

# **MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE D'UN SATELLITE**

**GEI-720**

*Jean de Lafontaine*

## **CHAPITRE 4**

### **Connaissances et compétences**

#### **Contenu de ce chapitre**

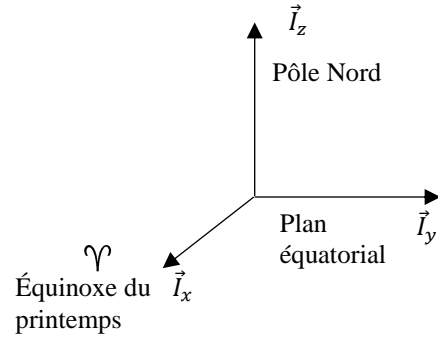
4	INTRODUCTION .....	4-1
4.1	Systèmes de référence.....	4-1
4.2	Dynamique orbitale .....	4-2
4.3	Dynamique orbitale planaire.....	4-6
4.4	Linéarisation de la dynamique orbitale planaire.....	4-7
4.5	Orbite non perturbée : orbite képlérienne .....	4-7
4.6	Perturbations orbitales .....	4-12
4.7	Orbite perturbée : Méthode de la variation des constantes .....	4-13
4.8	Méthode de la moyenne (« Method of Averaging ») .....	4-16
4.9	Dynamique de rotation – sans roues à réaction .....	4-21
4.10	Dynamique de rotation – avec roues à réaction.....	4-23
4.11	Cinématique de rotation.....	4-27
4.12	Mesure du quaternion – détecteur d'étoile .....	4-29

## 4 INTRODUCTION

### 4.1 SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE

- Référentiel inertiel

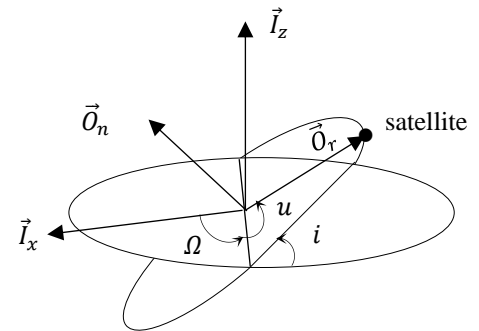
- $\vec{\mathcal{F}}_I = [\vec{I}_x \ \vec{I}_y \ \vec{I}_z]^T$  fixe par rapport aux étoiles
- $\vec{I}_x$  vers le 1<sup>er</sup> point d'Aries (Bélier)
- $\vec{I}_z$  vers le pôle Nord terrestre
- $\vec{I}_y = \vec{I}_z \times \vec{I}_x$



- On suppose  $\vec{\mathcal{F}}_I$  fixe inertiellement. On néglige donc la nutation et la précession de l'axe polaire.

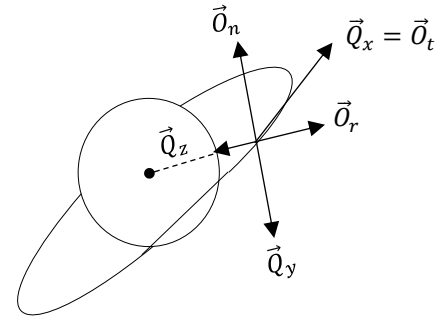
- Référentiel orbital

- $\vec{\mathcal{F}}_O = [\vec{O}_r \ \vec{O}_t \ \vec{O}_n]^T$
- $\vec{O}_r$  vers le satellite ( $\vec{O}_r \equiv \vec{O}_x$ )
- $\vec{O}_n$  normal au plan orbital ( $\vec{O}_n \equiv \vec{O}_z$ )
- $\vec{O}_t = \vec{O}_n \times \vec{O}_r$  ( $\vec{O}_t \equiv \vec{O}_y$ )
- $\vec{\mathcal{F}}_O$  obtenu de  $\vec{\mathcal{F}}_I$  par une rotation 3–1–3 d'angles  $\Omega, i, u$ .



- Référentiel « roll pitch yaw » (« RPY frame » ou « Q frame »)

- $\vec{\mathcal{F}}_Q = [\vec{Q}_x \ \vec{Q}_y \ \vec{Q}_z]^T$  fixe par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_O$
- $\left. \begin{array}{l} \vec{Q}_x = +\vec{O}_t \\ \vec{Q}_y = -\vec{O}_n \\ \vec{Q}_z = -\vec{O}_r \end{array} \right\} \vec{\mathcal{F}}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_O$



- $\vec{Q}_x$  forme un angle aigu avec vecteur vitesse du satellite (« roll »)
- $\vec{Q}_y$  le long du vecteur anti-normal (« pitch »)
- $\vec{Q}_z$  pointe vers le centre de la Terre (« yaw »)
- Les référentiels  $\vec{\mathcal{F}}_O$  et  $\vec{\mathcal{F}}_Q$  sont similaires (une rotation fixe les relie). L'utilité de  $\vec{\mathcal{F}}_O$ , dont l'origine est au centre de la Terre, est de positionner le satellite sur son orbite. L'utilité de  $\vec{\mathcal{F}}_Q$ , dont l'origine est au centre de masse du satellite, est d'orienter le satellite par rapport au repère orbital.

- Référentiel « body frame »

- $\vec{\mathcal{F}}_B = [\vec{B}_x \ \vec{B}_y \ \vec{B}_z]^T$  fixe au satellite.

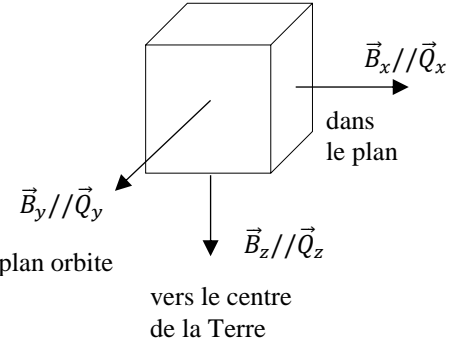
- La définition de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  dans le satellite dépend du design du satellite.

- $\vec{\mathcal{F}}_B$  est typiquement obtenu de  $\vec{\mathcal{F}}_O$  (pas de  $\vec{\mathcal{F}}_I$ ) avec une rotation 3–2–1 d'angles  $\psi \ \theta \ \varphi$ .

- Les références  $\vec{G}_x$  et  $\vec{G}_z$  pour l'avion deviennent les axes  $\vec{Q}_x$  et  $\vec{Q}_z$  pour le satellite.

- Quand  $\psi = 0, \theta = 0, \varphi = 0$ ,  $\vec{\mathcal{F}}_B$  est parallèle à  $\vec{\mathcal{F}}_Q$  et le satellite est dans l'orientation orbitale « pointage-nadir » où son axe  $\vec{B}_z$  pointe vers le centre de la Terre (nadir). Pour ces raisons, on appelle parfois  $\vec{B}_x \ \vec{B}_y \ \vec{B}_z$  les axes roulis, tangage, lacet du satellite (mais cela peut causer confusion avec  $\vec{Q}_x \ \vec{Q}_y \ \vec{Q}_z$  quand  $\psi \neq 0, \theta \neq 0, \varphi \neq 0$  donc à éviter).

Orientation « pointage-nadir »  
( $\psi = \theta = \varphi = 0$ )



- Noter que l'orientation du satellite  $\vec{\mathcal{F}}_B$  par rapport au repère inertiel  $\vec{\mathcal{F}}_I$  est donnée par les matrices de rotation en cascade :

$$\underline{C}_{BI} = \underline{C}_{BO} \underline{C}_{OI}$$

$\swarrow \quad \nwarrow$   
 $\psi, \theta, \varphi \quad \Omega, i, u$

- Certains capteurs mesurent directement  $\psi, \theta, \varphi$  (e.g. capteurs d'horizon terrestre) et il faut connaître l'orbite  $(\Omega, i, u)$  pour transposer dans  $\vec{\mathcal{F}}_I$ . D'autres capteurs mesurent directement l'orientation de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  dans  $\vec{\mathcal{F}}_I$  sous forme d'un quaternion  $q_{BI}$ . Il faut alors connaître l'orbite  $(\Omega, i, u)$  pour connaître  $\psi, \theta, \varphi$ .

## 4.2 DYNAMIQUE ORBITALE

- On développe les équations dynamiques de translation dans le référentiel  $\vec{\mathcal{F}}_O$ .

- La position du satellite dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$  est  $\vec{r} = r\vec{O}_r$  donc  $\underline{r}^O = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . (4.1)

- La vitesse angulaire de  $\vec{\mathcal{F}}_O$  par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_I$  est  $\vec{\omega}_{OI}$  ou simplement  $\vec{\omega}_O$  (on omet le « par rapport à  $I$  » quand c'est par rapport au repère inertiel).

- selon le chapitre 2 
$$\underline{\omega}_O^O = \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \sin i \sin u + (\dot{i}) \cos u \\ \dot{\Omega} \sin i \cos u - (\dot{i}) \sin u \\ \dot{\Omega} \cos i + \dot{u} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_t \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- $\underline{\omega}_O^O$  = vitesse angulaire de  $\vec{\mathcal{F}}_O$  par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_I$  exprimée dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$ .

- La notation  $\omega_r, \omega_t, \omega_n$  est utilisée pour simplifier le développement.

- Pour développer les équations dynamiques, on utilise les résultats du Chapitre 2 en choisissant comme repère intermédiaire le référentiel orbital  $\vec{\mathcal{F}}_O$ . Donc le  $\vec{\mathcal{F}}_b$  la Section 2.16 est  $\vec{\mathcal{F}}_O$  ici :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \overset{o}{\vec{r}} + \vec{\omega}_O \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= \overset{oo}{\vec{r}} + 2\vec{\omega}_O \times \overset{o}{\vec{r}} + \vec{\omega}_O \times (\vec{\omega}_O \times \vec{r}) + \overset{o}{\vec{\omega}_O} \times \vec{r}\end{aligned}\quad (4.3)$$

avec  $(^\circ) = (d/dt)$  la dérivée temporelle par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_I$  telle que vue dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$ .

- Les équations vectorielles de la dynamique orbitale sont donc :

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (4.4)$$

avec  $\ddot{\vec{r}}$  donnée par équation (4.3) ci-dessus.

- Les forces appliquées sur le centre de masse du satellite sont naturellement exprimée dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$ . On définit l'accélération  $\vec{f} = \vec{F}/m$  par :

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m} = (-\mu/r^2 + f_r) \vec{O}_r + f_t \vec{O}_t + f_n \vec{O}_n \quad (4.5)$$

- En prenant le produit  $\vec{\mathcal{F}}_O \cdot ( )$ , on obtient :

$$\underline{f^O} = \begin{bmatrix} -\mu/r^2 + f_r \\ f_t \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- Les accélérations  $f_r$   $f_t$   $f_n$  sont les perturbations orbitales dans les directions radiale, transverse et normale causées par les forces aérodynamique, magnétique, gravitationnelle et de pression solaire.
- On sépare la force gravitationnelle principale de la Terre, ou force Newtonienne (qui considère la Terre comme une masse ponctuelle), des perturbations gravitationnelles (contenues dans  $f_r$ ) qui sont causées par le fait que la masse de la Terre n'est pas concentrée en un point, mais distribuée (de façon non sphérique) dans l'espace.
- Si on néglige toutes les perturbations orbitales, il ne reste que la force Newtonienne  $F_N = -\mu m/r^2$  :

$$\underline{f^O} = \begin{bmatrix} -\mu/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

- Le paramètre gravitationnel de la Terre,  $\mu$ , est le produit de sa masse  $M$  par la constante universelle gravitationnelle  $G$  :  $\mu = MG$  (à ne pas confondre avec l'angle de Euler  $u$ ). Sa valeur est :

$$\mu = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

- Il est facile de vérifier qu'à la surface de la Terre, de rayon  $r_E = 6378.16$  km, que l'accélération gravitationnelle est bien  $g =$

$$\frac{\mu}{r_E^2} = \frac{398600 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(6378.16)^2 \text{ km}^2} = 0.0098 \frac{\text{km}}{\text{s}^2} = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = g$$

- C1.** En remplaçant  $\underline{r}^O$  de (4.1),  $\underline{\omega}_O$  de (4.2) et  $\underline{f}^O$  de (4.6) dans la version composantes (dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$ ) des équations (4.3) et (4.4), démontrer que les équations de la dynamique du satellite sont données par :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - (\omega_t^2 + \omega_n^2)r &= -\mu/r^2 + f_r \\ 2\omega_n\dot{r} + \omega_r\omega_t r + \dot{\omega}_n r &= f_t \\ -2\omega_t\dot{r} + \omega_r\omega_n r - \dot{\omega}_t r &= f_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

- Dans les équations (4.8), on a pris en considération le fait que le satellite se trouve sur l'axe  $\vec{O}_r$ . Il reste à s'assurer que le degré de liberté autour de  $\vec{O}_r$  soit tel que  $\vec{O}_n$  soit bien selon la normale du plan orbital.
- Le plan orbital contient (par définition) les vecteurs position  $\vec{r}$  et vitesse  $\vec{v}$  et sa normale  $\vec{O}_n$  est alignée (par définition) au moment angulaire  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$  par unité de masse.

