Techniques de linéarisation (Version 2)

(*Jean de Lafontaine, mai 2014*)

Contexte

- La majorité des outils analytiques et numériques utilisés dans l'analyse de systèmes sont basés sur un modèle linéaire de la dynamique.
- Cependant, la majorité des systèmes dynamiques réels sont régis par des équations différentielles non linéaires.
- Pour bénéficier de tous ces outils dans la conception de systèmes non linéaires, la linéarisation permet d'obtenir une version linéaire du système, de faire la conception et/ou l'analyse dans le domaine linéaire et de valider par la suite les résultats sur le modèle non linéaire.
- Il en découle deux types de modèles : (1) un modèle linéarisé qui sert à la conception et à l'analyse du système, c'est le *modèle de design* et (2) le modèle original non linéaire qui sert à vérifier que le design rencontre les exigences, c'est le *modèle de validation.*
- La linéarisation permet donc d'obtenir le modèle de design qui nous permet, comme ingénieur(e), de mieux comprendre et analyser le comportement du système non linéaire, dans les limites de l'approximation.
- Par exemple, une des propriétés des systèmes linéaires est que la réponse du système à une multitude d'entrées différentes est égale à la somme des réponses du système soumis à chaque entrée individuellement.
- Ce concept de linéarité peut être exprimé mathématiquement par le principe de superposition:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) \tag{1}$$

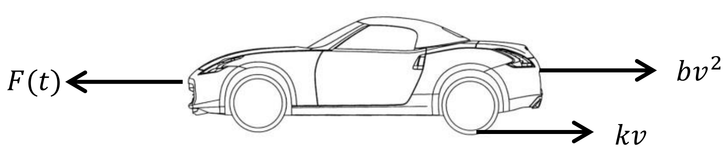
  où a_1, a_2 sont des constantes arbitraires non nulles.
- Dans cette relation, le côté gauche exprime la réponse de la fonction *f(x)* à une multitude d'entrées (deux entrées en fait, a_1x_1 et a_2x_2) et le côté droit exprime la somme des réponses individuelles.
- Une fonction *f(x)* est linéaire si elle satisfait ce principe de superposition.

Objectif de la linéarisation

- L'objectif de la linéarisation est de développer analytiquement une version linéaire des équations différentielles qui régissent la dynamique d'un système non linéaire dans le but de conception et/ou d'analyse.
- Par exemple, la conception d'asservissement pour systèmes dynamiques non linéaires et l'analyse de leur stabilité et performance sont toujours basées sur un modèle linéaire du système.

Démonstration par un exemple

- La linéarisation est démontrée ici avec un exemple concret d'une voiture de masse m qui se déplace sur une autoroute à une vitesse v et qui est soumise à la force de propulsion $F(t)$ du moteur, à la trainée aérodynamique de forme bv^2 et à la friction des pneus de la forme kv.



- En appliquant la 2e loi de Newton, on obtient le modèle non linéaire suivant :

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) - bv^2 - kv.$$

- Cette équation est non linéaire à cause du terme bv^2.

- Pour confirmer que ce terme est bien non linéaire, on applique la condition de superposition (1) à la fonction $f(v) = bv^2$. On obtient du côté gauche:

$$f(a_1v_1 + a_2v_2) = b(a_1v_1 + a_2v_2)^2$$

et du côté droit :

$$a_1f(v_1) + a_2f(v_2) = a_1bv_1^2 + a_2bv_2^2 = b(a_1v_1^2 + a_2v_2^2)$$

- On voit bien que les deux termes du côté droit de ces deux équations ne sont pas égaux :

$$b(a_1v_1 + a_2v_2)^2 \neq b(a_1v_1^2 + a_2v_2^2).$$

- Si on applique ce principe de superposition au terme kv, on peut vérifier que les deux termes sont égaux et que kv est linéaire :

$$\text{Côté gauche :} \quad f(a_1v_1 + a_2v_2) = k(a_1v_1 + a_2v_2)$$
$$\text{Côté droit :} \quad a_1f(v_1) + a_2f(v_2) = a_1kv_1 + a_2kv_2 = k(a_1v_1 + a_2v_2).$$

- On linéarise une équation différentielle en 5 étapes.

