GEI-720
MODÉLISATION ET COMMANDE MULTIVARIABLES

Jean de Lafontaine

CHAPITRE 2 – PARTIE 1
Modélisation de systèmes multivariables

2 MODÉLISATION DE SYSTÈMES MULTIVARIABLES

2.1 NOTATION

$\overrightarrow{(\ )}$: vecteur

$\overrightarrow{\overrightarrow{(\ )}}$: dyade

$\overrightarrow{\overrightarrow{1}}$: dyade unitaire

$|\vec{\ }|$: module d'un vecteur
$\cdot$: produit scalaire
$\times$: produit vectoriel

$\underline{(\ )}$: matrice 3 x 1 des composantes d'un vecteur ; matrice en général
$\underline{(\ )}^{\times}$: matrice 3 x 3 correspondant au produit vectoriel
$\underline{(\ )}^{T}$: transposée d'une matrice
$\underline{(\ )}^{-1}$: inverse d'une matrice
$\underline{1}$: matrice identité
$\underline{0}$: matrice nulle

$\mathfrak{F}_a$: repère avec vecteurs unitaires $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$
$\vec{\mathfrak{F}}_a$: vectrice de vecteurs unitaires $\vec{\mathfrak{F}}_a = \left[\ \vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z\right]^T$

$\vec{v}$: vecteur quelconque
v : module de $\vec{v}$
$\underline{v}^a$: composantes de $\vec{v}$ dans $\mathfrak{F}_a$

$\vec{u}\vec{v}$: dyade quelconque
$\underline{u}^a\underline{v}^{aT}$: composantes de la dyade $\vec{u}\vec{v}$ dans $\mathfrak{F}_a$

$\underline{C}_{ba}$: matrice de rotation de $\mathfrak{F}_a$ vers $\mathfrak{F}_b$
s, c : version abrégée de sin et de cos respectivement

2.2 VECTEURS, VECTRICES ET COMPOSANTES

Cette section présente les concepts de base sur les référentiels, les vecteurs, les composantes de vecteurs et les vectrices qui les relient.

2.2.1 Systèmes de référence

- Le développement des équations dynamiques d'un système aérospatial complexe requiert l'utilisation de plusieurs « référentiels », par exemple :
  - Aéronef : référentiels fixés à la Terre (G), au corps de l'avion (B), à la direction du vent (W)
  - Satellite : référentiels inertiel (I), terrestre (T), orbital (O), corps satellite (B), soleil (S)
- Le développement de ces équations par la méthode Euler-Newton exige l'expression des lois dynamiques sous forme vectorielle en premier, et ensuite leur expression sous forme de composantes dans le ou les référentiels choisis.
- Les « vectrices » sont des outils mathématiques qui permettent facilement la traduction des concepts mathématiques exprimés sous forme **VEC**torielle en des valeurs numériques exprimés sous forme de ma**TRICE** de composantes le long des axes de référentiels.

NOTE IMPORTANTE :

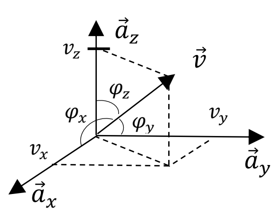
⇨ Le terme vecteur est utilisé ici dans son sens mathématique pur i.e. le vecteur est un concept mathématique caractérisé par une grandeur et une direction dans l'espace.

⇨ La grandeur et la direction ne dépendent pas de la position ou de l'orientation de l'observateur.

⇨ Un vecteur peut être représenté sous forme de composantes, une fois un référentiel choisi. Ces composantes sont exprimées mathématiquement sous forme de matrices-colonnes (3×1) ou de matrices-rangées (1×3). Par convention, on utilise ici toujours des matrices-colonnes (3×1).

⇨ Dans MATLAB, on y insère des composantes de vecteurs, jamais des vecteurs

- Référentiel (ou système de référence, ou trièdre, ou système d'axes)
  - défini par 3 vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{a}_x,\ \vec{a}_y,\ \vec{a}_z$
  - système dextral orthonormal
  - dénoté par $\mathfrak{F}_a$
  - $(\mathfrak{F} =$ "frame"$, a =$ nom des vecteurs unitaires associés)



2.2.2 Vecteurs, dyades, composantes, matrices et vectrices

- Un vecteur $\vec{v}$ quelconque est défini par une grandeur v et une direction indépendantes de l'observateur.

- Les <u>composantes</u> de $\vec{v}$ dans $\mathfrak{F}_a$ sont les scalaires v_x, v_y, v_z

    - $\vec{v} = v_x\vec{a}_x + v_y\vec{a}_y + v_z\vec{a}_z$

    - $v_x\vec{a}_x,\ v_y\vec{a}_y$ et $v_z\vec{a}_z$ sont les composantes <u>vectorielles</u> de $\vec{v}$

    - $v_x,\ v_y,\ v_z$ sont ses composantes <u>scalaires</u> (1×1)

- La grandeur (le module) de $\vec{v} = |\vec{v}| = v = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{½}$

- Les composantes sous forme de <u>cosinus directeurs</u> sont:

    - $\vec{v} = v\left(c_x\vec{a}_x + c_y\vec{a}_y + c_z\vec{a}_z\right)$

- $c_i =$ cosinus directeurs $= \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}_i}{v} = \cos\varphi_i\,,\ i = x, y, z$ où φ_i est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}_i$ (voir dessin ci-haut)

- Matrice-colonne des composantes : $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$

- Matrice-colonne des vecteurs unitaires : $\vec{\mathfrak{F}}_a = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$ appelée **<u>VECTRICE</u>**

- Par conséquent :

$$\boxed{\vec{v} \;=\; \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{v} \;=\; \underline{v}^T\,\vec{\mathfrak{F}}_a} \tag{2.1}$$

vectrice
(1 × 1)

produit
matriciel
normal

- Inversement :

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}\cdot\vec{a}_x \\ \vec{v}\cdot\vec{a}_y \\ \vec{v}\cdot\vec{a}_z \end{bmatrix} = \vec{v}\cdot\begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \vec{v}\cdot\vec{\mathfrak{F}}_a$$

produit scalaire à chaque élément

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v} &= \vec{v}\cdot\vec{\mathfrak{F}}_a = \vec{\mathfrak{F}}_a\cdot\vec{v} \\ \underline{v}^T &= \vec{v}\cdot\vec{\mathfrak{F}}_a^T = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\cdot\vec{v} \end{aligned}} \tag{2.2}$$

produit scalaire

- L'équation (**2.1**) transforme des composantes en un vecteur. L'équation (**2.2**) fait l'inverse.

- Deux propriétés importantes des vectrices, le produit scalaire et le produit vectoriel :

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \cdot [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z] = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y & \vec{a}_x \cdot \vec{a}_z \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_x & \dots & \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{1}$$

Matrice identité $\underline{1}$

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \times [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z] = \begin{bmatrix} \vec{a}_x \times \vec{a}_x & \vec{a}_x \times \vec{a}_y & \vec{a}_x \times \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \times \vec{a}_x & \vec{a}_y \times \vec{a}_y & \vec{a}_y \times \vec{a}_z \\ \vec{a}_z \times \vec{a}_x & \vec{a}_z \times \vec{a}_y & \vec{a}_z \times \vec{a}_z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{a}_z & -\vec{a}_y \\ -\vec{a}_z & \vec{0} & \vec{a}_x \\ \vec{a}_y & -\vec{a}_x & \vec{0} \end{bmatrix} = -\vec{\mathfrak{F}}_a^{\times}$$

- La notation $(\ )^{\times}$sera présentée plus loin.

- On passe du vecteur en (**2.1**) aux composantes en (**2.2**) avec la première propriété dans (**2.3**) :

$\vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{v}$ On multiplie avec $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot$ par la gauche

$\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{v} = \underline{1}\,\underline{v} = \underline{v}$

$\vec{v} = \underline{v}^T \vec{\mathfrak{F}}_a$ On multiplie avec $\cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T$ par la droite

$\vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \underline{v}^T \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \underline{v}^T \underline{1} = \underline{v}^T$

- Ainsi, en multipliant un vecteur par la vectrice d'un repère, par la gauche ou par la droite selon les dimensions désirées (3x1 ou 1x3), on obtient les composantes scalaires de ce vecteur dans ce repère.
- Voici des exemples d'utilisation des propriétés (**2.3**) : supposons deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont exprimés dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$) :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\underline{u}^T \vec{\mathfrak{F}}_a\right) \cdot \left(\vec{\mathfrak{F}}_a^T \vec{v}\right) = \underline{u}^T\left(\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T\right)\underline{v} = \underline{u}^T \underline{1}\,\underline{v} = \underline{u}^T \underline{v}$ (noter le choix des versions utilisées)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\underline{u}^T \vec{\mathfrak{F}}_a\right) \times \left(\vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{v}\right) = \underline{u}^T\left(\vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T\right)\underline{v} = \underline{u}^T \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{a}_z & -\vec{a}_y \\ -\vec{a}_z & \vec{0} & \vec{a}_x \\ \vec{a}_y & -\vec{a}_x & \vec{0} \end{bmatrix} \underline{v} =$$

$$= [u_x \quad u_y \quad u_z] \begin{bmatrix} \vec{a}_z v_y - \vec{a}_y \vec{v}_z \\ \vec{a}_x v_z - \vec{a}_z v_x \\ \vec{a}_y v_x - \vec{a}_x v_y \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{u}^{\times} \underline{v}$$

- On a défini ici l'opérateur $(\ )^{\times}$:

$$\underline{u}^{\times} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

- Cet opérateur est l'équivalent du produit vectoriel exprimé en composantes de vecteurs dans un repère donné. Alors que le produit vectoriel est indépendant de tout repère, l'équivalent en composantes doit s'opérer sur des composantes exprimées dans le même repère.

- Le développement ci-dessus démontre l'identité suivante qui sera utile plus tard :

$$\underline{u}^T\left(\vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T\right) = \underline{u}^T\left(-\vec{\mathfrak{F}}_a^{\ \times}\right) = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{u}^{\times} \tag{2.5}$$

- Donc, les résultats ci-dessus donnent :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \underline{u}^T\underline{v} = \underline{v}^T\underline{u} \\ \vec{u}\times\vec{v} &= \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{u}^{\times}\underline{v} \end{aligned}} \tag{2.6}$$

- Voici quelques exemples (on suppose des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ avec composantes $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$)

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \underline{u}^T\,\underline{v}^{\times}\,\underline{w} \\
&\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\;\underline{u}^{\times}\,\underline{v}^{\times}\,\underline{w} \\
&(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\left(\underline{u}^{\times}\underline{v}\right)^{\times}\,\underline{w} \\
&\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \underline{u}^{\times}\underline{u} = \underline{0} \\
&\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u} \;\Rightarrow\; \underline{u}^{\times}\underline{v} = -\underline{v}^{\times}\underline{u}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

- IMPORTANT : Ne jamais égaler un scalaire à un vecteur

Par exemple :	$\vec{u}\times\vec{v} \neq \underline{u}^{\times}\underline{v}$	(côté gauche = vecteur, côté droit = matrice-colonne)
Cependant :	$\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = \underline{u}^T\underline{v}^{\times}\underline{w}$	(les deux côtés sont des scalaires)

- Certaines propriétés des produits vectoriels peuvent s'exprimer sous forme de **<u>dyades</u>**, par exemple :

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} = \left(\vec{v}\,\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v}\,\vec{\vec{1}}\right)\cdot\vec{w}$$

dyade

- $\vec{\vec{1}}$ et $\vec{v}\,\vec{u}$ sont des dyades ou « double vecteurs » ou « deux vecteurs juxtaposés ».
- Ce sont les équivalents vectoriels des matrices 3 x 3 de scalaires :

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \Rightarrow \left(\underline{u}^T\underline{w}\right)\underline{v} - \left(\underline{u}^T\underline{v}\right)\underline{w} = \underline{v}\left(\underline{u}^T\underline{w}\right) - \left(\underline{u}^T\underline{v}\right)\underline{w} = \left(\underline{v}\,\underline{u}^T - \underline{u}^T\underline{v}\,\underline{1}\right)\underline{w}$$

matrices (3 × 3)

  - La dyade unitaire $\vec{\vec{1}}$ correspond à la matrice identité $\underline{1}$.
  - La dyade $\vec{v}\,\vec{u}$ correspond à la matrice $\underline{v}\,\underline{u}^T$.
  - $\underline{u}^T\underline{v} = \underline{v}^T\underline{u}$ correspond au produit scalaire (« inner product » en anglais)
  - $\underline{v}\,\underline{u}^T$ correspond au produit dyadique (« outer product » en anglais)

- Une dyade $\vec{\vec{D}}$ est la juxtaposition de deux vecteurs, i.e. deux vecteurs côte-à-côte :

- $\vec{u} \cdot \vec{\vec{D}}$ donne un vecteur ($\vec{u} \cdot$ celui de gauche donne un scalaire, reste celui de droite)
- $\vec{\vec{D}} \cdot \vec{v}$ donne un vecteur (celui de droite $\cdot\, \vec{v}$ donne un scalaire, reste celui de gauche)
- $\vec{u} \cdot \vec{\vec{D}} \cdot \vec{v} = \underline{u}^T \underline{D}\, \underline{v} = \underline{v}^T \underline{D}^T\, \underline{u}$ donne un scalaire
- Dyade $\vec{\vec{D}}$ en termes de composantes d_{ij} dans $\mathfrak{F}_a$: $\vec{\vec{D}} = \sum_i \sum_j d_{ij}\, \vec{a}_i\, \vec{a}_j$ ou, avec les vectrices :

$$\boxed{\underset{(1\times 3)\,(3\times 3)\,(3\times 1)}{\vec{\vec{D}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \underline{D}\, \vec{\mathfrak{F}}_a}} \qquad \text{où } \underline{D} = \{d_{ij}\}_{3\times 3} \tag{2.8)a}$$

- Inversement, on multiplie (**2.8**)a par $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot (\ ) \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T$ pour mettre en composantes :

$$\boxed{\underline{D} = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\vec{D}} \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T} \tag{2.8)b}$$

- Pour la dyade unitaire : $d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\vec{\vec{1}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \underline{1}\, \vec{\mathfrak{F}}_a = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \vec{\mathfrak{F}}_a = \vec{a}_x\vec{a}_x + \vec{a}_y\vec{a}_y + \vec{a}_z\vec{a}_z \tag{2.9}$$

- <u>Rappel</u> : $\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \underline{1} \\ \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \vec{\mathfrak{F}}_a = \vec{\vec{1}} \end{array}}$ $\begin{array}{l} \rightarrow \text{Eq. } (\mathbf{2.3}) \\ \rightarrow \text{Eq. } (\mathbf{2.9}) \end{array}$

* Il y a donc 3 types de produits entre vecteurs et vectrices :
  - produit scalaire : $\cdot$
  - produit vectoriel : $\times$
  - produit dyadique : (rien)

* Quel est la valeur et l'utilité des produits suivants?

$$\begin{array}{lll} \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T & \qquad \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T & \qquad \vec{\mathfrak{F}}_a\, \vec{\mathfrak{F}}_a^T \\ \vec{\mathfrak{F}}_a^T \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a & \qquad \vec{\mathfrak{F}}_a^T \times \vec{\mathfrak{F}}_a & \qquad \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \vec{\mathfrak{F}}_a \end{array}$$

* Indépendamment du type de produit, les règles de multiplication matricielle quant aux dimensions des matrices s'appliquent toujours : les dimensions internes doivent être identiques (k x m)*(m x n) => k x n. Pour un produit quelconque dénoté par $*$ (où * est un des trois types de produits ci-dessus), on doit avoir les dimensions suivantes :

$\vec{\mathfrak{F}}_a * \vec{\mathfrak{F}}_a^T$ donne une matrice (3 x 1) *(1 x 3) = 3 x 3 (« outer product »)
$\vec{\mathfrak{F}}_a^T * \vec{\mathfrak{F}}_a$ donne une matrice (1 x 3) *(3 x 1) = 1 x 1 (« inner product »)

* La <u>seule exception</u> à cette règle des dimensions est la multiplication d'un vecteur par une vectrice. Dans ce cas, le vecteur multiplie tous les éléments de la vectrice :

$$\vec{v} * \vec{\vec{\mathfrak{F}}}_a^{\,T} = [\vec{v} * \vec{a}_x \quad \vec{v} * \vec{a}_y \quad \vec{v} * \vec{a}_z]$$

- Ceci est équivalent à un scalaire qui multiplie une matrice : $k[a_x \quad a_y \quad a_z] = [ka_x \quad ka_y \quad ka_z]$.

