La Géométrie euclidienne

Diego Rindisbacher et Océane Patiny

Gymnase de Renens
Vaud, Suisse
26 novembre 2016

Résumé

Dans ce document, nous abordons la base de la géométrie euclidienne : des axiomes aux théorèmes.

Table des matières

1 Introduction

Dans ce document, nous allons aborder les bases de la géométrie euclidienne en présentant les axiomes et certains théorèmes. Le mot géométrie provient du grec *géo* - la terre et de *métrie* - la mesure, à l'origine ce serait donc la mesure de ce qui fait partie de la terre. La géométrie euclidienne étudie les figures et les mesures dans le plan et l'espace. A la base de cette géométrie se trouvent cinq axiomes et des définitions, qui sont tout ce que l'on a pour démontrer de plus en plus d'éléments, qui peuvent nous paraître triviaux tant ils sont omniprésents, mais qu'il a fallu démontrer.

2 Courte biographie d'Euclide

Euclide est un mathématicien grec ayant vécu aux alentours de 300 avant J.C.. Il n'y a que très peu d'information à son sujet si ce n'est qu'il a enseigné au musée d'Alexandrie sous Ptolémée 1^{er}. Euclide ne fut sûrement pas le premier à s'être intéressé à la géométrie, mais la raison pour laquelle on l'appelle le père de la géométrie est "Les éléments d'Euclide". Cet écrit mathématique et géométrique est constitué de treize volumes, qui traitent des fondements de la géométrie euclidienne : des axiomes aux théorèmes et leurs démonstrations. Grâce à la simplicité et la logique de ce recueil, il a été utilisé comme livre de référence durant des siècles.

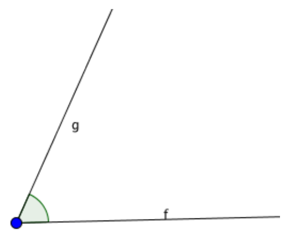
3 Définition de la géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne et le regroupement des connaissances géométrique à l'époque d'Euclide et une théorisation des connaissances de façon mathématique. En réalité, il est difficile de définir la géométrie euclidienne, car c'est celle qui nous entoure toujours, et que l'on utilise le plus fréquemment. Pourtant, il est important de la définir car il existe de nombreuses autres géométries, par exemple la géométrie non euclidienne. Celle-ci ne se base pas sur les même axiomes et est donc complètement différente.

4 Définitions

Dans cette partie, nous allons définir plusieurs termes que nous allons utiliser par la suite.

Définition 4.1. *Angle : Réunion de deux demi-droites non-alignées issues d'un même point*



Définition 4.2. *Droite : Objet fondamental de la géométrie qui est indéfinissable. Mais l'on pourrait dire que c'est le plus court chemin pour rejoindre deux points infiniment éloignés, ou que c'est le chemin que suit la lumière dans un milieu homogène.*

Définition 4.3. *Segment : Portion d'une droite*

Définition 4.4. *Milieu : Point à égale distance des deux extrémités d'un segment*

Définition 4.5. *Equidistant : A même distance, (du latin "aequidistans", "parallèle")*

Définition 4.6. *Sécant : Qui se croise en un point unique*

Définition 4.7. *Angle droit : Quart d'un tour*

Définition 4.8. *Triangle : Réunion de trois points non alignés*

Définition 4.9. *Cercle : Lieu géométrique à égale distance d'un point*

Définition 4.10. *Parallèles : Deux droites qui ne se croisent qu'à l'infini, c'est à dire qui ne se croisent pas. (Du latin "parallelus", "parallèle")*

Définition 4.11. *Perpendiculaires : Deux droites séparées par un angle égal à un quart de tour*

Définition 4.12. *Médiatrice : Droite perpendiculaire à un segment et qui partage celui-ci en deux parties isométriques*

Définition 4.13. *Bissectrice : Ensemble des points équidistants à deux segments formant un angle, ou à deux droites sécantes*

Définition 4.14. *Médiane : Droite passant par le sommet d'un triangle et qui passe par le milieu du côté qui y est opposé*

Définition 4.15. *Hauteur : Droite passant pas l'un des sommets d'un triangle et qui est perpendiculaire au côté qui y est opposé*

Définition 4.16. *Triangle isocèle : Triangle ayant deux côtés et deux angles isométriques*

Définition 4.17. *Triangle équilatéral : Triangle dont les trois angles et les trois côtés sont isométriques, (du latin "aequilateralis", "équilatéral")*

Définition 4.18. *Triangle rectangle : Triangle dont l'un des angles est droit*

5 Les axiomes

Définition 5.1. *Axiome : Un axiome est une proposition admise comme un élément de base d'une théorie mathématique et qui est indémontrable en tant que tel.*

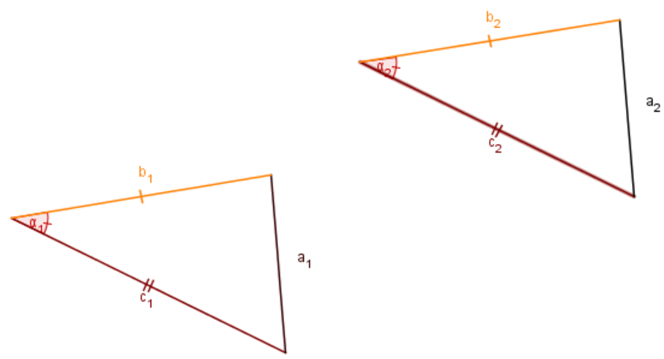
Dans cette section, nous allons définir cinq axiomes, qui nous seront indispensables afin de démontrer des théorèmes par la suite.

5.1 Axiomes de report (axiomes I et II)

Le transport des segments et des angles ne change pas leur mesure.

5.2 Cas d'isométrie des triangles (axiome III)

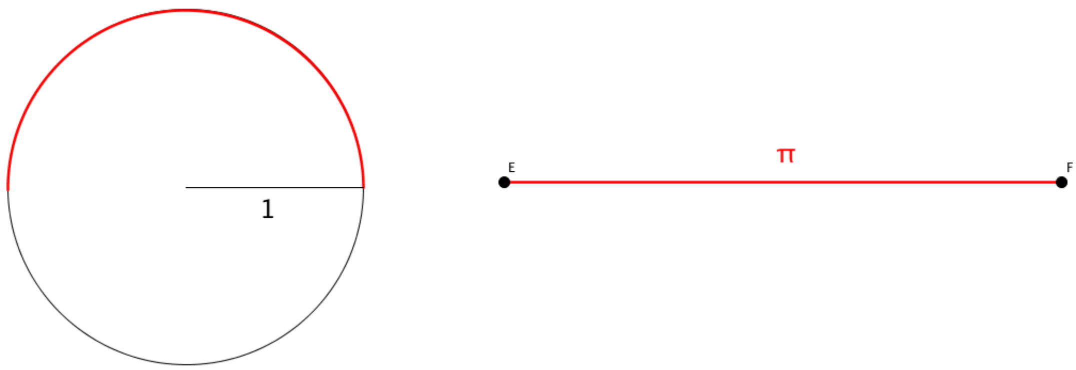
Il y a trois cas d'isométrie du triangle. On dit que deux triangles sont isométriques lorsqu'ils sont en tous point semblable, longueurs et angles. Afin de démontrer les deux autres cas d'isométrie des triangles, il faut en prendre un comme axiome.