1. On obtient l'équation à l'équilibre

- La linéarisation se base sur une expansion des termes non linéaires en série de Taylor dont on ne retient que les termes linéaires (ordres 0 et 1). Une série de Taylor se développe autour d'un *point de linéarisation* ou *point d'opération*. Il y en a de plusieurs types. Celui souvent utilisé dans l'analyse de systèmes est le *point d'équilibre*.
- Le point d'équilibre est défini comme la valeur des variables d'état et d'entrée d'un système qui rendent le système dynamique en équilibre, c'est-à-dire, que toutes les variations d'état sont nulles.
- En reprenant le problème de la voiture, l'équation d'équilibre est obtenue en fixant la dérivée égale à zéro :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; F_e - bv_e^2 - kv_e = 0$$

d'où l'équation d'équilibre:

$$F_e = bv_e^2 + kv_e.$$

- Il est important d'utiliser l'indice $(\ )_e$ pour dénoter les variables (v) et les entrées (F) à l'équilibre puisque ces termes sont devenus des constantes évaluées au point d'équilibre. Ainsi, le terme bv_e^2 n'est pas un terme non linéaire. C'est une constante.
- Il est aussi important de noter que la condition à l'équilibre n'est pas nécessairement la condition initiale du système dans une simulation ($v(0) \neq v_e$ en général).
- L'équation d'équilibre donne les conditions sous lesquelles le système est en équilibre. Dans le cas présent, on voit que la force motrice à l'équilibre F_e doit vaincre les deux forces de friction bv_e^2 et kv_e pour maintenir la variable d'état – la vitesse v – à l'équilibre, c'est-à-dire, constante (puisque, par définition, $\frac{dv}{dt} = 0$).
- On peut ainsi trouver la vitesse constante v_e qui résulte d'une force motrice appliquée F_e ou, inversement, trouver la force motrice requise pour avoir une vitesse en régime permanent v_e donnée.
- Cette équation sera utilisée à l'étape 5.

2. On linéarise les termes non linéaires avec une série de Taylor

- La série de Taylor d'une fonction à une variable $f(x)$ autour d'un point x_e est donnée par (*rappel*):

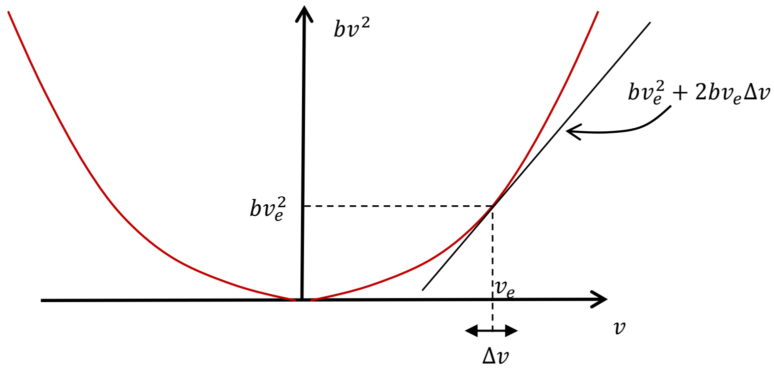
$$f(x) = f(x_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_e (x - x_e) + termes\ d'ordre \geq 2$$

- La dérivée de la fonction par rapport à la variable d'état est évaluée au point d'équilibre et devient donc une constante. On linéarise le terme non linéaire de la même façon :

$$bv^2 \approx bv_e^2 + 2bv_e(v - v_e) = bv_e^2 + 2bv_e\Delta v$$

où on a fait le changement de variable de v à $\Delta v = v - v_e$.

- La linéarisation change ainsi la variable d'état v, dont la référence est zéro, à une nouvelle variable d'état Δv, dont la référence est la vitesse à l'équilibre v_e. Schématiquement, on fait une approximation (de Taylor) de la trainée aérodynamique par une droite tangente à v_e avec une pente égale à $2bv_e$, la dérivée de bv^2 à ce point :



- Évidemment, on voit que cette approximation n'est valide que pour de petits déplacements Δv autour de l'équilibre, comme le démontre clairement la figure ci-dessus (sinon, $bv_e^2 + 2bv_e\Delta v$ pourrait devenir négatif).
- Dans la plupart des livres qui traitent des asservissements linéaires, la différence entre les variables en variation, comme Δv, et les variables du système non linéaire original, comme v, n'est pas toujours clairement définie. Cela est parfois dû au fait que l'état à l'équilibre est supposé nul (i.e. $v_e = 0$), auquel cas, $\Delta v = v$, ou parfois par simplicité de notation (on veut éviter de l'encombrer avec les Δ).
- Il faut toujours se rappeler que la version linéaire d'un système non linéaire est toujours exprimée en termes de variations autour d'un point de linéarisation, même si le symbole Δ n'est pas toujours présent.