- Par analogie, un vecteur est une vectrice de dimension 1x1 tout comme un scalaire est une matrice de dimension 1x1. Ainsi, la multiplication d'une matrice/vectrice 1x1 par une matrice/vectrice de dimensions quelconques implique la multiplication de tous les éléments de la matrice/vectrice. Dans ces cas, on a (1x1)*(m x n) => (m x n) et la règle des dimensions internes ne s'applique pas.

Exercices A-1 à A-5 : Dyades, vectrices, vecteurs et composantes

Le tenseur d'inertie d'un corps rigide est exprimée sous la forme d'une dyade :

$$\vec{\vec{J}} = \int_{\mathcal{B}} \left(r^2 \vec{\vec{1}} - \vec{r}\,\vec{r} \right) dm \qquad \textbf{(A-1)}$$

dm = élément de masse

$\vec{r}$ = position de dm dans $\mathcal{B}$

A1. Pour une masse m concentrée à la position $\vec{r} = r_x\,\vec{a}_x + r_y\,\vec{a}_y + r_z\,\vec{a}_z$ dans $\mathfrak{F}_a$, démontrer que :

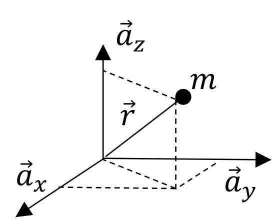
$$\begin{aligned}\vec{\vec{J}} = \{ & r_x^2(\vec{a}_y\vec{a}_y + \vec{a}_z\vec{a}_z) + r_y^2(\vec{a}_x\vec{a}_x + \vec{a}_z\vec{a}_z) + r_z^2(\vec{a}_x\vec{a}_x + \vec{a}_y\vec{a}_y) + \\ & -[r_x r_y(\vec{a}_x\vec{a}_y + \vec{a}_y\vec{a}_x) + r_x r_z(\vec{a}_x\vec{a}_z + \vec{a}_z\vec{a}_x) + r_y r_z(\vec{a}_y\vec{a}_z + \vec{a}_z\vec{a}_y)]\}\ \mathrm{m}\end{aligned} \qquad \textbf{(A-2)}$$

A2. En prenant les produit $\vec{\vec{\mathfrak{F}}}_a \cdot$ et $\cdot\, \vec{\vec{\mathfrak{F}}}_a^T$ appropriés sur (A-1), démontrer que les composantes de $\vec{\vec{J}}$ dans $\mathfrak{F}_a$ sont :

$$\underline{J} = \left(r^2\underline{1} - \underline{r}\,\underline{r}^T\right)m = \left(r^T\underline{r}\,\underline{1} - \underline{r}\,\underline{r}^T\right)m \qquad \textbf{(A-3)}$$

A3. À partir de l'équation **(A-3)**, trouver l'expression complète de la matrice (3×3) $\underline{J}$ en fonction de $r_x,\ r_y,\ r_z$.

A4. Démontrer le résultat à la question **A3**, cette fois en partant de l'équation **(A-2)** et en prenant les produits appropriés.



A5. Donner $\underline{J}$ dans le cas où $r_x = 0$ et aussi dans le cas où $r_x = r_y = 0$.

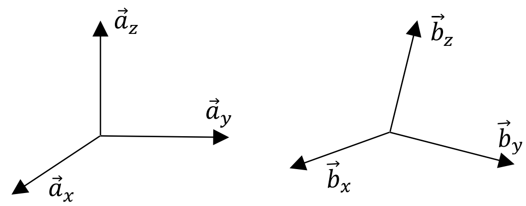
Cet exercice démontre que l'on peut faire l'expansion complète d'une équation sous forme composantes par 2 chemins différents :

- A1 => A4 : Expansion de $\vec{\vec{J}}$ sous forme vectorielle et transformation sous forme de composantes
- A2 => A3 : Transformation de $\vec{\vec{J}}$ sous forme de composantes et expansion sous forme composantes

- Soit deux systèmes de références $\vec{\mathfrak{F}}_a$ et $\vec{\mathfrak{F}}_b$ chacun avec leurs vecteurs unitaires $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ et $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$

  - On exprime $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$ en termes de $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$

    $\vec{b}_x = c_{xx}\vec{a}_x + c_{xy}\vec{a}_y + c_{xz}\vec{a}_z$
    $\vec{b}_y = c_{yx}\vec{a}_x + c_{yy}\vec{a}_y + c_{yz}\vec{a}_z$
    $\vec{b}_z = c_{zx}\vec{a}_x + c_{zy}\vec{a}_y + c_{zz}\vec{a}_z$



    où les c_{ij} sont les composantes des vecteurs unitaires $\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z$ dans la base $\vec{\mathfrak{F}}_a$.

  - Il peut être observé que $c_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = |\vec{b}_i||\vec{a}_j| \cos\varphi_{ij} = \cos\varphi_{ij}$ où φ_{ij} est l'angle entre les deux vecteurs. Les coefficients c_{ij} sont donc le cosinus des angles entre les vecteurs unitaires.
  - On définit la matrice des cosinus directeurs $\underline{C}_{ba} = \{c_{ij}\}$ et on introduit les vectrices $\vec{\mathfrak{F}}_a$ et $\vec{\mathfrak{F}}_b$. Les 3 équations ci-dessus peuvent donc être écrites sous forme matricielle ainsi :

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} = \underline{C}_{ba} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathfrak{F}}_b = \underline{C}_{ba}\,\vec{\mathfrak{F}}_a} \qquad (2.10)$$

  - Si on multiplie (**2.10**) par $\cdot\,\vec{\mathfrak{F}}_a^T$ par la droite, on obtient une expression pour la matrice $\underline{C}_{ba}$:

$$\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^r = \underline{C}_{ba}\,\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \underline{C}_{ba}\,\underline{1} = \underline{C}_{ba}$$

  - Ainsi la matrice de coefficients qui relie les deux systèmes de référence est un produit vectriciel :

$$\underline{C}_{ba} = \vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \\ \vec{b}_y \\ \vec{b}_z \end{bmatrix} \cdot [\vec{a}_x \quad \vec{a}_y \quad \vec{a}_z] = \begin{bmatrix} \vec{b}_x \cdot \vec{a}_x & \vec{b}_x \cdot \vec{a}_y & \vec{b}_x \cdot \vec{a}_z \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{b}_z \cdot \vec{a}_x & \dots & \vec{b}_z \cdot \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

  - En généralisant :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{C}_{ba} &= \vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \underline{C}_{ab}^T \\ \underline{C}_{ab} &= \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T = \underline{C}_{ba}^T \end{aligned}} \qquad (2.11)$$

    où $\underline{C}_{ba}$est la *matrice de rotation* du référentiel $\vec{\mathfrak{F}}_a$ au référentiel $\vec{\mathfrak{F}}_b$ (noter que la rotation part du référentiel de l'indice de droite dans $\underline{C}_{ba}$ vers le référentiel de l'indice de gauche).

2.3 MATRICE DE ROTATION

- Les matrices de rotation sont orthonormales i.e. $\begin{cases} \underline{C}^{-1} = \underline{C}^T \\ det(\underline{C}) = 1 \end{cases}$
  - de (**2.10**), on a: $\begin{aligned} \vec{\mathfrak{F}}_b &= \underline{C}_{ba}\,\vec{\mathfrak{F}}_a \\ \vec{\mathfrak{F}}_b^T &= \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{C}_{ba}^T \end{aligned}$
  - si on multiplie les côtés gauches et les côtés droits, respectivement, de ces deux équations :
  - $\underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T}_{\underline{1}} = \underline{C}_{ba}\,\underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T}_{\underline{1}}\,\underline{C}_{ba}^T \Rightarrow \underline{1} = \underline{C}_{ba}\,\underline{C}_{ba}^T$. On prouve ainsi l'équation suivante :

$$\Rightarrow \boxed{\underline{C}_{ba}^T = \underline{C}_{ba}^{-1}}$$

- Soit un vecteur $\vec{v}$ quelconque exprimé dans les deux bases:
  - $\vec{v} = \underbrace{v_x^a\,\vec{a}_x + v_y^a\,\vec{a}_y + v_z^a\,\vec{a}_z}_{\text{composantes dans } \vec{\mathfrak{F}}_a} = \underbrace{v_x^b\,\vec{b}_x + v_y^b\,\vec{b}_y + v_z^b\,\vec{b}_z}_{\text{composantes dans } \vec{\mathfrak{F}}_b}$
  - $\vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{v}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{v}^b$
  - On multiplie par $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot$ de la gauche :
  - $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{v} = \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^r}_{\underline{1}}\,\underline{v}^a = \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T}_{\underline{C}_{ab}}\,\underline{v}^b$
  - Par conséquent : $\boxed{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{v} = \underline{v}^a = \underline{C}_{ab}\,\underline{v}^b}$
  - Inversement :

$$\underline{C}_{ba}\,\underline{v}^a = \underbrace{\underline{C}_{ba}\,\underline{C}_{ab}}_{\underline{1}}\,\underline{v}^b = \underline{v}^b \qquad (2.12)$$

$$\boxed{\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{v} = \underline{v}^b = \underline{C}_{ab}\,\underline{v}^a}$$

  - La matrice de rotation permet de faire le changement de coordonnées d'un référentiel à l'autre.

- Soit deux vecteurs : $\vec{u}$ (exprimé par $\underline{u}^a$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$) et $\vec{v}$ (exprimé par $\underline{v}^b$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$) :

  <u>Somme</u>

  - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{u}^a + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{v}^b \quad \begin{cases} \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \Rightarrow \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \underline{u}^a + \underline{C}_{ab}\,\underline{v}^b \\ \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \Rightarrow \qquad (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,(\underline{u}^a + \underline{C}_{ab}\,\underline{v}^b) \end{cases}$
  - La somme de deux vecteurs doit se faire <u>dans le même référentiel</u>. Le résultat est exprimé dans le repère désiré (dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$ ci-dessus).

Produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\underline{u}^a)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = (\underline{u}^a)^T \underline{C}_{ab} \underline{v}^b = (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^T \underline{v}^b$
- Le produit scalaire de deux vecteurs doit se faire dans le même référentiel, soit $\vec{\mathfrak{F}}_a$ soit $\vec{\mathfrak{F}}_b$.

Produit vectoriel

- $\vec{u} \times \vec{v} = (\underline{u}^a)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b \Rightarrow$ Il y a au moins 4 façons de traiter le produit vectoriel.

ajoute la dyade unitaire (ne change rien)

$$① = (\underline{u}^a)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a^T \vec{\mathfrak{F}}_a}_{\vec{\vec{1}}} \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = (\underline{u}^a)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{C}_{ab} \underline{v}^b = \vec{\mathfrak{F}}_a^T (\underline{u}^a)^\times \underline{C}_{ab} \underline{v}^b$$

même chose

(2.3) et **(2.6)**

$$② = (\underline{u}^a)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \overbrace{\vec{\mathfrak{F}}_b^T \vec{\mathfrak{F}}_b}^{\vec{\vec{1}}} \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = (\underline{u}^a)^T \underline{C}_{ab} \vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = \vec{\mathfrak{F}}_b^T (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^\times \underline{v}^b$$

- On obtient le résultat dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$ ou dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$.

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T (\underline{u}^a)^\times \underline{C}_{ba} \underline{v}^b = \vec{\mathfrak{F}}_b^T (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^\times \underline{v}^b} \tag{2.13}$$

- Si on multiplie le résultat ci-dessus par la gauche avec les vectrices de chaque référentiel :

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\underline{u}^a)^\times \underline{C}_{ab} \underline{v}^b = \underline{C}_{ab} (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^\times \underline{v}^b$$

$$\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \underline{C}_{ba} (\underline{u}^a)^\times \underline{C}_{ab} \underline{v}^b = (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^\times \underline{v}^b$$

- Le produit vectoriel des deux vecteurs doit se faire dans le même référentiel. Le résultat est exprimé dans le repère désiré, $\vec{\mathfrak{F}}_a$ ou $\vec{\mathfrak{F}}_b$.
- Donc, on obtient les identités suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\underline{C}_{ba} \underline{u}^a)^\times = \underline{C}_{ba} (\underline{u}^a)^\times \underline{C}_{ba} & \text{si } \vec{u} \text{ dans } \vec{\mathfrak{F}}_a \\ (\underline{C}_{ab} \underline{u}^b)^\times = \underline{C}_{ab} (\underline{u}^b)^\times \underline{C}_{ba} & \text{si } \vec{u} \text{ dans } \vec{\mathfrak{F}}_b \end{array}} \tag{2.14}$$

- Voici les deux autres façons de traiter le produit vectoriel (sans l'ajout de la dyade unitaire):

③ Vu que $\vec{\mathfrak{F}}_b = \underline{C}_{ba}\,\vec{\mathfrak{F}}_a$, on a $\vec{\mathfrak{F}}_b^T = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{C}_{ab}$.
On remplace dans $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{v}^b$:

$$\left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = \left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{C}_{ab}\underline{v}^b$$

et on utilise $\left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_a^T = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\left(\underline{u}^a\right)^\times$ pour obtenir $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\left(\underline{u}^a\right)^\times\,\underline{C}_{ab}\underline{v}^b$

④ Vu que $\vec{\mathfrak{F}}_a = \underline{C}_{ab}\,\vec{\mathfrak{F}}_b$,
on remplace dans $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{v}^b$:

$$\left(\underline{u}^a\right)^T \underline{C}_{ab}\,\vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = \left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b$$

et on utilise $\left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^\times$pour obtenir $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^\times \underline{v}^b$

2.4 EXEMPLE D'UTILISATION DES VECTRICES ET MATRICES DE ROTATION

- On suppose un vecteur quelconque $\vec{x}$ donné par :

$$\vec{x} = \underset{①}{(\vec{u} \times \vec{v})} + \underset{②}{(\vec{v} \times \vec{w})} + \underset{③}{(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}} + \underset{④}{(\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}} + \underset{⑤}{\vec{v}} \tag{1}$$

- On suppose que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont exprimés chacun dans leur référentiel naturel:

$$\vec{u} \text{ dans le repère } \mathfrak{F}_a : \ \vec{u} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{u}^a = \left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \tag{2}$$

$$\vec{v} \text{ dans le repère } \mathfrak{F}_b : \ \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_b^T \underline{v}^b = \left(\underline{v}^b\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \tag{3}$$

$$\vec{w} \text{ dans le repère } \mathfrak{F}_c : \ \vec{w} = \vec{\mathfrak{F}}_c^T w^c = \left(\underline{w}^c\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_c \tag{4}$$

- Il y a des choix dans les équations (2)-(4). On remplace les « bons choix » de (2)-(4) dans (1) :

$$\vec{x} = \underset{①}{\left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b\, \underline{v}^b} \quad + \quad \underset{②}{\left(\underline{v}^b\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_c\, \underline{w}^c} \, +$$
$$+ \underset{③}{\left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T\, \underline{v}^b}\, \vec{\mathfrak{F}}_c^T\, \underline{w}^c + \underset{④}{\left(\underline{v}^b\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_c^T\, \underline{w}^c}\, \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \underline{u}^a + \underset{⑤}{\vec{\mathfrak{F}}_b^T\, \underline{v}^b}$$

- On utilise les identités/simplifications des vectrices vues auparavant:

① $\left(\underline{u}^a\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_a \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \left(\underline{u}^a\right)^{\times} \underline{C}_{ab}$ ⇒ voir ③ et page 2-5

② $\left(\underline{v}^b\right)^T \vec{\mathfrak{F}}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_c^T = \vec{\mathfrak{F}}_b^T \left(\underline{v}^b\right)^{\times} \underline{C}_{bc}$ ⇒ voir ④ et page 2-5

③ $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T = \underline{C}_{ab}$ ⇒ voir équation (**2.11**)

④ $\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_c^T = \underline{C}_{bc}$ ⇒ voir équation (**2.11**)

- On remplace :

$$\vec{x} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \left(\underline{u}^a\right)^{\times} \underline{C}_{ab}\, \underline{v}^b \quad + \quad \vec{\mathfrak{F}}_b^T \left(\underline{v}^b\right)^{\times} \underline{C}_{bc}\, \underline{w}^c \quad +$$
$$+ \underbrace{\left(\underline{u}^a\right)^T \underline{C}_{ab}\, \underline{v}^b}_{\text{scalaire}}\, \vec{\mathfrak{F}}_c^T\, \underline{w}^c + \underbrace{\left(\underline{v}^b\right)^T \underline{C}_{bc}\, \underline{w}^c}_{\text{scalaire}}\, \vec{\mathfrak{F}}_a^T\, \underline{u}^a + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\, \underline{v}^b$$

- On a la forme voulue : toutes les vectrices sont à gauche (un scalaire peut être mis à droite…).