- C2.** Démontrer que  $\vec{v}$  et  $\vec{h}$  sont donnés dans  $\vec{\mathcal{F}}_O$  par :

$$\underline{v}^O = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\omega_n \\ -r\omega_t \end{bmatrix} \quad \underline{h}^O = \underline{r}^{\times} \underline{v}^O = \begin{bmatrix} 0 \\ r^2\omega_t \\ r^2\omega_n \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\text{N. B. : } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \overset{o}{\vec{r}} + \vec{\omega}_O \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

- Pour que  $\vec{v}$  soit dans le plan orbital, sa composante selon  $\vec{O}_n$  (i.e.  $\vec{v} \cdot \vec{O}_n$ ) doit être nulle.
- Pour que  $\vec{h}$  soit le long de  $\vec{O}_n$ , ses composantes selon  $\vec{O}_r$  et  $\vec{O}_t$  doivent être nulles.
- Dans ces deux cas, la condition qui doit toujours être rencontrée est :

$$\boxed{\omega_t = 0} \quad (4.10)$$

- Cette contrainte permet de maintenir  $\vec{O}_n$  perpendiculaire au plan de l'orbite.
- Les équations de la dynamique (4.8) deviennent donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{r} - r\omega_n^2 &= -\mu/r^2 + f_r \\ 2\omega_n\dot{r} + \dot{\omega}_n r &= f_t \\ r\omega_n\omega_r &= f_n \end{aligned}} \quad (4.11)$$

$$\text{avec} \quad \underline{v}^O = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\omega_n \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{h}^O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\omega_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{et} \quad v = |\underline{v}^O| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega_n^2} \quad h = |\underline{h}^O| = r^2\omega_n \quad (4.13)$$

- Les deux premières équations de (4.11) permettent de trouver la solution de  $r(t)$ ,  $\dot{r}(t)$  et  $\omega_n(t)$ . La 3<sup>e</sup> équation de (4.11) donne  $\omega_r(t)$  en fonction de  $f_n$ .
- La solution pour les angles de Euler orbitaux  $\Omega, i, u$  est obtenue à partir de  $\omega_r(t)$ ,  $\omega_n(t)$  ci-dessus et de  $\omega_t = 0$  (équation (4.10)) en utilisant les équations de cinématique (équations (4.2)).

**C3.** Démontrer que les équations (4.2) et (4.11) peuvent être transformées en :

$$\begin{aligned} (\dot{i}) &= \frac{1}{r\omega_n} \cos u f_n \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{r\omega_n} \frac{\sin u}{\sin i} f_n \\ \dot{u} &= \omega_n - \dot{\Omega} \cos i \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Noter ici encore la singularité à  $i = 0$  pour  $\dot{\Omega}$ .
- Noter que seule la perturbation normale  $f_n$  perturbe les angles de Euler orbitaux.
- Les équations de la dynamique orbitale sont donc :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\omega_n^2 &= -\mu/r^2 + f_r \\ 2\omega_n\dot{r} + \dot{\omega}_n r &= f_t \\ (\dot{i}) &= \frac{1}{r\omega_n} \cos u f_n \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{r\omega_n} \frac{\sin u}{\sin i} f_n \\ \dot{u} &= \omega_n - \dot{\Omega} \cos i \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Le système est d'ordre 6 avec les variables d'état  $\{r, \dot{r}, \omega_n, i, \Omega, u\}$ .

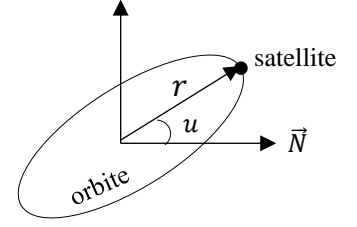
**C4.** En utilisant l'équation (4.13)  $h = r^2 \omega_n$ , éliminer  $\omega_n$  pour  $h$  dans (4.15) pour obtenir une version plus simple :

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} - h^2/r^3 &= -\mu/r^2 + f_r \\
 \dot{h} &= r f_t \\
 (\dot{i}) &= (r/h) \cos u f_n \\
 \dot{\Omega} &= (r/h) \frac{\sin u}{\sin i} f_n \\
 \dot{u} &= h/r^2 - \dot{\Omega} \cos i
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

- On voit dans (4.16) que seule la perturbation transverse  $f_t$  affecte la quantité de mouvement angulaire (ou moment angulaire)  $h$ .
- Le vecteur d'état devient :  $\{r, \dot{r}, h, i, \Omega, u\}$ .

### 4.3 DYNAMIQUE ORBITALE PLANAIRE

- Si on néglige les perturbations normales,  $f_n = 0$ , le plan orbital devient fixe dans  $\vec{\mathcal{F}}_I$ . Selon (4.16) :



$$\begin{aligned}
 (\dot{i}) &= 0 \Rightarrow i = \text{constante} \\
 \dot{\Omega} &= 0 \Rightarrow \Omega = \text{constante} \\
 \dot{u} &= h/r^2 \Rightarrow \omega_n = \text{vitesse angulaire du satellite sur son orbite}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

**C5.** Dans ce cas, démontrer que les seules équations (planaires) d'intérêt sont :

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} &= -\frac{\mu}{r^2} + r\dot{u}^2 + f_r & \text{ou} & & \ddot{r} &= \frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + f_r \\
 \ddot{u} &= \frac{1}{r} [f_t - 2\dot{u}\dot{r}] & & & \dot{h} &= 0 \\
 & & & & \dot{u} &= h/r^2
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

- On obtient un système d'ordre 4 avec  $\{r, \dot{r}, \dot{u}, u\}$  ou  $\{r, \dot{r}, h, u\}$  comme variables d'état.
- En définissant les nouvelles variables d'état  $v_r = \dot{r}$  (vitesse radiale) et  $\omega_n = \dot{u}$  (vitesse angulaire transverse), les 2 équations d'ordre 2 se transforment dans la forme standard de 4 équations d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v_r \\
 \dot{v}_r &= -\frac{\mu}{r^2} + r \omega_n^2 + f_r \\
 \dot{u} &= \omega_n \\
 \dot{\omega}_n &= \frac{1}{r} [f_t - 2\omega_n v_r]
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

qui est toujours ordre 4 avec variables d'état  $\{r, v_r, u, \omega_n\}$ .

#### 4.4 LINÉARISATION DE LA DYNAMIQUE ORBITALE PLANAIRE

- On veut linéariser les équations (4.19) autour d'une trajectoire de référence non perturbée dénotée par le vecteur d'état :

$$\hat{x} = [\hat{r}, \hat{v}_r, \hat{u}, \hat{\omega}_n]^T \quad [\hat{f}_r \quad \hat{f}_t] = [0 \quad 0]. \quad (4.20)$$

C6. Démontrer que la linéarisation de (4.19) autour de  $\hat{x}$  donné par (4.20) donne :

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A} \Delta \underline{x} + \underline{B} \Delta \underline{u}$$

où

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\omega}_n^2 + 2 \frac{\mu}{\hat{r}^3} & 0 & 0 & 2\hat{r}\hat{\omega}_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\hat{v}_r\hat{\omega}_n}{\hat{r}^2} & \frac{-2\hat{\omega}_n}{\hat{r}} & 0 & \frac{-2\hat{v}_r}{\hat{r}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} \Delta \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta f_r \\ 0 \\ \Delta f_t / \hat{r} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{r}} \end{bmatrix} \quad \Delta \underline{u} = \begin{bmatrix} \Delta f_r \\ \Delta f_t \end{bmatrix}$$

#### 4.5 ORBITE NON PERTURBÉE : ORBITE KÉPLÉRIENNE

- Dans le cas où on néglige toutes les perturbations orbitales, seule la force gravitationnelle de Newton  $F_N = -m\mu/r^2$  agit sur le satellite. Les équations dans ce cas deviennent :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{\mu}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \\ \dot{h} &= 0 \\ \dot{u} &= h/r^2 \\ (\dot{i}) &= 0 \\ (\dot{\Omega}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Plusieurs propriétés utiles peuvent être extraites de ces équations.
- Comme déjà vu à la section 4.3, les deux dernières équations indiquent que l'inclinaison  $i$  et l'ascension droite du nœud ascendant  $\Omega$  sont des constantes. Le plan orbital est fixe inertiellement.
- De la 2<sup>e</sup> équation, on peut aussi conclure que  $h = \text{constante}$ . La quantité de mouvement angulaire  $h$  par unité de masse est conservée (le champ gravitationnel terrestre est un champ conservateur).
- De la 3<sup>e</sup> équation, on a que  $\dot{u} = h/r^2$  ou  $r^2 du/dt = h = \text{constante}$  et par intégration :

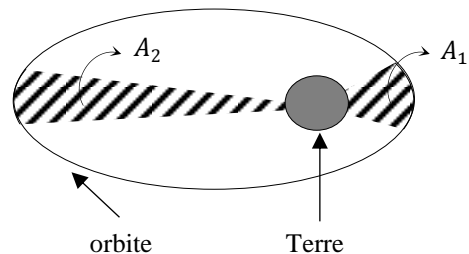
$u = u_0 + \int_0^t h/r^2 dt$  où  $u_0$  est une constante d'intégration.

- Cette 3<sup>e</sup> équation permet de démontrer la 2<sup>e</sup> loi de Kepler: « le rayon balaie des surfaces égales en temps égaux ».

- La surface est donnée par  $A = \frac{1}{2} \int r^2 du$  où  $u$  est l'angle sur lequel on calcule  $A$ .
- Donc, un élément de surface est  $dA = \frac{1}{2} r^2 du$
- Le taux de variation est :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{constante}$$

- Vu que  $dA/dt = \text{constante}$ , le rayon balaie des aires égales en temps égaux.

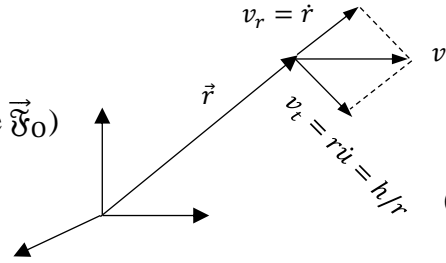




- Si  $A_1 = A_2$ , on voit que la vitesse transverse  $v_t$  du satellite augmente quand il passe près de la Terre.

- La vitesse transverse est :  $v_t = r\dot{u} = h/r$
- La vitesse radiale est :  $v_r = \dot{r}$
- La vitesse normale est :  $v_n = 0$  (par définition de  $\vec{\mathcal{F}}_0$ )
- La vitesse totale est donc :

$$v = (\dot{r}^2 + h^2/r^2)^{1/2} \quad (4.22)$$



- De retour aux équations (4.21), la solution de la première équation différentielle pour le rayon a été obtenue par Newton de la façon suivante. En faisant un changement de variable dépendante de  $r$  à  $q = 1/r$ , et de variable indépendante  $d/dt$  à  $d/du$ , on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - q = -\frac{\mu}{h^2}$$

dont la solution est

$$q = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(u - \omega)]$$

où  $e$  et  $\omega$  sont des constantes d'intégration liées à la vitesse et position radiales initiales.

