le système en boucle fermée devient :

$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} - \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{x} = \left(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\right)\underline{x}} \qquad (5.22)$$

  - L'objectif de la compensation est de choisir la matrice $\underline{K}$ de façon à ce que la matrice d'état en boucle fermée, $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$, ait des pôles en boucle fermée $\underline{P}$ à des positions choisies par le concepteur.

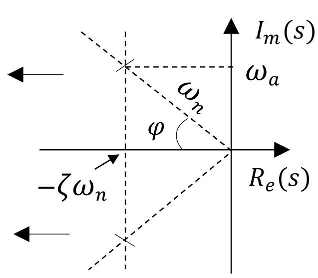
  - Le problème devient donc de trouver $\underline{K}$ pour que :

$$\mathrm{eig}\left(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\right) = \underline{P} \qquad (5.23)$$

    où $\underline{P}$ contient les n pôles désirés.

- **NOTES**

(1) Le choix de la position des pôles P est basé sur les mêmes critères que dans la commande classique :



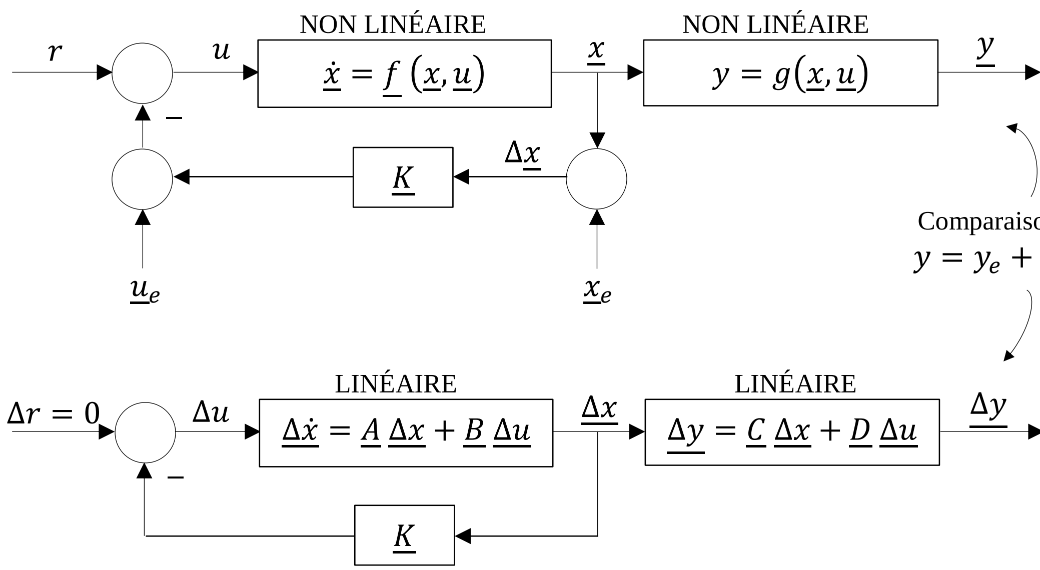
ω_a = fréquence des oscillations amorties
ω_n = fréquence naturelle
ζ = $\cos\varphi$ = facteur d'amortissement

→ dépassement max $\simeq M_p = 100e^{-\pi/\tan\varphi}$
→ temps du 1er pic $\simeq t_p = \pi/\omega_a$
→ temps de stabilisation $\simeq t_s = 4/\zeta\omega_n$

Tous les autres pôles doivent être placés à gauche de celui ou de ceux qui dominent.

(2) Dans un problème de <u>régulation</u>, on désire maintenir le système à son point d'opération (d'équilibre ou référence) donc à maintenir $\Delta x = 0$, autour de x_e. C'est la consigne $\Delta r = 0$ à la page 5-2.

