Teoria dos Grafos

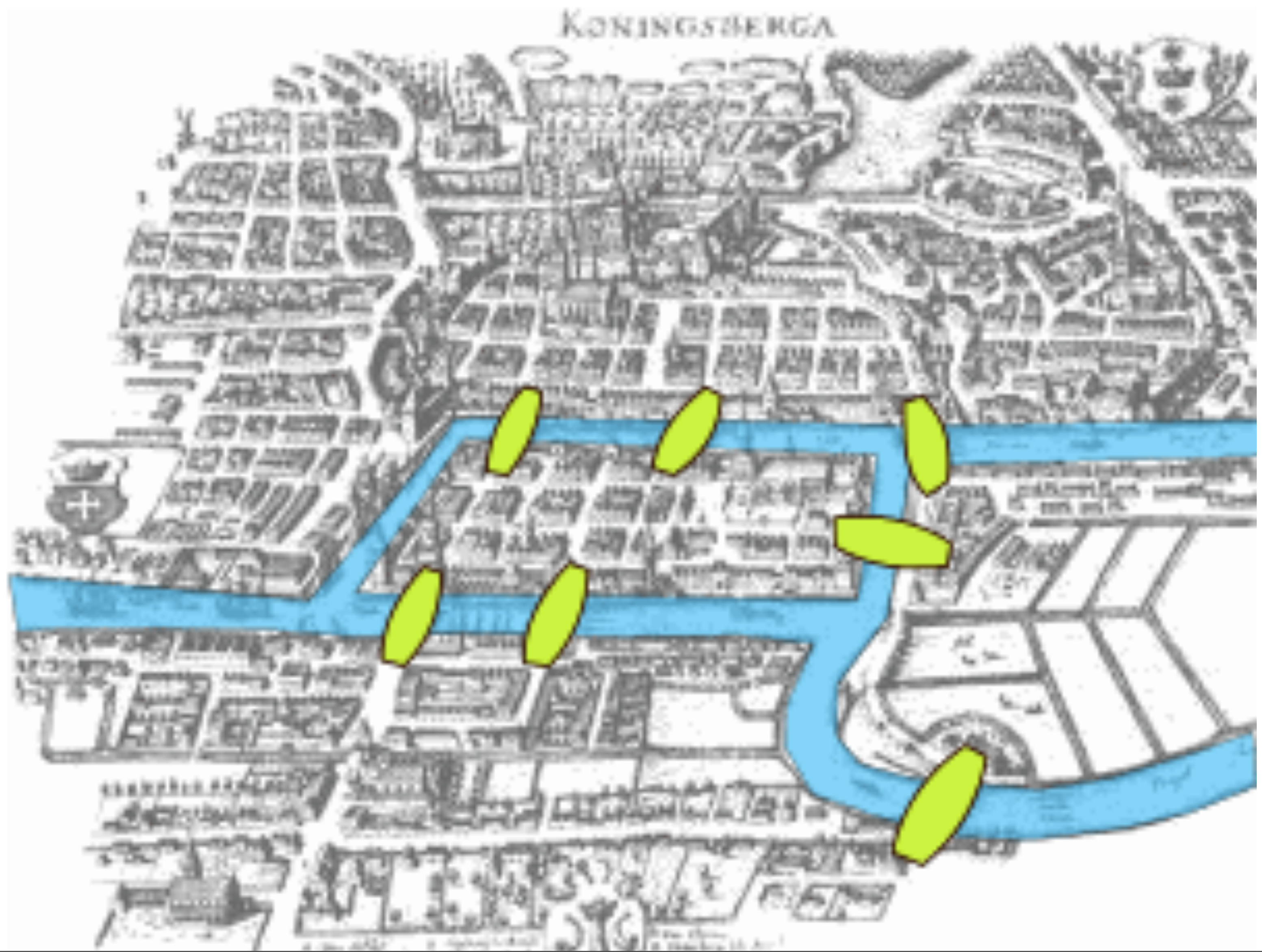
Prof. Leandro G. M. Alvim

Agenda

- História
- Motivação
- Definições

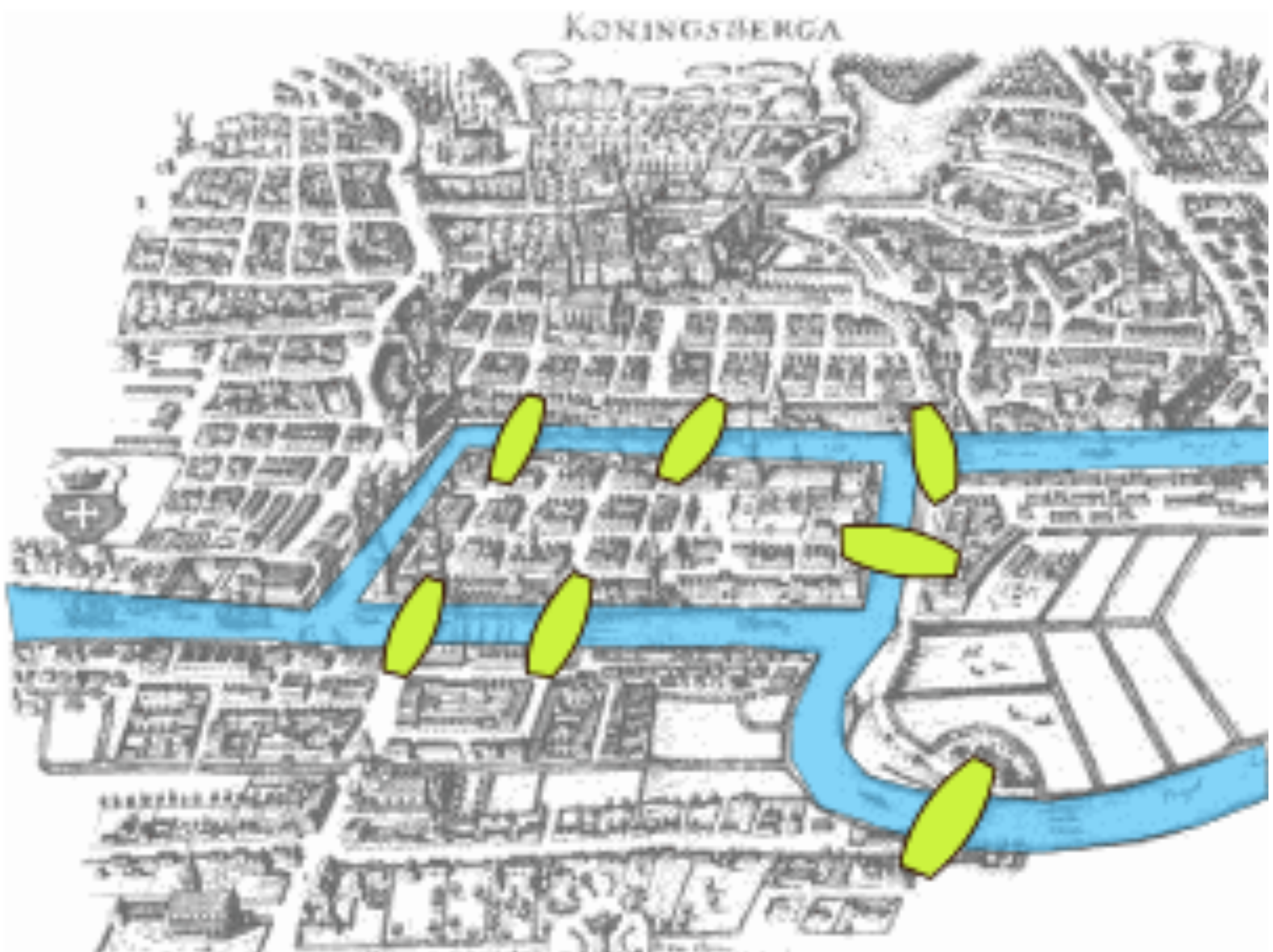
As pontes de Königsberg

- Königsberg, Prússia (até 1945) - Kaliningrado, Rússia (Rússia)



As pontes de Königsberg

- É possível caminhar pela cidade passando por todas as pontes uma unica vez?



As pontes de Königsberg

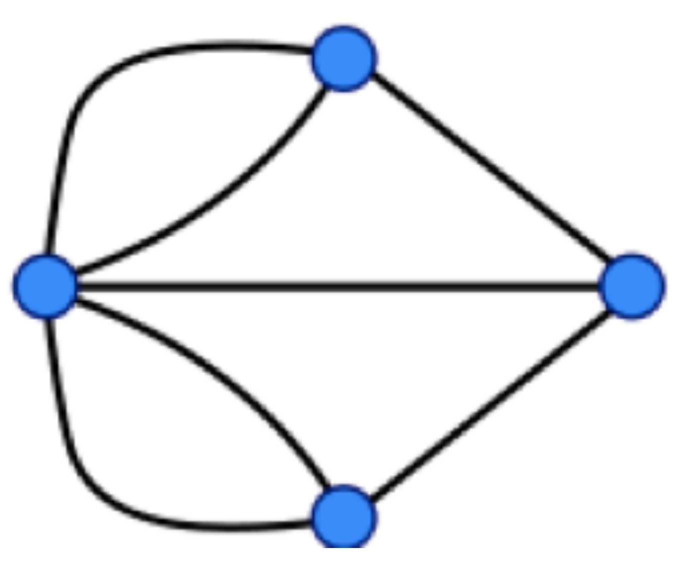
- Leonard Euler
  - Primeiro trabalho da Teoria dos Grafos (1735)
  - Curiosidades
    - 13 filhos
    - Cegueira