3. On remplace dans l'équation originale

- Une fois tous les termes non linéaires ainsi linéarisé par série de Taylor, on les remet dans l'équation originale :

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) - bv_e^2 - 2bv_e\Delta v - kv$$

4. On fait un changement de variables en termes de variations autour de l'équilibre

- On remarque que l'équation ci-dessus contient deux types de variables d'état: l'originale v et la nouvelle autour de l'équilibre, Δv. Pour exprimer l'équation avec le même type de variables, on fait un changement de variable qui est en fait une translation de l'origine au point d'équilibre :

$$\Delta v = (v - v_e) \quad \Rightarrow \quad v = v_e + \Delta v$$

- On fait de même pour la variable d'entrée, la force motrice dans ce cas-ci :

$$F = F_e + \Delta F$$

où ΔF donne les variations de la force motrice autour de sa valeur d'équilibre F_e.

- La nouvelle équation devient :

$$m\frac{d\Delta v}{dt} = F_e + \Delta F - bv_e^2 - 2bv_e\Delta v - kv_e - k\Delta v$$

où on a utilisé le fait que v_e est une constante et donc $\frac{dv_e}{dt} = 0$.

5. **On soustrait (annule) l'équation d'équilibre**

- Cette équation est linéaire en termes de variations de la variable d'état Δv et de la variable d'entrée ΔF mais elle contient des termes constants. Ces termes correspondent en fait à l'équation d'équilibre de l'étape 1 :

$$F_e - bv_e^2 - kv_e = 0$$

et sont donc nuls. On soustrait donc (ou annule) l'équation d'équilibre pour obtenir le résultat final :

$$m\frac{d\Delta v}{dt} = \Delta F - 2bv_e\Delta v - k\Delta v$$

- On peut combiner les deux termes en Δv :

$$m\frac{d\Delta v}{dt} = \Delta F - (2bv_e + k)\Delta v$$

- Le terme entre parenthèses devient le coefficient *équivalent* de friction du véhicule :

$$k_{eq} = (2bv_e + k)$$

- L'équation dynamique linéaire peut maintenant s'écrire :

$$\boxed{m\frac{d\Delta v}{dt} = \Delta F - k_{eq}\Delta v.}$$

Analyse du système linéarisé

- Dans le domaine Laplace, l'équation ci-dessus devient :

$$(ms + k_{eq})\Delta V(s) = \Delta F(s)$$

avec fonction de transfert :

$$\frac{\Delta V(s)}{\Delta F(s)} = \frac{1/m}{(s + k_{eq}/m)}.$$

- Dans le cas où une variation échelon de la force motrice est appliquée à $t = 0$: $\Delta F(s) = \Delta F_0/s$ où ΔF_0 est une constante, la variation de vitesse peut être obtenue avec la transformée inverse de Laplace :

$$\Delta v(t) = \frac{\Delta F_0}{k_{eq}}\left(1 - e^{-\left(\frac{k_{eq}}{m}\right)t}\right)$$

- On voit donc que le système dynamique va atteindre son nouvel état d'équilibre exponentiellement avec une constante de temps de m/k_{eq}.
- Il est important de noter que la dynamique linéarisée d'un système non linéaire dépend toujours du point de linéarisation (le point d'équilibre ici). En effet, la constante de temps du système dynamique ci-dessus, m/k_{eq}, dépend de v_e à travers la définition du coefficient équivalent de friction k_{eq}.

- Si on change le point de linéarisation, on change la dynamique du système linéarisé. C'est une des caractéristiques des systèmes non linéaires : leur dynamique dépend de la valeur de la variable d'état. Un système linéaire a toujours la même dynamique, peu importe la plage de valeur de ses variables d'état.