- En retournant à la variable initiale  $r = 1/q$ , la solution de la 1<sup>re</sup> équation de (4.18)' est donc :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(u - \omega)} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4.23)$$

- Le paramètre  $p$  est le « semi-latus rectum » et est relié à  $h$  de la 2<sup>e</sup> équation (4.18)' avec

$$p = h^2/\mu$$

- Ce paramètre peut aussi être exprimé en termes d'une autre constante  $a$  :

$$p = h^2/\mu = a(1 - e^2) \quad (4.24)$$

et l'équation résultante :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (4.25)$$

représente l'équation d'une ellipse d'excentricité  $e$  et d'axe semi-majeur  $a$ .

- La variable  $\theta = u - \omega$  est l'anomalie vraie (« true anomaly »). Noter que dans le cas non perturbé :  $\dot{\theta} = \dot{u}$  parce que  $\dot{\omega} = 0$ ,  $\omega = \text{constante}$  d'intégration.

**C7.** Démontrer que (4.23) est bien la solution de  $\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{h^2}{r^3}$

- Commencer par trouver  $d/dt$  de (4.23) pour obtenir :

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin(u - \omega) \quad \text{ou} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta \quad (4.26)$$

en utilisant le fait que  $\left[ \frac{1}{1 + e \cos(u - \omega)} \right]^2 = \frac{r^2}{(h^2/\mu)^2} = \frac{r^2}{p^2}$

- Calculer  $\ddot{r}$  avec  $d/dt$  de (4.26) ci-dessus. En utilisant le fait que  $e \cos(u - \omega) = \left(\frac{h^2}{\mu r} - 1\right) = \left(\frac{p}{r} - 1\right)$ , démontrer que l'on retrouve l'équation différentielle originale  $\ddot{r} = -\mu/r^2 + h^2/r^3$  ce qui prouve que (4.23) est bien la solution.
- L'équation (4.23) montre que la trajectoire du satellite est une ellipse. Quelques observations utiles :
  - $\theta = 0 \text{ deg} \Rightarrow r = p/(1 + e) = r_p =$  rayon au périégée (point le plus près de la Terre)
  - $\theta = 180 \text{ deg} \Rightarrow r = p/(1 - e) = r_a =$  rayon à l'apogée (point le plus éloigné de la Terre)
  - $\theta = \pm 90 \text{ deg} \Rightarrow r = p =$  « semi-latus rectum »
- Quand  $\theta = 0 \text{ deg}$ , le satellite est au périégée, le point le plus près de la Terre. L'angle  $\theta$  est donc la distance angulaire du satellite mesurée à partir du périégée. Ensuite, vu que :

$$\theta = u - \omega$$

on a que  $u = \omega$  au périégée. La constante  $\omega$  est donc l'argument de latitude ( $u$ ) du périégée, ou argument du périégée (« *argument of perigee* ») i.e. l'angle entre le nœud ascendant et le périégée.

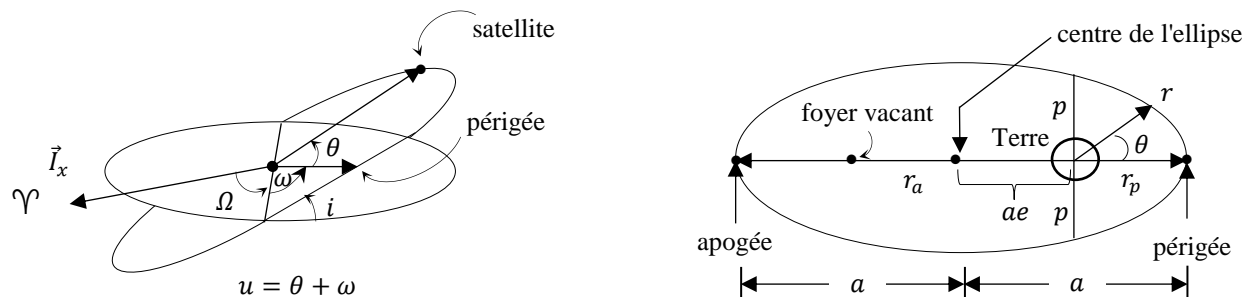
- Quand l'excentricité de l'orbite est nulle,  $e = 0$ , on a  $r = p = a = r_c \Rightarrow$  rayon de l'orbite circulaire.
- L'axe semi-majeur (« *semi-major axis* ») de l'ellipse,  $a$ , est aussi donné par la moyenne de  $r_p$  et  $r_a$  :

$$a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = \frac{p}{(1 - e^2)} \quad (4.27)$$

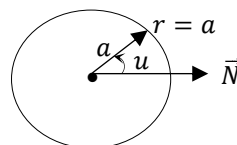
**C8.** Avec l'équation (4.27), démontrer que  $r_p$  et  $r_a$  peuvent aussi s'écrire (partir des équations ci-dessus) :

$$\begin{aligned} r_p &= a(1 - e) \\ \text{et donc que } e &= \frac{a - r_p}{a} = \frac{r_a - a}{a} \\ r_a &= a(1 + e) \end{aligned} \quad (4.28)$$

- L'excentricité représente donc la distance normalisée du centre de la Terre au centre de l'ellipse.



- La distance entre le centre de la Terre (au foyer occupé de l'ellipse) et le centre de l'ellipse est  $ae$ .
- Pour une orbite circulaire, on a :  $r = r_c = p = a$  :



- Quelques autres relations utiles :

**C9.**

a. Démontrer que la vitesse du satellite est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + 2 \operatorname{ecos} \theta + e^2)^{1/2} \quad (4.29)$$

Conseils : Partir de l'équation (4.22), utiliser l'équation (4.26) pour  $\dot{r}$ , utiliser (4.23) pour remplacer  $r$  dans  $h^2/r^2$  et simplifier.

b. Démontrer que :

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (4.30)$$

est équivalent à (4.29). N. B. :  $a = p/(1 - e^2)$  et prendre  $r$  de (4.23).

• Selon la dernière équation de (4.19), on peut écrire :

$$r^2 \frac{du}{dt} = h = \sqrt{\mu p} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} du = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{d\theta}{(1 + \operatorname{ecos} \theta)^2}$$

↑  
voir (4.24)

En intégrant sur  $2\pi$ , on obtient la période orbitale  $P$  :

$$P = \int_0^P dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{d\theta}{(1 + \operatorname{ecos} \theta)^2} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (4.31)$$

• La vitesse angulaire moyenne (« mean motion ») est donnée par :

$$n = 2\pi/P = \sqrt{\mu/a^3} = \text{en rad/s.} \quad (4.32)$$

• Il a été vu que les vitesses angulaires du satellite à partir de la ligne des nœuds  $\dot{u}$  ou à partir du périégée  $\dot{\theta}$  dépendent du rayon de l'orbite et sont donc variable pour une orbite excentrique :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{h}{r^2}.$$

• Basé sur l'équation (4.32), un autre type de vitesse angulaire sera nécessaire plus loin :

$$\frac{dM}{dt} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

• L'angle  $M$ , appelé l'anomalie moyenne (« mean anomaly »), est une invention mathématique qui donne le déplacement angulaire moyen du satellite sur son orbite de façon à ce que le taux de changement de cet angle soit moyenné dans le temps sur la période de l'orbite. Par convention,  $M = 0$  au périégée pour que  $M$  et  $\theta$  soient mesurés de la même référence.

- Pour une orbite circulaire,  $M = \theta$ , le rayon  $r = a = r_c$  est constant, et les vitesses le sont aussi:

$$v_r = \dot{r} = 0, \quad v = v_t = r_c \dot{u} = \frac{h}{r_c} = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} = \text{constante}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{dM}{dt} = n = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} = \text{constante}$$

**C10.** Un satellite géostationnaire tourne sur son orbite à la même vitesse angulaire que celle de la Terre : 1 tour par jour sidéral = 23 h 56 min = 86 163 s. Démontrer que :

→ le rayon de son orbite (circulaire) est 42164 km <sup>a</sup>.

→ la vitesse du satellite est  $v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = 3.075 \text{ km/s}$ .

---

<sup>a</sup> Altitude 35785 km

#### 4.6 PERTURBATIONS ORBITALES

- Pour une orbite terrestre, les perturbations environnementales  $f_r, f_t, f_n$  ne sont pas nulles. Dépendant de l'altitude de l'orbite, les perturbations suivantes affectent à différent degré la dynamique orbitale :
  - la trainée aérodynamique
  - les anomalies gravitationnelles de la Terre
  - la pression de la radiation solaire
  - l'attraction de la Lune et du Soleil.
- Seule la perturbation la plus dominante pour les orbites basses sera considérée ici, celle causée par le fait que le champ gravitationnel de la Terre n'est pas parfaitement sphérique, vu que la forme de la Terre elle-même est aplatie aux pôles avec un renflement à l'équateur.
- Ce champ gravitationnel terrestre peut être exprimé sous la forme d'un potentiel de la forme :

$$\Phi(r, \delta) = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_E}{r} \right)^n P^n(\sin \delta) \right] \quad (4.33)$$

où  $r, \delta$  sont respectivement la distance radiale et la latitude géocentrique,  $r_E$  le rayon équatorial de la Terre et  $P^n$  le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

- Le premier terme de la série,  $J_2$ , domine sur tous les autres. Cette perturbation est un facteur d'environ  $\epsilon \approx 10^{-3}$  par rapport au terme gravitationnel principal  $\mu/r^2$ . Les autres termes  $J_n$  sont d'ordre  $\epsilon^m$  où  $m \geq 2$ . Pour la plupart des orbites d'observation de la Terre, d'altitude dans la plage 600 km - 1000 km, les autres perturbations environnementales (trainée atmosphérique, pression de la radiation solaire, attraction luni-solaire) sont aussi d'ordre 2 ou plus petites.
- Dans les analyses d'orbites perturbées, l'inclusion du terme  $J_2$  est donc prioritaire.
- En prenant le gradient de  $\Phi(r, \delta)$  pour le terme  $J_2$ , la perturbation correspondante peut être obtenue :

$$\begin{aligned} f_{r J_2} &= -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left( \frac{r_E}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) \\ f_{t J_2} &= -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left( \frac{r_E}{r} \right)^2 (\sin^2 i \sin 2u) \\ f_{n J_2} &= -\frac{3}{2} \frac{\mu}{r^2} J_2 \left( \frac{r_E}{r} \right)^2 (\sin 2i \sin u) \end{aligned} \quad (4.34)$$

#### 4.7 ORBITE PERTURBÉE : MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES

- Dans la Section 4.5, la solution des équations différentielles d'ordre 6 a été obtenue dans le cas où les perturbations environnementales sont nulles :  $f_r = f_t = f_n = 0$ .
- Cette solution non perturbée a été exprimée en termes de 6 constantes d'intégration, appelés *éléments d'orbite* (« *orbital elements* ») :

$$\underline{c} = \{a, e, \omega, i, \Omega, u_0\}$$

qui décrivent une ellipse d'axe semi-majeur  $a$ , d'excentricité  $e$  et d'argument du périégée  $\omega$  dans un plan orbital fixe d'inclinaison  $i$  et d'ascension droite  $\Omega$  avec la position angulaire initiale du satellite  $M_0$  (qui est équivalent à, mais préféré à,  $\theta_0$  et  $u_0$  pour des raisons de simplicité mathématique).