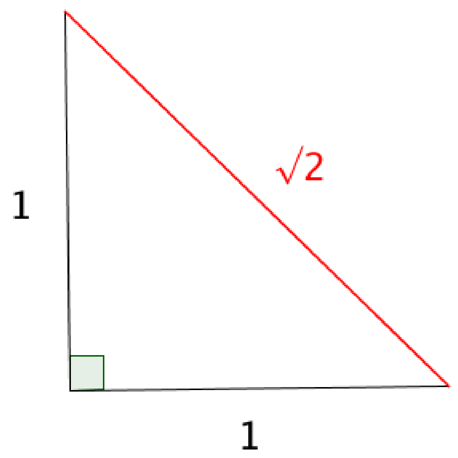
Premier cas : Deux triangles qui ont respectivement un angle et les côtés adjacents isométriques sont isométriques.

5.3 Axiome de continuité (axiome IV)

Tout nombre réel positif est la longueur d'un segment. Par exemple, pi peut être représenté comme la moitié du périmètre d'un cercle de rayon 1.

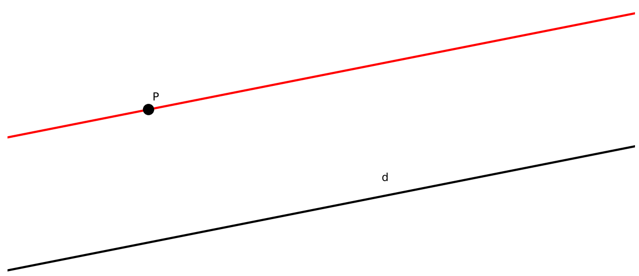


Ou alors, on peut représenter la racine de deux comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés valent 1.



5.4 Axiome des parallèles (axiome V)

Pour un point donné, il existe une et une seule droite parallèle à une droite et passant par ce point.



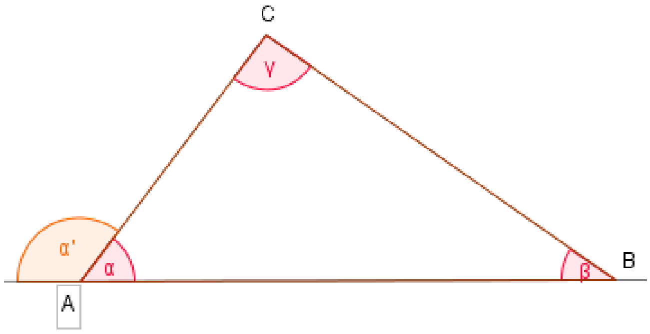
6 Théorèmes

Dans cette partie, nous allons démontrer plusieurs théorèmes en ne se basant que sur ce que l'on sait déjà, c'est-à-dire les cinq axiomes.

6.1 Théorème de l'angle externe

Théorème 1. *Dans tout triangle et pour chaque sommet, l'angle externe est plus grand que l'angle intérieur en chacun des autres sommets.*

Démonstration. Considérons un triangle $\triangle abc$ qui a α' comme angle externe à α.

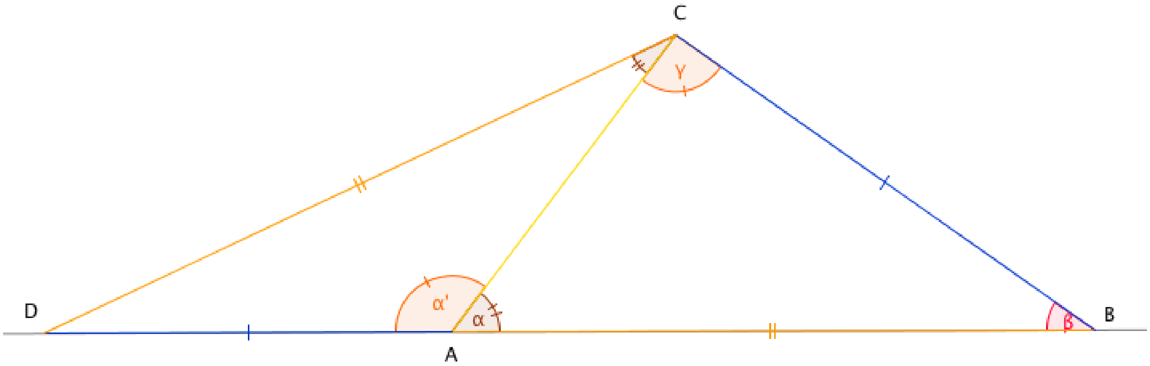


Se présentent alors trois cas possibles :

1. $\alpha' \equiv \gamma$
2. $\alpha' < \gamma$
3. $\alpha' > \gamma$

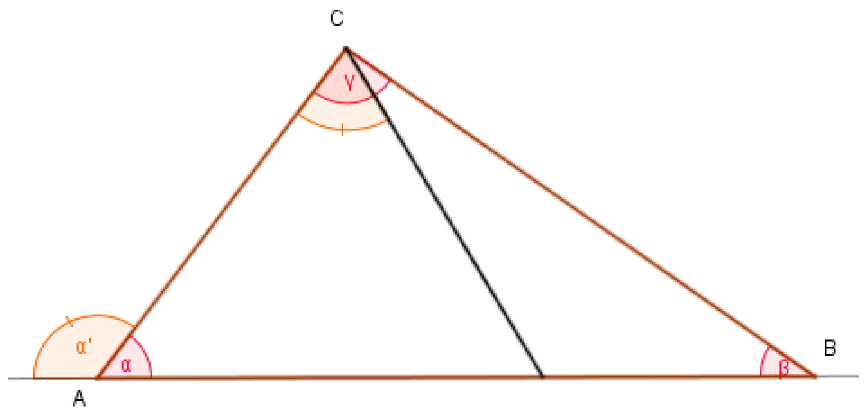
Il nous faut démontrer que les cas 1 et 2 sont impossibles et que seul le cas 3 reste correct.

1. Tout d'abord nous reportons le côté CB sur le prolongement du segment AB et obtenons le segment DA. Ensuite, nous relions les points C et D. Ainsi nous obtenons un nouveau triangle $\triangle DCA$, dont l'un des angles est α'. Grâce au premier cas d'isométrie des triangles, on déduit que les triangles $\triangle DCA$ et $\triangle abc$ sont isométriques ($DA \equiv CB$, $\alpha' \equiv \gamma$ et CA est commun aux deux triangles). Par conséquent $\angle DCA$ équivaut à alpha. Ce qui signifie que l'angle BCD $(\alpha + \gamma)$ est plat, donc que les triangles sont plats. Ce qui est absurde, α' ne peut pas être équivalent à γ.



★

2. Nous considérons le triangle $\triangle abc$ et nous plaçons un point B' sur le segment AB, tel que $\angle ACB' \equiv \alpha'$. Donc ce triangle a un angle externe équivalent à un angle interne, ce qui nous renvoie au premier cas. Il n'est donc pas possible que α' soit plus petit que γ.