- On veut $\vec{x}$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$, i.e. $\underline{x}^a = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{x}$.

- On doit donc prendre le produit scalaire $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot$ par la gauche :

$$\underline{x}^a = \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T}\left(\underline{u}^a\right)^{\times} \underline{C}_{ab}\underline{v}^b \; + \; \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T}\left(\underline{v}^b\right)^{\times} \underline{C}_{bc}\,\underline{w}^c \quad +$$

$$+\underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_c^T}\,\underline{w}^c\left(\underline{u}^a\right)^T \underline{C}_{ab}\underline{v}^b \; + \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T}\;\underline{u}^a\left(\underline{v}^b\right)^T \underline{C}_{bc}\,\underline{w}^c + \;\vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{u}^a + \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T}\underline{v}^b$$

- On simplifie avec les matrices de rotation $\vec{\mathfrak{F}}_i \cdot \vec{\mathfrak{F}}_j^T = \underline{C}_{ij}$ ($\underline{C}_{\,ii} = \underline{1}$) pour obtenir finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x}^a &= \underset{①}{\left(\underline{u}^a\right)^{\times}}\, \underline{C}_{ab}\underline{v}^b + \; \underline{C}_{ab}\underset{②}{(\underline{v}^b)^{\times}}\; \underline{C}_{bc}\,\underline{w}^c + \\ &\quad + \; \underline{C}_{ac}\,\underset{③}{\underline{w}^c}\left(\underline{u}^a\right)^T \underline{C}_{ab}\underline{v}^b + \underline{u}^a\underset{④}{\left(\underline{v}^b\right)^T}\underline{C}_{bc}\,\underline{w}^c + \; \underline{C}_{ab}\underline{v}^b \end{aligned}}$$

- L'utilisation des vectrices et de leurs propriétés permet d'exprimer systématiquement une équation vectorielle sous forme de composantes en prenant en considération que les vecteurs sont chacun exprimé plus naturellement dans leur référentiel particulier.

- Une façon plus directe de s'assurer de la cohérence de l'équation est de:
  - (i) s'assurer de combiner $+\;\; -\;\; \times\;\; \cdot$ des vecteurs dans la même base;
  - (ii) s'assurer que le résultat final est dans la base désirée.

- Exemple

Terme ① : $\left(\underline{u}^a\right)^{\times}\underline{C}_{ab}\underline{v}^b$: on met $\underline{v}^b$ dans $\mathfrak{F}_a$ et on prend le produit avec $\underline{u}^a$
$= \underline{C}_{ab}\left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^{\times}\underline{v}^b$: on prend le produit dans $\mathfrak{F}_\mathrm{b}$ en premier et exprime dans $\mathfrak{F}_\mathrm{a}$ ensuite

Terme ② : $\underline{C}_{ab}\left(\underline{v}^b\right)^{\times}\underline{C}_{bc}\,\underline{w}^c$: on met $\underline{w}^c$ dans $\mathfrak{F}_b$ et on prend le produit avec $\underline{v}^b$, ensuite dans $\mathfrak{F}_a$
$= \underline{C}_{ac}\left(\underline{C}_{cb}\,\underline{v}^b\right)^{\times}\underline{w}^c$ on prend le produit dans $\mathfrak{F}_c$ en premier et exprime dans $\mathfrak{F}_a$ ensuite

Terme ③ : $\underline{C}_{ac}\underline{w}^c\left(\underline{u}^a\right)^T\underline{C}_{ab}\,\underline{v}^b$: on prend le produit scalaire dans $\mathfrak{F}_a$
$= \underline{C}_{ac}\underline{w}^c\left(\underline{C}_{ba}\,\underline{u}^a\right)^T\underline{v}^b$: on prend le produit scalaire dans $\mathfrak{F}_b$
$= \underline{C}_{ac}\underline{w}^c\left(\underline{C}_{ca}\,\underline{u}^a\right)^T\underline{C}_{cb}\,\underline{v}^b$: on prend le produit scalaire dans $\mathfrak{F}_c$ (mais pas pratique…)

2.5 RANGÉES ET COLONNES D'UNE MATRICE DE ROTATION

- Cas particuliers où on exprime les vecteurs unitaires dans leur base ou dans une autre base :

  - $\underline{a}_x^a = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{a}_x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\underline{a}_y^a = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{a}_y = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\underline{a}_z^a = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

  - $\underline{a}_x^b = \underline{C}_{ba}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\underline{a}_y^b = \underline{C}_{ba}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\underline{a}_z^b = \underline{C}_{ba}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

  - Donc $\quad \underline{C}_{ba} = \begin{bmatrix}\underline{a}_x^b & \underline{a}_y^b & \underline{a}_z^b\end{bmatrix} \quad\quad \underline{C}_{ab} = \underline{C}_{ba}^T = \begin{bmatrix}\left(\underline{a}_x^b\right)^T\\ \left(\underline{a}_y^b\right)^T\\ \left(\underline{a}_z^b\right)^T\end{bmatrix}$ (2.15)

  - Inversement $\quad \underline{C}_{ab} = \begin{bmatrix}\underline{b}_x^a & \underline{b}_y^a & \underline{b}_z^a\end{bmatrix} \quad\quad \underline{C}_{ba} = \underline{C}_{ab}^T = \begin{bmatrix}\left(\underline{b}_x^a\right)^T\\ \left(\underline{b}_y^a\right)^T\\ \left(\underline{b}_z^a\right)^T\end{bmatrix}$ (2.16)

- Résultats importants :

  - Les rangées de la matrice de rotation $\underline{C}_{ab}$ (colonnes de la matrice $\underline{C}_{ba}$) sont les composantes des vecteurs unitaires du trièdre $\vec{\mathfrak{F}}_a$ exprimées dans le trièdre $\vec{\mathfrak{F}}_b$.

  - Les colonnes de la matrice de rotation $\underline{C}_{ab}$ (rangées de la matrice $\underline{C}_{ba}$) sont les composantes des vecteurs unitaires du trièdre $\vec{\mathfrak{F}}_b$ exprimées dans le trièdre $\vec{\mathfrak{F}}_a$.

  - Vérifications :

    - $\underline{v}^a = \underline{C}_{ab}\,\underline{v}^b = \begin{bmatrix}\underline{b}_x^a & \underline{b}_y^a & \underline{b}_z^a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x^b\\v_y^b\\v_z^b\end{bmatrix} = v_x^b\,\underline{b}_x^a + v_y^b\,\underline{b}_y^a + v_z^b\,\underline{b}_z^a$

      $\rightarrow v_x^b\,\vec{b}_x + v_y^b\,\vec{b}_y + v_z^b\,\vec{b}_z$

    - $\underline{v}^b = \underline{C}_{ba}\,\underline{v}^a = \begin{bmatrix}\underline{a}_x^b & \underline{a}_y^b & \underline{a}_z^b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x^a\\v_y^a\\v_z^a\end{bmatrix} = v_x^a\,\underline{a}_x^b + v_y^a\,\underline{a}_y^b + v_z^a\,\underline{a}_z^b$

      $\rightarrow v_x^a\,\vec{a}_x + v_y^a\,\vec{a}_y + v_z^a\,\vec{a}_z$

2.6 ROTATIONS ÉLÉMENTAIRES

- Une rotation élémentaire (ou principale ou de Euler) est une rotation autour d'un des axes d'un repère :

  - $\underline{C}_1(\emptyset) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\varphi & s\varphi\\ 0 & -s\varphi & c\varphi\end{bmatrix}$ $\quad \underline{C}_2(\varphi) = \begin{bmatrix}c\varphi & 0 & -s\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ +s\varphi & 0 & c\varphi\end{bmatrix}$ $\quad \underline{C}_3(\varphi) = \begin{bmatrix}c\varphi & s\varphi & 0\\ -s\varphi & c\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

    Rotation « 1 » Rotation « 2 » Rotation « 3 »

- **Attention** : Le signe des termes hors diagonale (les sinus) pour les rotations « 1 » et « 3 » ont la même forme mais la forme pour la rotation « 2 » est différente.

- Exemple : une rotation $\overset{①\,②\,③}{3–1–3}$ d'angles $\overset{①\;②③}{(\Omega, i, u)}$ de $\vec{\mathfrak{F}}_a$ à $\vec{\mathfrak{F}}_b$ consiste en :

  - une 1ère rotation : Ω autour de $\vec{a}_z = \vec{a}'_z$
  - une 2e rotation : i autour de $\vec{a}'_x$
  - une 3e rotation : u autour de $\vec{a}''_z = \vec{b}_z$

$$\begin{bmatrix}\vec{b}_x\\ \vec{b}_y\\ \vec{b}_z\end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\overset{③}{\begin{bmatrix}+cu & su & 0\\ -su & cu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}}_{\underline{C}_3(u)} {}^{\prime\prime} \underbrace{\overset{②}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & ci & si\\ 0 & -si & ci\end{bmatrix}}}_{\underline{C}_1(i)} {}^{\prime} \underbrace{\overset{①}{\begin{bmatrix}c\Omega & s\Omega & 0\\ -s\Omega & c\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}}_{\underline{C}_3(\Omega)}}_{\underline{C}_{ba}} \begin{bmatrix}\vec{a}_x\\ \vec{a}_y\\ \vec{a}_z\end{bmatrix}$$

  - Étapes intermédiaires : ( )′ après 1ère rotation et ( )″ après 2e rotation

$$\begin{bmatrix}\vec{a}''_x\\ \vec{a}''_y\\ \vec{a}''_z\end{bmatrix} = \underline{C}_3^T(u) \begin{bmatrix}\vec{b}_x\\ \vec{b}_y\\ \vec{b}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{b}_x cu - \vec{b}_y su\\ \vec{b}_x su - \vec{b}_y cu\\ \vec{b}_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{a}'_x\\ \vec{a}'_y\\ \vec{a}'_z\end{bmatrix} = \underbrace{\underline{C}_1^T(i)\, \underline{C}_3^T(u)}_{\begin{bmatrix}cu & -su & 0\\ cisu & cici & -si\\ sisu & sicu & ci\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}\vec{b}_x\\ \vec{b}_y\\ \vec{b}_z\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

  - Ces étapes intermédiaires seront utiles lors du calcul des vitesses angulaires à la section 2.14.

Exercice A-6: Changement de coordonnées d'une dyade

A6. À l'exercice **A5**, la matrice d'inertie $\underline{J}^a$ a été trouvée dans $\mathfrak{F}_a$ dans le cas où $r_x = 0$ (masse dans le plan $\vec{a}_y\,\vec{a}_z$. Trouver l'inertie dans un repère $\vec{\mathfrak{F}}_b$, $\underline{J}^b$, où le repère $\vec{\mathfrak{F}}_b$ est obtenu à partir d'une rotation φ autour de l'axe $\vec{a}_z$:

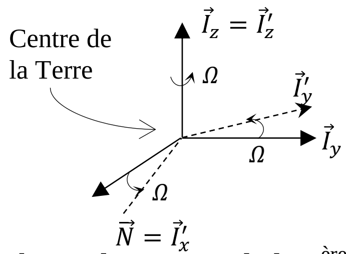
→ Trouver $\underline{C}_{ba} = \underline{C}_{ba}(\varphi)$ (rotation autour de l'axe « 3 » d'angle φ)
→ À partir de $\underline{J}^a = \vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T$ (équation (**2.8**)), démontrer en détail que $\underline{J}^b = \underline{C}_{ba}\,\underline{J}^a\,\underline{C}_{ab}$
→ Calculer $\underline{J}^b = \underline{J}^b\left(r_y, r_z, m, \varphi\right)$

Cet exercice démontre que, pour changer une dyade de coordonnées, il faut transformer les deux « vecteurs côte-à-côte » de chaque côté de la dyade.

2.7 APPLICATION AU POSITIONNEMENT D'UN SATELLITE, DU SOLEIL ET D'UN SITE TERRESTRE

- La rotation « 3–1–3 » est utilisée pour localiser un satellite par rapport à un système de référence inertiel (ou céleste) $\mathfrak{F}_I$ dénoté par les vecteurs unitaires $\vec{I}_x \quad \vec{I}_y \quad \vec{I}_z$ qui sont <u>fixes</u> par rapport aux étoiles. Ainsi, les lois de Newton peuvent être exprimées dans $\mathfrak{F}_I$.

- <u>1ère rotation autour de l'axe « 3 » = $\vec{I}_z$</u> : angle = Ω = RAAN = « right ascension of ascending node ».



→ En tournant de Ω, les axes deviennent $\vec{I}'_x \quad \vec{I}'_y \quad \vec{I}'_z$
→ $\vec{I}'_x = \vec{N}$ est appelé la ligne des nœuds (« lines of nodes »)
→ Note : $\vec{I}_z = \vec{I}'_z$ parce que l'on tourne autour de $\vec{I}_z$

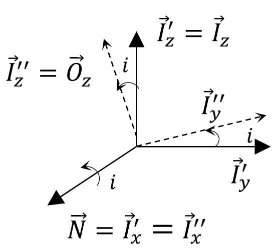
- On obtient la matrice de la 1ère rotation :

$$\begin{bmatrix} \vec{I}'_x \\ \vec{I}'_y \\ \vec{I}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +c\Omega & s\Omega & 0 \\ -s\Omega & c\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_x \\ \vec{I}_y \\ \vec{I}_z \end{bmatrix}$$

- Donc $\vec{N} = \vec{I}'_x = \cos\Omega\,\vec{I}_x + \sin\Omega\,\vec{I}_y$.

- On l'exprime dans le repère inertiel : $\vec{\mathfrak{F}}_I \cdot \vec{N} = \underline{N}^I = \begin{bmatrix} \vec{I}_x \\ \vec{I}_y \\ \vec{I}_z \end{bmatrix} \cdot \left(\cos\Omega\,\vec{I}_x + \sin\Omega\,\vec{I}_y\right) = \begin{bmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{bmatrix}$.