- Dans le cas où les perturbations environnementales ne sont pas nulles, telle que décrit dans la Section 4.6, mais que leur grandeur est petite comparée à celle de la force gravitationnelle principale ( $|f_r|, |f_t|, |f_n| \ll \mu/r^2$ ), une solution aux équations différentielles peut être obtenue en utilisant la méthode de Variation des Constantes ou *VOP* (pour « *Variation of Parameter* »).
- La méthode VOP consiste essentiellement à utiliser la forme de la solution non perturbée (l'ellipse dans un plan orbital fixe) comme solution aux équations avec perturbations mais avec les éléments d'orbite  $\underline{c}$  considérées comme des variables qui évoluent lentement sous l'effet des perturbations.
- La méthode VOP permet de trouver les équations différentielles des éléments d'orbite  $\underline{c}$  qui décrivent l'évolution de l'ellipse sous l'effet des perturbations. C'est comme si les conditions initiales  $\underline{c}$  de la solution non perturbées étaient constamment remises à jour à cause de l'effet des perturbations, d'où l'expression *orbites osculatoires* (« *osculating orbits* ») et *éléments d'orbite osculatoires* (« *osculating orbital elements* »).
- Ce mot vient du latin *osculatus* qui veut dire « *se toucher* » : à un temps  $t$ , le satellite est sur une orbite de constantes  $\underline{c}$  et, au temps  $t + dt$ , il est instantanément sur une orbite de constantes  $\underline{c} + d\underline{c}$ . Chaque orbite touche ainsi à la précédente au point où le satellite se trouve, d'où l'expression *osculatoire*.
- La méthode VOP a été développée par Lagrange dans le cas de perturbations conservatrices et généralisée par Gauss dans le cas plus général de perturbations conservatrices et/ou non conservatrices. Les détails sont présentés à l'Annexe A de cette section.
- L'application de la méthode donne les équations différentielles des éléments d'orbite  $\underline{c}$  en fonction des perturbations environnementales :

$$\frac{d\underline{c}}{dt} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{v}^T} \begin{bmatrix} f_r \\ f_t \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

où  $\underline{v}$  est la vitesse exprimée dans le repère orbital.

- En développant ces équations au long dans le cas de la dynamique orbitale, les *Équations Variationnelles de Gauss* (« *Gauss Variational Equations* ») ou GVE sont obtenues :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \sin \theta f_r + (1 + e \cos \theta) f_t] \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ \sin \theta f_r + \left( \frac{e + 2 \cos \theta + e \cos^2 \theta}{1 + e \cos \theta} \right) f_t \right] \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ -\left( \frac{1}{e} \right) \cos \theta f_r + \left( \frac{1}{e} \right) \left( \frac{2 + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \sin \theta f_t - \dot{\Omega} \cos i \right] \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) \cos(\theta + \omega) f_n \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) \frac{\sin(\theta + \omega)}{\sin i} f_n \\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{(1-e^2)}{nae} \left[ \left( \frac{-2e + \cos \theta + e \cos^2 \theta}{1 + e \cos \theta} \right) f_r - \left( \frac{2 + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \sin \theta f_t \right]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

et

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dM_0}{dt} \tag{4.37}$$

- Vu que l'anomalie moyenne  $M$  est une invention mathématique qui ne donne pas la position physique du satellite sur son orbite, la transformation de l'anomalie moyenne  $M$  vers l'anomalie vraie  $\theta$  est requise pour positionner le satellite. La transformation utilise en premier l'équation de Kepler qui relie l'anomalie moyenne  $M$  à l'anomalie excentrique  $E$ :

$$M = E - e \sin E. \tag{4.38}$$

- Cette équation est transcendante et requiert une solution itérative. Une fois l'anomalie excentrique  $E$  ainsi calculée, on obtient l'anomalie vraie  $\theta$  à partir de l'arc tangente des deux arguments suivants :

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} & \sin \theta &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \\
\theta &= \tan^{-1}(\sin \theta, \cos \theta)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

- Dans le sens inverse, de l'anomalie vraie  $\theta$  vers l'anomalie moyenne  $M$ , on doit passer par l'anomalie excentrique avec les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\cos E &= \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} & \sin E &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\
E &= \tan^{-1}(\sin E, \cos E) \\
M &= E - e \sin E
\end{aligned} \tag{4.40}$$

- En terminant, il peut être observé dans (4.36) que les équations pour  $\omega$  et  $M_0$  (et donc  $M$ ) ont l'excentricité au dénominateur. Il y a donc une singularité quand l'orbite est circulaire : la variation de ces éléments d'orbite devient très rapide. Il peut être facilement observé que la position  $\omega$  du périhélie d'une orbite quasi-circulaire peut se déplacer très rapidement autour de la Terre et que la position angulaire du satellite ( $\theta$  ou  $M$ ) doit aussi varier rapidement puisque la somme des deux angles,  $\theta + \omega$  ou  $M + \omega$ , qui donne la position du satellite par rapport à la ligne des nœuds, ne peut lui-même se déplacer aussi rapidement.
- Pour éviter cette singularité, on utilise les composantes du « vecteur d'excentricité » (« *eccentricity vector* ») pour remplacer l'élément d'orbite singulier  $\omega$  :

$$e_x = e \cos \omega \quad e_y = e \sin \omega \quad (4.41)$$

- Les équations différentielles de ces nouveaux éléments sont obtenues de (4.36) et (4.41):

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \dot{e} \cos \omega - e \dot{\omega} \sin \omega = \\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[ + \sin u f_r + \frac{e_x + \cos u (2 + e_x \cos u + e_y \sin u)}{(1 + e_x \cos u + e_y \sin u)} f_t + e_y \dot{\Omega} \cos i \right] \\ \dot{e}_y &= \dot{e} \sin \omega + e \dot{\omega} \cos \omega = \end{aligned} \quad (4.42)$$

- On y voit que la division par l'excentricité n'y apparaît plus. Pour récupérer la valeur de l'excentricité et de l'argument du périhélie, on utilise l'inverse des équations (4.41):

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \quad \omega = \tan^{-1}(e_y, e_x) \quad (4.43)$$

- Similairement, dans le cas d'orbite quasi-circulaire, la position du satellite est obtenue avec l'argument de latitude  $u = \theta + \omega$  (« *argument of latitude* »), déjà présenté ou avec  $u_M = M + \omega$ , l'argument de latitude moyen (« *mean argument of latitude* »). Cela évite aussi la division par l'excentricité.



#### 4.8 MÉTHODE DE LA MOYENNE (« METHOD OF AVERAGING »)

- Pour une orbite non perturbée, il a été vu que 5 des éléments d'orbites  $\{a, e, \omega, i, \Omega\}$  sont constants et que l'anomalie (vraie  $\theta$  ou moyenne  $M$ ) varie rapidement sous l'effet du champ gravitationnel principal. On réfère à ces variables  $\theta$  ou  $M$  comme étant des *variables rapides* (« *fast variables* »).
- Pour une orbite sous l'effet des perturbations, les 5 éléments d'orbite originalement constants deviennent variables dans le temps. Vu l'hypothèse de la Méthode VOP que la grandeur des perturbations est petite comparée à celle de la force gravitationnelle principale ( $|f_r|, |f_t|, |f_n| \ll \mu/r^2$ ), ces 5 éléments d'orbite varient lentement par rapport à  $\theta$  ou  $M$ . On réfère à ces variables comme étant des *variables lentes* (« *slow variables* »).
- Une fois les perturbations insérées dans (4.36), les équations différentielles des variables lentes dépendent toutes de la variable rapide à travers des fonctions trigonométriques et donc, périodiques. Bien que leur évolution soit lente en moyenne, la présence de fonctions trigonométriques de la variable rapide introduit des oscillations intra-orbitales de haute fréquence dans les équations différentielles.
- L'intégration numérique de ces équations différentielles doit donc se faire avec un pas d'intégration très inférieur à la période orbitale parce que le côté droit de ces équations contient plusieurs harmoniques de la fréquence orbitale.
- La *Méthode de la moyenne* ou MoA (pour « *Method of Averaging* ») permet de lisser ces harmoniques pour ne laisser que l'évolution des éléments orbitaux moyens (« *mean orbital elements* »). Les équations différentielles ainsi moyennées peuvent s'intégrer numériquement avec un pas d'intégration beaucoup plus long que la période orbitale, réduisant ainsi la charge de calcul pour les propagations orbitales sur de longues périodes.
- De plus, cet exercice de lissage permet d'extraire la tendance moyenne des variables lentes à long terme, sans les variations haute fréquence locale. Ainsi, des propriétés utiles de la dynamique orbitale peuvent y être déduites, propriétés qui sont utilisées dans la conception et la commande d'orbites. C'est surtout pour cette deuxième raison que ce sujet est abordé ici.
- La MoA est décrite à l'Annexe B dans le cas de l'application pour perturbations d'ordre 1 qui sont traitées ici. Cette méthode sépare les éléments osculatoires en éléments moyens (« *mean elements* »), dénotés  $(\bar{\cdot})$  et en termes courte-période (« *short periodic terms* ») selon les équations générales:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \underline{\bar{x}} + \epsilon \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) \\ \bar{M} &= \bar{M} + \epsilon \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})\end{aligned}$$

où  $\bar{M}$  est l'anomalie moyenne,  $\underline{\bar{x}}$  est la matrice-colonne des 5 éléments d'orbite lents,  $\underline{P}$  et  $\underline{Q}$  sont les termes courte-période et  $\epsilon$  dénote un terme perturbateur d'ordre 1. La MoA génère ensuite les équations différentielles pour les éléments orbitaux moyens  $\underline{\bar{x}}, \bar{M}$  :

$$\frac{d\underline{\bar{x}}}{dt} = \epsilon \underline{U}(\underline{\bar{x}}) \quad \frac{d\bar{M}}{dt} = n(\underline{\bar{x}}) + \epsilon V(\underline{\bar{x}})$$

- Comme mentionné à la Section 4.6, la perturbation dominante pour les orbites terrestres basses est celle causée par la non-sphéricité du champ gravitationnel terrestre. Les équations décrivant les perturbations radiale, transverse et normale d'ordre 1 ont été présentées dans les équations (4.34).

- En insérant ces perturbations (4.34) dans les équations différentielles des éléments orbitaux osculatoires, i.e. les équations (4.36) obtenues par la méthode VOP, la MoA est ensuite appliquée à ces équations différentielles pour séparer la tendance moyenne des éléments orbitaux des effets oscillatoires courte période intra-orbite.
- Le résultat de cette application donne les équations différentielles suivantes pour les éléments moyens d'orbite dans lesquelles l'équivalence  $\bar{p} = \bar{a}(1 - \bar{e}^2)$  a été utilisée pour simplifier la notation:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{a}}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\bar{e}}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= +\frac{3}{4}n(\bar{a})J_2\left(\frac{r_E}{\bar{p}}\right)^2(4 - 5\sin^2 \bar{i}) \\
 \frac{d\bar{i}}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -\frac{3}{2}n(\bar{a})J_2\left(\frac{r_E}{\bar{p}}\right)^2\cos \bar{i} \\
 \frac{d\bar{M}_0}{dt} &= +\frac{3}{4}n(\bar{a})J_2\left(\frac{r_E}{\bar{p}}\right)^2(1 - \bar{e}^2)^{1/2}(2 - 3\sin^2 \bar{i})
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

et

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = n(\bar{a}) + \frac{d\bar{M}_0}{dt} \quad n(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \tag{4.45}$$

- La période orbitale de péricée à péricée devient :

$$P_{J_2} = \frac{2\pi}{n_{J_2}} = \frac{2\pi}{n(\bar{a})\left[1 + \frac{3}{4}J_2\left(\frac{r_E}{\bar{p}}\right)^2(1 - \bar{e}^2)^{1/2}(2 - 3\sin^2 \bar{i})\right]}$$

- Il peut être observé que, pour une inclinaison de moins de 54.7 deg. la période orbitale perturbée est diminuée par rapport à sa valeur non perturbée et que c'est l'inverse pour  $i > 54.7$  deg.
- De retour aux équations (4.49), on remarque que le déplacement du péricée causé par la perturbation  $J_2$ , appelé la précession de la ligne des apsides (« *precession of the line of apsides* »), est nulle quand  $(4 - 5\sin^2 \bar{i}) = 0$  donc quand  $i = 63.43$  deg. Cette inclinaison est appelé l'inclinaison critique (« *critical inclination* ») et elle est utilisée dans les cas où le péricée doit être maintenu fixe. Par exemple, l'inclinaison critique des orbites Molniya permet de toujours avoir l'apogée au-dessus des latitudes Nord pour fins de communication.
- Une dernière observation des équations (4.49) permet de conclure que la précession de la ligne des

nœuds (« *precession of the line of nodes* »),  $\dot{\Omega}$ , est négative pour une orbite prograde, i.e. quand  $i < 90$  deg. Dans ce cas, le nœud ascendant se déplace dans le sens opposé à la rotation de la Terre. Pour une orbite rétrograde, i.e. quand  $i > 90$  deg,  $\dot{\Omega}$  est positive et le nœud ascendant se déplace dans la direction de la rotation de la Terre.