(3) Dans le cas d'un système linéarisé et dans le cas d'un système quasi-linéaire (consigne constante), un changement de variable en variation, autour du point d'opération (d'équilibre) est requis. Si on veut utiliser le compensateur sur le système original (non linéaire), il ne faut pas oublier que la matrice $\underline{K}$ agit sur des variations :



(4) Pour comparer les résultats du système non linéaire avec ceux du linéaire, il ne faut pas non plus oublier de faire les ajustements de référence nécessaires.

(5) Pour un système à r entrées $(\underline{u} : r \times 1)$, la matrice de gain K est de dimension $\underline{K} : r \times n$. Il y a donc rn paramètres libres pour placer n pôles. En fait, on n'a besoin que de n paramètres de $\underline{K}$ pour placer n pôles.

(6) Dans le cas où $r > 1$ (plus d'une entrée), le système est sous-dimensionné : on a plus (+) de paramètres à ajuster (rn) qu'on a de contraintes (n pôles impliquent n conditions/équations/contraintes). On peut donc appliquer d'autres critères (contraintes) pour spécifier la matrice $\underline{K}$. Pour $r > 1$, la matrice $\underline{K}$ n'est donc pas unique (pour placer n pôles).

(7) Le développement mathématique sera fait pour le cas $r = 1$ (une seule entrée) auquel cas la matrice $\underline{K}$ (dimension $1 \times$ n) est unique. La généralisation à $r > 1$ sera ensuite faite (sur MATLAB).

- On développe ici les équations de design qui permettent de calculer la matrice $\underline{K}$ $(1 \times n)$ qui placera les n pôles du système (SIMO) :

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underbrace{u}_{\text{scalaire}}, \tag{5.24}$$

où u est un scalaire $(r = 1)$, aux endroits choisis :

$$\underline{P} = [p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n] \tag{5.25}$$

- Si p_i est complexe, il doit y avoir un autre pôle complexe p_j qui en est la conjuguée complexe, sinon le système (**5.24**) compensé aurait des coefficients imaginaires.

- On veut les pôles en boucle fermée à $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Donc, l'équation caractéristique désirée du système en boucle fermée doit être :

$$(s - p_1)\,(s - p_2) \cdots\, (s - p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{5.26}$$

- Une fois $\underline{P} = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$ donné, il y a au moins deux façons de trouver les coefficients α_i de l'équation caractéristique :

  (1) en multipliant à la main (plutôt long pour les systèmes d'ordre élevé),
  (2) avec MATLAB.

- Sur MATLAB, la fonction ***poly*** (déjà vue à la section 5.3) permet de trouver les coefficients de l'équation caractéristique α_n ci-dessus à partir des pôles désirés:

$$[1\ \alpha_{n-1}\ \cdots\ \alpha_1\ \ \alpha_0] = \text{poly}([p_1\,, p_2, p_3 \cdots p_n]) \tag{5.27}$$

où les p_n sont les pôles (racines) du polynôme désiré et α_n les coefficients du polynôme. On voit que la fonction MATLAB ***poly*** est l'inverse de la fonction MATLAB ***roots***.

- **NOTES**

Noter que $\mathbf{poly}(\underline{\mathbf{A}})$, avec $\underline{\mathrm{A}}$ une matrice, donne aussi les coefficients de l'équation caractéristique de la matrice $\underline{\mathrm{A}}$ (déjà vu à la section 5.3).

- On veut donc que l'équation caractéristique de la matrice d'état en boucle fermée, $\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$, soit égale à (**5.26**) **:**

$$\det\left(s\underline{1} - \underline{A} + \underline{B}\,\underline{K}\right) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{5.28}$$

- L'équation (**5.28**) représente n équations, une pour chaque coefficient de $s^i(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})$, à n inconnues $\left(\underline{K} : 1 \times n\right)$. Dans les cas simples $(n \leq 3)$, on peut les solutionner à la main.

- Pour les cas $n > 3$ (et $n >> 3$), il y a une façon (compliquée la première fois) de simplifier les calculs.