As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
    - Primeiro passo

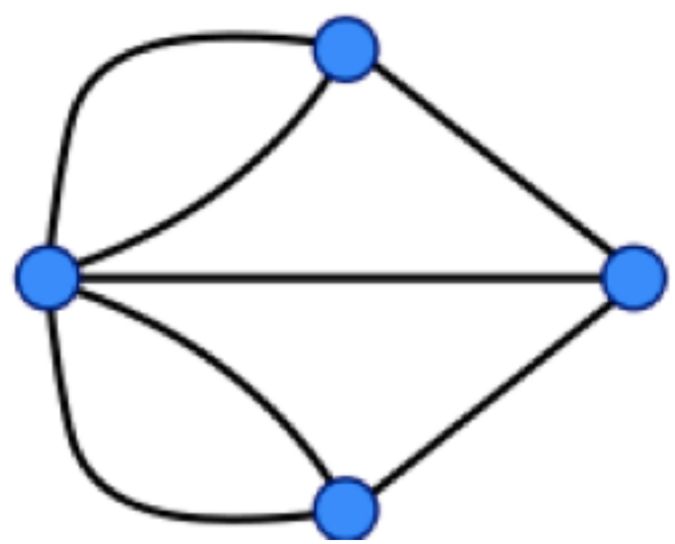
As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
  - Segundo passo
    - Para que tenha solução, devemos ter um número par de pontes em cada terreno



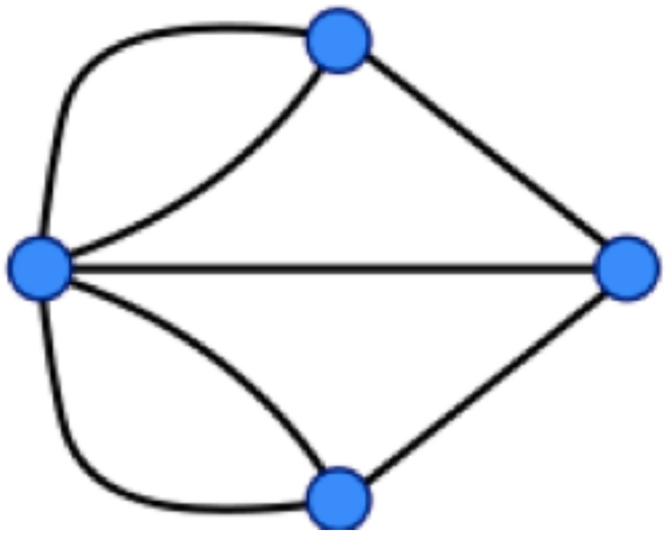
As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
  - Não há solução para este exemplo!



As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
  - Legado
    - Vértices, arestas, grau, Caminho Euleriano, Circuito Euleriano
    - Primeiro Teorema



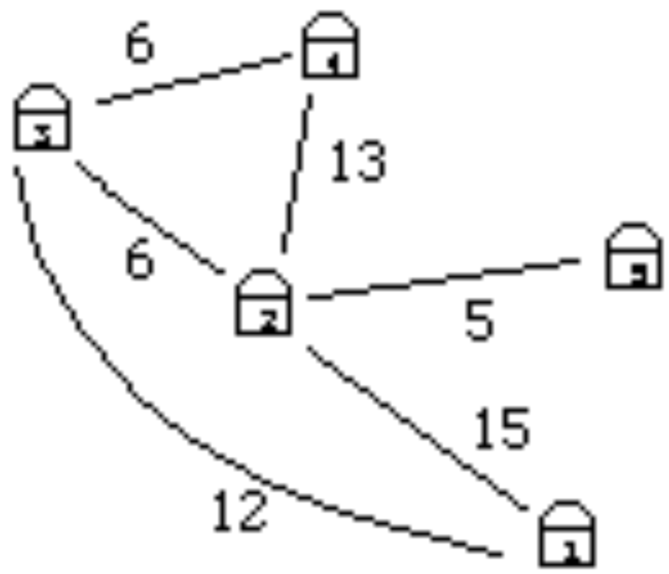
História

- Biggs, N.; Lloyd, E. and Wilson, R. (1986), *Graph Theory, 1736-1936*, Oxford University Press