- Cette dernière observation permet de créer des orbites héliosynchrones (« *Sun synchronous orbits* »), c'est-à-dire des orbites dont le nœud ascendant se déplace à la même vitesse angulaire que le déplacement apparent du Soleil. Le nœud ascendant (ou descendant) de l'orbite est donc toujours à la même heure locale sur la Terre. On utilise alors la désignation LTAN pour « *Local Time of Ascending Node* » ou LTDN pour « *Local Time of Descending Node* » pour spécifier l'orientation de l'orbite.
- Le plan de l'orbite maintient ainsi toujours la même orientation par rapport au Soleil, ce qui est utile dans la conception des systèmes satellitaires de contrôle thermique et de génération de puissance électrique. Pour les satellites d'observation de la Terre, cela permet aussi d'assurer une illumination optimale des cibles terrestres.
- Le mouvement apparent du Soleil est approximativement de 360 degrés en 365.2422 jours ou 0.985647 deg/jour. La combinaison des éléments moyens d'orbite  $\{\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}\}$  qui donne ce taux de variation est obtenue par l'équation suivante :

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \frac{2\pi}{365.2422} \frac{1}{(86\,400)} = -\frac{3}{2} n(\bar{a}) J_2 \left( \frac{r_E}{\bar{p}} \right)^2 \cos \bar{i}$$

- Pour une orbite circulaire ( $\bar{p} = \bar{a}$ ), cette équation donne l'inclinaison requise pour un rayon d'orbite donné. Vu que le sens de la rotation doit être positif, il faut que  $\cos \bar{i}$  soit négatif à cause du signe négatif dans l'équation. C'est pour cette raison que toutes les orbites héliosynchrones sont rétrogrades ( $i > 90$  deg).
- La MoA génère aussi les termes courte-période  $\epsilon \underline{P}(\underline{x}, \bar{M})$  et  $Q(\underline{x}, \bar{M})$  tels qu'illustrés ci-dessous. Dans toutes ces équations, la notation pour les variables moyennes  $\underline{x}, \bar{M}$  ou  $\bar{\theta}$  a été simplifiée à  $\underline{x}, M$  ou  $\theta$  pour alléger le texte.
- Comme mentionné à l'Annexe A, il y a un certain degré de liberté à définir la moyenne des termes courte-période  $\underline{p}(\underline{x})$  et  $q(\underline{x})$ . La moyenne de certains des termes courte-période présentée dans les équations qui suivent a été choisie non nulle pour que les équations correspondent à celles publiées par Liu (1974). Ces termes ne sont pas présents dans les équations présentées par Vallado (2001).

$$\begin{aligned}
\epsilon P_a &= J_2 \left( \frac{r_E^2}{a} \right) (1 - e^2)^{-3} \left\{ (1 + e \cos \theta)^3 \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos(2\theta + 2\omega) \right] \right. \\
&\quad \left. - (1 - e^2)^{3/2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right\} \\
\epsilon P_e &= \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \left( 1 + \frac{e^2}{4} \right) \cos \theta + \frac{e}{2} \cos 2\theta + \frac{e^2}{12} \cos 3\theta \right] \right. \\
&\quad + \left( \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{11e^2}{4} \right) \cos(\theta + 2\omega) + \frac{e^2}{24} \cos(\theta - 2\omega) \right. \\
&\quad + \frac{5e}{6} \cos(2\theta + 2\omega) + \frac{1}{18} \left( 7 + \frac{17e^2}{4} \right) \cos(3\theta + 2\omega) + \frac{e}{4} \cos(4\theta + 2\omega) \\
&\quad \left. \left. + \frac{e^2}{24} \cos(5\theta + 2\omega) \right] \right\} \\
\epsilon P_\omega &= \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i) (\theta - M + e \sin \theta) + \\
&\quad \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \frac{1}{e} (4 - e^2) \sin \theta + 2 \sin 2\theta + \frac{e}{3} \sin 3\theta \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{e} \left[ \sin^2 i + \frac{e^2}{4} (8 - 15 \sin^2 i) \right] \sin(\theta + 2\omega) + \frac{e}{4} \sin^2 i \cos(\theta - 2\omega) \\
&\quad - (2 - 5 \sin^2 i) \sin(2\theta + 2\omega) \\
&\quad + \frac{1}{e} \left[ \frac{7}{3} \sin^2 i - e^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{19}{12} \sin^2 i \right) \right] \cos(3\theta + 2\omega) \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos(4\theta + 2\omega) + \frac{e}{4} \sin^2 i \cos(5\theta + 2\omega) - \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2\omega \right\} \\
\epsilon P_i &= \frac{3}{8} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 \sin 2i \left[ e \cos(\theta + 2\omega) + \cos(2\theta + 2\omega) + \frac{e}{3} \cos(3\theta + 2\omega) \right] \\
\epsilon P_\Omega &= -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 \cos i \left[ \theta - M + e \sin \theta - \frac{e}{2} \sin(\theta + 2\omega) - \frac{1}{2} \sin(2\theta + 2\omega) \right. \\
&\quad \left. - \frac{e}{6} \cos(3\theta + 2\omega) \right] \\
\epsilon P_M &= -\frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_E}{p} \right)^2 (1 - e^2)^{1/2} \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{e^2}{4} \right) \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{e}{12} \sin 3\theta \right] \right. \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left[ -\frac{1}{2e} \left( 1 + \frac{5e^2}{4} \right) \sin(\theta + 2\omega) + \frac{e}{8} \sin(\theta - 2\omega) + \frac{3}{4} \sin 2\omega \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{24e} (28 - e^2) \cos(3\theta + 2\omega) + \frac{3}{4} \cos(4\theta + 2\omega) + \frac{e}{8} \cos(5\theta + 2\omega) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

- Pour des orbites quasi-circulaires ( $e \approx 0$ ) on obtient les équations simplifiées suivantes :

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\bar{e}_x}{dt} = -\frac{3}{4}n(\bar{a})J_2\bar{e}_y\left(\frac{r_E}{\bar{a}}\right)^2(4-5\sin^2\bar{t})$$

$$\frac{d\bar{e}_y}{dt} = +\frac{3}{4}n(\bar{a})J_2\bar{e}_x\left(\frac{r_E}{\bar{a}}\right)^2(4-5\sin^2\bar{t})$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = -\frac{3}{2}n(\bar{a})J_2\left(\frac{r_E}{\bar{a}}\right)^2\cos\bar{t}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = n(\bar{a})\left[1 + \frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_E}{\bar{a}}\right)^2(3-4\sin^2\bar{t})\right]$$

(4.47)

$$\epsilon P_a = \frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_E^2}{a}\right)\sin^2 i \cos 2u$$

$$\epsilon P_{e_x} = \frac{3}{8}J_2\left(\frac{r_E}{a}\right)^2\left\{\left[(4-5\sin^2 i)\cos u + \frac{7}{3}\sin^2 i \cos 3u\right]\right\}$$

$$\epsilon P_{e_y} = \frac{3}{8}J_2\left(\frac{r_E}{a}\right)^2\left\{\left[(4-5\sin^2 i)\sin u + \frac{7}{3}\sin^2 i \sin 3u\right]\right\}$$

(4.48)

$$\epsilon P_i = \frac{3}{8}J_2\left(\frac{r_E}{a}\right)^2\sin 2i \cos 2u$$

$$\epsilon P_{\Omega} = \frac{3}{4}J_2\left(\frac{r_E}{a}\right)^2\cos i \sin u$$

$$\epsilon P_u = -\frac{3}{8}J_2\left(\frac{r_E}{a}\right)^2\{(2-5\sin^2 i)\sin 2u\}$$

#### 4.9 DYNAMIQUE DE ROTATION – SANS ROUES À RÉACTION

- Les équations de la dynamique de rotation ont été développées au Chapitre 2. Ces résultats sont repris ici pour développer les équations du mouvement en rotation d'un satellite.
- Dans le cas habituel où on choisit l'origine du « body frame »  $\mathfrak{F}_B$  au centre de masse du corps, on a  $\vec{c} = \vec{0}$  et les équations de la dynamique de rotation deviennent:

$$\overset{o}{\vec{h}} + \vec{\omega}_B \times \vec{h} = \vec{T} \quad (4.49)$$

avec

$$\vec{h} = \vec{J} \cdot \vec{\omega}_B \quad (4.50)$$

et où  $\vec{J}$ ,  $\vec{h}$  et  $\vec{T}$  sont calculés par rapport au centre de masse.

- On peut mettre (4.49) et (4.50) sous forme de composantes dans  $\mathfrak{F}_B$  pour obtenir :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{h}}^B + \underline{\omega}_B^\times \underline{h}^B &= \underline{T}^B \\ \underline{h}^B &= \underline{J}^B \underline{\omega}_B \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\underline{J}^B \dot{\underline{\omega}}_B + \underline{\omega}_B^\times \underline{J}^B \underline{\omega}_B = \underline{T}^B} \quad (4.51)$$

- C'est l'équation de Newton-Euler pour corps rigides.
- On peut obtenir le même résultat en remplaçant (4.50) dans (4.49) en premier et ensuite prendre les composantes :

$$\vec{J} \cdot \overset{o}{\vec{\omega}}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{J} \cdot \vec{\omega}_B) = \vec{T} \Rightarrow \underline{J}^B \dot{\underline{\omega}}_B + \underline{\omega}_B^\times \underline{J}^B \underline{\omega}_B = \underline{T}^B$$

- On obtient donc la solution des équations dynamiques en intégrant (4.51) pour obtenir  $\underline{\omega}_B(t)$  :

$$\dot{\underline{\omega}}_B = \underline{J}^{-1} \left\{ \underline{T}^B - \underline{\omega}_B^\times \underline{J}^B \underline{\omega}_B \right\} \quad (4.52)$$

(on omet le  $B$  dans  $\underline{J}^B$  quand c'est son référentiel naturel.)

- On peut aussi obtenir  $\underline{\omega}_B(t)$  en deux étapes :

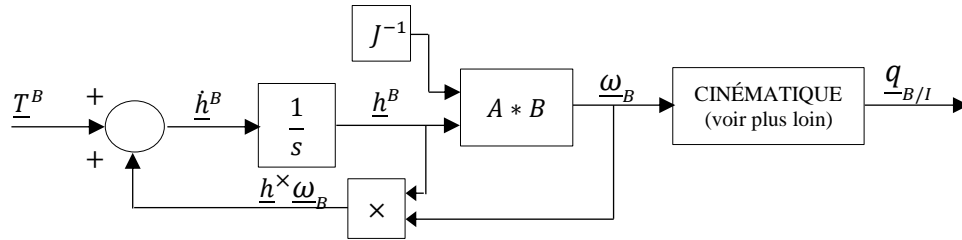
$$\begin{aligned} \dot{\underline{h}}^B &= \underline{T}^B - \underline{\omega}_B^\times \underline{h}^B & \rightarrow & \text{on trouve } \underline{h}_B(t) \\ \underline{\omega}_B &= \underline{J}^{-1} \underline{h}^B & \rightarrow & \text{on trouve } \underline{\omega}_B(t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

**C11.** Démontrer que dans le cas où  $\underline{J} = \text{diag} \{J_x, J_y, J_z\}$ , la dynamique est exprimée par :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Bx} &= \frac{(J_y - J_z)}{J_x} \omega_{By} \omega_{Bz} + T_x^B / J_x \\ \dot{\omega}_{By} &= \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \omega_{Bz} \omega_{Bx} + T_y^B / J_y \\ \dot{\omega}_{Bz} &= \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \omega_{Bx} \omega_{By} + T_z^B / J_z\end{aligned}\quad (4.54)$$

Le couplage entre les axes est causé par les termes gyroscopiques de la forme  $\omega_{Bj} \omega_{Bi}$ ,  $i, j = \{x, y, z\}$ .

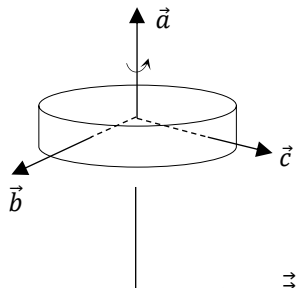
- Les équations (4.53) ci-dessus peuvent être codées sur MATLAB de la façon suivante :



- L'intégration de la vitesse angulaire  $\underline{\omega}_B$  pour obtenir le quaternion (ou les angles de Euler) sera expliquée plus loin.
- Noter que le  $\underline{T}^B$  représente les couples externes appliqués sur le satellite et exprimés dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$ . Ces couples incluent : les couples de commande (propulseurs) et les perturbations (magnétique, gradient de gravité, aérodynamique, pression solaire, etc.).