★

Nous avons démontré que les cas 1 et 2 sont impossibles et que la seule possibilité est que $\alpha' > \gamma$. □

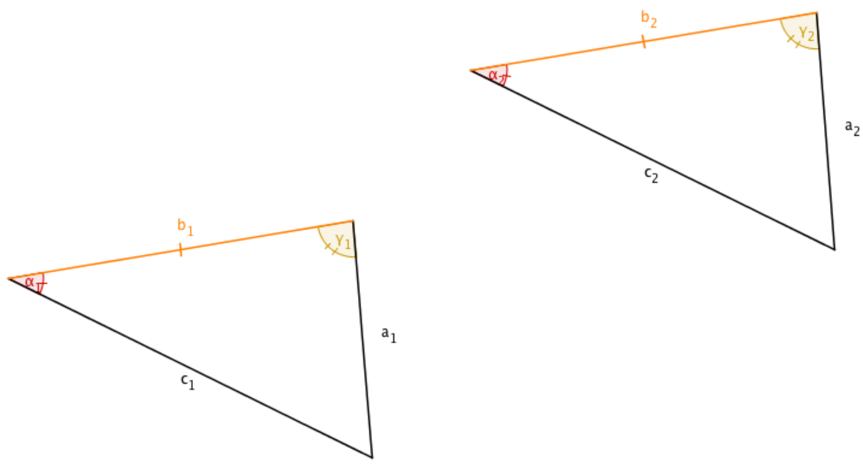
6.2 Deuxième cas d'isométrie des triangles

Théorème 2. *Deux triangles qui ont respectivement un côté et les angles adjacents isométriques sont isométriques.*

Hypothèse. $a_1 \equiv a_2$, $\beta_1 \equiv \beta_2$ *et* $\gamma_1 \equiv \gamma_2$

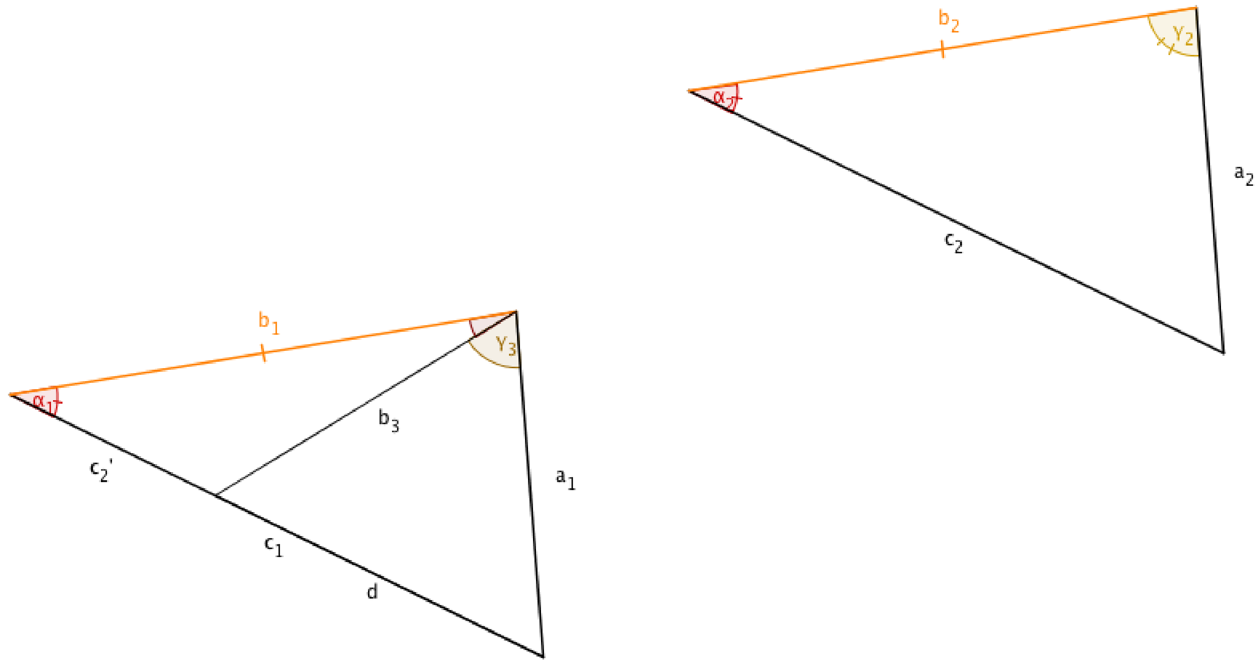
Conclusion. $b_1 \equiv b_2$, $c_1 \equiv c_2$ *et que* $\alpha_1 \equiv \alpha_2$

Démonstration. Considérons deux triangles $\triangle a_1b_1c_1$ et $\triangle a_2b_2c_2$. Nous avons reporté le côté c_2 sur le côté c_1. alors, il y a trois possibilités :



1. $c_1 = c_2$, alors les deux triangles sont isométriques (axiome III)
2. $c_1 < c_2$
3. $c_1 > c_2$

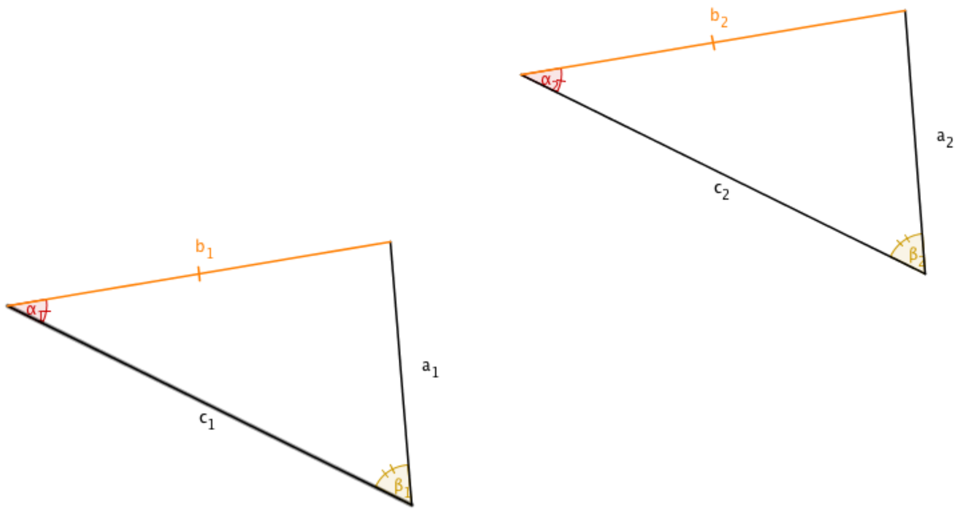
Dans le deuxième et troisième cas, on forme le triangle $\triangle b_1 b_3 c_2'$. Ce triangle est isométrique au triangle $\triangle a_2 b_2 c_2$, car ils ont en commun un angle compris entre deux côtés isométriques. Par conséquent, $\gamma_2 \equiv \gamma_3$, donc γ_1 et γ_3 sont confondus, d est nul et $c_1 \equiv c_2$. On en revient donc au premier cas : les deux triangles $\triangle a_1 b_1 c_1$ et $\triangle a_2 b_2 c_2$ sont isométriques grâce au premier cas d'isométrie des triangles.



□

Corollaire 2.1. *Deux triangles qui ont respectivement un côté et deux angles isométriques sont isométriques.*

Démonstration. Considérons deux triangles $\triangle a_1b_1c_1$ et $\triangle a_2b_2c_2$.