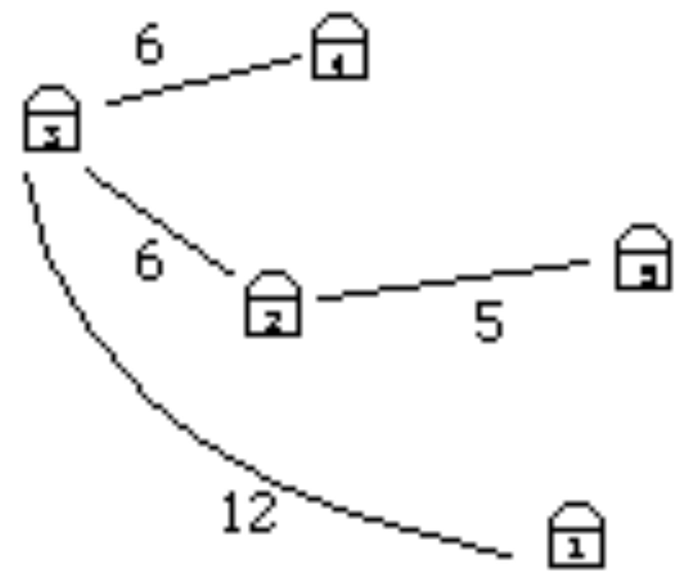
Problema das cores

Caminho Mínimo

Cabeamento

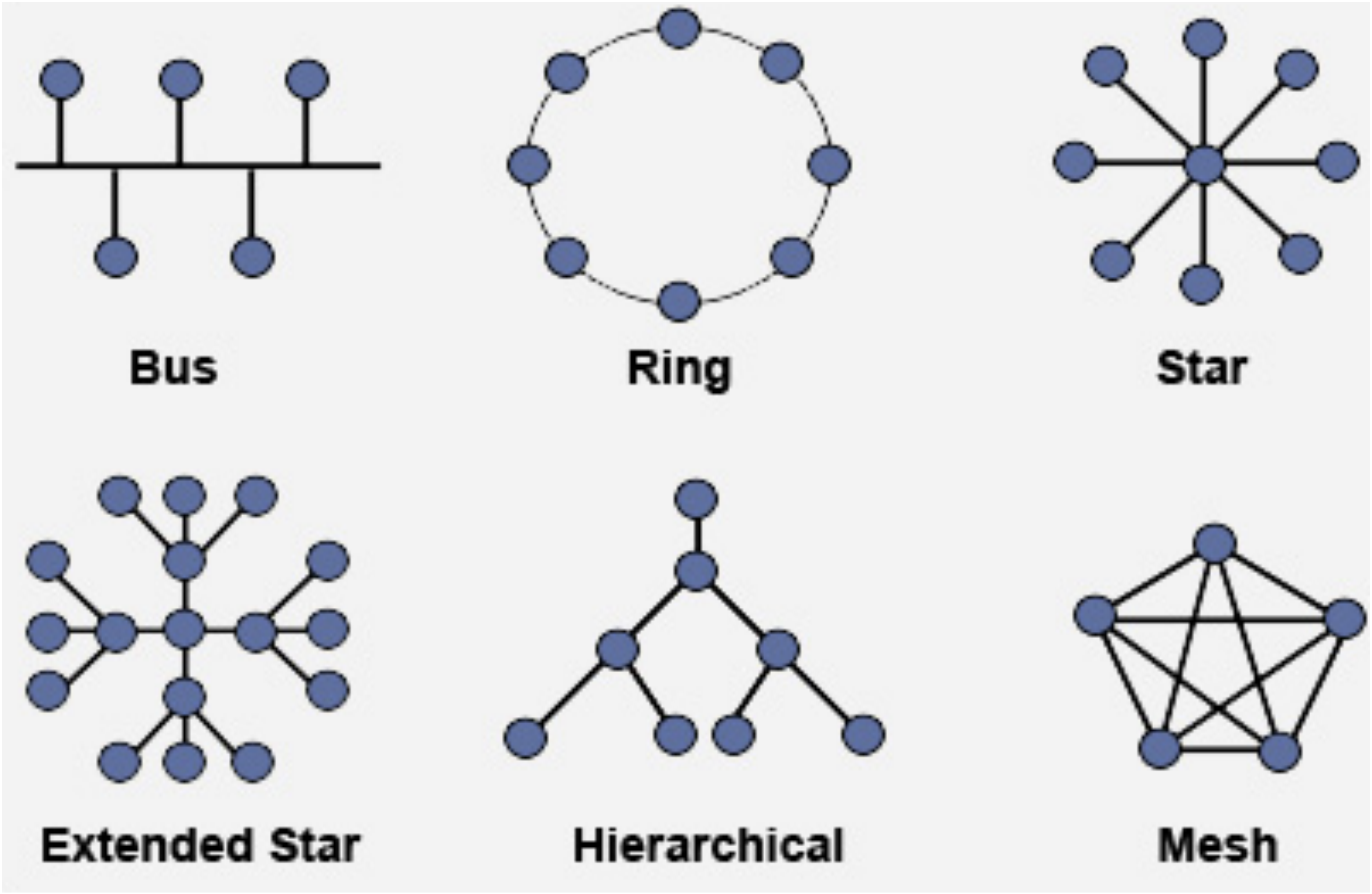


Ramos de rede possíveis com custo ambiental associado



Interligação das tabas com menor custo ambiental

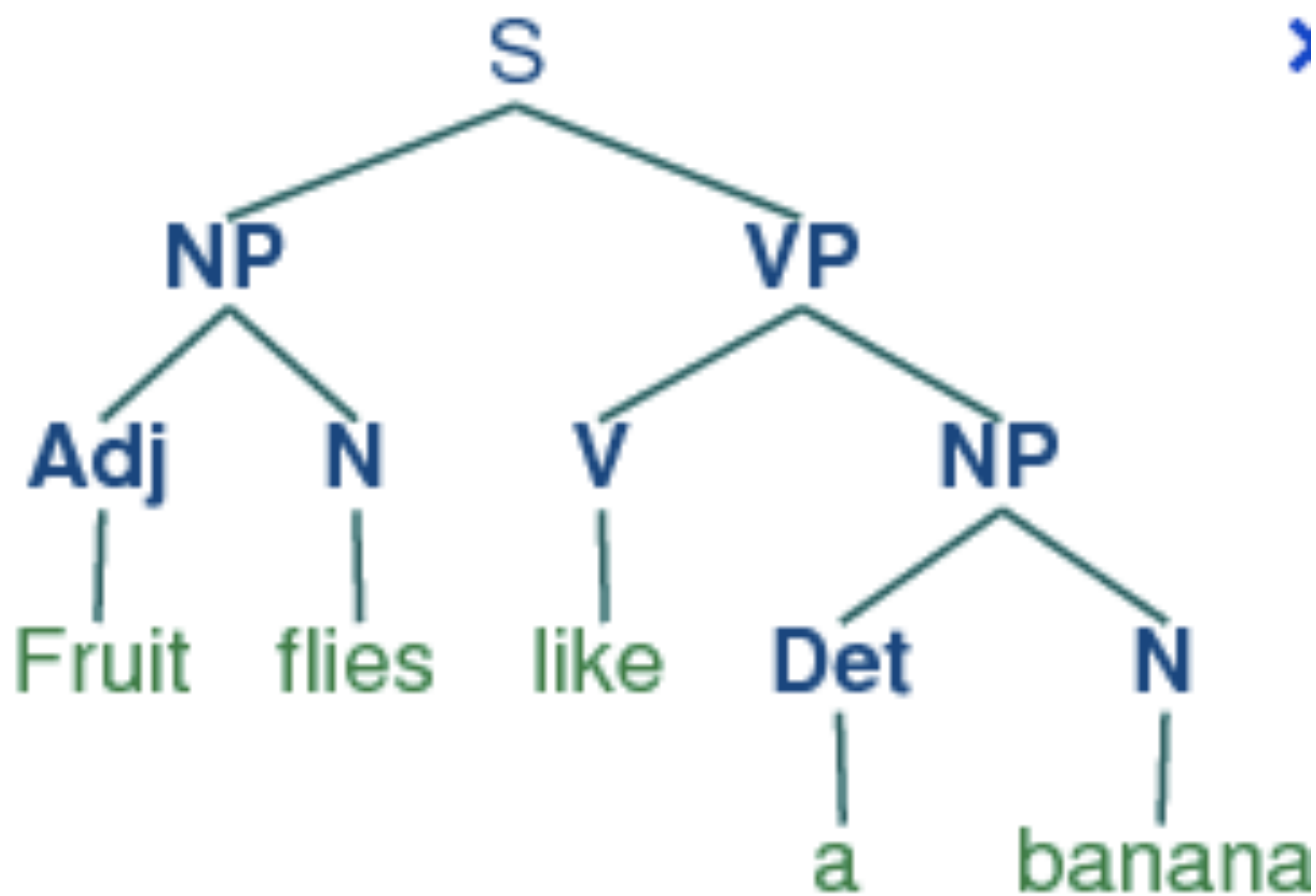
Topologia de redes



Rede Social

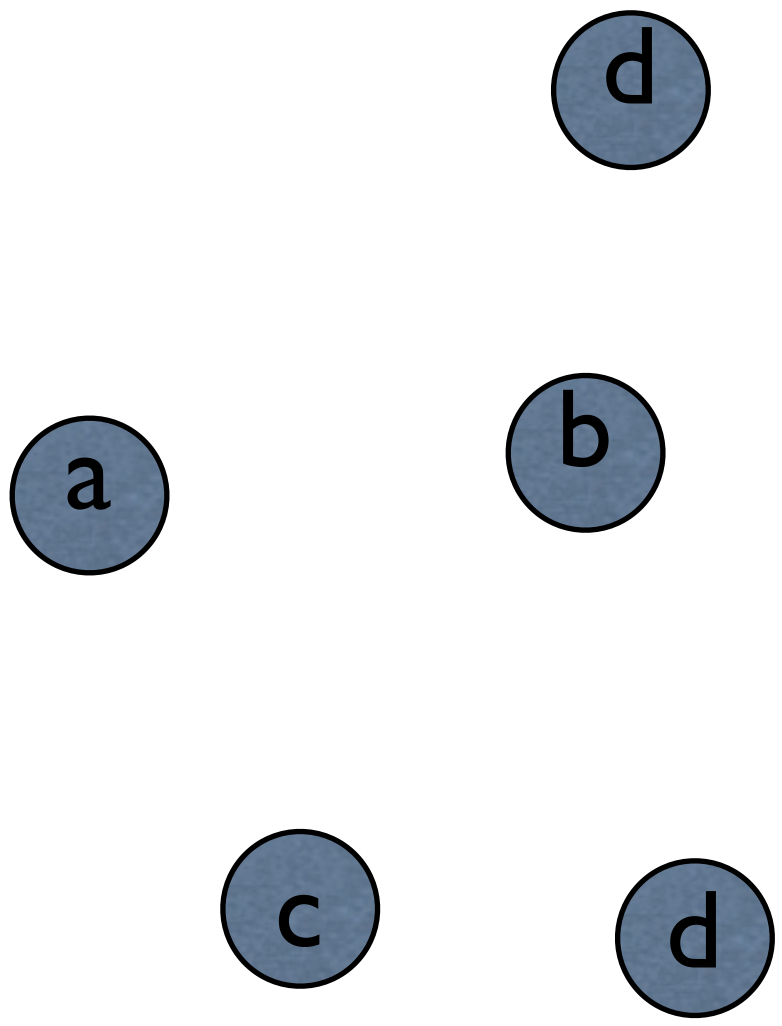
graph.png

Texto



Definições

- Grafo Vazio

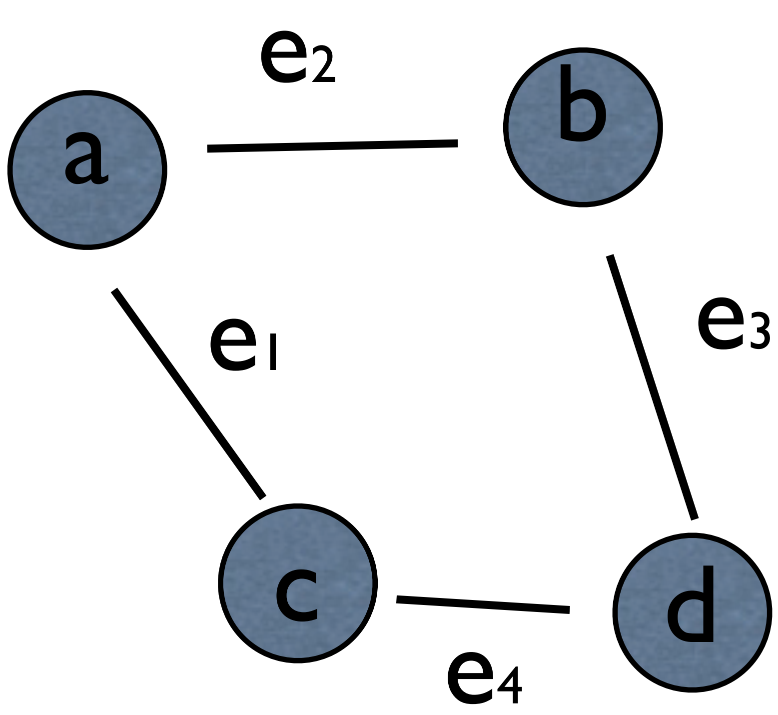


Definições

- Grafo Nulo

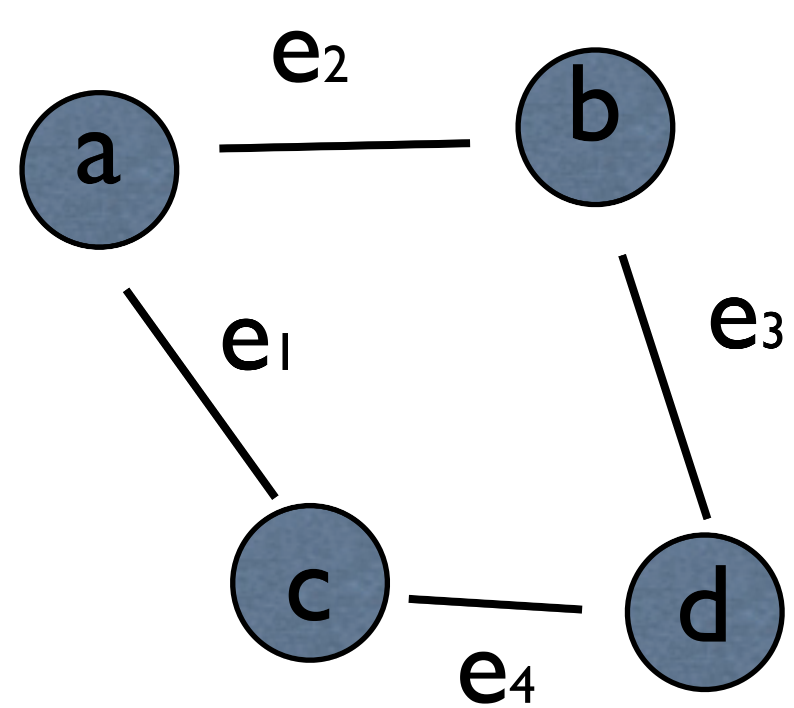
Definições

- Grafo
  - $G = (V, E)$
  - $V = \{a,b,c,d\}$, $|V| = 4$
  - $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $|E| = 4$