- En supposant que la vitesse initiale de la voiture était sa vitesse à l'équilibre v_e, i.e. $\Delta v(0) = 0$ (ce qui n'est pas le cas en général), la vitesse v_e' au nouvel équilibre causée par l'augmentation de la propulsion ΔF_0 devient :

$$v_e' = v_e + \Delta v(t \to \infty) = v_e + \frac{\Delta F_0}{k_{eq}}.$$

- Ce résultat n'est qu'une approximation linéaire de ce que serait la vraie nouvelle vitesse à l'équilibre v_e'. En effet, la vraie vitesse à l'équilibre est donnée par la solution de l'équation d'équilibre au nouveau point d'équilibre causé par ΔF_0 :

$$(F_e + \Delta F_0) - b v_e^{2\prime} - k v_e' = 0$$

- On peut démontrer que si ΔF_0 tend vers zéro, les deux équations ci-dessus pour v_e' tendent vers la même valeur de v_e', en accord avec le théorème de Taylor.
- Cela démontre que le modèle linéarisé n'est qu'une approximation et que si le système acquiert un nouvel équilibre v_e', une nouvelle friction équivalente k'_{eq} s'applique et la dynamique du système (sa constante de temps par exemple) a changé. Certains systèmes requièrent une nouvelle linéarisation au nouveau point d'équilibre. On parle alors d'une linéarisation autour d'une *trajectoire* plutôt qu'autour d'un point d'équilibre.

Exemple à 2 variables avec non linéarité de l'entrée

- Voici un exemple plus compliqué où x est la sortie et u l'entrée :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\sin x + kx^3 = x^2 u \qquad => \quad \ddot{x} + \dot{x}\sin x + kx^3 = x^2 u \ .$$

1. **On obtient l'équation à l'équilibre**

$$0 + \sin x_e \, 0 + k x_e^3 = x_e^2 u_e.$$

$$k x_e^3 = x_e^2 u_e.$$

2. **On linéarise les termes non linéaires avec une série de Taylor**

$$\dot{x}\sin x \approx \dot{x}_e \sin x_e + \dot{x}_e \cos x_e \, \Delta x + \sin x_e \, \Delta \dot{x}$$

- Ici, il faut considérer la variable d'état $\dot{x}$ comme une variable indépendant de x. C'est donc une série de Taylor à deux variables.
- Vu que $\dot{x}_e = 0$ par définition de l'équilibre (toutes les dérivées sont égales à zéro), on obtient :

$$\dot{x}\sin x \approx \sin x_e \, \Delta \dot{x}$$

- Prochain terme :

$$kx^3 \approx k x_e^3 + 3k x_e^2 \Delta x.$$

- Dernier terme :

$$x^2 u \approx x_e^2 u_e + 2 x_e u_e \Delta x + x_e^2 \Delta u$$

3. **On remplace dans l'équation originale**

$$\ddot{x} + \sin x_e \, \Delta\dot{x} + kx_e^3 + 3kx_e^2\Delta x = x_e^2 u_e + 2x_e u_e \Delta x + x_e^2 \Delta u$$

4. **On fait un changement de variables en termes de variations autour de l'équilibre**

$$\Delta\,\ddot{x} + \sin x_e \, \Delta\dot{x} + kx_e^3 + 3kx_e^2\Delta x = x_e^2 u_e + 2x_e u_e \Delta x + x_e^2 \Delta u$$

5. **On soustrait (annule) l'équation d'équilibre**

$$\Delta\,\ddot{x} + \sin x_e \, \Delta\dot{x} + 3kx_e^2\Delta x = 2x_e u_e \Delta x + x_e^2 \Delta u$$

- On réarrange :
-

$$\boxed{\Delta\,\ddot{x} + \sin x_e \, \Delta\dot{x} + (3kx_e^2 - 2x_e u_e)\Delta x = x_e^2 \Delta u}$$

- Cette équation est maintenant linéaire.

Version plus générale

- La technique de linéarisation est maintenant étendue au cas plus général d'une équation différentielle non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x,u)$$

  où f est une fonction non linéaire des n variables d'état x et des p entrées u. La fonction f est donc une matrice colonne de dimension *n x 1* et chaque rangée *j* contient l'équation différentielle f_j pour la variable x_j.
- Les 5 étapes de la linéarisation sont appliquées à cette équation différentielle.

1. Équation d'équilibre

- On met les dérivées égales à zéro pour obtenir l'équation d'équilibre:

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_e,u_e) = 0.$$

- Cette équation étant non linéaire, il faut parfois avoir recours à des techniques numériques itératives (Chapitre 5 de Methodes_numeriques_Notes_JdeL_ETE2013_ver5) pour trouver la solution des variables d'états x_e et des entrées u_e à l'équilibre.