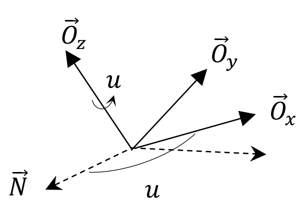
- <u>2e rotation autour de l'axe « 1 » = $\vec{N} = \vec{I}'_x$</u>: angle = i = inclinaison = « inclination »



→ En tournant, les axes deviennent $\vec{I}''_x \quad \vec{I}''_y \quad \vec{I}''_z$
→ $\vec{I}''_z = \vec{O}_z$ = normale de l'orbite
→ Note : $\vec{I}''_x = \vec{N} = \vec{I}'_x$ parce que l'on tourne autour de $\vec{N}$

$$\begin{bmatrix} \vec{I}''_x \\ \vec{I}''_y \\ \vec{I}''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{I}''_y \\ \vec{O}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ci & si \\ 0 & -si & ci \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}'_x \\ \vec{I}'_y \\ \vec{I}'_z \end{bmatrix}$$

- <u>3e rotation autour de l'axe « 3 » = $\vec{O}_z = \vec{I}''_z$</u>: angle = u = argument de latitude = « argument of latitude »



→ En tournant, les axes deviennent $\{\vec{I}'''_x \quad \vec{I}'''_y \quad \vec{I}'''_z\} = \{\vec{O}_x \quad \vec{O}_y \quad \vec{O}_z\}$
→ $\vec{O}_x = \vec{O}_r$ = vecteur unitaire radial
→ $\vec{O}_y = \vec{O}_t$ = vecteur unitaire transverse
→ $\vec{O}_z = \vec{O}_n$ = vecteur unitaire normal

- La position du satellite est $\vec{r} = r\,\vec{O}_r$ donc $\underline{r}^O = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - → r = distance de l'origine = module de $\vec{r}$ et $\vec{O}_r$ est le vecteur unitaire donnant la position.

Exercices A-7 à A-12 : Positionnement d'un satellite

A7. Démontrer que $\vec{O}_z = \sin i \ \sin \Omega \, \vec{I}_x - \sin i \cos \Omega \, \vec{I}_y + \cos i \, \vec{I}_z$ et que $\underline{O}_z^I = \begin{bmatrix} +sis\Omega \\ -sic\Omega \\ ci \end{bmatrix}$

A8. Démontrer que $\vec{\mathfrak{F}}_O$ est relié à $\vec{\mathfrak{F}}_I$ par :

$$\vec{\mathfrak{F}}_O = \begin{bmatrix} \vec{O}_r \\ \vec{O}_t \\ \vec{O}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +cuc\Omega - sus\Omega ci & +cus\Omega + suc\Omega ci & susi \\ -suc\Omega - cus\Omega ci & -sus\Omega + cuc\Omega ci & cusi \\ s\Omega si & -c\Omega si & ci \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_x \\ \vec{I}_y \\ \vec{I}_z \end{bmatrix} = \underline{C}_{OI} \vec{\mathfrak{F}}_I \qquad (2.18)$$

A9. Exprimer le vecteur position du satellite $\vec{r} = r \, \vec{O}_r$ en termes de $\vec{I}_x \quad \vec{I}_y \quad \vec{I}_z$

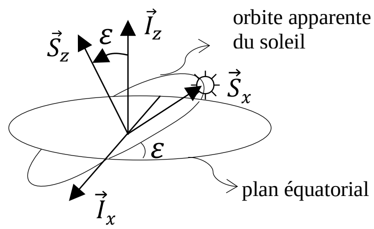
A10. Trouver les coordonnées du satellite $\underline{r}^I$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$.

A11. Exprimer le vecteur unitaire normal $\vec{O}_n$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$ i.e. $\underline{O}_n^I$.

A12. En utilisant les résultats des équations (**2.15**) et (**2.16**), trouver les coordonnées des vecteurs unitaires $\vec{I}_x$, $\vec{I}_y$ et $\vec{I}_z$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_O$.

* * * * *

- Le soleil est aussi positionné par rapport au repère inertiel $\vec{\mathfrak{F}}_I$ avec le même type de coordonnées excepté que, par définition, le RAAN du soleil est nul : $\Omega_S = 0$. La ligne des nœuds $\vec{N}_S$ pour l'orbite apparente du soleil définit en fait la direction de l'axe $\vec{I}_x$.



- Les rotations sont donc ~~3~~–1–3 d'angles $0, \varepsilon, L$
  - $\rightarrow$ ε autour de $\vec{I}_x$ $(\varepsilon \leftrightarrow i)$
  - $\rightarrow$ L autour de $\vec{I}'_z = \vec{S}_z$ $(L \leftrightarrow u)$

- ε = « obliquity of ecliptic » (inclinaison de l'orbite du soleil)
- L = « Sun mean longitude »
- Les vecteurs unitaires sont $\vec{S}_x, \vec{S}_y, \vec{S}_z$ et $\vec{S}_x$ pointe vers le soleil.

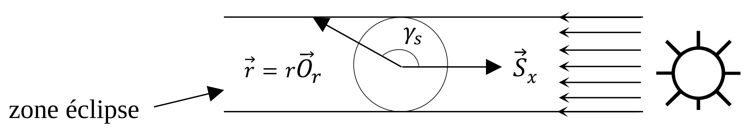
Exercices A-13 à A-15 : Positionnement du soleil

A13. Trouver $\underline{C}_{SI}$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_S = \underline{C}_{SI}\, \vec{\mathfrak{F}}_I$

A14. Trouver la position du soleil $\vec{r}_S = r_S\, \vec{S}_x$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$ i.e. : $\underline{r}_S^I$

- NOTE : À l'équinoxe du printemps : L = 0 deg $\left(\vec{S}_x = \vec{I}_x\right)$
  À l'équinoxe d'automne : L = 180 deg $\left(\vec{S}_x = -\vec{I}_x\right)$
  Au solstice d'été : L = ?
  Au solstice d'hiver : L = ?

A15. L'angle entre la position du soleil et celle d'un satellite, γ_S, est utile pour détecter les éclipses. Calculer $\cos\gamma_S$. NOTE : $\cos\gamma_S = \vec{O}_r \cdot \vec{S}_x$



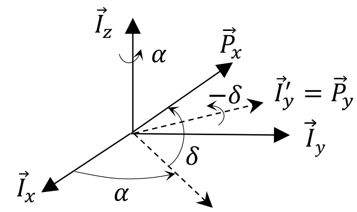
* * * * *

- La position d'un corps céleste ou d'une cible sur la Terre peut être définie par son ascension droite (« right ascension »), dénotée α et mesurée dans le plan équatorial à partir de $\vec{I}_x$, et sa déclinaison (« declination ») δ mesurée à partir du plan équatorial (positif vers le Nord, négatif vers le Sud).

- Le système de référence d'une position terrestre, $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$ est donc obtenue par une rotation : 3–2 d'angles $\alpha, -\delta$:

  - 1ère rotation α autour de l'axe « 3 » $= \vec{I}_z$

  - 2e rotation $-\delta$ autour de l'axe « 2 » $= \vec{I}'_y$
    ↳ équivalente à une rotation $+\delta$ autour de $-\vec{I}'_y$



Exercices A-16 à A-17 : Positionnement d'une cible terrestre

A16. Démontrer que la matrice de rotation entre $\vec{\mathfrak{F}}_I$ et $\vec{\mathfrak{F}}_P$ est :

$$\underline{C}_{PI} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\delta & \sin\alpha\cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\delta & -\sin\alpha\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}}_P \cdot \vec{\mathfrak{F}}_I^T \qquad (2.19)$$

A17. Démontrer comment il est facile de voir que $\overrightarrow{P_y}$ est toujours dans le plan $\vec{I}_x, \vec{I}_y$ (le plan équatorial).

* * * * *

- Il est possible maintenant d'exprimer n'importe quel objet (satellite, soleil, observateur sur la Terre) dans le système de référence désiré :

  - position de l'observateur terrestre : $\vec{r}_P = r_E \vec{P}_x$ ($r_E =$ rayon de la Terre)

  - position du soleil : $\vec{r}_S = r_S \vec{S}_x$ ($r_S =$ rayon de l'orbite apparente du soleil)

  - position du satellite : $\vec{r} = r\vec{O}_r$ ($r =$ rayon de l'orbite du satellite)

- Calcul de la position du soleil dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$:

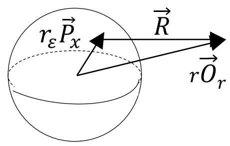
  - méthode (1) : $\vec{r}_S = r_S \vec{S}_x \;\Rightarrow\; \underline{r}_S^S = \vec{\mathfrak{F}}_S \cdot \vec{r}_S = r_S \vec{\mathfrak{F}}_S \cdot \vec{S}_x = r_S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
    ↳ $\underline{r}_S^I = \underline{C}_{IS}\, \underline{r}_S^S = \underline{C}_{SI}^T\, \underline{r}_S^S$.

    même

  - méthode (2) : $\vec{r}_S = \vec{\mathfrak{F}}_S^T\, \underline{r}_S^S \;\Rightarrow\; \underline{r}_S^I = \vec{\mathfrak{F}}_I \cdot \vec{r}_S$
    $= \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_I \cdot \vec{\mathfrak{F}}_S^T}\, \underline{r}_S^S = \underline{C}_{IS}\, \underline{r}_S^S = \underline{C}_{SI}^T\, \underline{r}_S^S$

- Calcul de la position du soleil dans $\vec{\mathfrak{F}}_O$:
    - méthode (1) : $\underline{r}_S^O = \underline{C}_{OS}\,\underline{r}_S^S = \underline{C}_{OI}\,\underline{C}_{JS}\,\underline{r}_S^S = \underline{C}_{OI}\,C_{SI}^T\,\underline{r}_S^S$ même
    - méthode (2) : $\underline{r}_S^O = \vec{\mathfrak{F}}_O \cdot \vec{r}_S = \vec{\mathfrak{F}}_O \cdot \vec{\mathfrak{F}}_S^T\,\underline{r}_S^S = \vec{\mathfrak{F}}_O \cdot \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_I^T \vec{\mathfrak{F}}_I} \cdot \vec{\mathfrak{F}}_S^T\,\underline{r}_S^S = \underline{C}_{OI}\,\underline{C}_{JS}\,\underline{r}_S^S = \underline{C}_{OI}\,C_{SI}^T\,\underline{r}_S^S$

- La position relative du satellite par rapport à l'observation terrestre est $\vec{R}$ donné par :



$$\boxed{\vec{R} = r\vec{O}_r - r_E\vec{P}_x}$$

Exercices A-18 à A-19 : Positionnement relatif

A18. Démontrer par une des deux méthodes (ou toute autre) que l'observateur voit le satellite à :

$$\underline{R}^P = \begin{bmatrix} R_x^P \\ R_y^P \\ R_z^P \end{bmatrix} = r\underbrace{\underline{C}_{PI}}_{\alpha,\delta}\underbrace{\underline{C}_{OI}^T}_{\Omega,i,u}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{C}_{PI}\underline{C}_{OI}^T r^O - r_E\underline{P}_x^P$$

A19. Démontrer que le satellite voit l'observateur terrestre à :

$$-\underline{R}^O = \begin{bmatrix} -R_x^O \\ -R_y^O \\ -R_z^O \end{bmatrix} = r_E\underline{C}_{OI}\underline{C}_{PI}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{C}_{OI}\underline{C}_{PI}^T r_E\underline{P}_x^P - \underline{r}^O$$

- NOTE : Il est facile de démontrer que :

$$-\underline{R}^P = -\underline{C}_{PO}\underline{R}^O = \underline{C}_{PI}\underline{C}_{OI}^T\left[\underline{C}_{OI}\underline{C}_{PI}^T r_E\underline{P}_x^P - \underline{r}^O\right] = r_E\underline{P}_x^P - \underline{C}_{PI}\underline{C}_{OI}^T\underline{r}^O$$

* * * * *

- Pour spécifier l'orientation d'un objet dans l'espace, il y a 12 différentes combinaisons de rotation élémentaires : 1-2-3, 1-3-2, 1-2-1, 1-3-1, 2-1-3, 2-3-1, 2-1-2, 2-3-2, 3-2-1, 3-1-2, 3-1-3, 3-2-3.

- Tous ces triplets de rotations principales ont des « singularités » c'est-à-dire des conditions sous lesquelles le sens individuel de certains angles est perdu. Cela se manifeste aussi par une division par zéro dans le calcul des vitesses angulaires (à voir plus loin).

A20. Démontrer que pour la rotation « 3–1–3 », avec angles Ω, i, u, il y a une singularité quand $i = 0$: on ne peut distinguer les angles Ω et u et le triplet de rotation devient une seule rotation d'angle $\Omega + u$.

2.8 AUTRES REPRÉSENTATIONS DE L'ORIENTATION D'UN REPÈRE

- Jusqu'ici, l'orientation d'un repère par rapport à un autre a été représentée par un triplet de rotations élémentaires et 3 angles de Euler sont suffisants pour représenter toutes les orientations possibles. Cependant, les angles de Euler ont des singularités qui causent des problèmes numériques.
- Ces 3 rotations élémentaires peuvent s'exprimer en une matrice de rotation de dimension 3 x 3. Cependant, la matrice de rotation possède 9 éléments alors qu'il n'y a que 3 degrés de liberté qui sont requis. Les 9 éléments sont donc reliés par 6 contraintes (les colonnes/rangées sont de module unitaire et elles sont orthogonales).
- Il y a d'autres représentations qui possèdent moins de contraintes et qui évitent les singularités.

- <u>Rotation axe-angle (« axis-angle »)</u>

    - Au lieu de faire 3 rotations autour d'axes principaux, il est équivalent de faire une seule rotation φ autour d'un axe approprié $\vec{a}$, de grandeur unitaire ($\vec{a}\cdot\vec{a}=1$) :

    - Supposons une rotation $(\varphi,\vec{a})$ de $\vec{\mathfrak{F}}_I$ à $\vec{\mathfrak{F}}_B$ (B pour « body », I pour inertiel) :

$$\underline{C}_{BI} = \vec{\mathfrak{F}}_B \cdot \vec{\mathfrak{F}}_I^T$$

    - Cette matrice de rotation peut être représentée par une rotation axe-angle de la forme:

$$\boxed{\underline{C}_{BI} \;=\; \cos\varphi\,\underline{1} + (1-\cos\varphi)\underline{a}\,\underline{a}^T - \sin\varphi\,\underline{a}^{\times}} \qquad (2.20)$$

    - Vu que $\vec{a}$ est dans l'axe de rotation, ses composantes sont les mêmes dans $\mathfrak{F}_B$ et $\mathfrak{F}_I$:

$$\underline{a} = \vec{\mathfrak{F}}_B\cdot\vec{a} = \vec{\mathfrak{F}}_I\cdot\vec{a}$$

    - Cela veut dire que : $\boxed{\underline{C}_{BI}\underline{a} = \underline{a}}$ (2.21)

OPT : Démontrer à partir de (**2.20**) que $\underline{C}_{BI}\underline{a} = \underline{a}$

- La rotation $(\varphi,\underline{a})$ a 4 paramètres et une contrainte donc il y a toujours 3 variables indépendantes:

  $\underline{a} \Rightarrow$ 3 paramètres
  $\varphi \Rightarrow$ 1 paramètre
  mais avec la contrainte $|\vec{a}| = 1 \Rightarrow \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = 1$

- Le résultat **(2.21)** montre que l'axe de rotation $\underline{a}$ est un vecteur propre de la matrice $\underline{C}_{BI}$.

- Pour trouver $\underline{a}$ et φ à partir d'une matrice de rotation quelconque $\underline{C} = \{c_{ij}\}$:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}[c_{11}+c_{22}+c_{33}-1] \qquad (2.22)$$

    - $a_x = (c_{23}-c_{32})/(2\sin\varphi)$ $\qquad a_x = \pm\left(\frac{1+c_{11}}{2}\right)^{½}$ $\quad a_xa_y = c_{12}/2$
    - $a_y = (c_{31}-c_{13})/(2\sin\varphi)$ $\qquad a_y = \pm\left(\frac{1+c_{22}}{2}\right)^{½}$ $\quad a_ya_z = c_{23}/2$
    - $a_z = (c_{12}-c_{21})/(2\sin\varphi)$ $\qquad a_z = \pm\left(\frac{1+c_{33}}{2}\right)^{½}$ $\quad a_za_x = c_{31}/2$

Si $\varphi \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ ... $\qquad$ Si $\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ ...

- <u>Quaternions ou Paramètres de Euler</u>

  - Une autre façon de représenter la rotation unique axe-angle $(\varphi, \underline{a})$ est basée sur les quaternions.