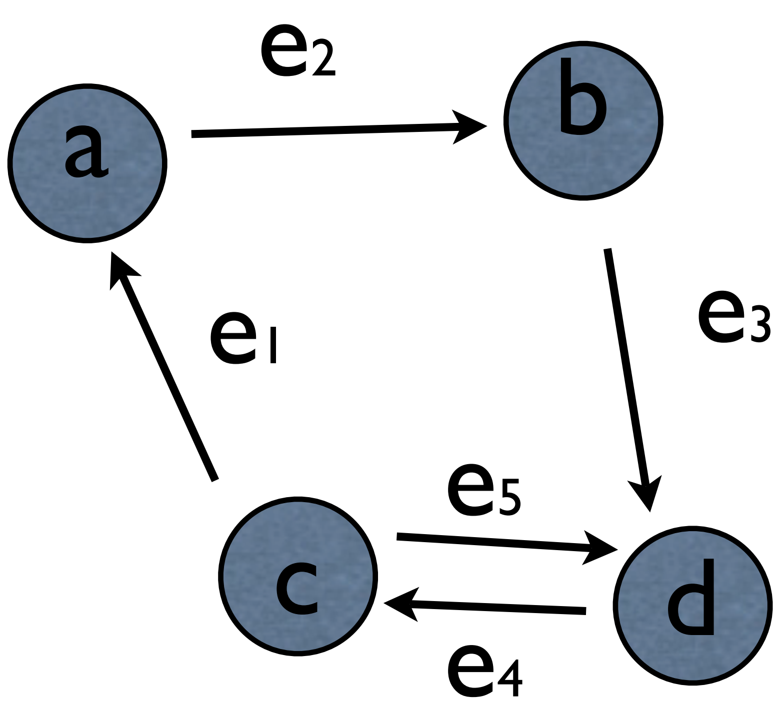
Definições

- Arestas
  - $e_1 = (a,c)$
    - não ordenado
    - e_1 incide em a e c



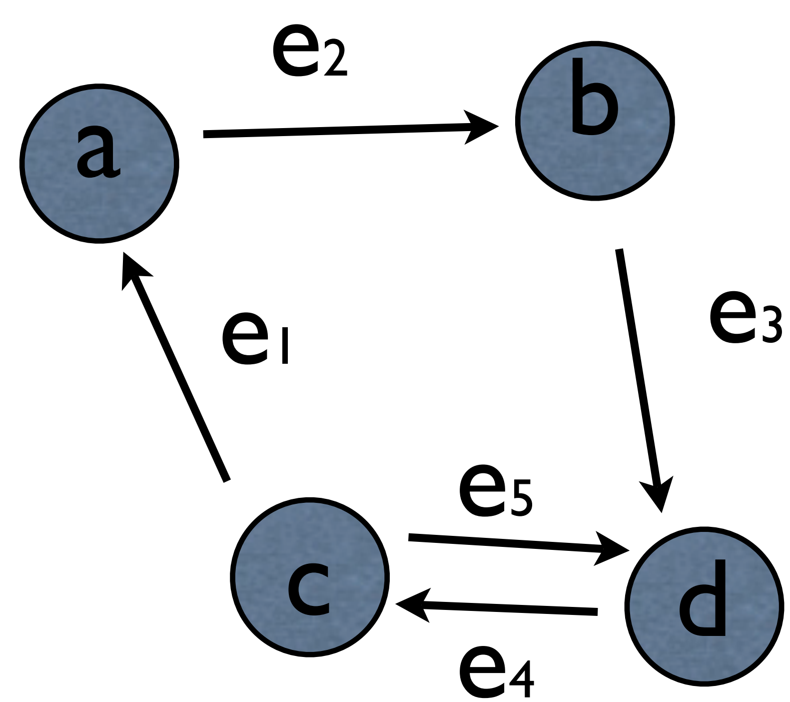
Definições

- Grafo orientado (Digrafo)
  - $G = (V, E)$
  - $V = \{a,b,c,d\}$, $|V| = 4$
  - $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$, $|E| = 5$



Definições

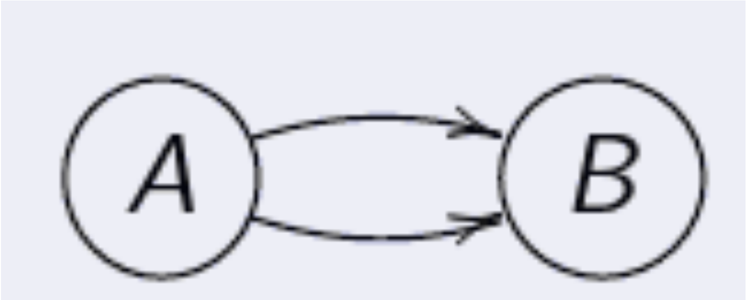
- Arestas
  - $e_4 = (d,c)$ <> $e_5 = (c,d)$
    - e_4 incide em c
    - e_5 incide em d