2. Linéarisation par série de Taylor

- On fait l'approximation de la fonction non linéaire avec une série de Taylor à plusieurs variables :

$$f(x,u) = f(x_e,u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_e (x - x_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_e (u - u_e) + termes\ d'ordre \geq 2$$

- La notation $\frac{\partial f}{\partial x^T}$ fait référence au fait que l'on dérive la matrice-colonne f de dimension *n x 1* par la matrice-rangée x^T de dimension *1 x n* où la notation $(\ )^T$ indique la transposée. Le résultat est donc une matrice *n x n* :

$$\frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

- Cette matrice est appelée le *Jacobien* (ou la matrice *jacobienne*) de f.
- Similairement, la matrice *n x p* de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u^T}$ peut être obtenue pour les *p* entrées:

$$\frac{\partial f}{\partial u^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}.$$

3. Remplacement dans l'équation originale

- On remplace la série de Taylor dans l'équation originale :

$$\dot{x} = f(x_e,u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_e \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_e \Delta u$$

où on a utilisé les définitions habituelles:

$$\Delta x = (x - x_e)$$
$$\Delta u = (u - u_e)$$

4. Changement de variable

- On fait le changement de variable de x à Δx en notant que x_e est une constante :

$$\dot{\Delta x} = f(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_e \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_e \Delta u$$

5. Soustraction (ou annulation) de l'équation d'équilibre

- L'équation d'équilibre de l'étape 1 étant $f(x_e, u_e) = 0$, ce terme est annulé de l'équation ci-dessus pour donner:

$$\dot{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_e \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_e \Delta u$$

- La notation suivante est souvent utilisée dans l'analyse de systèmes linéaires:

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u$$

où :

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_e \qquad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_e$$

Version rapide

- Quand la détermination et la solution de l'équation d'équilibre n'est pas requise dans un problème, les équations ci-dessus peuvent être directement utilisées pour arriver rapidement à la version linéaire des équations.
- Ainsi, en reprenant le problème de la voiture sur l'autoroute, on peut rapidement obtenir le modèle linéaire.

- Avec $x \equiv v$ et $u \equiv F$, le système dynamique non linéaire de la voiture est de la forme :

$$\dot{v} = f(v, F)$$

  avec

$$f(v, F) = \frac{F}{m} - \left(\frac{b}{m}\right) v^2 - \left(\frac{k}{m}\right) v.$$

- Le système dynamique linéaire devient:

$$\dot{\Delta v} = A\Delta v + B\Delta F$$

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_e = -2\left(\frac{b}{m}\right) v_e - \left(\frac{k}{m}\right) \qquad\qquad B = \left(\frac{\partial f}{\partial F}\right)_e = \frac{1}{m}.$$

- Le résultat final est donc le même que celui au bas de la page 3 mais en plus rapide :

$$\frac{d\Delta v}{dt} = \left[-2\left(\frac{b}{m}\right) v_e - \left(\frac{k}{m}\right)\right] \Delta v + \left[\frac{1}{m}\right] \Delta F.$$

Comparaison : version en 5 étapes et version rapide

- Les deux méthodes – celle en 5 étapes et la version rapide ci-dessus – sont essentiellement les mêmes.
- La méthode longue en 5 étapes passe par la série de Taylor qui introduit le terme d'ordre zéro $f(x_e, u_e)$ qu'il faut par la suite annuler à l'étape 5 via l'équation d'équilibre.
- La méthode rapide évite ce terme en prenant directement le terme d'ordre 1 de la série de Taylor (les dérivées partielles) sans invoquer le terme d'ordre zéro.
- Bien qu'elle soit plus longue à appliquer, la méthode en 5 étapes fait le lien mathématique avec la série de Taylor bien connue et permet ainsi de comprendre pourquoi la version linéarisée d'un système devient inexacte à mesure que l'on s'éloigne du point de linéarisation.
- La méthode longue permet aussi d'extraire l'équation d'équilibre (le terme d'ordre zéro de la série de Taylor) qui définit les conditions autour desquelles le système a été linéarisé.
- Ces conditions d'équilibre sont souvent nécessaires pour permettre d'asservir un système dynamique à son équilibre dans le design d'un asservissement.
- Dans le cas d'un aéronef, par exemple, placer l'avion dans ces conditions d'équilibre s'appelle le *trim* et de fait, la fonction MATLAB qui permet de calculer les conditions d'équilibre (dans le cas où la solution de $f(x_e, u_e) = 0$ n'est pas possible analytiquement) est justement appelée ***trim***. La fonction MATLAB qui permet de calculer les matrices *A* et *B* du système linéaire à ce point de *trim* est ***linmod***.