- On fait un changement de coordonnées de la matrice en boucle ouverte $\underline{A}$ pour la mettre sous forme canonique de commandabilité (ou de Companion).

- Cette transformation $\underline{T}$ a été présentée à la section 5.3:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u} && \rightarrow \quad \text{original} \\ \underline{x} &= \underline{T}\ \underline{w} && \rightarrow \quad \text{changement de coordonnées} \\ \underline{\dot{w}} &= \underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T}\ \underline{w} + \underline{T}^{-1}\underline{B}\ \underline{u} && \rightarrow \quad \text{canonique transformée} \end{aligned} \tag{5.29}$$

où

$$\underline{T} = \underline{M}\ \underline{Q} \qquad \textbf{(5.12)'}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A}\ \underline{B} & \underline{A}^2\underline{B} & \cdots & \underline{A}^{n-1}\ \underline{B} \end{bmatrix} = \text{matrice de commandabilité} \qquad (5.6)''$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.13)'}$$

et où les a_i sont les coefficients de l'équation caractéristique de $\underline{A}$:

$$[1, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0] = \text{poly}(A) \tag{5.30}$$

- On n'a pas à trouver les matrices $\underline{T}$, $\underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T}$ ou $\underline{T}^{-1}\underline{B}$ mais seulement les coefficients a_i avec l'équation (**5.30**).

- Avec le changement de coordonnées (5.29), la rétroaction $\mathrm{u} = -\underline{\mathrm{K}}\ \underline{\mathrm{x}}$ de l'équation (5.2) devient :

$$u = -\underline{K}\ \underline{T}\ \underline{w} \tag{5.31}$$

D5. Démontrer que le système en boucle fermée dans les nouvelles coordonnées devient :

$$\underline{\dot{w}} = \left(\underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T} - \underline{T}^{-1}\underline{B}\ \underline{K}\ \underline{T}\right)\underline{w} \tag{5.32}$$

D6. Si on fait aussi un changement de coordonnées de $\underline{K} = [K_1, K_2, \cdots, K_n]$ à $\underline{K}\ \underline{T} = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n-1}]$, démontrer que:

$$\underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T} - \underline{T}^{-1}\underline{B}\ \underline{K}\ \underline{T} = \tag{5.33}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0 + \delta_0) & -(a_1 + \delta_1) & -(a_2 + \delta_2) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} + \delta_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Conseil : utiliser la forme spéciale de $\underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T}$, de $\underline{T}^{-1}\underline{B}$ et de $\underline{K}\ \underline{T}$ ci-dessus.

- Selon les propriétés de la forme canonique (**5.33**)**,** l'équation caractéristique de $\left(\underline{T}^{-\mathbf{1}}\underline{A}\ \underline{T} - \underline{T}^{-1}\underline{B}\ \underline{K}\ \underline{T}\right)$ se trouve sur la dernière rangée :

$$\det[s\underline{1} - (\underline{T}^{-1}\underline{A}\,\underline{T} - \underline{T}^{-1}\underline{B}\,\underline{K}\,\underline{T})] = s^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \delta_1)s + (a_0 + \delta_0) \qquad (5.34)$$

- Vu qu'un changement de coordonnées ne change pas les valeurs propres d'une matrice, et donc son équation caractéristique, l'équation caractéristique (**5.34**) doit être la même que celle obtenue en **(5.28)** et qui est celle désirée :

$$\det[s\underline{1} - (\underline{T}^{-1}\underline{A}\,\underline{T} - \underline{T}^{-1}\underline{B}\,\underline{K}\,\underline{T})] = \det[s\underline{1} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}\,)] \qquad (5.35)$$

$$s^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})\delta^{n-1} + \cdots + (a_1 + \delta_1)s + (a_0 + \delta_0) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Les a_i sont connus.
Les δ_i sont les inconnues.