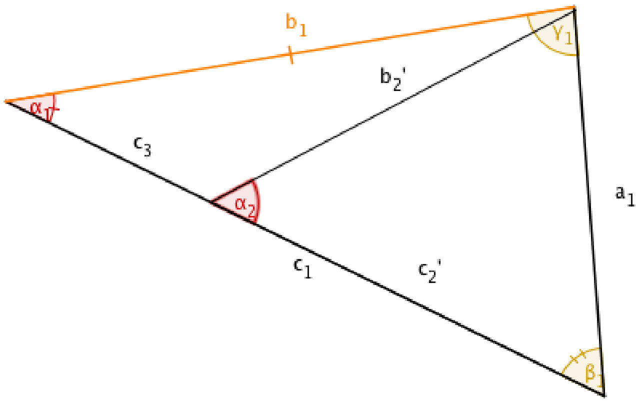
Hypothèse. $a \equiv a'$, $\beta \equiv \beta'$ *et* $\alpha \equiv \alpha'$

Conclusion. $b \equiv b'$, $c \equiv c'$ *et* $\gamma \equiv \gamma'$

Pour démontrer ce corollaire, nous avons superposé ces deux triangles. Il existe alors trois cas possibles :

1. $c_1 \equiv c_2$
2. $c_1 > c_2$
3. $c_1 < c_2$

Dans le premier cas, comme $c_1 \equiv c_2$, $\beta_1 \equiv \beta_2$ et $a_1 \equiv a_2$, on sait que les deux triangles sont isométriques (axiome III).
Dans les deux autres cas, on peut observer la formation du triangle $b_1b_2'c_3$, dont l'un des angles est alpha 1. Considérons ce triangle, on peut observer que l'un de ses angles externes (voir sous-section 6.1) est α_2, ce qui implique que $\alpha_1 < \alpha_2$, ce qui est absurde. Le seul cas possible est donc le premier.



□

Remarque. *Un corollaire est une démonstration nouvelle que l'on peut faire grâce à une affirmation précédente. Le mot provient du latin "corollarium", qui signifie littéralement "petite couronne".* [1]

1. CNRTL, dictionnaire étymologique, http ://www.cnrtl.fr/

6.3 Triangles isocèles

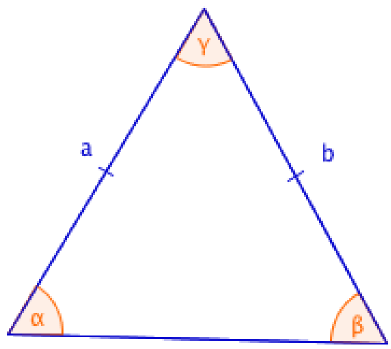
Théorème 3. *Un triangle est isocèle si et seulement si les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème se déroule en deux parties :

— La première partie doit démontrer qu'un triangle avec deux côtés isométriques est isocèle

— La deuxième partie doit démontrer qu'un triangle avec deux angles isométriques est isocèle

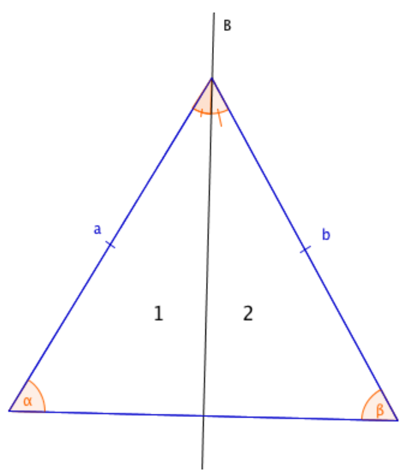
1. Nous considérons le triangle ABC.



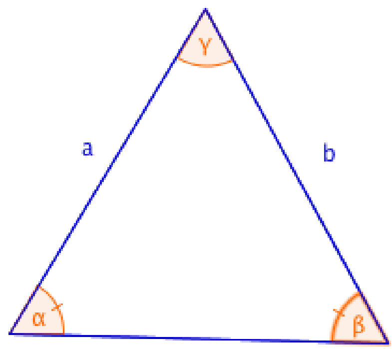
Hypothèse. $a \equiv b$

Conclusion. $\alpha \equiv \beta$

En faisant la bissectrice B de l'angle γ, nous obtenons deux triangles (1 et 2) qui ont un angle isométrique ($\gamma_1 \equiv \gamma_2$) compris entre deux côtés isométriques ($a \equiv b$, B). Donc nous savons que les triangles 1 et 2 sont isométriques, grâce au premier cas d'isométrie des triangles. Par conséquant, $\alpha \equiv \beta$ et le triangle ABC est isocèle.



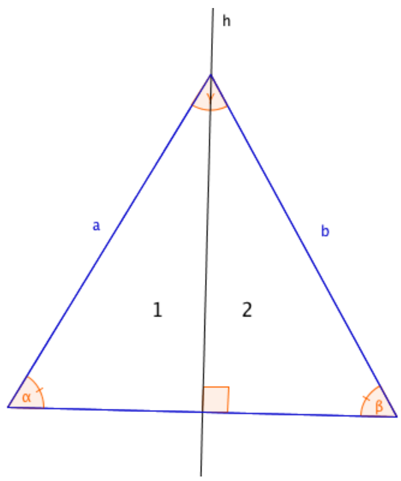
2. Nous considérons le triangle ABC.



Hypothèse. $\alpha \equiv \beta$

Conclusion. $a \equiv b$

Nous tirons la hauteur h partant de γ et obtenons deux triangles 1 et 2. Ces deux triangles ont deux angles ($\alpha \equiv \beta$, les angles droits) et un côté (h) isométriques, donc ils sont isométriques (corollaire du deuxième cas d'isométrie des triangles). Par conséquent $a \equiv b$ et le triangle ABC est isocèle.



□

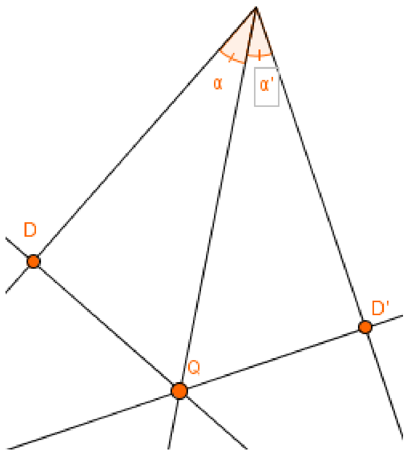
6.4 Propriétés des bissectrices

Théorème 4. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points intérieurs à l'angle et équidistants à ses côtés.*

Le théorème implique deux choses :

1. Un point qui se trouve sur la bissectrice d'un angle est équidistant à ses côtés
2. Un point équidistant au côtés d'un angle se trouve sur sa bissectrice

Démonstration. Nous considérons deux droites d et d' qui se coupent en un point A, on trace la bissectrice de l'angle en A et on obtient deux angles α et α'. Puis nous traçons deux segments a et a' qui partent d'un point Q sur la bissectrice et qui coupent les droites d et d' perpendiculairement, aux points D et D'.

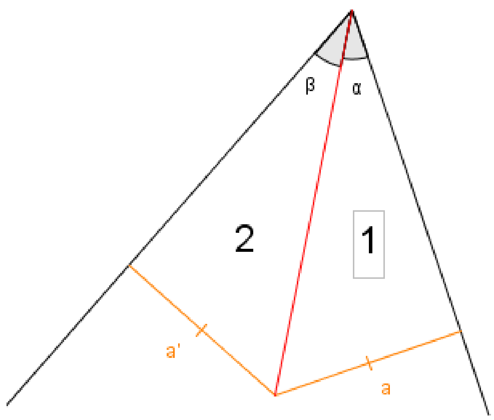


Hypothèse. *d et d' sont deux droites sécantes, $\alpha \equiv \alpha'$, $a \perp d$, $a' \perp d'$*

Conclusion. $a \equiv a'$

En faisant la construction, nous obtenons deux triangles $\triangle AQD$ et $\triangle A'QD'$. Comme ces deux triangles partagent un côté et ont deux angles isométriques ($\alpha \equiv \alpha'$, les angles droits), ils sont isométriques (corollaire du deuxième cas d'isométrie des triangles). Donc $a \equiv a'$. □

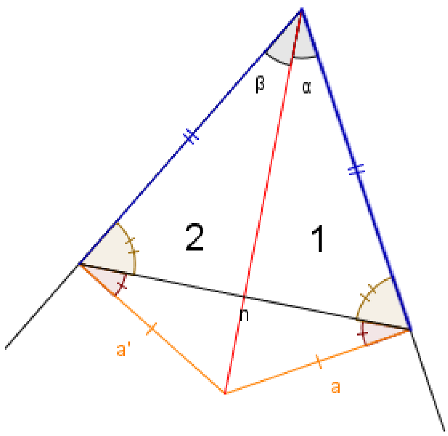
Démonstration. Nous considérons deux droites d et d' qui se coupent en un point A. Puis nous considérons un point Q qui est à égale distance de d et d'. Ensuite nous traçons deux segments a et a' qui coupent les droites d et d' perpendiculairement aux points D et D' et qui passent par Q. En reliant le point Q et le point A, nous obtenons deux angles α et α'.