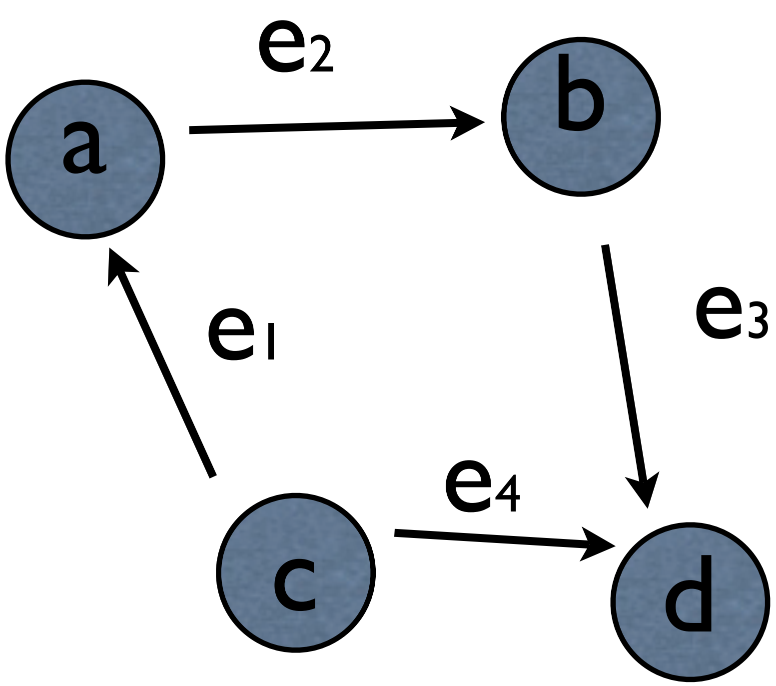
Definições

- Laço

- Aresta paralela

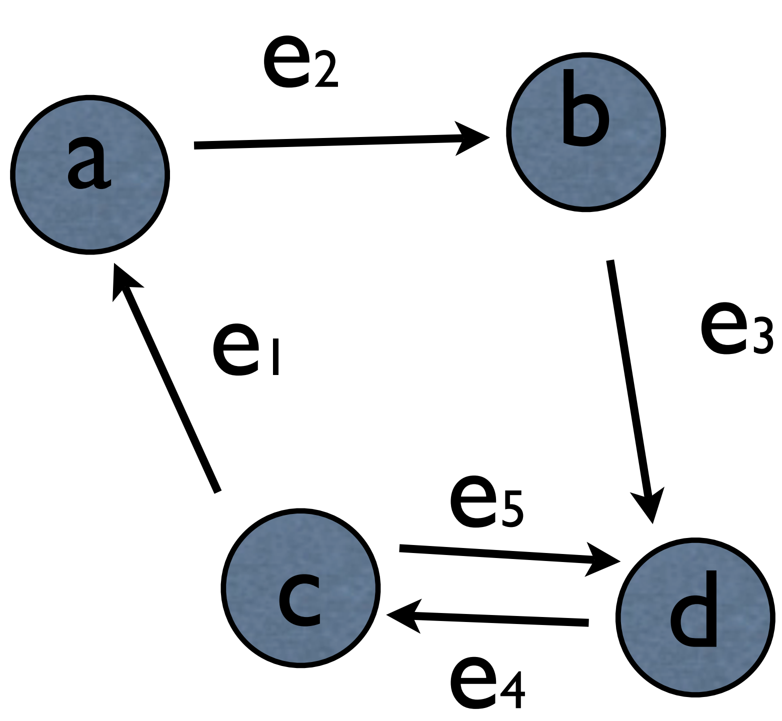


- Grafo Simples



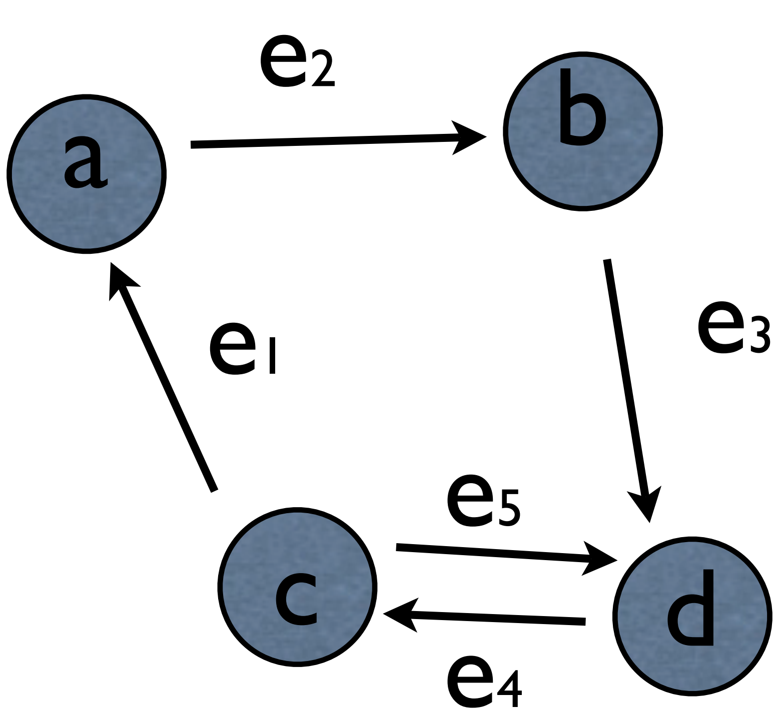
Definições

- Adjacência

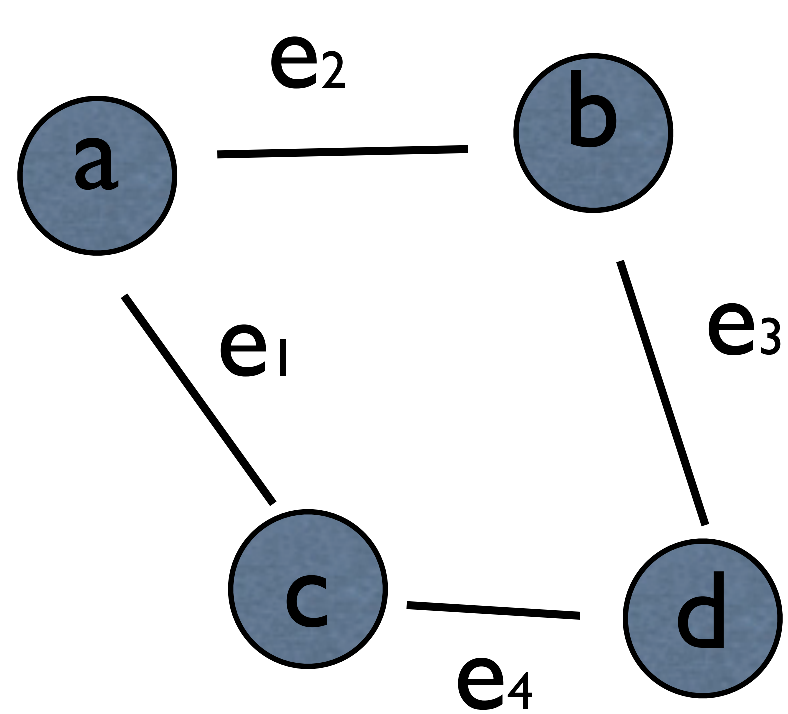


Definições

- Grau
  - d+(d) = 1
  - d-(d) = 2

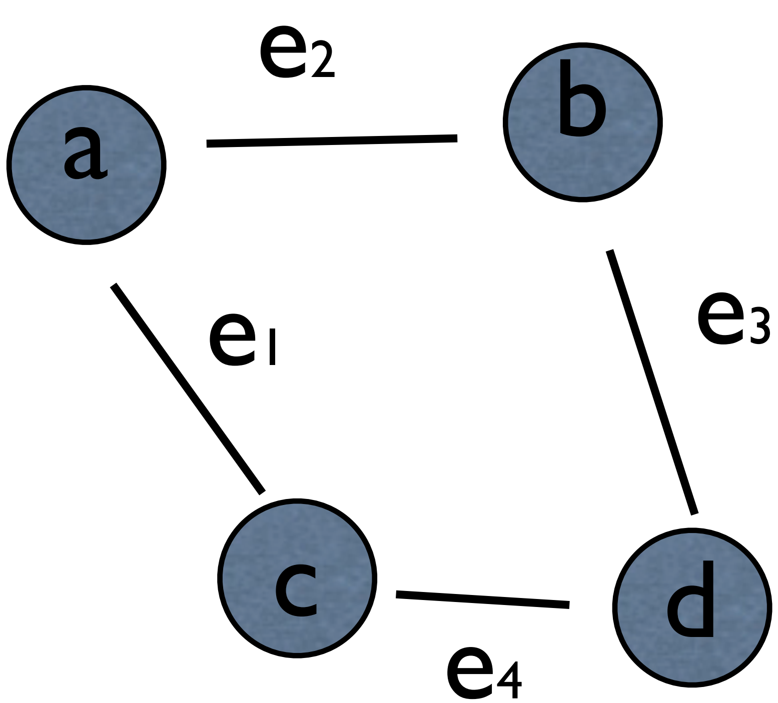


- Grau
  - d(d) = 2



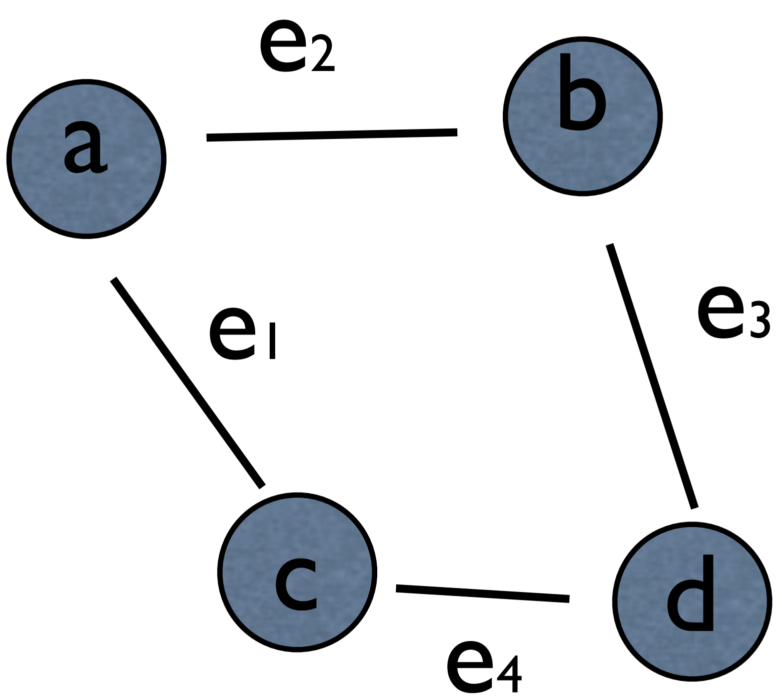
Definições

- Grau
  - Sum(d(v)) = 2m (demostre)



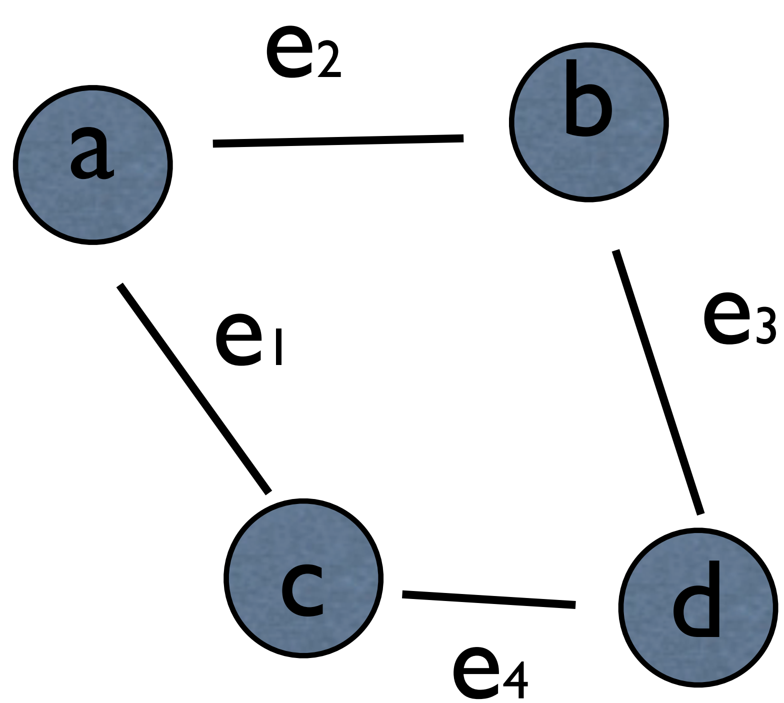
Definições

- Grau
  - O número de vértices de grau ímpar de um grafo sempre é par (demonstre)