L'équation caractéristique désirée obtenue des pôles désirés $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

- En égalant les coefficients des s^i, on obtient la solution :

$$\boxed{\delta_i = \alpha_i - a_1} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \qquad (5.36)$$

- En appliquant le changement de coordonnée inverse de **D6** :

$$\underline{K}\,\underline{T} = [\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}]$$

on obtient ainsi la matrice des gains $\underline{K}$:

$$\boxed{\underline{K} = \underline{K}\,\underline{T}\,\underline{T}^{-1} = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n-1}]\underline{T}^{-1}} \qquad (5.37)$$

* * * * *

- Pour résumer, l'algorithme est le suivant :

1) Déterminer la commandabilité du système (une des 3 façons présentées à la section 5.5). Si non commandable, on arrête ici.
2) Choisir les pôles désirés : $P = [p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\,];$
3) Coefficients désirés : $\text{alfa} = \text{poly}(P);$
4) Coefficients en b.o. : $\text{a\_bo} = \text{poly}(A)$
5) Paramètres delta : $\text{delta} = \text{alfa} - \text{a\_bo}$
6) Matrice des gains : $K = \text{delta} * \text{inv}(T)$ où $T = M * Q$ et $\underline{M}$ et $\underline{Q}$ données plus haut.

IMP : Dans $\text{delta} = \text{alfa} - \text{a\_bo}$, il ne faut pas oublier d'enlever le premier terme qui est toujours zéro ($1 - 1 = 0$: coefficient de s^n).

- **NOTE UTILE**
  - Dans la génération de la matrice $\underline{Q}$, ou dans la génération de la matrice $\underline{\delta}$, on doit inverser l'ordre des coefficients. Exemple :
    - dans $\text{delta} = \text{alfa} - \text{a\_bo}$, on obtient
      $\text{delta} = [0, \delta_{n-1}, \delta_{n-2}, \cdots, \delta_1, \delta_0]$
      (toujours en ordre décroissant des exposants)

      Ordre inversé!

      Mais on a besoin de :

      $$\underline{K} = [\delta_0\ \delta_1\ \ \delta_2\ \cdots\ \delta_{n-1}]\underline{T}^{-1}$$

    - Pour inverser, on peut utiliser :

      $\text{delta} = \text{delta}([end\!:-1\!:2])$ ce qui donne :
      $\text{delta} = [\text{delta (end)}, \text{delta(end} - 1), \cdots, \text{delta (3)}, \text{delta (2)}]$

      on ne met pas $delta(1) = 0$
    - Enfin : $K = \text{delta} * \text{inv}(T)$
    - Même chose pour la matrice $\underline{\mathrm{Q}}$ où les a_1 sont inversés.

- **AUTRE FAÇON PLUS RAPIDE (!) :**
  - La commande pour trouver les gains par placement de pôles est simplement ***place*** sur MATLAB :

    $$\boxed{K = \text{place}(A, B, P)}$$

  - Tout est fait en une seule commande.
  - Cette commande peut aussi être appliquée au cas $\mathrm{r} > 1$ i.e. plus d'une entrée : $\underline{u} \rightarrow r \times 1$.

- **NOTE**
  - Plus les p_i désirés sont « à gauche » dans le plan s, plus la réponse sera rapide.
  - Par contre, les effets du bruit seront amplifiés.
  - Il y a un compromis à faire.