Hypothèse. *d et d′ sont deux droites sécantes,* $a \equiv a'$, $a \perp d$, $a' \perp d'$

Conclusion. $\alpha \equiv \alpha'$

Ainsi, nous obtenons deux triangle $\triangle AQD$ et $\triangle A'QD'$. Pour le moment, nous savons que ces deux triangles ont un côté en commun et un angle isométrique. Pour trouver une troisième grandeur isométrique, nous formons le triangle $\triangle DD'Q$. Ce triangle est isocèle, parce que $a \equiv a'$. Donc le triangle $\triangle DD'A$ l'est aussi et les distances AD' et AD sont isométriques.

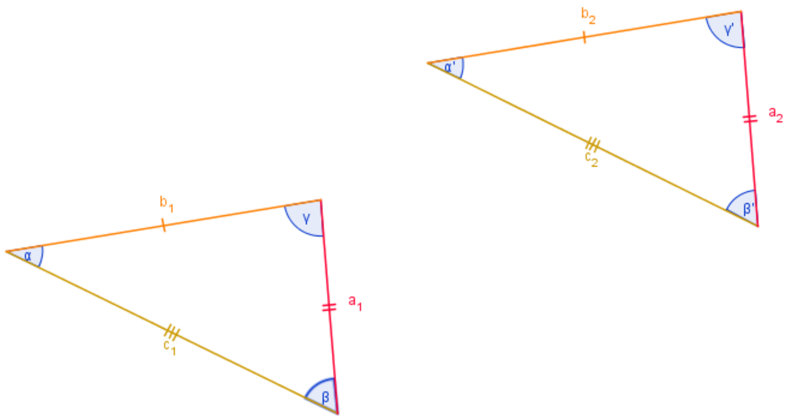


Donc, grâce au corollaire du deuxième cas d'isométrie, nous savons que les triangle $\triangle AQD$ et $\triangle A'QD'$ sont isométriques. Par conséquent, $\alpha \equiv \alpha'$. $\square$

6.5 Troisième cas d'isométrie des triangles

Théorème 5. *Deux triangles qui ont respectivement les trois côtés isométriques sont isométriques.*

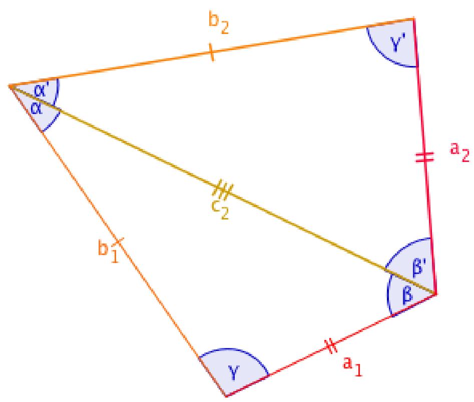
Démonstration. Nous considérons deux triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$.



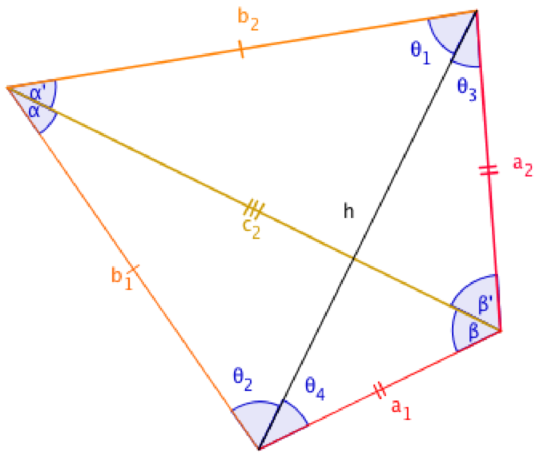
Hypothèse. $a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2$ *et* $c_1 \equiv c_2$

Conclusion. $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$ *et* $\gamma \equiv \gamma'$

Nous rassemblons les deux triangles en un quadrilatère en superposant c_1 et c_2.



Puis nous relions les sommets en γ et γ', nous nommons ce segment h. Ainsi, nous obtenons deux triangles qui sont isocèles $\triangle a_1a_2h$ et $\triangle b_1b_2h$ ($a_1 \equiv a_2$ pour $\triangle a_1a_2h$ et $b_1 \equiv b_2$ pour $\triangle b_1b_2h$, voir section 6.3) ce qui signifie que $\theta_1 \equiv \theta_2$ et que $\theta_3 \equiv \theta_4$.

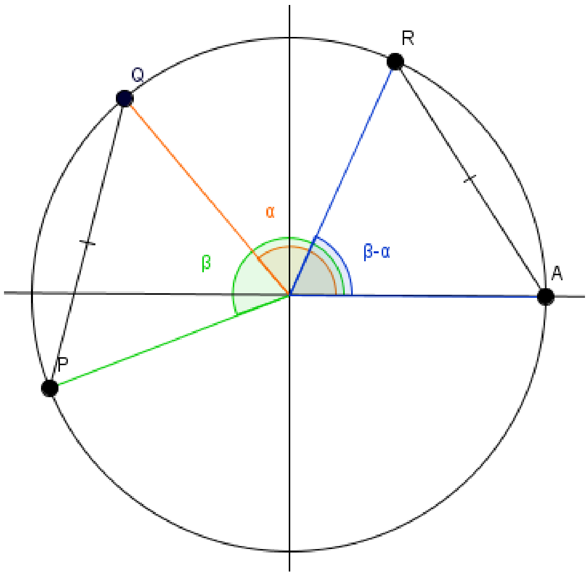


Finalement, comme $\alpha \equiv \theta_1 + \theta_2$ et $\alpha' \equiv \theta_3 + \theta_4$, nous avons démontré que $\alpha \equiv \alpha'$. Les deux triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$ sont donc isométriques (axiome III). □

6.6 Cosinus de la différence de deux angles

Théorème 6. *Le cosinus de la différence de deux angles est égal à la somme du produit de leurs sinus et du produit de leurs cosinus.*

$$cos(\beta - \alpha) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta \tag{1}$$



Démonstration. Nous considérons le cercle trigonométrique suivant, dans lequel nous avons représenté l'angle $\beta - \alpha$, que nous avons reporté sur l'axe du cosinus (grâce à l'axiome de report). Ainsi, en reliant les points QP et les points AR, nous obtenons deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés isométriques. Ce qui signifie que les triangles ΔARO et ΔPQO sont isométriques (axiome III). Donc, on peut écrire que :

$$||\vec{PQ}|| \equiv ||\vec{AR}|| \tag{2}$$

On connait aussi les coordonnées des quatre points P, Q, A et R, qui sont :

$$\begin{aligned} P &= (cos\beta, sin\beta) \\ Q &= (cos\alpha, sin\alpha) \\ A &= (1, 0) \\ R &= (cos(\beta - \alpha), sin(\beta - \alpha)) \end{aligned} \tag{3}$$