#### 4.10 DYNAMIQUE DE ROTATION – AVEC ROUES À RÉACTION

- Les roues à réaction sont des actionneurs qui permettent de commander la dynamique d'orientation du satellite par échange de moment angulaire. Si on applique un couple (électrique) pour accélérer la roue d'inertie dans une direction, par action-réaction, le même couple est appliqué sur le satellite en direction opposée.
- On peut aussi comprendre ce phénomène par le principe de conservation de la quantité de mouvement angulaire vue que les couples appliqués sur les roues et le satellite sont des couples internes.
- On suppose une symétrie axiale de l'inertie de la roue dans le repère de la roue  $\mathfrak{F}_W$  :



$$\vec{\mathfrak{F}}_W = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

où  $\vec{a}$  est l'axe de rotation et  $\vec{b}, \vec{c}$  sont les axes transverses.

$$\vec{J}_W = J_s \vec{a} \vec{a} + J_t \vec{b} \vec{b} + J_t \vec{c} \vec{c} \quad \text{ou}$$

$$\vec{J}_W = J_s \vec{a} \vec{a} + J_t (\vec{1} - \vec{a} \vec{a}) \quad (4.55)$$

$\nearrow$  inertie, axe du « spin »       $\nearrow$  inertie, axe transverse

- Donc, on a que 
$$\underline{J}_W^W = \underline{J}_W = \begin{bmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}$$
- Pour une vitesse angulaire absolue de la roue  $\vec{\omega}_W$ , la quantité de mouvement angulaire de la roue est :

$$\vec{h}_W = \vec{J}_W \cdot \vec{\omega}_W \quad (4.56)$$

où la vitesse angulaire absolue de la roue  $\vec{\omega}_W$  peut être décomposée en :

$$\vec{\omega}_W = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_B \quad (4.57)$$

$\nwarrow$  vitesse de la roue relative au satellite =  $\vec{\omega}_{W/B}$        $\nwarrow$  vitesse de rotation du corps satellite

**C12.** Démontrer, en remplaçant (4.55) et (4.57) dans (4.56), que la composante du moment angulaire  $\vec{h}_W$  dans la direction  $\vec{a}$ , appelée  $h_a$ , est donnée par :

$$h_a = \vec{h}_W \cdot \vec{a} = J_s (\omega_{rel} + \vec{a} \cdot \vec{\omega}_B) \quad (4.58)$$

$\uparrow$  un scalaire



- On voit ainsi que la quantité de mouvement angulaire de la roue selon son axe de spin inclut la contribution de sa vitesse relative par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_B$  plus la composante de la vitesse absolue de  $\vec{\mathcal{F}}_B$  dans la direction de l'axe  $\vec{a}$ .
- La roue est un corps dynamique dont l'équation du mouvement a la même forme que (4.49) :

$$\overset{o}{\vec{h}}_W + \vec{\omega}_B \times \vec{h}_W = \vec{T}_W \quad (4.59)$$

- Les couples appliqués sur la roue sont :

$$\vec{T}_W = T_{ca}\vec{a} + T_{Rb}\vec{b} + T_{Rc}\vec{c} \quad (4.60)$$

↑ couple de commande selon  $\vec{a}$ 
↑ couples de réaction aux supports de la roue en  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$

- Ce qui nous intéresse est la projection de (4.59) sur l'axe  $\vec{a}$  parce que le couple de commande  $T_{ca}$  est celui qui nous intéresse dans la commande de la roue. On recherche la projection sur  $\vec{a}$  de  $\overset{o}{\vec{h}}_W$ ,  $\vec{T}_W$  et  $\vec{\omega}_B \times \vec{h}_W$ .

• Selon (4.58) :  $\overset{o}{\vec{h}}_W \cdot \vec{a} = \dot{h}_a$

Selon (4.60) :  $\vec{T}_W \cdot \vec{a} = T_{ca}$

- Il est facile de démontrer que  $\vec{\omega}_B \times \vec{h}_W$  n'a pas de composante selon  $\vec{a}$  et par conséquent :

$$\vec{a} \cdot [\vec{\omega}_B \times \vec{h}_W] = 0$$

- Pour arriver à ce résultat, il faut se référer à un résultat intermédiaire de **C12**. Quelque part dans le développement, l'expansion de  $\vec{h}_W$  selon (4.56) devrait donner :

$$\vec{h}_W = \vec{J}_W \cdot \vec{\omega}_W = \underbrace{J_s(\omega_{rel} + \vec{a} \cdot \vec{\omega}_B)}_{\substack{\text{un scalaire} \\ \text{un vecteur parallèle à } \vec{a}}} \vec{a} + J_t \left( \vec{1} - \vec{a}\vec{a} \right) \cdot \vec{\omega}_B \quad (4.61)$$

- Le dernier terme peut s'écrire :

$$J_t \left( \vec{1} - \vec{a}\vec{a} \right) \cdot \vec{\omega}_B = J_t \vec{\omega}_B - J_t (\vec{a} \cdot \vec{\omega}_B) \vec{a}$$

- Donc  $\vec{h}_W$  est une somme de 2 vecteurs parallèles à  $\vec{a}$  et d'un vecteur parallèle à  $\vec{\omega}_B$ .
- Si on prend le produit vectoriel  $\vec{\omega}_B \times \vec{h}_W$ , on aura des vecteurs selon  $\vec{\omega}_B \times \vec{a}$  et selon  $\vec{\omega}_B \times \vec{\omega}_B = \vec{0}$ . Les composantes vectorielles de  $\vec{\omega}_B \times \vec{h}_W$  selon  $\vec{a}$  sont donc nulles.

- En revenant à la projection de (4.59) sur l'axe  $\vec{a}$ , l'équation dynamique de la roue selon l'axe  $\vec{a}$  est :

$$\boxed{\dot{h}_a = T_{ca}} \quad (4.62)$$

avec

$$\boxed{h_a = J_s(\omega_{rel} + \vec{a} \cdot \vec{\omega}_B)} \quad (4.63)$$

- Dans un satellite, il y a au moins 3 roues à réaction selon 3 axes  $\vec{a}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  indépendants.
- Les équations sont donc :

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ai} &= T_{cai} \\ h_{ai} &= J_{si}(\omega_{rel} + \vec{a}_i \cdot \vec{\omega}_B) \end{aligned} \quad (4.64)$$

et

$$\underline{h}_W^B = \sum h_{ai} \underline{a}_i^B = \text{moment angulaire total des roues}$$

- L'équation pour le satellite avec roues à réaction a aussi la même forme que (4.49) mais il faut tenir compte de la quantité de mouvement angulaire totale du satellite  $\vec{h}_{TOT}$  :

$$\overset{o}{\vec{h}_{TOT}} + \vec{\omega}_B \times \vec{h}_{TOT} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{externes}}}{\vec{T}_{ex}} \quad (4.65)$$

où

$$\vec{h}_{TOT} + \vec{J}_B \cdot \vec{\omega}_B + \sum_i \vec{J}_{Wi} \cdot \vec{\omega}_{Wi} \quad (4.66)$$

- Vu que les variables d'état utilisées pour la dynamique des roues est  $h_{ai}$  dans (4.64), on préfère modifier (4.66) pour l'avoir en terme de  $h_{ai}$ .

**C13.** Démontrer que  $\vec{h}_{TOT}$  dans (4.66) peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{h}_{TOT} &= \vec{J}_B^* \cdot \vec{\omega}_B + \sum_i h_{ai} \vec{a}_i \\ &= \vec{h}_B^* + \vec{h}_W \end{aligned}} \quad (4.67)$$

où

$$\vec{J}_B^* = \vec{J}_B + \sum_i J_{ti} (\vec{1} - \vec{a}_i \vec{a}_i) \quad (4.68)$$

= inertie totale du satellite moins l'inertie des roues selon les axes  $\vec{a}_i$

= inertie du satellite sans les roues plus l'inertie « fixe » des roues selon les axes  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$

Conseils pour la résolution :

(1) Remplacer l'équation (4.61) dans l'équation (4.66)

(2) Simplifier en utilisant  $h_a$  de l'équation (4.63)

(3) Récolter les termes pour obtenir (4.67) et utiliser la définition de  $\vec{J}_B^*$  dans (4.68)

- Il ne reste qu'à prendre les composantes des équations (4.67) et (4.68) dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$ .

- Résumé des équations (dans  $\vec{\mathcal{F}}_B$ ) :

→ satellite au complet 
$$\dot{\underline{h}}_{TOT} + \underline{\omega}_B^\times \underline{h}_{TOT} = \underline{T}_{ex}^B \quad (4.69)$$

$$\underline{h}_{TOT} = \underline{J}_B^* \underline{\omega}_B + \sum_i h_{ai} \underline{a}_i^B \quad (4.70)$$

→ roues à réaction 
$$\dot{h}_{ai} = T_{cai} \quad (4.71)$$

$$h_{ai} = J_{si} \left[ \omega_{rel\ i} + (\underline{a}_i^B)^T \underline{\omega}_B \right] \quad (4.72)$$

↑  
=  $\vec{a}_i \cdot \vec{\omega}_B$  aussi...

- Solutions des équations :

(1) Intégrer (4.69) et (4.71) pour  $\underline{h}_{TOT}$  et  $h_{ai}$

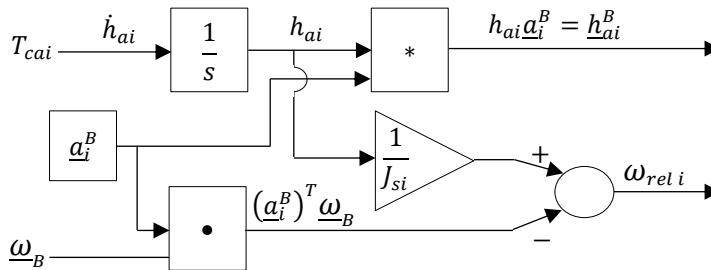
(2) Calculer  $\underline{\omega}_B$  de (4.70)

$$\underline{\omega}_B = (\underline{J}_B^*)^{-1} \left[ \underline{h}_{TOT} - \sum_i h_{ai} \underline{a}_i^B \right] \quad (4.73)$$

(3) Calculer  $\omega_{rel\ i}$  de (4.72)

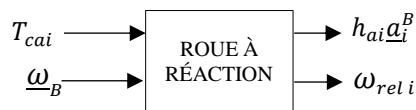
$$\omega_{rel\ i} = \frac{h_{ai}}{J_{si}} - (\underline{a}_i^B)^T \underline{\omega}_B \quad (4.74)$$

- Schéma-bloc d'une roue à réaction correspondant aux équations (4.71), (4.72) et (4.74) :



- Schéma-bloc du satellite au complet correspondant aux équations (4.69), (4.70) et (4.73) :

**C14.** Modifier le schéma-bloc à la fin de la Section 4.9 pour y inclure 3 roues à réaction. Pour éviter de répéter 3 fois le schéma-bloc ci-dessus de la roue, simplement utiliser 3 systèmes de la forme :



#### 4.11 CINÉMATIQUE DE ROTATION

- Les équations de cinématique permettent d'intégrer les vitesses angulaires d'un corps  $\underline{\omega}_B$ , obtenues des équations dynamiques, pour obtenir l'orientation du satellite (angles de Euler, quaternion).
- Il y a au moins 2 conventions pour les satellites :
  - (1) exprimer l'orientation en roulis, tangage, lacet par rapport au référentiel orbital  $\vec{\mathcal{F}}_O$ ;
  - (2) exprimer l'orientation directement par rapport aux étoiles i.e.  $\vec{\mathcal{F}}_I$  à l'aide de quaternion  $\underline{q}_{BI}$  (le quaternion qui exprime  $\vec{\mathcal{F}}_B$  dans  $\vec{\mathcal{F}}_I$ ). L'utilisation du roulis-tangage-lacet par rapport à  $\vec{\mathcal{F}}_I$  directement peut être utilisée mais est peu commune.
- On choisit l'option (2) ici puisqu'on supposera un capteur d'étoile qui mesure  $\underline{q}_{BI}$  directement.
- La cinématique des quaternions est donnée par :

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\eta \underline{1} + \underline{\varepsilon}^\times) \underline{\omega}_B \\ \underline{\dot{\eta}} &= \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\omega}_B\end{aligned}\tag{4.75}$$

- Sous forme plus compacte, avec la convention  $\underline{q} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta \underline{1} + \underline{\varepsilon}^\times \\ -\underline{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \underline{\omega}_B\tag{4.76}$$

- Connaissant  $\underline{\omega}_B$  de (4.73), on peut ainsi trouver  $\underline{q}$  par intégration de (4.76).