5.7 CONCEPTION D'UN OBSERVATEUR PAR PLACEMENT DE PÔLES

- **La nécessité d'un observateur d'état**
    - Dans un régulateur basé sur la rétroaction des états, on suppose que tous les états sont disponibles.
    - En pratique, il est trop coûteux ou impossible de mesurer tous les états: un nombre p de capteur limité $(p < n)$ ne permet de mesurer qu'un sous-ensemble des états. On doit reconstruire (estimer ou observer) les autres états non mesurés avec un estimateur ou observateur.
    - Il ne s'agit pas ici de dériver dans le temps $\left(d/_{dt}\right)$ une variable d'état pour en obtenir une autre : l'opération $d/_{dt}$ (toujours une approximation) amplifie le bruit et réduit le rapport signal/bruit puisque le bruit varie normalement plus vite que le signal.
    - Un observateur ou estimateur d'état reconstruit les états sans l'opération $d/_{dt}$. Il utilise un modèle embarqué de la dynamique réelle qui est ajusté à la dynamique réelle en utilisant les p mesures comme référence.
    - Un observateur ou estimateur est un asservissement virtuel où le modèle dynamique connu du système $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ est asservi aux mesures (qui deviennent une consigne) pour faire converger les états estimés $\hat{x}$ vers les états réels x.

- **Convention et notation**
    - Ici encore, il faut bien faire la différence entre (1) la « vraie » dynamique du système, les vraies sorties, les vrais états et (2) le modèle embarqué de la dynamique, les sorties estimées, les états estimés.
    - La vraie dynamique est celle du « hardware », du vrai système (avion, satellite), souvent appelé RW pour « real world ».
    - Le modèle de la dynamique embarqué est le modèle dynamique du RW que le système de commande a besoin à bord du microprocesseur embarqué pour faire son travail.
    - Ce modèle est souvent appelé OB pour « on-board », puisqu'il est codé et utilisé dans le microprocesseur embarqué dans le vrai système.
    - Durant la conception, le développement et la validation du système de commande, le vrai hardware n'est souvent pas disponible : on doit donc simuler le RW par un modèle mathématique (simulation des capteurs, actionneurs et vraie dynamique). Une fois le hardware disponible, ce modèle RW est remplacé par le vrai hardware.
    - Pour distinguer les modèles, sorties et états du RW simulé des modèles, sorties et états du modèle OB, il a déjà été mentionné qu'on utilise la notation (^) dans le dernier cas :

$$\underline{\dot{x}} = A\,x + B\,u \qquad\qquad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{B}\,\hat{u}$$
$$y = Cx + Du \qquad\qquad \hat{y} = \hat{C}\,\hat{x} + \hat{D}\hat{u}$$

vraie dynamique
(simulée pendant le design)
réelle à l'opération

modèle embarqué de
la vraie dynamique

- o Durant la conception, on suppose que l'on a à bord une connaissance parfaite de la dynamique :

$$A = \hat{A} \qquad B = \hat{B} \qquad C = \hat{C} \qquad D = \hat{D} \tag{5.38}$$

- o Par contre, on simule les erreurs (bruits, biais) dans les capteurs et actionneurs, donc :

$$\hat{u} \neq u \qquad \hat{y} \neq y \qquad \hat{x} \neq x \tag{5.39}$$

- Le but d'un estimateur d'état est de faire converger $\hat{x}$ vers x ($\hat{y}\ vers\ y$), pour que $\hat{x}$ (plutôt que x, qui est inconnu) soit utilisé dans la rétroaction.

- **NOTE :**
  Quand (**5.38**) n'est pas supposée ($A \neq \hat{A}$, etc.), on permet ainsi l'analyse de la robustesse du design aux erreurs de modélisation : c'est la commande robuste.

- **Principe de fonctionnement d'un observateur d'état**

  - o On veut obtenir $\underline{\dot{\hat{x}}}$, une approximation de $\underline{x}$, pour l'utiliser dans la rétroaction du régulateur:

$$\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{\hat{x}} \tag{5.40}$$

  plutôt que $\underline{u} = -\underline{K}\,\underline{x}$ puisque $\underline{x}$ n'est pas connu. (On suppose un actionneur parfait pour l'instant.)