Definições

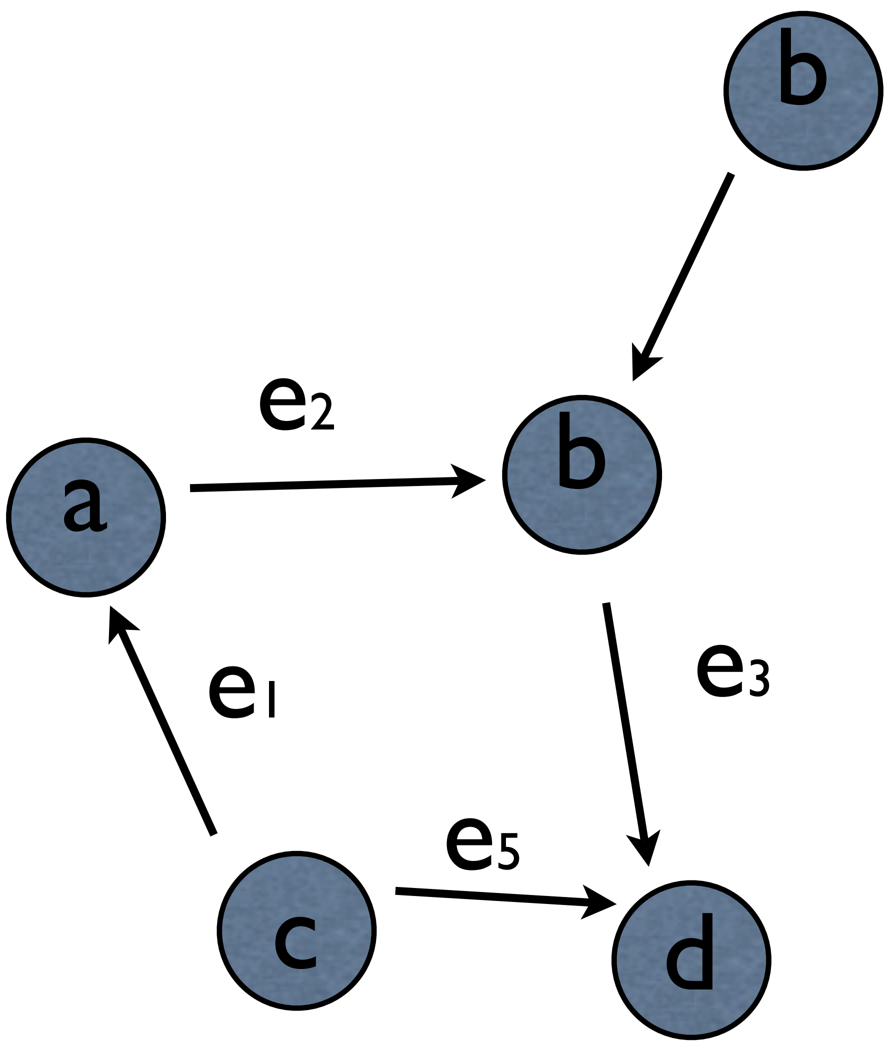
- Ordem
  - O número de vértices de G



G_4

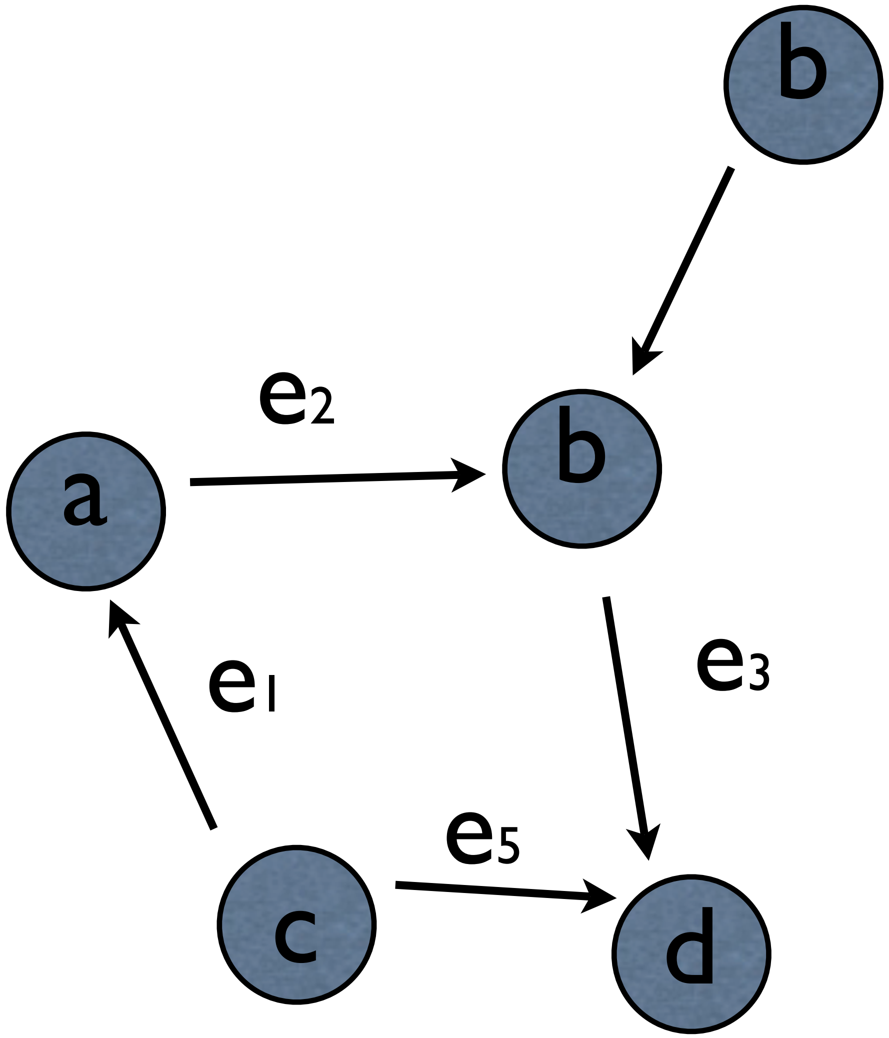
Definições

- Fonte
  - vértice: d-(v) = 0



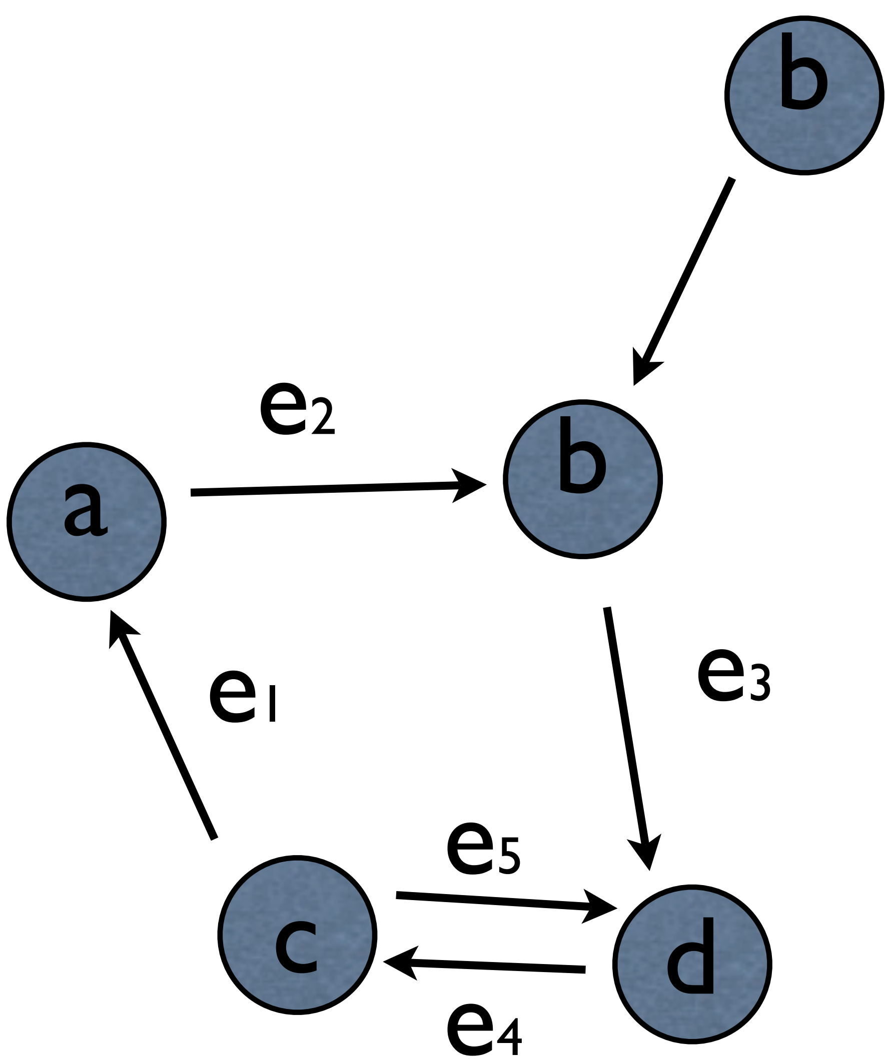
Definições

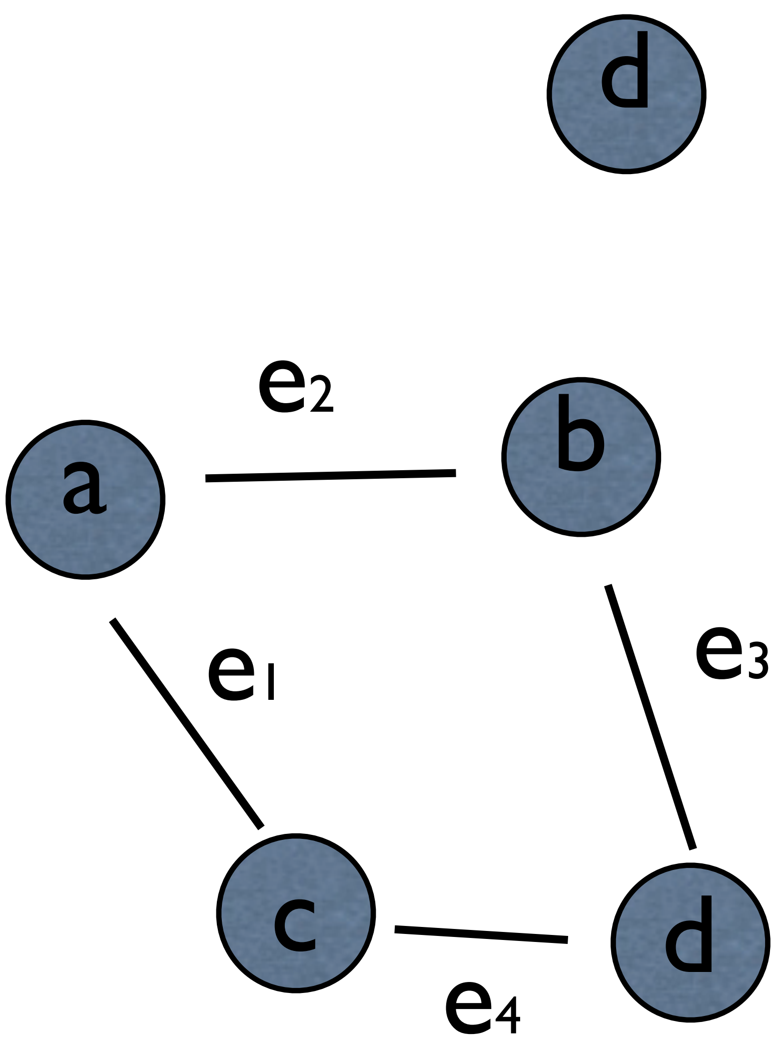
- Sumidouro
  - vértice: d+(v) = 0



Definições

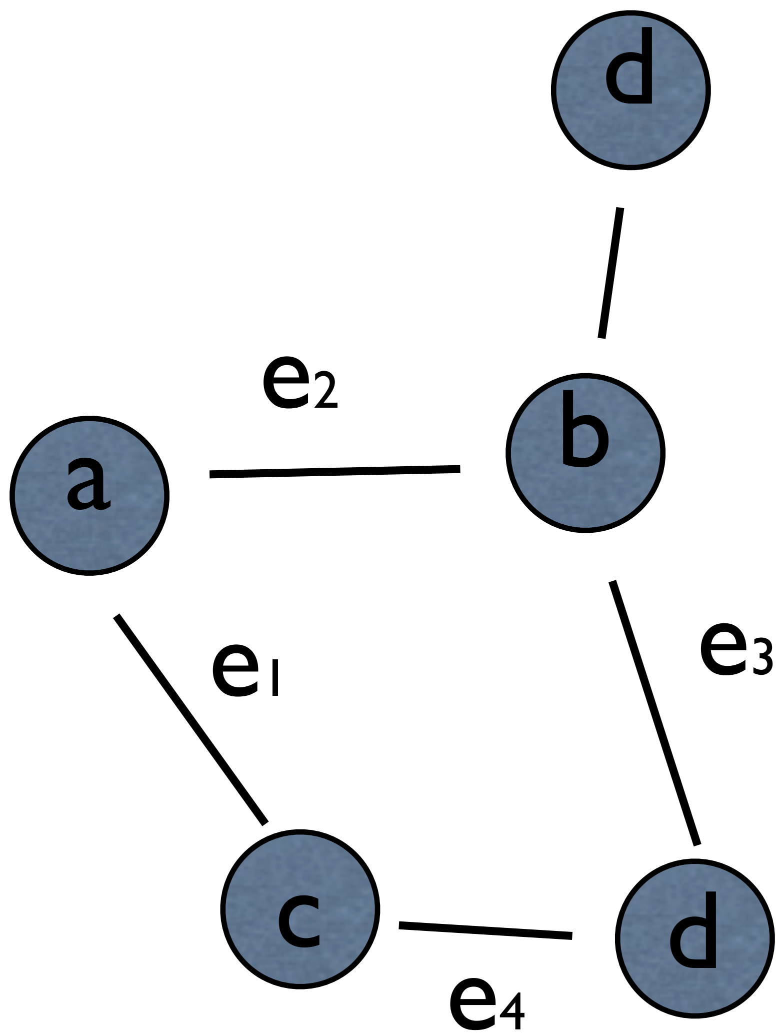
- Vértice Isolado