  - Définition :

$$\text{quaternion } \underline{q} = \begin{bmatrix} a_x \sin\varphi/2 \\ a_y \sin\varphi/2 \\ a_z \sin\varphi/2 \\ \cos\varphi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{matrix} \underline{\varepsilon} = \underline{a} \sin\varphi/2 \\ \eta = \cos\varphi/2 \end{matrix} \qquad (2.23)$$

  - La matrice-colonne $\underline{\varepsilon}$ est la partie vectorielle du quaternion et η est la partie scalaire.
  - Il y a deux conventions qui sont utilisées pour l'ordre des éléments du quaternion :

scalaire au bas du quaternion : $\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}$ scalaire au haut du quaternion $\begin{bmatrix} \eta \\ \underline{\varepsilon} \end{bmatrix}$

  - Nous reviendrons sur ces deux conventions plus tard à la Section 2.13. Pour l'instant, la convention scalaire vers le bas $[\underline{\varepsilon}^T \quad \eta]^T$ sera utilisée.

  - Il y a 4 paramètres de Euler : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,\ \eta$, mais 3 sont indépendants puisque $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$:

$$\underline{q}^T \underline{q} = \underline{\varepsilon}^T \underline{\varepsilon} + \eta^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \eta^2 = 1 \qquad (2.24)$$

  - Les quaternions ont certains avantages par rapport à d'autres représentations
    (1) pas de singularité
    (2) pas de calculs de cosinus ou de sinus (coûteux en charge de calcul)

- Pour calculer la matrice de rotation **(2.20)** à partir d'un quaternion, on utilise :

$$\underline{C}_{BI} = (\eta^2 - \underline{\varepsilon}^T \underline{\varepsilon})\underline{1} + 2\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T - 2\eta\underline{\varepsilon}^\times \qquad (2.25)$$

OPT : Démontrer que **(2.25)** devient **(2.20)** en y insérant **(2.23)**.

- Pour trouver $\underline{\varepsilon}$ et η à partir d'une matrice de rotation quelconque $\underline{C} = \{c_{ij}\}$, il y a au moins 4 algorithmes différents :

$$\varepsilon(1) = \frac{1}{2}(1 + c_{11} - c_{22} - c_{33})^{½} \qquad \varepsilon(2) = \frac{1}{2}(1 - c_{11} + c_{22} - c_{33})^{½}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(3) \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4\varepsilon(1)} \begin{bmatrix} c_{12} + c_{21} \\ c_{13} + c_{31} \\ c_{23} - c_{32} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(3) \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4\varepsilon(2)} \begin{bmatrix} c_{12} + c_{21} \\ c_{23} + c_{32} \\ c_{31} - c_{13} \end{bmatrix}$$

$$(2.26)$$

$$\varepsilon(3) = \frac{1}{2}(1 - c_{11} - c_{22} + c_{33})^{½} \qquad \eta = \pm\frac{1}{2}(1 + c_{11} + c_{22} + c_{33})^{½}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4\varepsilon(3)} \begin{bmatrix} c_{13} + c_{31} \\ c_{23} + c_{32} \\ c_{12} - c_{21} \end{bmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{4\eta} \begin{bmatrix} c_{23} - c_{32} \\ c_{31} - c_{13} \\ c_{12} - c_{21} \end{bmatrix}$$

- Dans les calculs sur ordinateur, on choisit l'algorithme qui a le plus gros dénominateur i.e. la plus grande valeur entre $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \varepsilon(3)$ ou η. Cela évite de diviser par un petit nombre.

2.9 LIENS ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

- On peut représenter l'orientation d'un repère par rapport à un autre avec différents sets de paramètres :
  - 3 angles de Euler e.g. $\varphi,\ \theta,\ \psi$ et 12 types de séquences différentes
  - 4 paramètres « axe-angle » : $\underline{a}$ et φ
  - 4 quaternions : $\underline{\varepsilon}$ et η ou $\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}$
  - 9 cosinus directeurs dans une matrice de rotation e.g. $\underline{C}_{BI}$
- Le nombre minimal de variables d'état pour représenter une rotation unique est 3.
- Le nombre minimal de variables d'état pour représenter une rotation sans singularités est 4.
- La dépendance des paramètres est:

$$\underline{a}^T\underline{a} = 1 \text{ pour } \underline{a},\ \varphi$$
$$\underline{q}^T\underline{q} = 1 \text{ pour quaternions}$$

pour trois rangées r ou colonnes c

$$\left.\begin{aligned} \underline{c}_i^T\underline{c}_i &= 1 \\ \underline{c}_j^T\underline{c}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \text{pour matrice de rotation}$$

- Pour relier les variables d'état de différentes représentations, on utilise souvent (mais pas uniquement…) la matrice de rotation (e.g. $\underline{C}_{BI}$) avec 9 paramètres comme le « pont » entre 2 représentations. On obtient ainsi, par comparaison des coefficients, 9 équations qui relient les 2 représentations (3 de ces équations sont indépendantes).
- Exemple avec ($\underline{a},\ \varphi$) :
  - Pour trouver les équations (2.22) qui donnent le lien entre les cosinus directeurs c_{ij} d'une matrice de rotation $\underline{C}$ et les paramètres $\underline{a},\ \varphi$, il suffit d'écrire les 9 éléments de la matrice $\underline{C}_{BI}$ de l'équation (2.20) au long et de « trouver » des liens entre les c_{ij} et les $\underline{a}, \varphi$.
- Exemple avec ($\underline{\varepsilon},\ \eta$) :
  - Même chose pour obtenir (2.26) à partir des c_{ij} : écrire les 9 termes de (2.25) au long et faire des liens pour isoler η et $\underline{\varepsilon}$.
- Autre exemple, que l'on fait au long en exercice.
  - Une matrice de rotation $\underline{C}_{OI} = \{c_{ij}\}$ nous est donnée. Comment trouver les angles Ω, i, u de la rotation 3–1–3 qui correspond à $\underline{C}_{OI}$?
  - On part de l'expression analytique de $\underline{C}_{OI}$ en fonction des angles Ω, i, u : Eq. (2.18)
  - Comme expliqué aux équations (2.15) et (2.16), les rangées de $\underline{C}_{OI}$ sont les vecteurs $\vec{O}_r$, $\vec{O}_t$ et $\vec{O}_n$ exprimés dans le repère $\vec{\mathfrak{F}}_I$
  - On peut prendre 2 vecteurs unitaires par exemple (voir Eq. (2.18) 1ère et 3e rangées) :

$$\vec{O}_r = (cuc\Omega - sus\Omega ci)\vec{I}_x + (cus\Omega + suc\Omega ci)\vec{I}_y + (susi)\vec{I}_z$$

donc $\underline{O}_r^I = \begin{bmatrix} cuc\Omega - sus\Omega ci \\ cus\Omega + suc\Omega ci \\ susi \end{bmatrix}$ = composantes de $\vec{O}_n$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$

$$\vec{O}_n = (\sin\Omega \sin i)\vec{I}_x - (\cos\Omega \sin i)\vec{I}_y + \cos i\, \vec{I}_z$$

donc $\underline{O}_n^I = \begin{bmatrix} +\sin\Omega \sin i \\ -\cos\Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}$ = composantes de $\vec{O}_n$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_I$

- Avec une matrice $\underline{C}_{OI}$ donnée sous forme numérique cette fois i.e. une matrice de 9 coefficients numériques c_{ij}, on peut trouver $\underline{O}_r^I$, $\underline{O}_t^I$, $\underline{O}_n^I$ par inspection de la forme de la matrice $\underline{C}_{OI}$. Il y a plusieurs solutions.

Exercices A-21 à A-22 : Angles de Euler à partir d'une matrice de rotation

A21. Démontrer les étapes d'un algorithme pour trouver Ω, i, u : (les c_{ij} sont les éléments de $\underline{C}_{OI}$).

- démontrer que : $\cos i = \underline{O}_n^I(3)$ donc $\boxed{i = \cos^{-1}(c_{33})}$ (partie facile…)
- démontrer que : $\tan\Omega = -\underline{O}_n^I(1)/\underline{O}_n^I(2)$ donc $\boxed{\Omega = \tan^{-1}(-c_{31}, c_{32})}$
- remarquer ci-dessus que quand l'inclinaison $i = 0$, les 2 termes c_{31} et c_{32} sont nuls et on calcule ainsi une arc-tangente de 0/0.
  ↳ On retrouve la singularité de $i = 0$: Ω n'est physiquement pas défini.
- démontrer que : $\boxed{\vec{N} \cdot \vec{O}_r = \left(\underline{N}^I\right)^T \left(\underline{O}_r^I\right) = \cos u}$
- démontrer que : $\boxed{\left(\vec{N} \times \vec{O}_r\right) \cdot \vec{O}_n = \left[\left(\underline{N}^I\right)^\times \underline{O}_r^I\right]^T \underline{O}_n^I = \sin u}$
- et que finalement : $\boxed{u = \tan^{-1}\left\{\left[\left(\underline{N}^I\right)^\times \underline{O}_r^I\right]^T \underline{O}_n^I, \left(\underline{N}^I\right)^T \left(\underline{O}_r^I\right)\right\}}$
- $\vec{N}$ est donnée à la Section 2.7

- On obtient ainsi les 3 angles de Euler $\Omega,\ i, u$ à partir des coordonnées des vecteurs $\vec{N}, \vec{O}_r$ et $\vec{O}_n$

- Voici un autre exemple, en exercice. On désire obtenir la position d'un astéroïde en termes de son ascension droite α et de sa déclinaison δ.
  - La matrice de rotation $\underline{C}_{AI} = \vec{\mathfrak{F}}_A \cdot \vec{\mathfrak{F}}_I^T$ est donnée.
  - On suppose que le vecteur $\vec{A}_x$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_A = \begin{bmatrix} \vec{A}_x \\ \vec{A}_y \\ \vec{A}_z \end{bmatrix}$ représente la position de l'astéroïde.
  - On veut trouver les coordonnées ascension droite α et déclinaison δ qui permettent de positionner cet objet.

A22. Démontrer que les coordonnées α et δ sont (l'équation (**2.19**) sera utile...):

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\underline{A}_x^I(2), \underline{A}_x^I(1)\right) \\ \delta &= \sin^{-1}(\underline{A}_x^I(3)) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pourquoi n'y a-t-il que 2 paramètres (α, δ) dans la matrice de rotation (**2.19**) plutôt que le minimum de 3 paramètres requis?

2.10 ROTATIONS MULTIPLES

- On sait que les vectrices permettent de trouver les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ quelconque dans différents repères :
  - Si $\vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{v}^a$ où $\underline{v}^a$ = composantes dans $\mathfrak{F}_a$

    donc $\underline{v}^b = \vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{v} = \vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \left(\vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{v}^a\right) = \left(\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T\right)\underline{v}^a = \underline{C}_{ba}\underline{v}^a$

    finalement : $\underline{v}^b = \underline{C}_{ba}\underline{v}^a$ = composantes dans $\mathfrak{F}_b$

- On peut utiliser ce mécanisme en cascade :

$$\underline{v}^c = \underline{C}_{cb}\underline{v}^b = \underline{C}_{cb}\underline{C}_{ba}\underline{v}^a = \underline{C}_{ca}\underline{v}^a \tag{2.28}$$

$$\text{Donc : } \underline{C}_{ca} = \underline{C}_{cb}\underline{C}_{ba} = \underline{C}_{cb}\underline{C}_{ab}^T = \underline{C}_{bc}^T\underline{C}_{ba} = \underline{C}_{bc}^T\underline{C}_{ab}^T \tag{2.29}$$

- Les trois rotations élémentaires de Euler en sont en fait un exemple :

$$\underline{C}_{OI}(\Omega, i, u) = C_3(u)\; C_1(i)\; C_3(\Omega)$$

3e rotation — 2e rotation — 1re rotation autour de « 3 »

- La rotation axe-angle $(\underline{a}, \varphi)$ ou son équivalent avec quaternion $\underline{q} = \left[\underline{\varepsilon}^T \eta\right]^T$ permet donc de représenter en <u>une seule</u> rotation « directe » les 3 rotations élémentaires de Euler.

- <u>Note historique</u>

  - Dans les « premiers » systèmes de commande d'orientation de satellite, chaque axe était commandé de façon indépendante. Les manœuvres étaient donc exécutées en 3 rotations élémentaires de Euler dont les angles sont : lacet (« yaw »), tangage (« pitch ») et roulis (« roll »).

  - Dans les systèmes de commande moderne, on commande les 3 axes simultanément en utilisant les quaternions. On atteint donc l'orientation désirée, de façon directe, et donc en un temps minimum.

  - L'axe de rotation désiré est donné par :

$$\underline{a} = \frac{\underline{\varepsilon}}{\sqrt{\underline{\varepsilon}^T\underline{\varepsilon}}} = \underline{\varepsilon} \text{ normalisé}$$

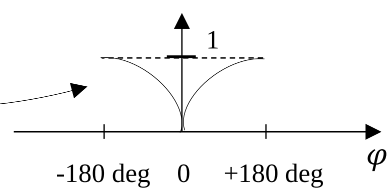
  - Une mesure de l'erreur φ entre l'orientation actuelle et l'orientation finale (désirée, commandée) est donnée par :

    - erreur $= 2\sqrt{\underline{\varepsilon}^T\underline{\varepsilon}} = 2\sin\varphi/2 \approx \varphi$ pour φ petit

    - dans un système de commande asservi,
      on utilise aussi : erreur $\approx \underline{\varepsilon}^T\underline{\varepsilon}$

      $\rightarrow$ Cela évite la $\sqrt{\ }$.

      $\rightarrow$ Pourquoi cela fonctionne aussi?



  - Une rétroaction de la forme $\underline{T}_c = -\underline{K}\,\underline{\varepsilon}$ où $\underline{T}_c$ est le couple de commande et $\underline{K}$ une matrice de gains à déterminer permet donc d'asservir tout système sur 3 axes de façon optimale.

2.11 ALGÈBRE DES QUATERNIONS AVEC LA CONVENTION « SCALAIRE EN BAS »

  - Les rotations successives sont faciles à réaliser avec les multiplications de matrices 3×3 de cosinus directeurs. Voir l'exemple à l'équation (**2.29**).

  - Qu'arrive-t-il si on veut utiliser des quaternions? Supposons 2 rotations successives, soit d'un repère $\vec{\mathfrak{F}}_A$ vers un repère $\vec{\mathfrak{F}}_C$ en passant par un repère intermédiaire $\vec{\mathfrak{F}}_I$:

$$\underline{C}_{CA} = \underline{C}_{CI}\underline{C}_{IA} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{C}_{IA} = \text{première rotation de } \mathfrak{F}_A \text{vers } \mathfrak{F}_I \\ \underline{C}_{CI} = \text{deuxième rotation de } \mathfrak{F}_I \text{vers } \mathfrak{F}_C \\ \underline{C}_{CA} = \text{orientation finale de } \mathfrak{F}_C \text{ par rapport à } \mathfrak{F}_A \end{array} \right.$$

  - On lit les indices de droite à gauche : de A vers I, de I vers C ce qui donne A vers C.

  - Si les quaternions équivalents aux rotations $\underline{C}_{IA}$, $\underline{C}_{CI}$ et $\underline{C}_{CA}$ sont respectivement dénotés par $\underline{q}_{IA} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{IA} \\ \eta_{IA} \end{bmatrix}$, $\underline{q}_{CI} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{CI} \\ \eta_{CI} \end{bmatrix}$ et $\underline{q}_{CA} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{CA} \\ \eta_{CA} \end{bmatrix}$, comment utiliser ces quaternions directement sans passer par les matrices de rotation et sans utiliser les équations (**2.25**) **-** (**2.26**)?

  - L'équivalent de $\underline{C}_{CA} = \underline{C}_{CI}\underline{C}_{IA}$ avec quaternions est donné par :

$$\boxed{\underline{q}_{CA} = \underline{Q}_{CI}^{-}\, \underline{q}_{IA}} \tag{2.30}$$

où la notation $\underline{Q}_{ij}^{-} = \underline{Q}^{-}(\underline{q}_{ij})$ donne une matrice 4×4 de la forme :

$$\underline{Q}^{-}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} - \underline{\varepsilon}^{\times} & \underline{\varepsilon} \\ -\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

- Noter que l'ordre des indices (de la droite vers la gauche) se lit aussi comme ce fut le cas pour les matrices de rotation. Noter aussi le signe négatif du terme $\underline{\varepsilon}^{\times}$ qui explique la notation $\underline{Q}^{-}$.