  - o Le modèle de la réalité (RW) est :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned} \tag{5.41}$$

  - o La dynamique de l'observateur est de la forme :

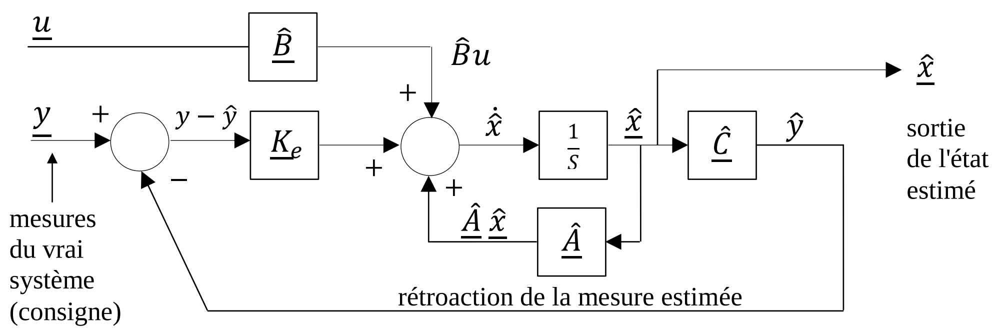
$$\begin{aligned} \underline{\dot{\hat{x}}} &= \underline{\hat{A}}\,\underline{\hat{x}} + \underline{\hat{B}}\,\underline{u} + \underline{K_e}\,\left(\underline{y} - \underline{\hat{y}}\right) \\ \underline{\hat{y}} &= \underline{\hat{C}}\,\underline{\hat{x}} \end{aligned} \tag{5.42}$$

  - o La « logique » de cette structure vient du fait que :

    (1) L'observateur essaie de dupliquer la dynamique du RW avec les termes $\underline{\hat{A}}\,\underline{\hat{x}} + \underline{\hat{B}}\,\underline{u}$.
    (2) L'erreur entre les sorties mesurées $\underline{y}$ et estimée $\underline{\hat{y}}$ est utilisé comme signal d'erreur pour « ajuster » le modèle OB de l'observateur jusqu'à ce que $\hat{x} \approx x$ et donc $\hat{y} \approx y$ et les deux systèmes sont convergents.

- On peut en effet voir un observateur comme un asservissement qui force (asservit) $\hat{y}$ vers y par rétroaction. En mettant les équations **(5.42)** sous forme de schéma-bloc, on reconnaît bien la structure d'un asservissement, tel que démontré ci-dessous, où les mesures sont la consigne.

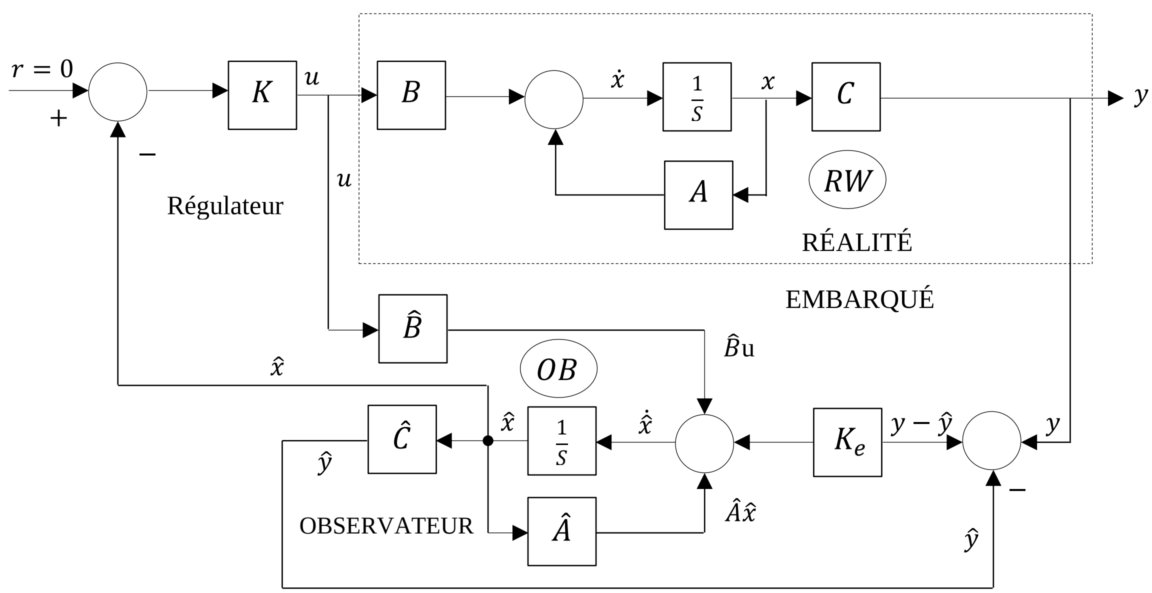
Structure «asservissement» d'un observateur