  - nenhuma aresta incidente





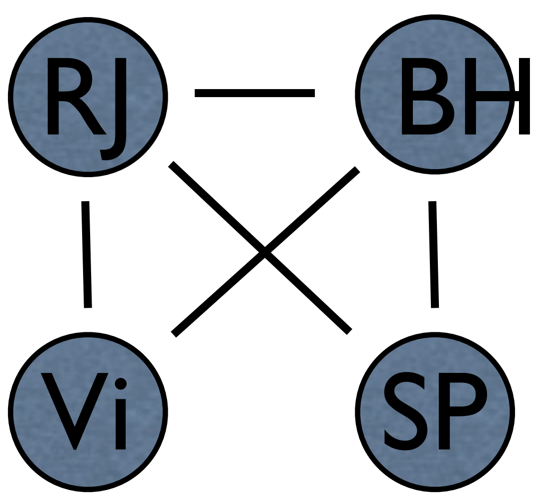
Definições

- Vértice Pendente
  - $d(v) = 1$

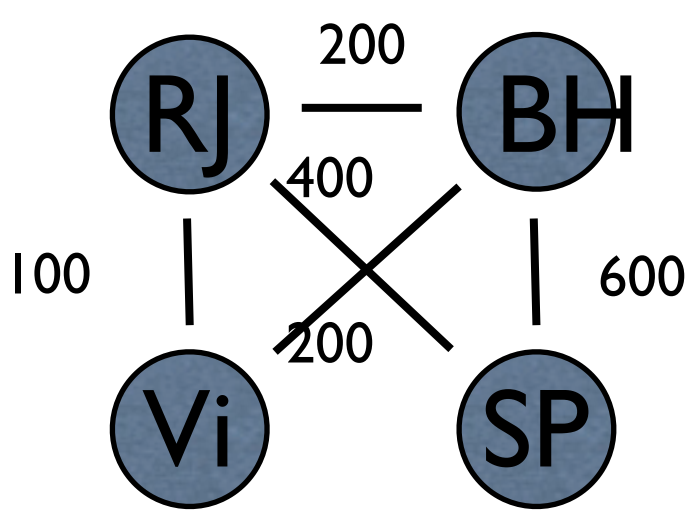


Definições

- Grafo Rotulado
  - V = {v|v é uma capital}

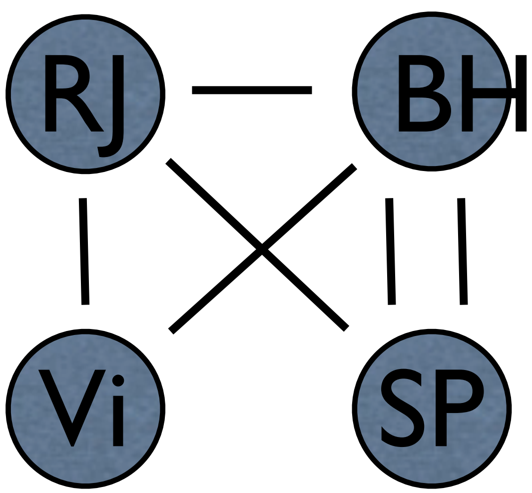


- Grafo Valorado
  - V = {v|v é uma capital}
  - E = {(v1,v2,d) | há uma vizinhança tal que a distância é d km}