- Dans l'équation (**2.30**), la première rotation est à droite et la deuxième vers la gauche, permettant ainsi de suivre les rotations de façon conventionnelle de droite vers la gauche. Cependant, il y a aussi une autre relation équivalente où l'ordre des quaternions du côté droit est inversé:

$$\boxed{\underline{q}_{CA} = \underline{Q}_{IA}^{+}\, \underline{q}_{CI}} \tag{2.32}$$

où la notation $\underline{Q}_{ij}^{+} = \underline{Q}^{+}(\underline{q}_{ij})$ donne une matrice 4×4 de la forme :

$$\underline{Q}^{+}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} + \underline{\varepsilon}^{\times} & \underline{\varepsilon} \\ -\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

- Noter que l'ordre des indices (de la droite vers la gauche) est maintenant inversé et ne se lit plus comme pour $\underline{Q}^{-}$. Noter aussi le signe positif du terme $\underline{\varepsilon}^{\times}$ qui explique la notation $\underline{Q}^{+}$.

- Une inversion dans l'ordre des rotations correspond à l'inverse des matrices 4 x 4 :

$$\begin{aligned} &\underline{Q}_{AB}^{-} = \left(\underline{Q}_{BA}^{-}\right)^{-1} \qquad \underline{Q}_{AB}^{-} = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} - \underline{\varepsilon}^{\times} & \underline{\varepsilon} \\ -\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \qquad \left(\underline{Q}_{AB}^{-}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} + \underline{\varepsilon}^{\times} & -\underline{\varepsilon} \\ +\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \\ &\underline{Q}_{AB}^{+} = \left(\underline{Q}_{BA}^{+}\right)^{-1} \qquad \underline{Q}_{AB}^{+} = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} + \underline{\varepsilon}^{\times} & \underline{\varepsilon} \\ -\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \qquad \left(\underline{Q}_{AB}^{+}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \eta\underline{1} - \underline{\varepsilon}^{\times} & -\underline{\varepsilon} \\ +\underline{\varepsilon}^{T} & \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.34}$$

- Cela est dû au fait que l'inversion d'une rotation (inversion de la direction de la rotation) correspond à changer le signe de l'axe de rotation (de $\vec{a}$ à $-\vec{a}$) ce qui correspond à changer le signe de la partie vectorielle du quaternion (de $\underline{\varepsilon} = \underline{a}\sin\varphi/2$ à $-\underline{\varepsilon} = -\underline{a}\sin\varphi/2$), donc :

$$\text{Si } \underline{q}_{BA} = \begin{bmatrix} +\underline{\varepsilon} \\ +\eta \end{bmatrix} \quad \text{alors} \quad \underline{q}_{AB} = \begin{bmatrix} -\underline{\varepsilon} \\ +\eta \end{bmatrix}$$

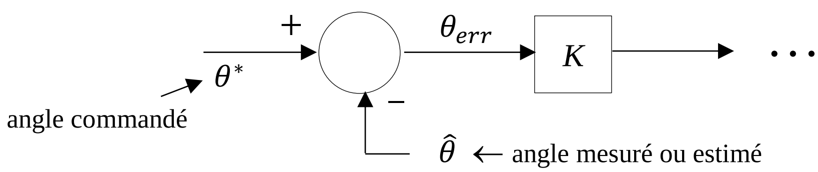
- Il peut être observé dans les matrices 4×4 ci-dessus que le changement du signe de la partie vectorielle $\underline{\varepsilon}$ du quaternion permet de trouver l'inverse de ces matrices.

- La notation ˜ sera utilisée pour dénoter la rotation inverse d'un quaternion :

$$\underline{q}_{BA} = \underline{\tilde{q}}_{AB} \tag{2.35}$$

2.12 APPLICATION AU CALCUL D'ERREUR D'ORIENTATION D'UN SATELLITE

- Un asservissement sur une seul axe de rotation (à entrée-unique, sortie-unique) a la forme classique :



- Ainsi, l'erreur d'orientation θ_{err} sur cet axe est définie par :

$$\theta_{err} = \theta^* - \hat{\theta} \tag{2.36}$$

  où θ^* est l'orientation commandée ou désirée et $\hat{\theta}$ est l'angle actuel, soit mesuré, soit estimé.

- On y voit que l'erreur θ_{err} est la rotation qu'il faut ajouter à l'orientation actuelle $\hat{\theta}$ pour atteindre l'orientation désirée : $\hat{\theta} + \theta_{err} = \theta^*$. L'erreur est donc la correction à appliquer pour atteindre θ^*.

- Dans le cas de la commande sur 3 axes d'un satellite, l'objectif du système de commande est de produire une rotation sur 3 axes qui rend le repère mesuré/estimé $\mathfrak{F}_{\hat{B}}$ du satellite (« B » pour « Body frame) coïncident avec le repère commandé $\mathfrak{F}_{B^*}$ du satellite.

- L'erreur entre ces deux repères doit être calculée et fournie à l'asservissement.

- Pour la commande sur 3 axes d'un satellite, les informations suivantes sont disponibles :

  $\underline{C}_{\hat{B}I}$ = orientation estimée ou mesurée de $\mathfrak{F}_{\hat{B}}$ par rapport au repère inertiel $\mathfrak{F}_I$
  $\underline{C}_{B^*I}$ = orientation commandée/ désirée de $\mathfrak{F}_B$ par rapport au repère inertiel $\mathfrak{F}_I$

- $\underline{C}_{\hat{B}I}$ est fournie par la fonction de navigation (ou directement par le capteur par ex. détecteur d'étoiles)
- $\underline{C}_{B^*I}$ est fournie par la fonction de guidage (ou directement par l'opérateur qui commande le satellite)

- Utilisant les matrices de rotation en cascade (Section 2.10), la relation entre ces orientations est :

$$\underline{C}_{B^*I} = \underline{C}_{B^*\hat{B}}\underline{C}_{\hat{B}I}$$

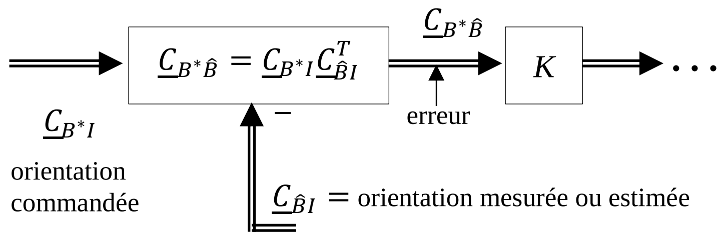
  d'où on peut obtenir la matrice de rotation $\underline{C}_{B^*\hat{B}}$ correspondant à l'erreur entre $\mathfrak{F}_{\hat{B}}$ et $\mathfrak{F}_{B^*}$:

$$\underline{C}_{B^*\hat{B}} = \underline{C}_{B^*I}\left(\underline{C}_{\hat{B}I}\right)^{-1} = \underline{C}_{B^*I}\underline{C}_{\hat{B}I}^T = \underline{C}_{B^*I}\underline{C}_{I\hat{B}}$$

- Tout comme dans le cas de l'asservissement sur un axe, on remarque que la matrice d'erreur $\underline{C}_{B^*\hat{B}}$ représente une rotation de $\mathfrak{F}_{\hat{B}}$ vers $\mathfrak{F}_{B^*}$.
- Le dernier terme à droite de l'équation permet de lire les transformations de la droite vers la gauche : de $\hat{B}$ à I et de I à B^* ce qui donne de $\hat{B}$ à B^*. Cependant, ce n'est pas $\underline{C}_{I\hat{B}}$ qui est directement disponible au système de commande mais $\underline{C}_{\hat{B}I}$, la rotation mesurée du repère inertiel au repère satellite, ou de façon équivalente, l'expression des vecteur unitaires de $\mathfrak{F}_{\hat{B}}$ telle que exprimée (mesurée) dans $\mathfrak{F}_I$.

- C'est donc l'équation suivante qui serait utilisée dans l'asservissement :

$$\underline{C}_{B^*\hat{B}} = \underline{C}_{B^*I}\underline{C}_{\hat{B}I}^{T} \tag{2.37}$$



- Cependant, les matrices de rotation ne sont pas désirables en termes de charge de calcul et d'efficacité puisqu'elles ont chacune 9 paramètres alors que seulement 4 (en évitant les singularités) sont nécessaires. On utilise donc les quaternions avec les correspondances suivantes :

$$\underline{C}_{\hat{B}I} \;\Leftrightarrow\; \underline{q}_{\hat{B}I} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\varepsilon}} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad \underline{C}_{B^*I} \;\Leftrightarrow\; \underline{q}_{B^*I} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^* \\ \eta^* \end{bmatrix} \qquad \underline{C}_{B^*\hat{B}} \;\Leftrightarrow\; \underline{q}_{B^*\hat{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_{err} \\ \eta_{err} \end{bmatrix}$$

  où la notation avec indices a été simplifiée pour une meilleure lisibilité.

- En utilisant les équations (**2.30**) et (**2.32**), le quaternion erreur peut être obtenu avec :

$$\underline{q}_{B^*\hat{B}} = \underline{Q}_{B^*I}^{-}\,\underline{q}_{I\hat{B}} = \underline{Q}_{B^*I}^{-}\,\underline{\tilde{q}}_{\hat{B}I}$$

  ou

$$\underline{q}_{B^*\hat{B}} = \underline{Q}_{I\hat{B}}^{+}\,\underline{q}_{B^*I} = \left(\underline{Q}_{\hat{B}I}^{+}\right)^{-1}\,\underline{q}_{B^*I} \tag{2.38}$$

- Avec les équations (**2.31**), (**2.33**), (**2.34**) et (**2.35**), ces deux équations donnent respectivement:

$$\underline{q}_{B^*\hat{B}} = \underline{Q}_{B^*I}^{-}\,\underline{\tilde{q}}_{\hat{B}I} = \begin{bmatrix} \eta^*\underline{1} - \left(\underline{\varepsilon}^*\right)^{\times} & \underline{\varepsilon}^* \\ -\left(\underline{\varepsilon}^*\right)^{T} & \eta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{\underline{\varepsilon}} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_{B^*\hat{B}} = \left(\underline{Q}_{\hat{B}I}^{+}\right)^{-1}\,\underline{q}_{B^*I} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}\underline{1} - \left(\hat{\underline{\varepsilon}}\right)^{\times} & -\hat{\underline{\varepsilon}} \\ +\left(\hat{\underline{\varepsilon}}\right)^{T} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^* \\ \eta^* \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

- Dans la première équation, le quaternion mesuré/estimé apparait à la droite et le quaternion commandé forme la matrice 4 x 4 de transformation. Dans la deuxième équation, c'est l'inverse. On remarque que les deux équations donnent exactement le même résultat, comme il se doit :

$$\underline{\varepsilon}_{err} = -\eta^*\hat{\underline{\varepsilon}} + \left(\underline{\varepsilon}^*\right)^{\times}\hat{\underline{\varepsilon}} + \underline{\varepsilon}^*\,\hat{\eta} \qquad \eta_{err} = \left(\underline{\varepsilon}^*\right)^{T}\hat{\underline{\varepsilon}} + \eta^*\,\hat{\eta}$$

$$\underline{\varepsilon}_{err} = +\hat{\eta}\underline{\varepsilon}^* - \left(\hat{\underline{\varepsilon}}\right)^{\times}\underline{\varepsilon}^* - \hat{\underline{\varepsilon}}\eta^* \qquad \eta_{err} = \left(\hat{\underline{\varepsilon}}\right)^{T}\underline{\varepsilon}^* + \hat{\eta}\eta^* \tag{2.40}$$

- En utilisant le quaternion d'erreur $\underline{q}_{B^*B}$ plutôt que $\underline{C}_{B^*B}$, le calcul de l'erreur d'orientation sur 3 axes est complété. Une loi de commande basée sur ce quaternion, de type $\underline{T}_c = -\underline{K}\;\underline{\varepsilon}_{err}$, permet d'imposer une rotation unique de l'état actuel du satellite vers son état désiré, contrairement aux techniques classiques d'asservissement axe par axe (voir Note historique).

2.13 ALGÈBRE DES QUATERNIONS AVEC LA CONVENTION « SCALAIRE EN HAUT »

- Comme mentionné à la Section 0, il y a deux conventions qui sont couramment utilisées pour la structure des quaternions:

$$\text{scalaire au bas du quaternion : } \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\text{scalaire au haut du quaternion } \begin{bmatrix} \eta \\ \underline{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

- Les principaux résultats des précédentes sections, développés avec la convention "scalaire au bas du quaternion" sont maintenant répétés avec la convention "scalaire au haut du quaternion".

- Les matrices de rotation 4 x 4 deviennent:

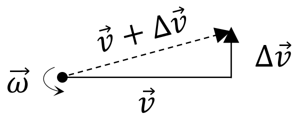
$$\begin{aligned} \underline{Q}_{AB}^{-} &= \left(\underline{Q}_{BA}^{-}\right)^{-1} & \underline{Q}_{AB}^{-} &= \begin{bmatrix} \eta & -\underline{\varepsilon}^T \\ \underline{\varepsilon} & \eta\underline{1} - \underline{\varepsilon}^{\times} \end{bmatrix} & \left(\underline{Q}_{AB}^{-}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \eta & +\underline{\varepsilon}^T \\ -\underline{\varepsilon} & \eta\underline{1} - \underline{\varepsilon}^{\times} \end{bmatrix} \\ \underline{Q}_{AB}^{+} &= \left(\underline{Q}_{BA}^{+}\right)^{-1} & \underline{Q}_{AB}^{+} &= \begin{bmatrix} \eta & -\underline{\varepsilon}^T \\ \underline{\varepsilon} & \eta\underline{1} + \underline{\varepsilon}^{\times} \end{bmatrix} & \left(\underline{Q}_{AB}^{+}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \eta & +\underline{\varepsilon}^T \\ -\underline{\varepsilon} & \eta\underline{1} + \underline{\varepsilon}^{\times} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.41}$$

- Les deux versions du quaternion erreur deviennent:

$$\begin{aligned} \underline{q}_{B^*\hat{B}} &= \underline{Q}_{B^*I}^{-}\, \underline{\tilde{q}}_{\hat{B}I} = \begin{bmatrix} \eta^* & -\left(\underline{\varepsilon}^*\right)^T \\ \underline{\varepsilon}^* & \eta^*\underline{1} - \left(\underline{\varepsilon}^*\right)^{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ -\underline{\hat{\varepsilon}} \end{bmatrix} \\ \underline{q}_{B^*\hat{B}} &= \left(\underline{Q}_{\hat{B}I}^{+}\right)^{-1} \underline{q}_{B^*I} = \begin{bmatrix} \hat{\eta} & +\left(\underline{\hat{\varepsilon}}\right)^T \\ -\underline{\hat{\varepsilon}} & \hat{\eta}\underline{1} - \left(\underline{\hat{\varepsilon}}\right)^{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^* \\ \underline{\varepsilon}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.42}$$

2.14 La cinématique des vectrices – vitesse angulaire et théorème de Coriolis

- La dérivée d'un vecteur $\vec{v}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ peut être représentée graphiquement et mathématiquement ainsi :



$$\Rightarrow\ \Delta\vec{v}\approx(\vec{\omega}\Delta t)\times\vec{v}\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\vec{\omega}\times\vec{v}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{v}=\vec{\omega}\times\vec{v}} \tag{2.43}$$

- La dérivée d’un vecteur dépend du repère dans lequel on observe ce vecteur. Supposons un repère inertiel $\vec{\mathfrak{F}}_a$ et un repère $\vec{\mathfrak{F}}_b$ qui tourne à une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{ba}$ par rapport à $\vec{\mathfrak{F}}_a$. On utilise la notation suivante :

$$\text{dérivée temporelle }\left(\frac{d}{dt}\right)\text{ telle que vue dans }\vec{\mathfrak{F}}_a=(\dot{\ })$$

$$\text{dérivée temporelle }\left(\frac{d}{dt}\right)\text{ telle que vue dans }\vec{\mathfrak{F}}_b=(\overset{\circ}{\ })$$