**C15.** Démontrer que (4.76) peut aussi s'écrire :

$$\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2} \underline{\Omega}(\underline{\omega}_B) \underline{q}\tag{4.77}$$

où

$$\underline{\Omega}_{4 \times 4}(\underline{\omega}_B) = \begin{bmatrix} -\underline{\omega}_B^\times & \underline{\omega}_B \\ -\underline{\omega}_B^T & \underline{0} \end{bmatrix}\tag{4.78}$$

Conseil : Simplement remplacer (4.78) dans (4.77) et réorganiser pour arriver à (4.76).

$$\begin{aligned}\text{N. B. : } \underline{a}^\times \underline{b} &= -\underline{b}^\times \underline{a} & \text{par analogie à } \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \underline{a}^T \underline{b} &= \underline{b}^T \underline{a} & \text{par analogie à } \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

- Noter que (4.77) est de la forme  $\underline{\dot{q}} = \underline{A} \underline{q}$ . Pour un interval de temps assez court pour que  $\underline{\omega}_B$  soit considéré approximativement constant, on peut solutionner (4.77) :

$$\underline{q}(t + \Delta t) \approx \exp\left[\frac{1}{2}\underline{\Omega}\Delta t\right]\underline{q}(t) \quad (4.79)$$

- En développant la série infinie  $e^{\underline{A}t} = \underline{1} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\underline{A}^3 t^3}{3!}$  et en utilisant certaines identités, on peut démontrer que :

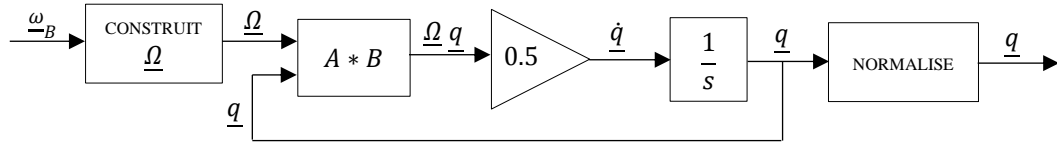
$$\exp\left[\frac{1}{2}\underline{\Omega}\Delta t\right] = \underline{1}_{4 \times 4} \cos\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) + \frac{1}{\omega}\underline{\Omega} \sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)$$

et donc :

$$\underline{q}(t + \Delta t) \approx \left[\underline{1}_{4 \times 4} \cos\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right) + \frac{1}{\omega}\underline{\Omega} \sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)\right]\underline{q}(t) \quad (4.80)$$

où  $\omega = (\omega_{Bx}^2 + \omega_{By}^2 + \omega_{Bz}^2)^{1/2} = |\vec{\omega}_B|$

- L'équation (4.80) est utile quand on veut discrétiser (4.77).
- Pour compléter le schéma-bloc à la fin des Sections 4.9 et 4.10 avec la partie cinématique, on a :



- Après l'intégration du quaternion, il faut toujours s'assurer de le normaliser pour que  $\underline{q}^T \underline{q} = 1$ .

#### 4.12 MESURE DU QUATERNION – DÉTECTEUR D'ÉTOILE

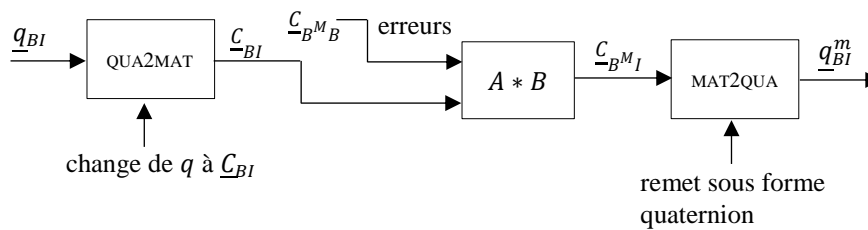
- Une fois le quaternion  $\underline{q}_{BI}$  calculé avec les équations de la section précédente, il faut y introduire la dynamique et les erreurs d'un capteur (détecteur d'étoile) pour simuler la mesure d'un quaternion  $\underline{q}_{BI}^m$ .
- Typiquement, un détecteur d'étoile :
  - fait une moyenne de l'orientation sur un temps  $T$  qui est son temps d'intégration des photons sur son détecteur (de types CCD);
  - ajoute des erreurs de mesures selon les spécifications du capteur;
  - numérise le résultat (discrétisation dans le temps et quantification de la mesure).
- La moyenne de  $q_{BI}$  sur un temps  $T$  dénoté  $\bar{q}_{BI}$ , est donnée par :

$$\bar{q}_{BI} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q_{B/I} dt \quad (4.81)$$

- Sous forme Laplace, cette intégrale devient :

$$\bar{q}_{BI}(s) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{s} q_{BI} - \frac{e^{-Ts}}{s} q_{BI} \right] = \frac{1}{sT} (1 - e^{-Ts}) q_{BI}(s)$$

- Pour mettre sur script MATLAB, cela nécessite des séries de Padé à cause du  $e^{-Ts}$ . Sur Simulink, cela nécessite un intégrateur avec reset à zéro.
- Pour introduire des erreurs de mesure, on ajoute une petite rotation  $\underline{C}_{B^M B}$  entre l'orientation réelle de  $\vec{\mathcal{G}}_B$  et son orientation mesurée :



- Il est plus simple d'ajouter les erreurs sous forme d'une petite rotation sous forme Euler parce que les erreurs de mesure sont souvent données en termes d'angles de Euler.
- Pour 3 petites rotations de Euler  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , si les angles sont suffisamment petits, on peut utiliser les approximations :

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &\approx \theta_i \\ \cos \theta_i &\approx 1 \\ \theta_i \theta_j &\approx 0 \end{aligned}$$

- Dans ce cas, toutes les matrices de rotation, peu importe l'ordre de rotation (3–1–3, 3–2–1, 1–3–2, etc.), deviennent :

$$\underline{C} = \underline{1} - \underline{\theta}^\times \quad \text{où} \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

- Donc, les petites erreurs de mesure du détecteur d'étoiles deviennent :

$$\underline{C}_{B^M B} = \underline{1} - \underline{\theta}^\times = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

avec  $\theta_i$  des nombres aléatoires avec un  $\sigma$  typique de 5 à 10 secondes d'arc.

- NOTE : On combine souvent le moyennage avec l'introduction d'erreur en faisant la moyenne sur les rangées de  $\underline{C}_{BI}$  plutôt que  $q_{BI}$ .
- Noter aussi que la matrice **(4.82)** n'est pas orthonormale et qu'il faut toujours normaliser la matrice  $\underline{C}_{B^M I}$  après l'introduction des erreurs.
- Noter finalement qu'il faut toujours renormaliser les quaternions aussi.

## ANNEXE A : La méthode de la variation des constantes (VOP)

- La méthode VOP permet de calculer la solution aux équations différentielles d'un système dynamique soumis à de petites perturbations à partir d'une solution analytique aux équations différentielle sans perturbations. Cette solution non perturbée du système dynamique, exprimée en termes de constante d'intégration (la dimension de est celle de l'ordre du système) est utilisée comme solution aux équations avec perturbations.
- La procédure consiste à insérer la solution analytique des équations sans perturbations dans l'équation différentielle incluant les perturbations mais en considérant que les constantes d'intégration de la solution non perturbée deviennent maintenant des variables qui évoluent dans le temps sous l'effet des perturbations. Il en résulte des équations différentielles pour ces « constantes » qui, une fois intégrées numériquement ou analytiquement dans le temps, donnent l'évolution de la solution aux équations perturbées sous la forme de la solution non perturbée.
- Ainsi, cette solution a la même forme que la solution non perturbée à la différence que ses constantes d'intégration originales évoluent maintenant dans le temps. On peut ainsi considérer que la solution non perturbée est valide à un instant donné  $t$  mais, à un instant  $t+dt$  plus tard, la nouvelle solution est légèrement différente à cause de l'évolution des constantes sauf au point commun entre les deux solutions d'où le terme d'orbites osculatoires (« osculating orbits») dans le cas de dynamique orbitale.
- Sous forme mathématique, la méthode VOP se décrit comme suit :
- Supposons que les équations différentielles sans les perturbations sont de la forme générale:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}} &= \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\underline{r}\end{aligned}\quad (4.83)$$

et que la solution de ces équations non perturbées est de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \underline{f}(\underline{c}, t) \\ \underline{v} &= \underline{g}(\underline{c}, t).\end{aligned}\quad (4.84)$$

où  $\underline{c}$  sont les constantes d'intégration. Pour la dynamique orbitale :  $\underline{c} = \{a, e, \omega, i, \Omega, u_0\}$ .

- Dans la méthode VOP, on considère que cette solution est aussi valide pour les équations avec les perturbations:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}} &= \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\underline{r} + \underline{f}_\varepsilon\end{aligned}\quad (4.85)$$

mais, cette fois, les constantes  $\underline{c}$  deviennent variables dans le temps pour tenir compte des variations causées par les perturbations.

- Si on prend la dérivée de la première équation de (4.84), on obtient :

$$\dot{\underline{r}} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{c}^T} \frac{d\underline{c}}{dt}.$$

- Cependant, la première de (4.83) doit demeurer valide. Il faut donc avoir  $\dot{\underline{r}} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial t}$  et donc:



$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{c}^T} \frac{d\underline{c}}{dt} = \underline{0} \quad (4.86)$$

- Pour la dynamique orbitale, cela donne une matrice de  $(3 \times 6) \times (6 \times 1) = 3 \times 1$  équations sur les  $\underline{c}$ .
- Si on prend maintenant la dérivée de la deuxième équation de (4.84):

$$\dot{\underline{v}} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{c}^T} \frac{d\underline{c}}{dt}.$$

et qu'on l'insère dans la deuxième équation de (4.85), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{c}^T} \frac{d\underline{c}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \underline{r} + \underline{f}_\varepsilon$$

- Cependant, la deuxième de (4.83) doit demeurer valide. Il faut donc avoir  $\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} = -\frac{\mu}{r^3} \underline{r}$  et donc :

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{c}^T} \frac{d\underline{c}}{dt} = \underline{f}_\varepsilon \quad (4.87)$$

- Pour la dynamique orbitale, cela donne une autre matrice de  $3 \times 1$  équations sur les  $\underline{c}$ . En combinant les équations (4.86) et (4.87) et en y remplaçant  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$  de (4.84), les équations pour les  $\underline{c}$  deviennent :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{c}^T} \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{c}^T} \end{bmatrix} \frac{d\underline{c}}{dt} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}_\varepsilon \end{bmatrix}$$

- En pré-multipliant cette équation par la matrice  $6 \times 6$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial \underline{v}^T}{\partial \underline{c}} & + \frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}} \end{bmatrix}$$

la forme classique suivante est obtenue :

$$\underline{L} \frac{d\underline{c}}{dt} = \frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}} \underline{f}_\varepsilon \quad (4.88)$$

où la matrice  $6 \times 6$   $\underline{L}$  est le crochet de Lagrange (« Lagrange bracket ») :

$$\underline{L} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}} \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{c}^T} - \frac{\partial \underline{v}^T}{\partial \underline{c}} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{c}^T} \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