- Tout comme un asservissement, on doit choisir $\underline{K_e}$ pour avoir un observateur stable et sans erreur en régime permanent. La seule différence est qu'un observateur est tout en logiciel : pas de capteur ou actionneur.

- **NOTE :** La « sortie » de l'observateur est l'état estimé $\underline{\hat{x}}$**.** La sortie estimée $\underline{\hat{y}}$ n'est que pour usage interne de l'observateur.

- Si on combine l'observateur d'état avec le modèle RW et le régulateur à retour d'état, on obtient le schéma-bloc de la section 5.1 qui est présenté ici avec plus de détails :



- **NOTE :** Le régulateur n'a aucune dynamique, seulement une matrice de gains $\underline{K}$. Un observateur de tous les états a un ordre égal à celui du système à observer (n états $\rightarrow$ ordre n).

- **Énoncé du problème pour observateur**

  - Modèle de la réalité :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u} \qquad \underline{y} = \underline{C}\ \underline{x} \tag{5.41'}$$

  - Observateur d'état :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\hat{x}}} &= \underline{\hat{A}}\ \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{B}}\ \underline{u} + \underline{K_e}\ \left(\underline{y} - \underline{\hat{y}}\right) \\ \underline{\hat{y}} &= \underline{\hat{C}}\ \underline{\hat{x}} \end{aligned} \tag{5.42'}$$

  - Définition de l'erreur :

$$\underline{e} = \underline{x} - \underline{\hat{x}} \tag{5.43}$$

  - On suppose une connaissance parfaite de la réalité

$$A = \hat{A} \qquad B = \hat{B} \qquad C = \hat{C} \tag{5.38'}$$

  - La dynamique de l'erreur $\underline{e}$ devient :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{A}\left(\underline{x} - \underline{\hat{x}}\right) - \underline{K_e}\left(\underline{C}\ \underline{x} - \underline{C}\ \underline{\hat{x}}\right) \\ &\boxed{\dot{\underline{e}} = \left(\underline{A} - \underline{K_e}\ \underline{C}\right)\underline{e}} \end{aligned} \tag{5.44}$$

  - L'objectif du design est de choisir la matrice $\underline{K_e}$ de façon à ce que la matrice d'état de l'erreur, $\underline{A} - \underline{K_e}\ \underline{C}$, ait des pôles $\underline{P_e}$ à des positions choisies par le concepteur.

  - Le problème devient donc de trouver $\underline{K_e}$ pour que :

$$\text{eig}\left(\underline{A} - \underline{K_e}\ \underline{C}\right) = \underline{P_e} \tag{5.45}$$

  où $\underline{P_e}$ contient les n pôles désirés

- **NOTE**
  Le choix de la position des pôles $\underline{P_e}$ est basé sur les mêmes critères que ceux de la commande classique. Cependant, si l'observateur est utilisé pour fournir l'état estimé $\hat{x}$ à un régulateur, la règle de base est :

Pôles $\underline{P_e}$ de 2 à 10 fois plus à gauche dans plan s que pôles $\underline{P}$ du régulateur

- Par dualité (voir section 5.5), le design de l'observateur utilise les mêmes mathématiques et les mêmes outils numériques que le design du régulateur.