Donc, on peut décrire les vecteurs $\vec{PQ}$ et $\vec{AR}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \begin{pmatrix} cos\alpha - cos\beta \\ sin\alpha - sin\beta \end{pmatrix} \rightarrow ||\vec{PQ}|| = \sqrt{(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2} \\ \vec{AR} &= \begin{pmatrix} cos(\beta - \alpha) - 1 \\ sin(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \rightarrow ||\vec{AR}|| = \sqrt{(cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (sin(\beta - \alpha)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Finalement, comme $||\vec{PQ}||$ et $||\vec{AR}||$ sont équivalents, on peut écrire l'égalité suivante :

$$(cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (sin(\beta - \alpha)^2 = (cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2 \tag{5}$$

Ce qui développé donne :

$$2 - 2cos(\beta - \alpha) = 2 - 2(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta) \tag{6}$$

Nous avons donc démontré la formule du cosinus de la différence de deux angles :

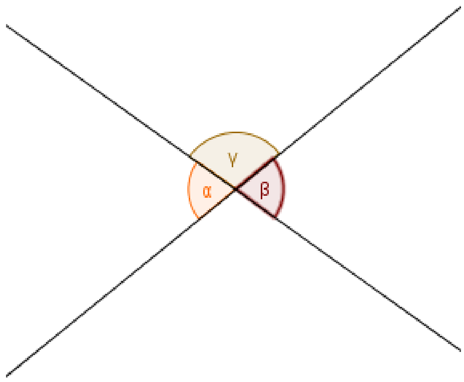
$$cos(\beta - \alpha) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$$

□

6.7 Isométrie de deux angles opposés par le sommet

Théorème 7. *Deux angles opposés par le sommet sont isométriques.*

Démonstration. Nous considérons deux droites sécantes.



Hypothèse. *Deux droites se croisent en un point*

Conclusion. $\alpha \equiv \beta$*,* γ *est l'angle complémentaire de* α *et* β

Comme γ est l'angle complémentaire de α et β, on peut écrire l'équation suivante :

$$\gamma + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 180° - \gamma \tag{7}$$

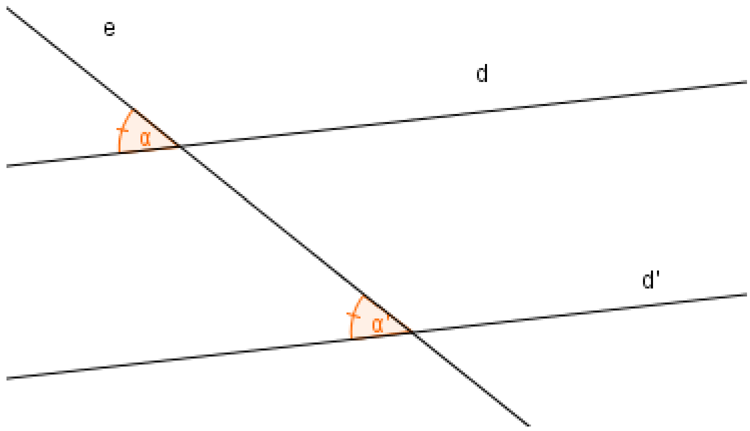
$$\gamma + \beta = 180° \rightarrow \beta = 180° - \gamma \tag{8}$$

Par conséquent, on sait que $\alpha \equiv \beta$. □

6.8 Théorème de la transversale

Théorème 8. *Si deux droites d et d' ayant e comme transversale ont une paire d'angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondant isométriques, alors ces deux droites sont isométriques.*
Aussi, si l'on considère la transversale e à deux droites d et d' parallèles, alors une paire d'angle est isométrique lorsque ces angles sont : alternes-internes, alternes-externes ou correspondants.

Démonstration. Nous considérons deux droites d et d' qui on e comme transversale.



Hypothèse. *d, d' et e sont trois droites, α et α' sont correspondants et $\alpha \equiv \alpha'$*

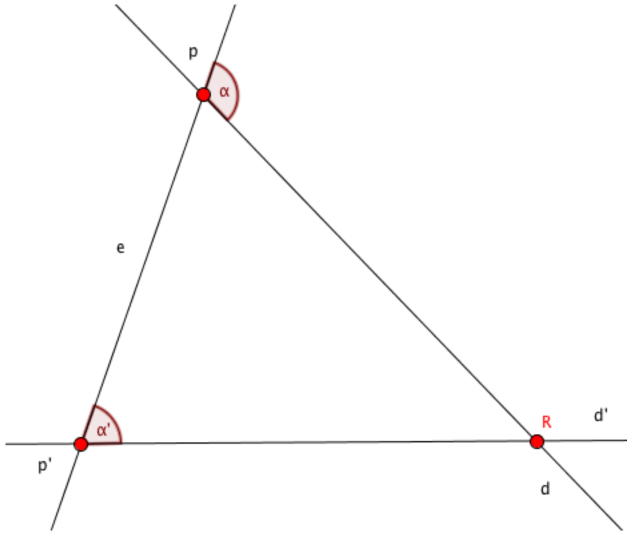
Conclusion. $d \parallel d'$

En considérant l'hypothèse, il existe deux cas possibles :

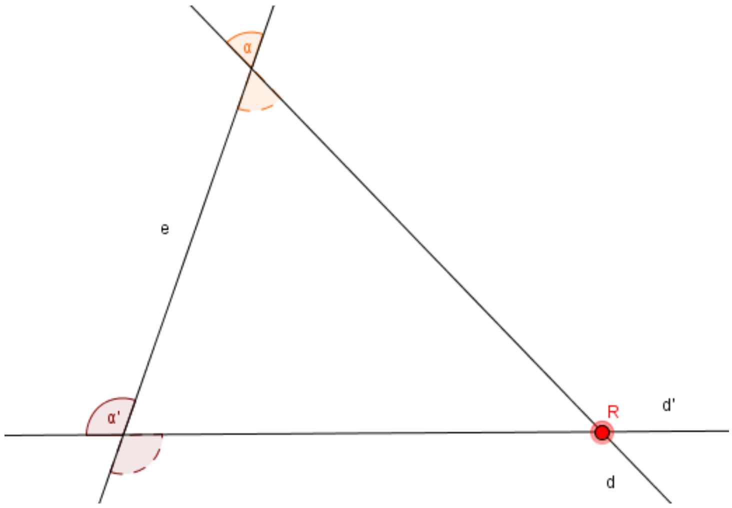
1. d et d' se coupent en un point r
2. d et d' sont parallèles

Il nous faut démontrer que le cas 1) est faux et que le deuxième cas est le seul possible.
Supposons que d et d' se coupent en un point r, il y a alors deux cas de figure possibles :

a. α' est à l'intérieur du triangle $\triangle pp'r$ et α est un angle externe. Par conséquent, grâce au théorème de l'angle externe, on sait que $\alpha > \alpha'$, ce qui est absurde. Donc il est impossible que d et d' se croisent et que α ou α' soient à l'intérieur du triangle $\triangle pp'r$.