- Selon l'équation (**2.44**) et la notation ci-dessus:
  - $\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_a=\vec{0}$ $\quad\overset{o}{\vec{\mathfrak{F}}}_b=\vec{0}$ $\quad\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b\neq\vec{0}$
  - $\dot{\vec{b}}_x=\vec{\omega}_{ba}\times\vec{b}_x$ $\quad\dot{\vec{b}}_y=\vec{\omega}_{ba}\times\vec{b}_y$ $\quad\dot{\vec{b}}_z=\vec{\omega}_{ba}\times\vec{b}_z$ ce qui peut s'écrire:

$$\boxed{\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b=\vec{\omega}_{ba}\times\vec{\mathfrak{F}}_b} \tag{2.44}$$

- Donc, la dérivée d'un vecteur dans le cas général où $\begin{cases}\vec{\mathfrak{F}}_a \text{ est initiellement fixe}\\ \vec{\mathfrak{F}}_b \text{ tourne à } \vec{\omega}_{ba} \text{ par rapport à } \vec{\mathfrak{F}}_a\end{cases}$
  - forme vectorielle :

$$\begin{array}{lcl}
\vec{v}=\vec{\mathfrak{F}}_a^T\,\underline{v}^a & = & \vec{v}=\vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{v}^b\\
\dot{\vec{v}}=\cancel{\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_a^T}\,\underline{v}^a+\vec{\mathfrak{F}}_a^T\dot{\underline{v}}^a & & \dot{\vec{v}}=\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b^T\,\underline{v}^b+\vec{\mathfrak{F}}_b^T\dot{\underline{v}}^b\\
\dot{\vec{v}}=\vec{\mathfrak{F}}_a^T\dot{\underline{v}}^a & & \dot{\vec{v}}=\left(\vec{\omega}_{ba}\times\vec{\mathfrak{F}}_b^T\right)\underline{v}^b+\vec{\mathfrak{F}}_b^T\dot{\underline{v}}^b\\
\vdots & & \dot{\vec{v}}=\vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{\omega}_{ba}^{\times}\,\underline{v}^b+\vec{\mathfrak{F}}_b^T\dot{\underline{v}}^b\\
\dot{\vec{v}}=\vec{\mathfrak{F}}_a^T\dot{\underline{v}}^a & & \dot{\vec{v}}=\vec{\mathfrak{F}}_b^T(\underbrace{\dot{\underline{v}}^b}_{\overset{\circ}{\vec{v}}}+\underbrace{\underline{\omega}_{ba}^{\times}\,\underline{v}^b}_{\vec{\omega}\times\vec{v}})
\end{array}$$

$$\boxed{\dot{\vec{v}}=\overset{\circ}{\vec{v}}+\vec{\omega}_{ba}\times\vec{v}} \tag{2.45}$$

- formes composantes, on prend le produit $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot$ par la gauche:

$$\vec{\mathfrak{F}}_a^T \underline{\dot{v}}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T(\,\underline{\dot{v}}^b + \underline{\omega}_{ba}^\times\,\underline{v}^b)$$

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \Rightarrow \qquad \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_a^T}_{\underline{1}} \underline{\dot{v}}^a = \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \vec{\mathfrak{F}}_b^T}_{\underline{C}_{ab}}(\underline{\dot{v}}^b + \underline{\omega}_{ba}^\times\,\underline{v}^b) \qquad \Rightarrow\ \underline{\dot{v}}^a = \underline{C}_{ab}(\underline{\dot{v}}^b + \underline{\omega}_{ba}^\times\,\underline{v}^b)$$

- la variation des composantes par rapport au repère inertiel, exprimée dans le repère $\mathfrak{F}_b$, contient deux éléments: la vitesse des composantes telles que vue dans le repère $\mathfrak{F}_b$, $\underline{\dot{v}}^b$, et la contribution de vitesse due à la rotation du repère $\mathfrak{F}_b$ lui-même, $\underline{\omega}_a^\times \underline{v}^b$.

$$\boxed{\underline{\dot{v}}^a = \underline{C}_{ab}\left(\underline{\dot{v}}^b + \underline{\omega}_a^\times \underline{v}^b\right)} \tag{2.46}$$

- L'équation (**2.45**) est connue sous le nom de **Théorème de Coriolis**.
- On peut ainsi calculer la dérivée de la matrice de rotation :
  - $\underline{v}^a = \underline{C}_{ab}\underline{v}^b \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{v}}^a = \underline{C}_{ab}\underline{\dot{v}}^b + \underline{\dot{C}}_{ab}\underline{v}^b$
  - Selon **(2.46)** $\quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{v}}^a = \underline{C}_{ab}\underline{\dot{v}}^b + \underline{C}_{ab}\,\underline{\omega}_{ba}^\times\,\underline{v}^b$
  - Par comparaison:

$$\boxed{\underline{\dot{C}}_{ab} = \underline{C}_{ab}\ \underline{\omega}_{ba}^\times} \quad \boxed{\begin{aligned}\underline{C}_{ab}^T\underline{\dot{C}}_{ab} &= \underline{\omega}_{ba}^\times \\ \underline{C}_{ba}\underline{\dot{C}}_{ba}^T &= \underline{\omega}_{ba}^\times\end{aligned}} \tag{2.47}$$

  - On obtient une relation entre la dérivée d'une matrice de rotation et la vitesse angulaire entre les deux repères. Une autre façon d'obtenir ce résultat est de dériver: $\vec{\mathfrak{F}}_a = \underline{C}_{ab}\vec{\mathfrak{F}}_b$ ou $\vec{\mathfrak{F}}_a^T = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{C}_{ba}$
    - on prend $\left(\frac{d}{dt}\right) = (\dot{\ })\Rightarrow\ \dot{\vec{\mathfrak{F}}}_a^T = \dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b^T\underline{C}_{ba} + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{C}}_{ba}$

$$0 = (\vec{\omega}_{ba} \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T)\underline{C}_{ba} + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{C}}_{ba}$$

$$0 = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\ \underline{\omega}_{ba}^\times\underline{C}_{ba} + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{C}}_{ba}$$

$$0 = \vec{\mathfrak{F}}_b^T(\underline{\omega}_{ba}^\times\underline{C}_{ba} + \underline{\dot{C}}_{ba})$$

    - Donc : $\underline{\dot{C}}_{ba} + \underline{\omega}_{ba}^\times\underline{C}_{ba} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{C}}_{ba}\underline{C}_{ba}^T = -\underline{\omega}_{ba}^\times$

transpose $\quad \underline{C}_{ba}\underline{\dot{C}}_{ba}^T = \underline{\omega}_{ba}^\times$

  - L'équation (**2.46**) représente la relation cinématique entre la vitesse angulaire $\underline{\omega}_{ba}$ et la dérivée des angles de Euler dans $\underline{\dot{C}}_{ba}$ (3 angles des rotations principales).

  - On peut ainsi trouver les angles en fonction du temps par intégration.

- Il y a une façon plus simple de relier la dérivée des angles et $\underline{\omega}$ pour des rotations Euler élémentaires.
- On reprend l'exemple de la Section 2.7 avec les rotations 3–1–3 d'angles (Ω, i, u)

  - 1re rotation ⇒ $\dot{\Omega}$ autour de $\vec{I}_z$
  - 2e rotation ⇒ $(\dot{i})$ autour de $\vec{I}'_x = \vec{N}$
  - 3e rotation ⇒ $\dot{u}$ autour de $\vec{I}''_z = \vec{O}_z$
  - Donc :

$$\vec{\omega}_{OI} = \dot{\Omega}\vec{I}_z + (\dot{i})\vec{I}_x^{\,'} + \dot{u}\vec{O}_z \tag{2.48}$$

  - Selon la section 2.7 (positionnement d'un satellite) :

$$\vec{I}_z = \vec{I}_z^{\,'} = sisu\,\vec{O}_x + sicu\,\vec{O}_y + ci\vec{O}_z$$
$$\vec{I}'_x = cu\,\vec{O}_x - su\,\vec{O}_y$$

  - On remplace dans (**2.48**):

$$\vec{\omega}_{OI} = \dot{\Omega}\left(sisu\,\vec{O}_x + sicu\,\vec{O}_y + ci\,\vec{O}_z\right) + (\dot{i})\left(cu\,\vec{O}_x - su\,\vec{O}_y\right) + \dot{u}\vec{O}_z$$

  - On extrait les composantes dans $\mathfrak{F}_O$:

$$\underline{\omega}_{OI}^{O} = \begin{bmatrix} \sin i \sin u & +\cos u & 0 \\ \sin i \cos u & -\sin u & 0 \\ \cos i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ (\dot{i}) \\ \dot{u} \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega}_{OI}^{O} = \underline{K}(i,u) \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ (\dot{i}) \\ \dot{u} \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

  - $\underline{\omega}_{OI}^{O}$ représente la vitesse angulaire de $\mathfrak{F}_\mathrm{O}$ par rapport à $\mathfrak{F}_\mathrm{I}$ exprimée dans $\mathfrak{F}_\mathrm{O}$.
  - En reprenant (**2.48**), on pourrait aussi exprimer les vecteurs unitaires dans $\mathfrak{F}_I$ plutôt que dans $\mathfrak{F}_O$:

Exercice A-23 : Vitesse angulaire

A23.

- Démontrer que : $\vec{I}_z = \vec{I}_z$ (facile!)
  $\vec{I}'_x = \cos\Omega\,\vec{I}_x + \sin\Omega\,\vec{I}_y$
  $\vec{O}_z = s\,\Omega\,si\,\vec{I}_x - c\,\Omega\,si\,\vec{I}_y + ci\,\vec{I}_z$

- et qu'en substituant ces résultats dans (**2.48**), on obtient :

$$\underline{\omega}_{OI}^{I} = \begin{bmatrix} (\dot{i})\cos\Omega + \dot{u}\sin\Omega\sin i \\ (\dot{i})\sin\Omega - \dot{u}\cos\Omega\sin i \\ \dot{\Omega} + \dot{u}\cos i \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

- $\underline{\omega}_{OI}^{I}$ représente la vitesse angulaire de $\mathfrak{F}_{\mathrm{O}}$ par rapport à $\mathfrak{F}_{\mathrm{I}}$ exprimée dans $\mathfrak{F}_{\mathrm{I}}$.

- Démontrer que :

$$\underbrace{\underline{\omega}_{OI}^{O}}_{(\mathbf{2.49})} = \underbrace{\underline{C}_{OI}}_{(\mathbf{2.18})}\underline{\omega}_{OI}^{I} \tag{2.51}$$

* * * * *

- La forme $\underline{\omega}_{\mathrm{OI}}^{\mathrm{O}}$ est normalement utilisée, pas $\underline{\omega}_{\mathrm{OI}}^{\mathrm{I}}$

  → la vitesse angulaire est exprimée dans le « dernier » système d'axes, celui qui tourne, plutôt que dans le système de départ. Dans ce cas, on omet souvent l'indice qui donne le référentiel où le vecteur est normalement exprimé, exemple : $\underline{\omega}_{BA}^{B} = \underline{\omega}_{BA}$.

- En inversant $\underline{\mathrm{K}}(\mathrm{i},\mathrm{u})$ de l'équation (2.49), $\underline{\mathrm{K}}^{-1}(\mathrm{i},\mathrm{u})$, on obtient la dérivée des angles de Euler:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ (\dot{i}) \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin u}{\sin i} & \dfrac{\cos u}{\sin i} & 0 \\ \cos u & -\sin u & 0 \\ -\cot i \sin u & -\cot i \cos u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^O \\ \omega_y^O \\ \omega_z^O \end{bmatrix} = \underline{K}^{-1}(i,u)\,\underline{\omega}_{OI}^{O} \tag{2.52}$$

- Ainsi, avec la connaissance de $\underline{\omega}_{\mathrm{OI}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{t})$ obtenue par les équations dynamiques (voir section suivante), on peut trouver $\Omega(\mathrm{t}), \mathrm{i}(\mathrm{t}), \mathrm{u}(\mathrm{t})$ par intégration de (2.52).

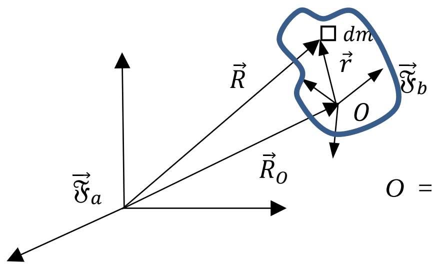
- Noter la singularité quand $\mathrm{i} = 0$: $\dot{\Omega}$ et $\dot{\mathrm{u}}$ n'existent pas, mais leur somme existe : $\dot{\Omega} + \dot{\mathrm{u}} = \omega_z^O$.

2.15 ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS RIGIDE

- Avec les notions de base des précédentes sections, il est maintenant possible de développer les équations du mouvement d'un corps rigide sous forme vectorielle et sous formes composantes.

2.15.1 Équations vectorielles

- Soit un repère $\vec{\mathfrak{F}}_b$ fixé à un corps rigide dont l'origine O est en un point qui n'est pas le centre de masse.
- $\vec{\mathfrak{F}}_b$ tourne à la vitesse $\vec{\omega}_b$ par rapport à $\vec{\mathfrak{F}}_a$
- $\vec{\mathfrak{F}}_a$ est fixe inertiellement
- La position de l'élément de masse dm est:



O = point de référence ($\neq c$ de m)

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}} \qquad (\vec{R} = \text{position absolue de } O,\ \vec{r} = \text{position relative à } O)$$

- La vitesse de l'élément de masse dm est:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_O + \dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega}_b \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}_b \qquad (\overset{\circ}{\vec{r}} = \vec{0} \text{ pour un corps rigide})$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V}_O - \vec{r} \times \vec{\omega}_b} \quad \text{où} \quad \vec{V}_O = \dot{\vec{R}}_O = \text{la vitesse inertielle du point de référence } O$$

- La quantité de mouvement linéaire $\vec{p}$ est:

$$\vec{p} = \int \vec{v}\ dm = \int (\vec{V}_O - \vec{r} \times \vec{\omega}_b) dm \qquad \begin{cases} \int \vec{V}_O\ dm = m\vec{V}_O \\ \int (\vec{r} \times \vec{\omega}_b) dm = \left[\int (\vec{r}) dm\right] \times \vec{\omega}_b = \vec{c} \times \vec{\omega}_b \end{cases}$$

où $\vec{c} = \int(\vec{r})dm = m\,\vec{r}_{cm}$ et où $\vec{r}_{cm}$ est la position du centre de masse par rapport à O.