<u>Régulateur</u>	<u>Observateur</u>
(Équation (**5.23**))	(Équation (**5.45**))
$\text{eig}(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}) = \underline{P}$	$\text{eig}(\underline{A} - \underline{K_e}\,\underline{C}) = \underline{P_e}$

- Si on transpose la matrice d'état de l'observateur, on a :

$$\text{eig}\left(\underline{A}^T - \underline{C}^T \underline{K}_e^T\right) = \underline{P}_e$$

- Vu que la transposition ne change pas les valeurs propres, faire le design de l'observateur avec $A, C\ et\ K_e$ est comme faire le design d'un régulateur avec la correspondance :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A^T \\ B & \rightarrow & C^T \\ K & \rightarrow & K_e^T \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{régulateur} & & \text{observateur} \end{array}$$

- Le design de l'observateur est équivalent au design du régulateur pour le système dual (section 5.5) :

$$\begin{array}{cclcl} \underline{\dot{w}} & = & \underline{A}^T \underline{w} + \underline{C}^T \underline{v} & \rightarrow & \text{état en boucle ouverte} \\ \underline{z} & = & \underline{B}^T \underline{w} & \rightarrow & \text{sortie} \\ \underline{v} & = & -\underline{K}\,\underline{w} & \rightarrow & \text{rétroaction} \\ & \downarrow & & & \\ \underline{\dot{w}} & = & \left(\underline{A}^T - \underline{C}^T \underline{k}\right)\underline{w} & \rightarrow & \text{état en boucle fermée} \end{array}$$

- Sur MATLAB, le calcul de $\underline{K_e}$ de l'observateur devient :

$\boxed{K_e = \text{place}(A', C', P_e)'}$ Ne pas oublier les 3 transposées $(\,)'$.

5.8 COMBINAISON RÉGULATEUR-OBSERVATEUR

- Le schéma-bloc de la combinaison régulateur-observateur a été illustrée à la section précédente.
- La combinaison mathématique des équations est présentée ici.
- Système en boucle ouverte : $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u}$
  $\underline{y} = \underline{C}\ \underline{x}$
- Régulateur : $\underline{u} = -\underline{K}\ \underline{\hat{x}}$
- Observateur : $\underline{\dot{\hat{x}}} = \underline{A}\ \underline{\hat{x}} + \underline{B}\ \underline{u} + \underline{K_e}\ \left(\underline{y} - \underline{\hat{y}}\right)$
  $\underline{\hat{y}} = \underline{C}\ \underline{\hat{x}}$
- Combinaison avec l'erreur : $\underline{e} = \underline{x} - \underline{\hat{x}}$

D7. Démontrer que le système observé-asservi d'ordre $2n$ est :

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{B}\ \underline{K} & \underline{B}\ \underline{K} \\ \underline{0}_{n\times n} & \underline{A} - \underline{K_e}\ \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

- L'équation caractéristique du système est :

$$\det\begin{bmatrix} s\underline{1} - \left(\underline{A} - \underline{B}\ \underline{K}\right) & -\underline{B}\ \underline{K} \\ \underline{0}_{n\times n} & s\underline{1} - \left(\underline{A} - \underline{K_e}\ \underline{C}\right) \end{bmatrix} = \det\left[s\underline{1} - \left(\underline{A} - \underline{B}\ \underline{K}\right)\right] \det\left[s\underline{1} - \left(\underline{A} - \underline{K_e}\underline{C}\ \right)\right] = 0$$

valeurs propres du régulateur $\underline{P}$

valeurs propres de l'obervateur $\underline{P_e}$

- On y voit que les pôles du régulateur et de l'observateur sont maintenus en boucle fermée sans que un affecte l'autre. C'est le *principe de séparation*.
- **Principe de séparation**

  La conception (choix des pôles) du régulateur n'affecte pas la conception (choix des pôles) de l'observateur et vice-versa. On peut en faire la conception séparément sans problème.