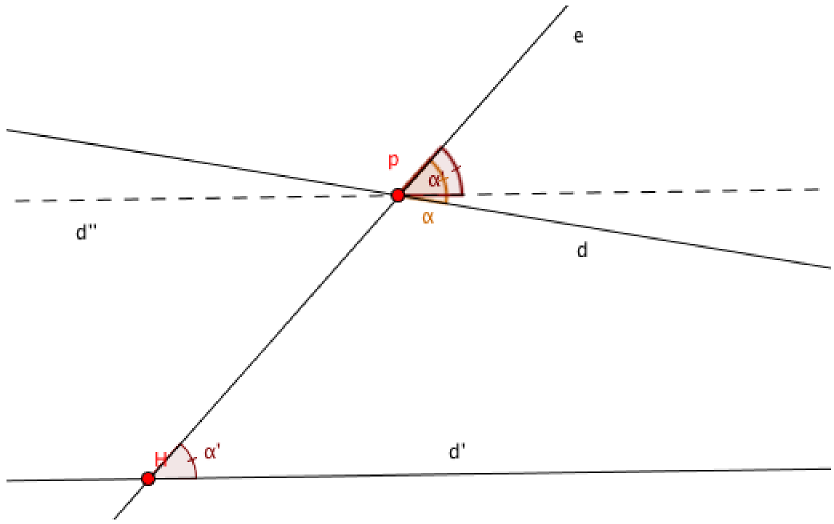


b. Les angles α et α' sont à l'extérieur du triangle $\triangle pp'r$. Dans ce cas-là, par l'isométrie de deux angles opposés par le sommet (sous-section 6.7), on se retrouve dans le même cas qu'en a). Donc α et α' ne peuvent pas être à l'extérieur du triangle $\triangle pp'r$.



Le seul cas possible est donc le cas 2, d et d' sont parallèles. □

Démonstration. Nous considérons deux droites d et d' qui on e comme transversale.



Hypothèse. *d, d' et e sont trois droites, α et α' sont correspondants et $d \parallel d'$*

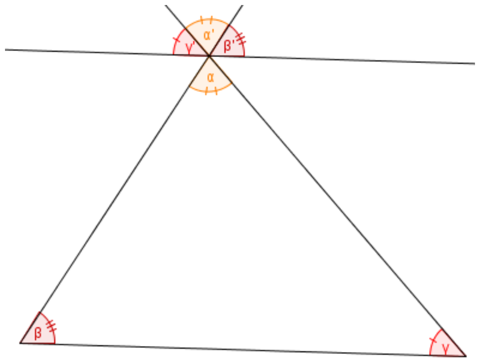
Conclusion. $\alpha \equiv \alpha'$

Nous construisons la droite d'' qui passe par p en reportant l'angle α'. Grâce à la première partie de la démonstration, nous déduisons que d' est parallèle à d". Donc, comme d' et d" sont parallèles et qu'elles croisent e au point p, ces deux droites sont confondues (axiome des parallèles). On en conclu que $\alpha \equiv \alpha'$. $\square$

6.9 Théorème de la somme des angles d'un triangle

Théorème 9. *La somme des angles d'un triangle équivaut à 180 degrés.*

Démonstration. Nous considérons un triangle $\triangle ABC$, puis nous traçons une parallèle au côté c passant par le sommet C.



Hypothèse. $\triangle ABC$ *est quelconque*

Conclusion. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Grâce au théorème des transversales et à l'isométrie de deux angles opposés par le sommet, nous savons que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

6.10 Théorème du segment moyen

Théorème 10. *La médiatrice d'un segment est le lieu géométrique des points équidistants à ses extrémités.*

6.11 Théorème des diagonales du parallélogramme

Théorème 11. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

Démonstration. Nous considérons un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales se coupent au point O.

Hypothèse. $ABCD$ *est un parallélogramme, donc* $AB \parallel DC$ *et* $AD \parallel BC$.

Conclusion. $AO \equiv OC$, $DO \equiv OB$

Puisque la définition du parallélogramme n'implique pas que les côtés opposés d'une telle figure sont isométriques, nous commençons par démontrer cela.
Ainsi, nous considérons les deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ACD$ et nous remarquons qu'il sont isométriques grâce au théorème de la transversale (théorème 8). En effet, ces triangles respectent le deuxième cas d'isométrie des triangles, car $\angle DAC \equiv \angle ACB$, $\angle DCA \equiv \angle CAB$ et les deux triangles partagent AC. Nous avons donc $AB \equiv DC$ et $AD \equiv BC$.

A présent, grâce à l'isométrie de deux angle opposés par le sommet, on observe que que les paires d'angles $\angle AOB/\angle DOC$ et $\angle AOD/\angle COB$ sont isométriques. Par conséquent, grâce au corollaire du deuxième cas d'isométrie des triangles, les paires de triangles $\triangle AOD/\triangle COB$ et $\triangle AOD/\triangle COB$ sont isométriques. Ainsi, $AO \equiv OC$ et $DO \equiv OB$. Nous avons donc démontré que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. □

6.12 Théorème des médiatrices

Théorème 12. *La médiatrice d'un segment est le lieu géométrique des points équidistants à ses extrémités.*

Pour démontrer ce théorème, nous devons prouver les deux affirmations suivantes :

1. Tout point se situant sur la médiatrice d'un segment se situe à la même distance de ses deux extrémités.
2. Tout point se trouvant à égale distance de deux autres points se situe sur la médiatrice du segment défini par ces derniers.

1. *Démonstration.* Nous considérons le segment AB, ayant m comme médiatrice. M est le point à l'intersection de m et du segment AB.

   Hypothèse. $P \in m$

   Conclusion. $AP \equiv BP$

   Grâce au premier cas d'isométrie des triangles, nous observons que les triangles $\triangle AMP$ et $\triangle BMP$ sont isométriques car ils ont un côté en commun (MP) et que AM et MB sont isométriques. Par conséquent, $AP \equiv BP$. □

2. *Démonstration.* Nous considérons un point P à égale distance de deux autres point, A et B.

   Hypothèse. $AP \equiv BP$

   Conclusion. $P \in m$

   Nous traçons le segment MP et observons que c'est la médiane du triangle formé par les points A, P et B, car il part de l'un des sommet du triangle et partage le côté opposé en deux parties égales. Ainsi, nous observons que les angles $\angle APM$ et $\angle MPB$ sont isométriques. Par conséquent, les triangles $\triangle AMP$ et $\triangle BMP$ sont isométriques car ils possèdent un angle isométrique ($\angle APM \equiv \angle MPB$) compris entre deux côtés isométriques ($AP \equiv BP$, par hypothèse et MP en commun). Finalement, le segment MP et la médiatrice de AB sont confondus et $P \in m$.

   □

Corollaire 12.1. *Les médiatrices d'un triangle se croisent en un point unique, le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.*

Démonstration. Nous considérons un triangle quelconque ABC. Nous nommons I l'intersection des médiatrices des côtés AC (M_{AC}) et BC (M_{BC}).

Hypothèse. $I \in M_{AC}$ *et* $I \in M_{BC}$

Conclusion. $I \in M_{AB}$ *(la médiatrice du côté AB)*

En considérant l'hypothèse et la définition de la médiatrice (définition 4.12), nous savons que $IA \equiv IC$ et que $IB \equiv IC$. Par conséquent, $IA \equiv IB$. Puisque I est à une distance équivalente de A et de B, $I \in M_{AB}$.
De plus, puisque I est le lieu des points équidistants à A, B et C, c'est aussi le cercle du cercle circonscrit de $\triangle ABC$. □

6.13 Théorème de l'intersection des médianes

Théorème 13. *La médiatrice d'un segment est le lieu géométrique des points équidistants à ses extrémités.*

6.14 Théorème de l'intersection des hauteurs

Théorème 14. *Les hauteurs d'un triangle concourent en un seul point nommé orthocentre.*

Démonstration. Nous considérons le triangle quelconque ABC, ayant h_A comme hauteur passant A.