- Le résultat devient :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}_O - \vec{c} \times \vec{\omega}_b} \tag{2.53}$$

- Selon la 2e loi de Newton en translation ($\vec{F}$ = somme des forces appliquées) :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overset{\circ}{\vec{p}} + \vec{\omega}_b \times \vec{p} = \vec{F}} \tag{2.54}$$

- La quantité de mouvement angulaire $\vec{h}_O$ par rapport à O est:

$$\vec{h}_O = \int \vec{r} \times \vec{v}\ dm = \int [\underset{①}{\vec{r} \times} (\vec{V}_O - \underset{②}{\vec{r} \times \vec{\omega}_b})] dm$$

$$① \Rightarrow \int \vec{r} \times \vec{V}_O \, dm = \vec{c} \times \vec{V}_O$$

$$② \Rightarrow \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}_b) = (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_b)\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega}_b = \left(\vec{r}\vec{r} - r^2\vec{\vec{1}}\right) \cdot \vec{\omega}_b \text{ donc}$$

$$-\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}_b) = \left(r^2\vec{\vec{1}} - \vec{r}\vec{r}\right) \cdot \vec{\omega}_b$$ voir Section 2.2.2 sur les dyades

$$\int -\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}_b) \, dm = \left\{\int \left(r^2\vec{\vec{1}} - \vec{r}\vec{r}\right) dm\right\} \cdot \vec{\omega}_b = \vec{\vec{J}}_O \cdot \vec{\omega}_b$$

$$\vec{\vec{J}}_O \triangleq \int \left(r^2\vec{\vec{1}} - \vec{r}\vec{r}\right) dm = \text{dyade (ou tenseur) d'inertie}$$

$$\boxed{\vec{h}_O = \vec{c} \times \vec{V}_O + \vec{\vec{J}}_O \cdot \vec{\omega}_b} \tag{2.55}$$

- Selon la 2e loi de Newton en rotation ($\vec{T}_O$ = somme des couples appliqués par rapport à O):

$$\dot{\vec{h}}_O + \vec{V}_O \times \vec{p} = \vec{T}_O \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overset{o}{\vec{h}}_O + \vec{\omega}_b \times \vec{h}_O + \vec{V}_O \times \vec{p} = \vec{T}_O} \tag{2.56}$$

- Résumé :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{p} = m\vec{V}_O - \vec{c} \times \vec{\omega}_b & \overset{o}{\vec{p}} = -\vec{\omega}_b \times \vec{p} + \vec{F} \\ \vec{h}_O = \vec{\vec{J}}_O \cdot \vec{\omega}_b + \vec{c} \times \vec{V}_O & \overset{o}{\vec{h}}_O = -\vec{\omega}_b \times \vec{h}_O - \vec{V}_O \times \vec{p} + \vec{T}_O \end{array}} \tag{2.57}$$

2.15.2 Équations scalaires

$$\underline{p} = m\,\underline{V}_O - \underline{c}^{\times}\omega_b \qquad \underline{\dot{p}} = -\underline{\omega}_b^{\times}\underline{p} + \underline{F}$$

$$\underline{h}_O = \underline{J}_O^b\underline{\omega}_b + \underline{c}^{\times}\underline{V}_O \qquad \underline{\dot{h}}_O = -\underline{\omega}_b^{\times}\underline{h}_O - \underline{V}_O^{\times}\underline{p} + \underline{T}_O$$

Note :

$$\underline{J}_O^b = \int \left(r^2\underline{1} - \underline{r}\,\underline{r}^T\right) dm = \vec{\vec{\mathfrak{F}}}_b \cdot \vec{\vec{J}}_O \cdot \vec{\vec{\mathfrak{F}}}_b^T$$

2.15.3 Cas où le point *O* ≡ centre de masse ($\underline{c} = \underline{O}$)

$$\underline{p} = m\,V_c \qquad \underline{\dot{p}} = -\underline{\omega}_b^{\times}\underline{p} + \underline{F}$$

$$\underline{h}_c = \underline{J}_c^b\,\underline{\omega}_b \qquad \underline{\dot{h}}_c = -\underline{\omega}_b^{\times}\underline{h}_c + \underline{T}_c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m\,\underline{\dot{V}}_c = -m\,\underline{\omega}_b^{\times}\underline{V}_c + \underline{F} \\ \underline{J}_c\underline{\dot{\omega}}_b = -\underline{\omega}_b^{\times}\underline{J}_c^b\,\underline{\omega}_b + \underline{T}_c \end{array}} \tag{2.58}$$

- Si $\underline{J}_c^b = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$ $V_c^b = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ $\underline{\omega}_b^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ on obtient

  → pas toujours aussi simple

$$\dot{v}_x = +\omega_z v_y - \omega_y v_z + \frac{F_x}{m}$$
$$\dot{v}_y = -\omega_z v_x - \omega_x v_z + \frac{F_y}{m}$$
$$\dot{v}_z = +\omega_y v_x - \omega_x v_y + \frac{F_z}{m}$$

DYNAMIQUE
TRANSLATION

$$\dot{\omega}_x = \frac{1}{J_x}\{(J_y - J_z)\omega_x\omega_z + T_{cx}\}$$
$$\dot{\omega}_y = \frac{1}{J_y}\{(J_z - J_x)\omega_z\omega_x + T_{cy}\}$$
$$\dot{\omega}_z = \frac{1}{J_z}\{(J_x - J_y)\omega_x\omega_y + T_{cz}\}$$

DYNAMIQUE
ROTATION

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \underline{K}^{-1}\,(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

CINÉMATIQUE
ROTATION

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underline{C}_{ab} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

→ où $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ = position dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$

CINÉMATIQUE
TRANSLATION
(« NAVIGATION »)

2.16 ÉQUATIONS DE TRANSLATION D'UNE MASSE PONCTUELLE

- Dans la Section 2.15, les équations du mouvement en translation et en rotation d'un corps rigide ont été développées. Le développement des équations supposait :

  - $\vec{\mathfrak{F}}_a$ = référentiel inertiel i.e. fixe par rapport aux étoiles
  - $\vec{\mathfrak{F}}_b$ = référentiel tournant, fixé au corps rigide
  - Tout mouvement d'un élément de masse dm, relatif à l'origine de $\vec{\mathfrak{F}}_b$ est donc nul : $\overset{\circ}{\vec{r}} = \vec{0}$
  - La vitesse du corps est exprimée dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$, la position dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$.

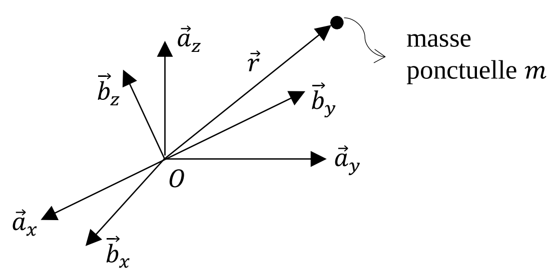
- Ces équations sont utiles pour décrire les mouvements de translation et de rotation couplés d'un corps rigide, comme c'est le cas pour un aéronef. Dans certaines autres applications (dynamique orbitale d'un satellite par exemple), on veut exprimer le mouvement de translation d'une masse ponctuelle (le satellite) par rapport à un repère tournant $\mathfrak{F}_b$ (le repère orbital) qui n'est plus fixé à la masse ponctuelle et dans lequel la masse ponctuelle se déplace.
- Dans ces applications, on a toujours $\vec{\mathfrak{F}}_a$ comme étant le repère inertiel (qui sera dénoté $\vec{\mathfrak{F}}_I$), mais on préfère :

  - $\vec{\mathfrak{F}}_b$ = référentiel « tournant » orbital (qui sera dénoté $\vec{\mathfrak{F}}_O$)
  - Les mouvements relatifs à $\vec{\mathfrak{F}}_b$ ne sont donc pas nuls : $\overset{\circ}{\vec{r}} \neq \vec{0}$
  - La vitesse et la position sont exprimées dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$.

- Cette version des équations est souvent utilisée pour décrire la trajectoire d'un point dans l'espace (e.g. le centre de masse d'un corps) et où le référentiel tournant $\vec{\mathfrak{F}}_b$ est choisi selon d'autres critères de convenance.

- Cette version des équations mène à une double application du Théorème de Coriolis.

- On reprend l'énoncé de la Section **2.15.1**, avec la généralisation où $\vec{\mathfrak{F}}_b$ n'est plus fixé au corps. Sa définition exacte dépendra des applications. Donc :



  - $\vec{\mathfrak{F}}_a$ est fixe inertiellement.
  - $\vec{\mathfrak{F}}_b$ tourne par rapport à $\vec{\mathfrak{F}}_a$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_b$.
  - La position de la masse m est $\vec{r}$.
  - On ne se préoccupe pas de la rotation du corps (d'où la simplification à une masse ponctuelle : son centre de masse).

- Dans ces conditions, la vitesse $\vec{v}$ du point et la quantité de mouvement linéaire $\vec{p}$ deviennent :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \int \vec{v}\, dm = m\, \dot{\vec{r}} \tag{2.59}$$

- La 2e loi de Newton donne donc le résultat connu :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}} \tag{2.60}$$

- Si $\vec{r}$ et $\vec{F}$ étaient exprimés dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$, on pourrait directement intégrer (**2.60**) deux fois pour obtenir la position inertielle du corps $\vec{r}(t)$ en fonction du temps :

  - On prend le produit vectriciel par la gauche $\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \{m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t)\}$ et on obtient:

$$m\,\underline{\ddot{r}}^a = \underline{F}^a(t) \begin{Bmatrix} \Rightarrow\ \underline{v}^a = \underline{\dot{r}}^a = \dfrac{1}{m}\int_o^t \underline{F}^a dt + \underline{v}^a(0) \\ \Rightarrow\ \underline{r}^a = \int_o^t \underline{v}^a dt + \underline{r}^a(0) \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

- Cependant, comme annoncé précédemment, on préfère souvent exprimer $\vec{r}$ et $\vec{F}$ dans le référentiel tournant $\vec{\mathfrak{F}}_b$ par ce qu'il est plus naturel, pour le problème, de faire ainsi.

- Dans ce cas, la variation de toute quantité vectorielle $\vec{Q}$ par rapport au repère inertiel $\vec{\mathfrak{F}}_a$ doit être décomposée en deux : celle « observée » dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$ et celle contribuée par la rotation de $\vec{\mathfrak{F}}_b$:

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{Q}} = \overset{o}{\vec{Q}} + \vec{\omega}_b \times \vec{Q}} \qquad \text{Comme vu à l'équation } (\mathbf{2.45}) \tag{2.62}$$

  - $\dot{\vec{Q}}$: variation totale vue dans $\vec{\mathfrak{F}}_a$

  - $\overset{o}{\vec{Q}}$: variation « partielle » vue dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$
    → donc variation des composantes de $\vec{Q}$ dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$

  - $\vec{\omega}_b \times \vec{Q}$: contribution additionnelle causée par la rotation de $\vec{\mathfrak{F}}_b$ par rapport à $\vec{\mathfrak{F}}_a$.

- Ces résultats sont les mêmes que ceux de la Section 2.14 mais ici, expliqués d'une autre façon.

☙ OUVRE PARENTHÈSES ❧

- Pour y voir plus clair: <u>sous forme de composantes</u> :
    - $\underline{Q}^a = \underline{C}_{ab}\underline{Q}_b \Rightarrow$ on prend $\frac{d}{dt} \Rightarrow \underline{\dot{Q}}^a = \underline{C}_{ab}\underline{\dot{Q}}^b + \underline{\dot{C}}_{ab}\underline{Q}^b$
    - Selon (**2.47**) : $\underline{\dot{C}}_{ab} = \underline{C}_{ab}\underline{\omega}_b^{\times}$, donc, en remplaçant

$$\boxed{\underline{\dot{Q}}^a = \underline{C}_{ab}\left[\underline{\dot{Q}}^b + \underline{\omega}_b^{\times}\underline{Q}^b\right]} \tag{2.63}$$

- Correspondance avec (**2.62**)

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \cdot \dot{\vec{Q}} \qquad \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot \overset{\circ}{\vec{Q}}}_{\text{variation des composantes dans } \vec{\mathfrak{F}}_b} \qquad \underbrace{\vec{\mathfrak{F}}_b \cdot (\vec{\omega} \times \vec{Q})}_{\text{contribution de la rotation de } \vec{\mathfrak{F}}_b \text{ par rapport à } \vec{\mathfrak{F}}_a}$$

- Donc, le terme $\overset{\circ}{\vec{Q}}$ permet de trouver les variations de $\vec{Q}$ telles que vues dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$ et, par conséquent, les variations des composantes dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$: $\overset{\circ}{\vec{Q}} \leftrightarrow \underline{\dot{Q}}^b$.

- Autre façon de voir ces choses, <u>avec les vectrices</u> :

$$\vec{Q} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{Q}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{Q}^b$$

$$\frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a + \boxed{\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_a^T\underline{Q}^a} = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{Q}}^b + \dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b^T\underline{Q}^b$$

$$\vec{\mathfrak{F}}_a \text{ est inertiel} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a + \boxed{\vec{0}} = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{Q}}^b + \boxed{\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b^T\underline{Q}^b}$$

$$\text{Eq. (\textbf{2.44})} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{Q}}^b + \left(\vec{\omega}_b \times \vec{\mathfrak{F}}_b^T\right)\underline{Q}^b$$

$$\text{Eq. (\textbf{2.1})} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{Q}}^b + \vec{\omega}_b \times \vec{Q}$$

$$\text{Eq. (\textbf{2.6})} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\underline{\dot{Q}}^b + \vec{\mathfrak{F}}_b^T\,\underline{\omega}_b^{\times}\underline{Q}^b$$

$$\text{Finalement} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{Q}} = \vec{\mathfrak{F}}_a^T\underline{\dot{Q}}^a = \vec{\mathfrak{F}}_b^T\left[\underline{\dot{Q}}^b + \boxed{\underline{\omega}_b^{\times}\underline{Q}^b}\right] \tag{2.64}$$

Dans cette version, on voit que le terme $\vec{\omega}_b \times \vec{Q}$ $\left(\Rightarrow \underline{\omega}_b^{\times}\underline{Q}^b\right)$ est causé par le fait que $\vec{\mathfrak{F}}_b$ n'est pas inertiel et que, par conséquent, $\dot{\vec{\mathfrak{F}}}_b$ contribue à la variation de $\vec{Q}$.

☙ FERME PARENTHÈSES ❧

Exercice A-24 : Dynamique d'une masse ponctuelle dans un repère tournant

A24. En utilisant :

- le résultat général de l'Éq. (**2.62**), valide pour tout vecteur $\vec{Q}$
- la 2e loi de Newton dans le cas du centre de masse d'un corps, Eq. (**2.60**),

démontrer que les équations de translation de la masse m, sous forme vectorielle, sont exprimées en termes de variations « vues dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$ » par :

$$\boxed{m\left\{\overset{\circ\circ}{\vec{r}} + 2\,\vec{\omega}_b \times \overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega}_b \times (\vec{\omega}_b \times \vec{r}) + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_b \times \vec{r}\right\} = \vec{F}} \tag{2.65}$$

et sous forme scalaire :

$$m\left\{\underline{\ddot{r}}^b + 2\,\underline{\omega}_b^\times \underline{\dot{r}}^b + \underline{\omega}_b^\times \underline{\omega}_b^\times \underline{r}^b + \underline{\dot{\omega}}_b^\times \underline{r}^b\right\} = \underline{F}^b \tag{2.66}$$

* * * * *

- Note 1 : Pourquoi $\dot{\vec{\omega}}_b = \overset{\circ}{\vec{\omega}}_b$? Donner une explication au sens mathématique et physique.
- Note 2 :
  - Le terme $\vec{\omega}_b \times (\vec{\omega}_b \times \vec{r})$ est l'accélération centripète.
    Même quand m est fixe dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$ $\left(\overset{\circ}{\vec{r}} = \overset{\circ\circ}{\vec{r}} = \vec{0}\right)$ et même quand la rotation est non accélérée $\left(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_b = \vec{0}\right)$, il faut appliquer une force $\vec{F} = m\,\vec{\omega}_b \times (\vec{\omega}_b \times \vec{r})$ pour maintenir m fixe dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$. Pour un observateur dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$, cette accélération est dite accélération centrifuge.
  - Le terme $2\,\vec{\omega}_b \times \overset{\circ}{\vec{r}}$ $\left(\Longrightarrow 2\,\underline{\omega}_b^\times \underline{\dot{r}}^b\right)$ est l'accélération de Coriolis. Un déplacement radial dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$ $\left(\overset{\circ}{\vec{r}} \neq \vec{0}\right)$ non parallèle à l'axe de rotation nécessite une force latérale $\vec{F} = m\,2\,\vec{\omega}_b \times \overset{\circ}{\vec{r}}$ pour maintenir la trajectoire de la masse m le long de la ligne radiale.
  - Le terme $\overset{\circ}{\vec{\omega}}_b \times \vec{r}$ tient compte de l'accélération angulaire de $\vec{\mathfrak{F}}_b$.
  - Le terme $\overset{\circ\circ}{\vec{r}}$ tient compte de l'accélération de la masse m telle que vue dans $\vec{\mathfrak{F}}_b$.