- Pour obtenir des équations explicites pour  $\frac{d\underline{c}}{dt}$  dans (4.88), il faut inverser le crochet de Lagrange :

$$\frac{d\underline{c}}{dt} = -\underline{P} \frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}} \underline{f}_\varepsilon \quad (4.90)$$

où  $\underline{P} = -\underline{P}^T = \underline{\underline{L}}^{-1}$  est le crochet de Poisson (« Poisson bracket ») :

$$\underline{P} \triangleq \left[ \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{r}^T} \frac{d\underline{c}^T}{d\underline{v}} - \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{v}^T} \frac{\partial \underline{c}^T}{\partial \underline{r}} \right]. \quad (4.91)$$

- Dans le cas où les perturbations sont conservatrices (par exemple, les perturbations gravitationnelles), elles peuvent être dérivées du gradient d'un potentiel  $U$  :

$$\underline{f}_\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \quad (4.92)$$

- En remplaçant (4.92) dans (4.91) et en utilisant l'identité  $\frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}} \frac{\partial U}{\partial \underline{r}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{c}}$ , on obtient, dans le cas de la dynamique orbitale, les *équations planétaires de Lagrange* (« *Lagrange Planetary Equations* »):

$$\frac{d\underline{c}}{dt} = -\underline{P} \frac{\partial U}{\partial \underline{c}} \quad (4.93)$$

- Dans le cas où les perturbations ne sont pas issues d'un potentiel (perturbations non conservatrices comme la traînée aérodynamique), la forme (4.90) doit être utilisée. En effectuant la multiplication  $\underline{P} \frac{\partial \underline{r}^T}{\partial \underline{c}}$  et en simplifiant, il peut être démontré que (4.90) se réduit à :

$$\frac{d\underline{c}}{dt} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{v}^T} \underline{f}_\varepsilon \quad (4.94)$$

- Dans le cas de la dynamique orbitale, ces équations sont les *Équations Planétaires de Gauss* (« *Gauss planetary equations* ») ou, plus couramment, les *Équations Variationnelles de Gauss* (« *Gauss Variational Equations* ») ou GVE.
- Les équations de Gauss peuvent être aussi utilisées dans le cas de perturbations conservatrices dans la mesure où le gradient du potentiel a déjà été calculé via (4.92).

## ANNEXE B : La méthode de la moyenne (MoA)

- Pour une orbite non perturbée, les 5 éléments d'orbite  $\{a, e, \omega, i, \Omega\}$  sont constants. Seule l'anomalie (vraie  $\theta$  ou moyenne  $M$ ) varie rapidement sous l'effet du champ gravitationnel principal. On réfère à ces variables  $\theta$  ou  $M$  comme étant des *variables rapides* (« *fast variables* »).
- Sous l'effet des perturbations, ces 5 éléments d'orbites originalement constants deviennent variables dans le temps. Vu l'hypothèse de la Méthode VOP que la grandeur des perturbations est petite comparée à celle de la force gravitationnelle principale ( $|f_r|, |f_t|, |f_n| \ll \mu/r^2$ ), ces 5 éléments d'orbite varient lentement par rapport à  $\theta$  ou  $M$ . On réfère à ces variables comme étant des *variables lentes* (« *slow variables* ») dont le taux de variation est un facteur d'ordre  $\epsilon$  plus petit que pour  $\theta$  ou  $M$ .
- Les équations différentielles des variables lentes  $\underline{x} = [a, e, \omega, i, \Omega]^T$  dépendent de la variable rapide  $\theta$  (ou  $M$ ) à travers des fonctions trigonométriques périodiques :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \epsilon \underline{X}(\underline{x}, M) \quad (4.95)$$

$$\frac{dM}{dt} = n(\underline{x}) + \epsilon Y(\underline{x}, M)$$

- Bien que l'évolution des variables  $\underline{x}$  soit lente en moyenne, la présence de fonctions trigonométriques de la variable rapide introduit des oscillations intra-orbitales de haute fréquence dans les éléments d'orbite osculatoires. Le pas d'intégration de ces équations doit être une fraction de la période orbitale.
- La Méthode de la moyenne ou MoA (« pour « *Method of Averaging* »), présentée par Bogoliubov et Mitropolsky en 1961 et reprise par Morrison en 1966, permet d'extraire les hautes fréquences des équations différentielles pour n'en retenir que la tendance moyenne à long terme. Cela permet d'avoir un pas d'intégration beaucoup plus grand que la période orbitale et permet d'obtenir certaines propriétés utiles de la dynamique orbitale perturbée.
- La MoA sépare les éléments osculatoires en éléments moyens (« *mean elements* »), dénotés  $(\bar{\phantom{x}})$  et en termes courte-période (« *short periodic terms* ») :

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \bar{\underline{x}} + \epsilon \underline{P}(\bar{\underline{x}}, \bar{M}) \\ \bar{M} &= \bar{M} + \epsilon \underline{Q}(\bar{\underline{x}}, \bar{M}) \end{aligned} \quad (4.96)$$

où  $\bar{M}$  est l'anomalie moyenne,  $\bar{\underline{x}}$  est la matrice-colonne des 5 éléments d'orbite lents,  $\underline{P}$  et  $\underline{Q}$  sont les termes courte-période et  $\epsilon$  dénote la présence d'un terme perturbateur d'ordre 1. La méthode peut être appliquée à un ordre  $n > 1$  et d'autres termes  $\epsilon^n$  s'ajouteraient à l'équation (4.96).

- Le but de cette séparation est d'obtenir des équations différentielles pour les éléments moyens  $\bar{\underline{x}}$  et  $\bar{M}$  qui ne dépendent plus de la variable rapide  $M$  et des oscillations associées :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\underline{x}}}{dt} &= \epsilon \underline{U}(\bar{\underline{x}}) \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= n(\bar{\underline{x}}) + \epsilon V(\bar{\underline{x}}) \end{aligned} \quad (4.97)$$

- Ces équations peuvent donc être intégrées numériquement avec un grand pas d'intégration. Les variables osculatoires originales peuvent être récupérées avec les équations **(4.96)** en ajoutant les termes courte-période.
- La MoA permet de trouver les fonctions  $\epsilon \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})$ ,  $\epsilon \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})$ ,  $\epsilon \underline{U}(\underline{\bar{x}})$ ,  $\epsilon \underline{V}(\underline{\bar{x}})$  à partir des équations différentielles originales  $\underline{X}(\underline{x}, M)$ ,  $\underline{Y}(\underline{x}, M)$ . La procédure pour la méthode d'ordre 1 est comme suit.
  - On prend la dérivée temporelle des équations **(4.96)** :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= \frac{d\underline{\bar{x}}}{dt} + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} \frac{d\bar{M}}{dt} + \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \frac{d\underline{\bar{x}}}{dt} \right] \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{d\bar{M}}{dt} + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} \frac{d\bar{M}}{dt} + \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \frac{d\underline{\bar{x}}}{dt} \right]\end{aligned}\tag{4.98}$$

- On y remplace les équations **(4.97)** :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= \epsilon \underline{U}(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] + \epsilon^2 \left[ \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} V(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \underline{U}(\underline{\bar{x}}) \right] \\ \frac{dM}{dt} &= n(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \underline{V}(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] + \epsilon^2 \left[ \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} V(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \underline{U}(\underline{\bar{x}}) \right]\end{aligned}$$

mais on ne conserve que les termes d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= \epsilon \left[ \underline{U}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] \\ \frac{dM}{dt} &= n(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \left[ \underline{V}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right]\end{aligned}\tag{4.99}$$

- Les équations ci-dessus doivent être égales aux équations **(4.95)**. Avant de réaliser cette égalité, une série de Taylor d'ordre 1 des équations **(4.95)** autour des éléments d'orbite moyen  $\underline{\bar{x}}, \bar{M}$  doit être prise et les termes d'ordre similaire sont égalés :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= \epsilon \left[ \underline{U}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] = \epsilon \underline{X}(\underline{x}, M) = \epsilon \underline{X}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) + \epsilon^2 \dots \\ \frac{dM}{dt} &= n(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \left[ \underline{V}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] = n(\underline{x}) + \epsilon \underline{Y}(\underline{x}, M) \\ &= n(\underline{\bar{x}}) + \epsilon \left[ \frac{\partial n(\underline{\bar{x}})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) + \underline{Y}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) \right] + \epsilon^2 \dots\end{aligned}\tag{4.100}$$

- En égalant les termes d'ordre 1, on obtient :

$$\epsilon \left[ \underline{U}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] = \epsilon \underline{X}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) \quad (4.101)$$

$$\epsilon \left[ \underline{V}(\underline{\bar{x}}) + \frac{\partial \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M})}{\partial \bar{M}} n(\underline{\bar{x}}) \right] = \epsilon \left[ \frac{\partial n(\underline{\bar{x}})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) + \underline{Y}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) \right]$$

- Il y a 2 équations à 4 inconnues. Il y a donc une infinité de façons pour séparer les termes courte-périodes des termes moyens. En fait, une valeur constante (i.e. indépendant de  $\bar{M}$ ) peut être ajoutée aux termes courte-période sans changer la solution. Cette constante est soustraite quand on passe des éléments orbitaux osculatoires vers les éléments orbitaux moyens et elle est rajoutée dans le sens inverse. On peut donc imposer des fonctions arbitraires  $\underline{p}(\underline{\bar{x}})$  et  $\underline{q}(\underline{\bar{x}})$  comme moyenne aux termes courte-période (dans plusieurs publications, elles sont choisies nulles):

$$\int_0^{2\pi} \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) d\bar{M} = \underline{p}(\underline{\bar{x}}) \quad \int_0^{2\pi} \underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) d\bar{M} = \underline{q}(\underline{\bar{x}})$$

- Cela ajoute les deux autres contraintes nécessaires. La solution pour les équations différentielles des éléments orbitaux moyens est donc :

$$\underline{U}(\underline{\bar{x}}) = \int_0^{2\pi} \underline{X}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) d\bar{M} \quad \underline{V}(\underline{\bar{x}}) = \int_0^{2\pi} \underline{Y}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) d\bar{M} \quad (4.102)$$

- En réarrangeant les équations **(4.101)** et en intégrant par rapport à  $\bar{M}$ , on obtient les termes courte-période:

$$\underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) = \frac{1}{n(\underline{\bar{x}})} \int [\underline{X}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) - \underline{U}(\underline{\bar{x}})] d\bar{M} + \underline{p}(\underline{\bar{x}}) \quad (4.103)$$

$$\underline{Q}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) = \frac{1}{n(\underline{\bar{x}})} \int \left\{ [\underline{Y}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) - \underline{V}(\underline{\bar{x}})] + \frac{\partial n(\underline{\bar{x}})}{\partial \underline{\bar{x}}^T} \underline{P}(\underline{\bar{x}}, \bar{M}) \right\} d\bar{M} + \underline{q}(\underline{\bar{x}})$$

- Les équations **(4.102)** et **(4.103)** complète la séparation des termes courte-période des éléments orbitaux moyens. Pour plusieurs perturbations (les perturbations gravitationnelles entre autres), ces intégrales peuvent être obtenues analytiquement.
- La solution du problème procède selon les étapes suivantes :
  - Pour des conditions initiales des éléments orbitaux osculatoires  $\underline{x}, M$ , les éléments orbitaux moyens initiaux  $\underline{\bar{x}}, \bar{M}$  sont obtenus à partir des équations **(4.96)**. Ces équations sont transcendantes et doivent être solutionnées par itération.
  - À partir de  $\underline{\bar{x}}, \bar{M}$ , les équations différentielles **(4.97)** sont intégrées avec  $\underline{U}(\underline{\bar{x}}), \underline{V}(\underline{\bar{x}})$  de **(4.102)**.
  - En tout temps, les éléments orbitaux osculatoires  $\underline{x}, M$  peuvent être récupérés à partir des équations **(4.96)** en ajoutant les termes courte-période.
- Une fois la MoA appliquée une première fois, la variable rapide devient l'argument du périégée  $\omega$ . Une deuxième application de la MoA sépare les éléments moyens en éléments séculaires  $\underline{\bar{\bar{x}}}$  (« *secular terms* ») qui ne dépendent que de  $\{a, e, i\}$  et en termes longue-période  $\epsilon \underline{L}$  (« *long-periodic terms* ») :

$$\underline{x} = \underline{\bar{\bar{x}}} + \epsilon \underline{P} = [\underline{\bar{\bar{x}}} + \epsilon \underline{L}] + \epsilon \underline{P}$$