Hypothèse. $\triangle ABC$ *est quelconque*

Conclusion. *les hauteurs de* $\triangle ABC$ *concourent en un seul point*

Nous construisons les points D, E et F ainsi que :

— $DE \parallel CB$

— $EF \parallel CA$

— $DF \parallel AB$

Dès lors, nous obtenons par construction deux parallélogrammes $AEBC$ et $DABC$ (ils ont deux paires de côtés parallèles). Cela implique que $AE \equiv CB$ et $DA \equiv CB$ (théorème 11) et donc $AE \equiv DA$. Ainsi, h est la médiatrice du segment DE. Les hauteurs du triangle ABC sont donc les médiatrices du triangle DEF. Cela signifie que les hauteurs d'un triangle concourent en un point, car elles sont confondues avec les médiatrices d'un triangle augmenté, or nous avons démontré que les médiatrices d'un triangle s'intersectent en un seul point (corollaire 12.1). □

6.15 Théorèmes des triangles semblables

Définition 6.1. *Triangles semblables : On dit que deux triangle ayant leurs angles respectivement isométriques et leurs côtés proportionnels sont semblables.*

6.15.1 Théorème 1

Théorème 15. *Deux triangles dont les côtés sont respectivement parallèles ont des angles respectivement isométriques.*

6.15.2 Théorème 2

Théorème 16. *Si deux paires de parallèles découpent sur une sécante deux segment isométriques, elles le font sur toute autre sécante.*

6.15.3 Théorème 3

Théorème 17. *Théorème de Thalès : Toute droite parallèle à un des côtés d'un triangle et qui sectionne ses deux autres côtés forme un triangle diminué semblable au triangle initial.*

Remarque. *Thalès a vécu au septième et sixième siècle avant J.C. dans la ville de Milet, en Grèce. Marchand de profession, il est aussi philosophe et l'un des précurseurs de la pensée scientifique moderne. En effet, au lieu de reposer l'explication de phénomènes inexpliqués sur la mythologie, il privilégia l'observation et son expérience personnelle. Ce procédé lui permit de faire de nombreuses découvertes et inventions d'une grande importance, notamment en astronomie, physique et mathématique.*

On lui accorde, entre autre, la découverte d'un moyen de mesurer la hauteur des pyramides d'Egypte. Il observa qu'il existe chaque jour un moment lors duquel un objet et son ombre ont la même longueur. Par conséquent, lors d'une journée où les rayons du soleil sont perpendiculaires à un des côtés de la base de la pyramide (ce qui arrive deux fois par an), la hauteur de la pyramide sera égale à la longueur de son ombre à cette heure précise, à laquelle on additionne la moitié de la longueur du côté de la pyramide. Cette expérience est résumée sur le schéma ci-dessous (figure 1[2]*).*[3]

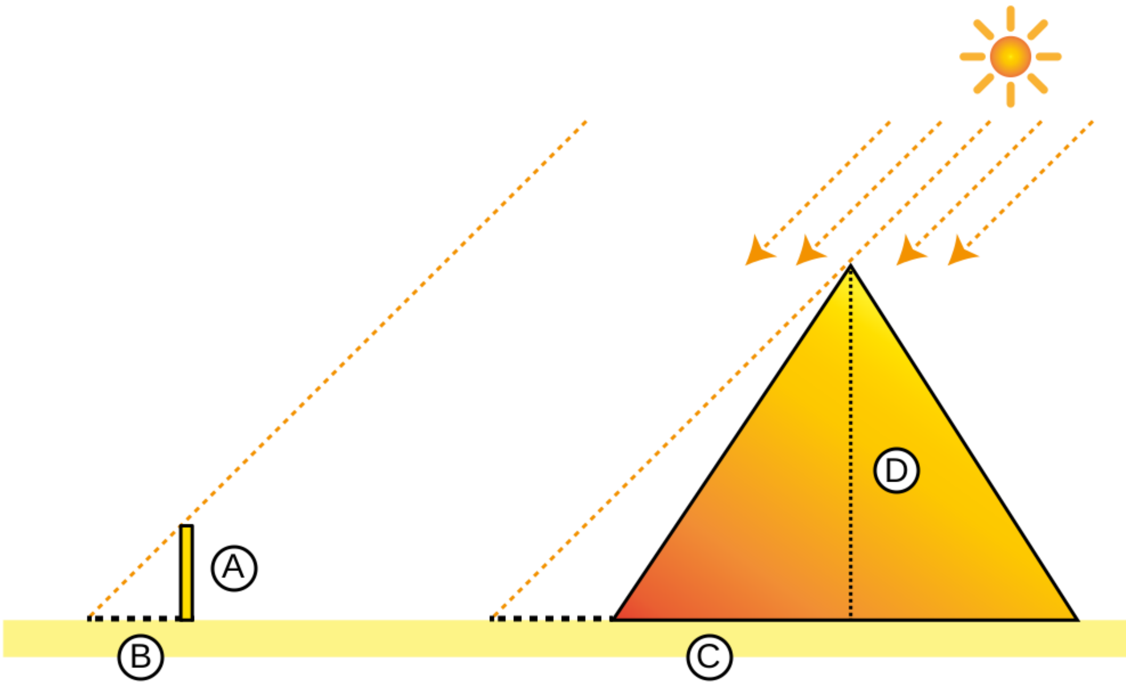


Figure 1

2. Wikimedia, File :Thales Theorem 6.svg, Fred the Oyster, 20.11.2016
3. Inspiré du site web Bibm@th.net, article "Thalès de Milet (624 av JC - 547 av JC)", 20.11.2016, http ://www.bibmath.net/bios/index.php ?action=affiche&quoi=thales et de Wikipedia, article "Thalès", 20.11.2016, https ://fr.wikipedia.org/wiki/Thal%C3%A8s#cite_note-61

7 Conclusion

Tout au long de ce document, nous avons développé de plus en plus de notions et de théorèmes. Mais tout ce "château de cartes" se base sur des éléments indémontrables ; les cinq axiomes. Ceux-ci nous ont été indispensables pour démontrer les premiers théorèmes, comme le deuxième cas d'isométrie des triangles. Les théorèmes ainsi démontrés nous ont permis, à leur tour, avec un peu d'inventivité, de démontrer bien des choses que nous n'avions jamais vraiment comprises auparavant. Pour une fois, nous avons du *comprendre* et pas seulement *apprendre*.

8 Sources

— Page de titre : RAPHAEL, L'apothéose de l'académie d'Athènes, http ://math.unice.fr/ coppo/

— Portrait d'Euclide : http ://pombo-nerd.blogspot.ch/2013/12/os-10-maiores-matematicos-de-todos-os.html

— http ://serge.mehl.free.fr/anx/geo_non_eucl.html

— http ://www.cnrtl.fr/etymologie

— Vidéo youtube : *Euclide le père de la géometrie* de KhanAcademyFrancais

— http ://www.trigofacile.com/maths/euclide/presentation/euclide/euclide.htm

— http ://www.techno-science.net/ ?onglet=glossaire&definition=5502

— Géométrie, BURLET Oscar, édition L.E.P Loisir et Pédagodie, 1989