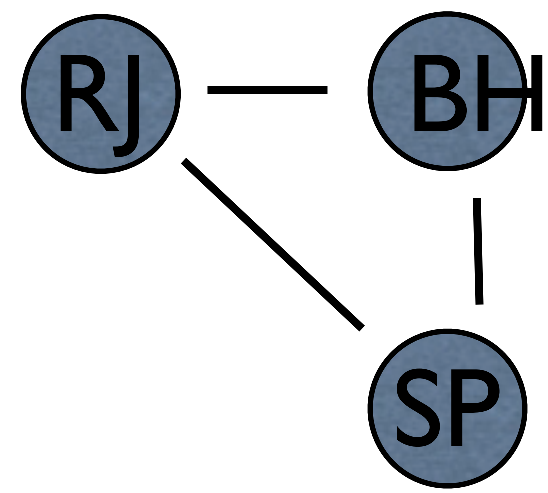


Definições

- Multigrafo

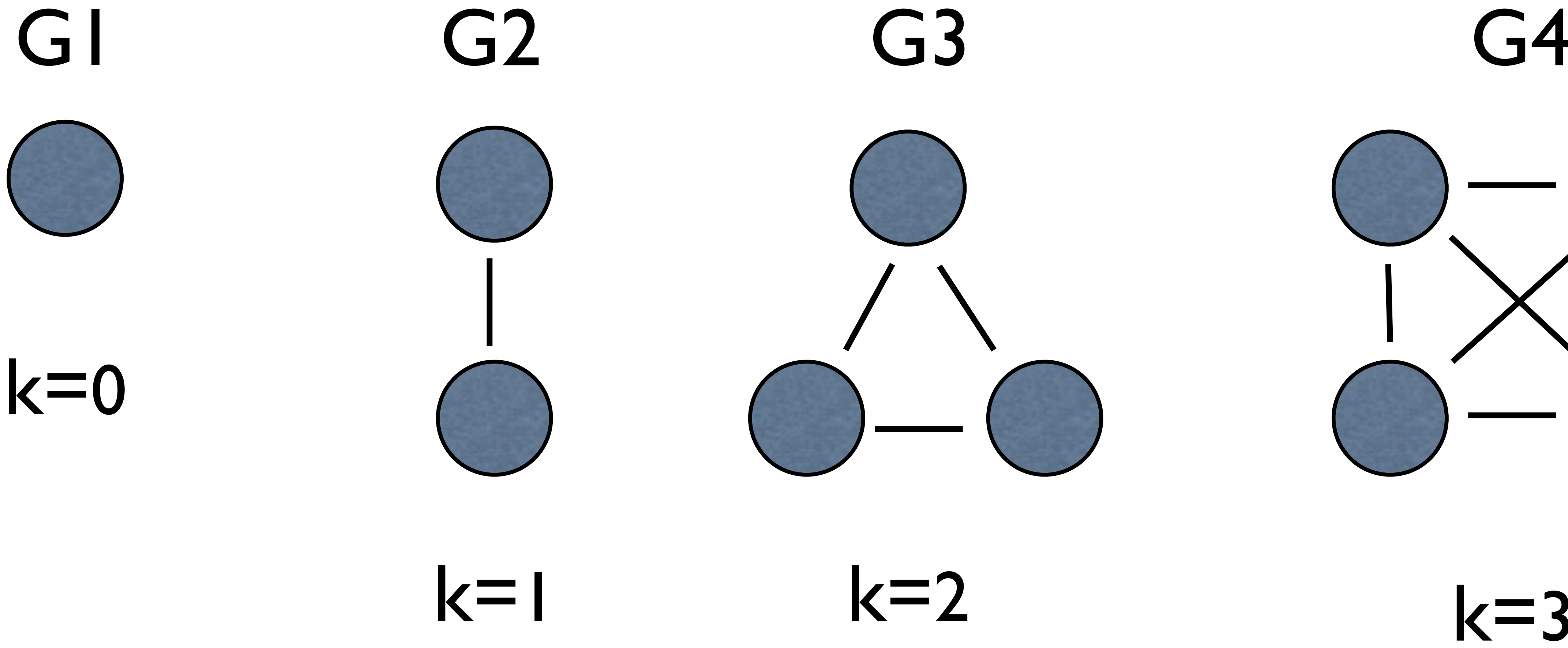


- Subgrafo



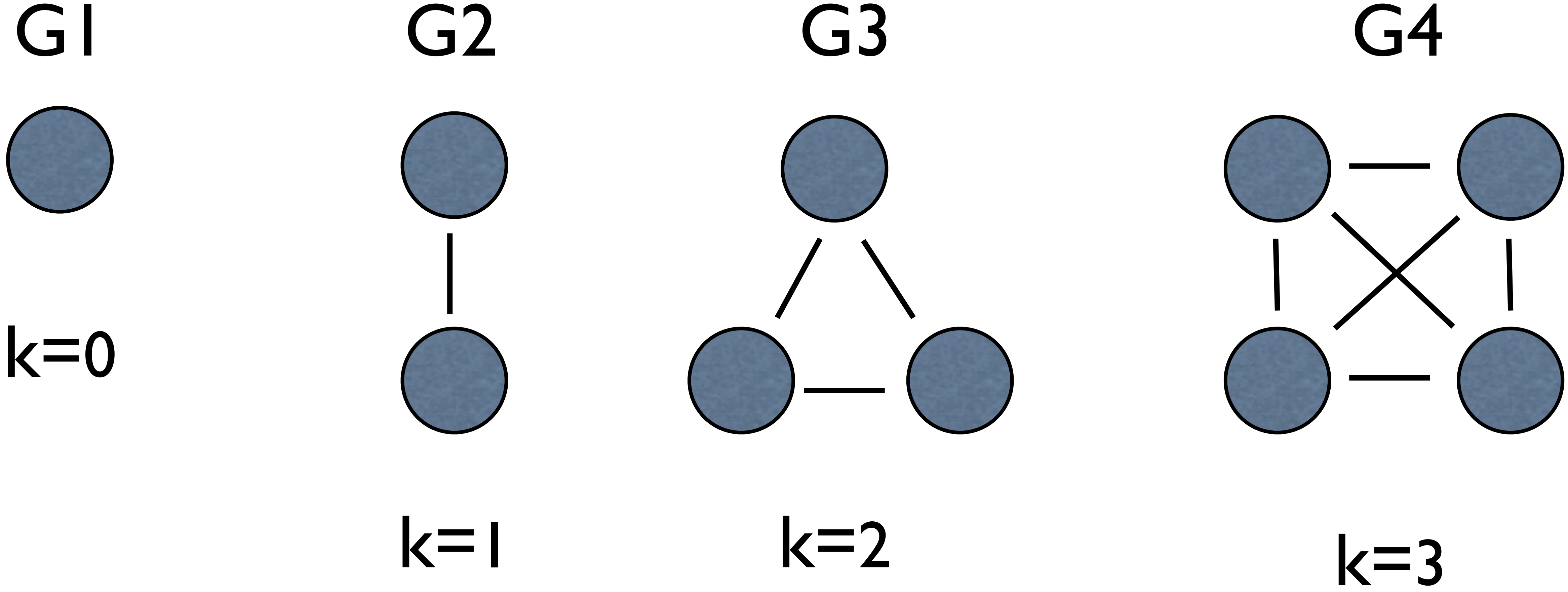
Definições

- Grafo Completo (k - regular)



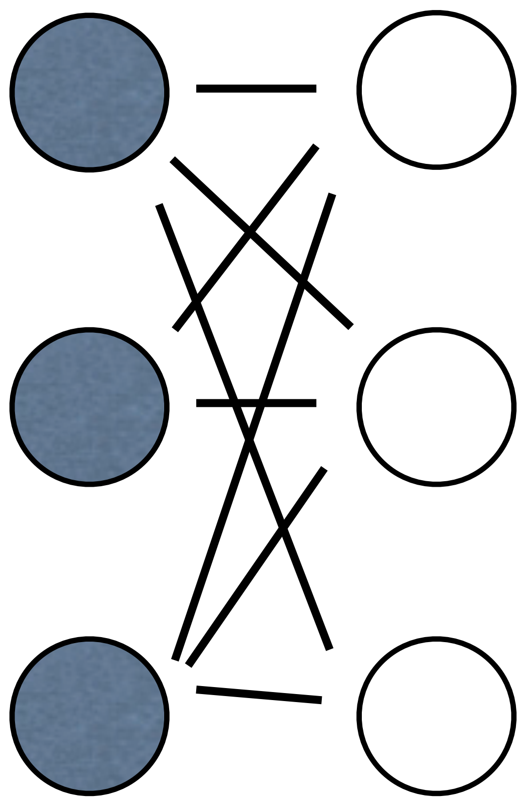
Definições

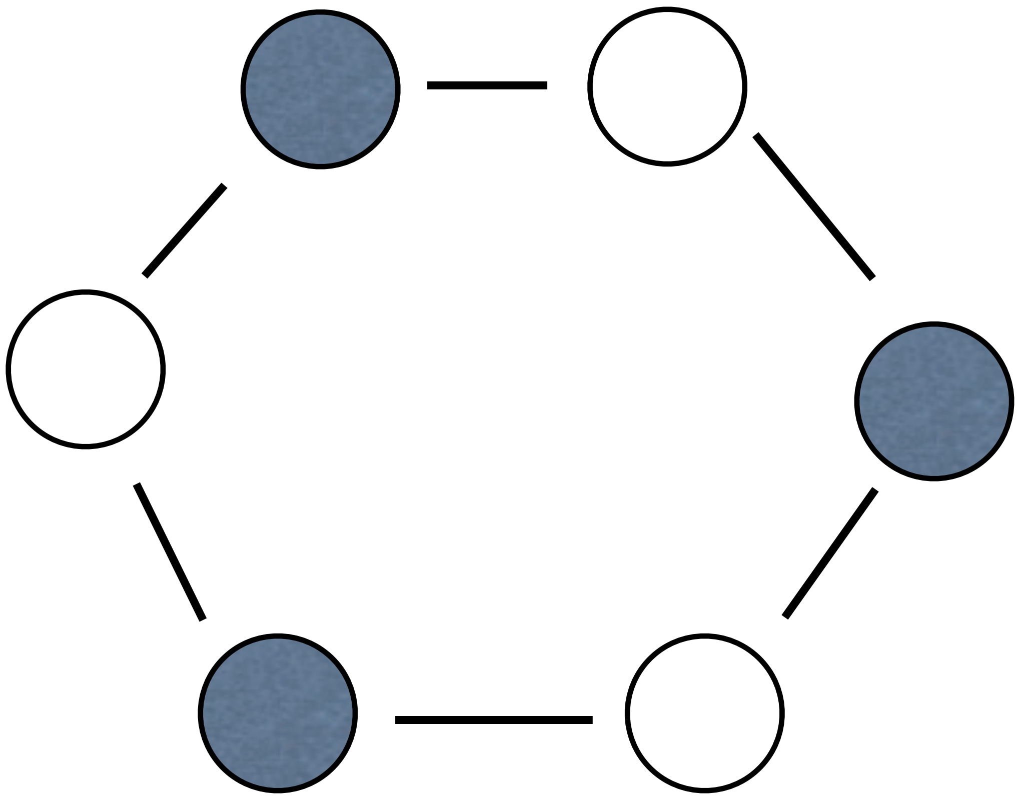
- |E| = n(n-1)/2 (demonstre)



Definições

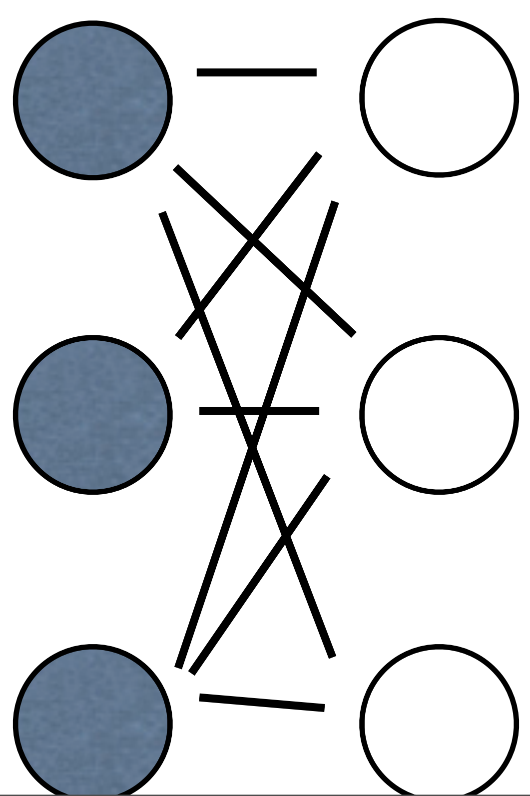
- Grafo Bipartido
  - Se existem duas partições V1 e V2 de forma que qualquer aresta pertença a V1 e V2

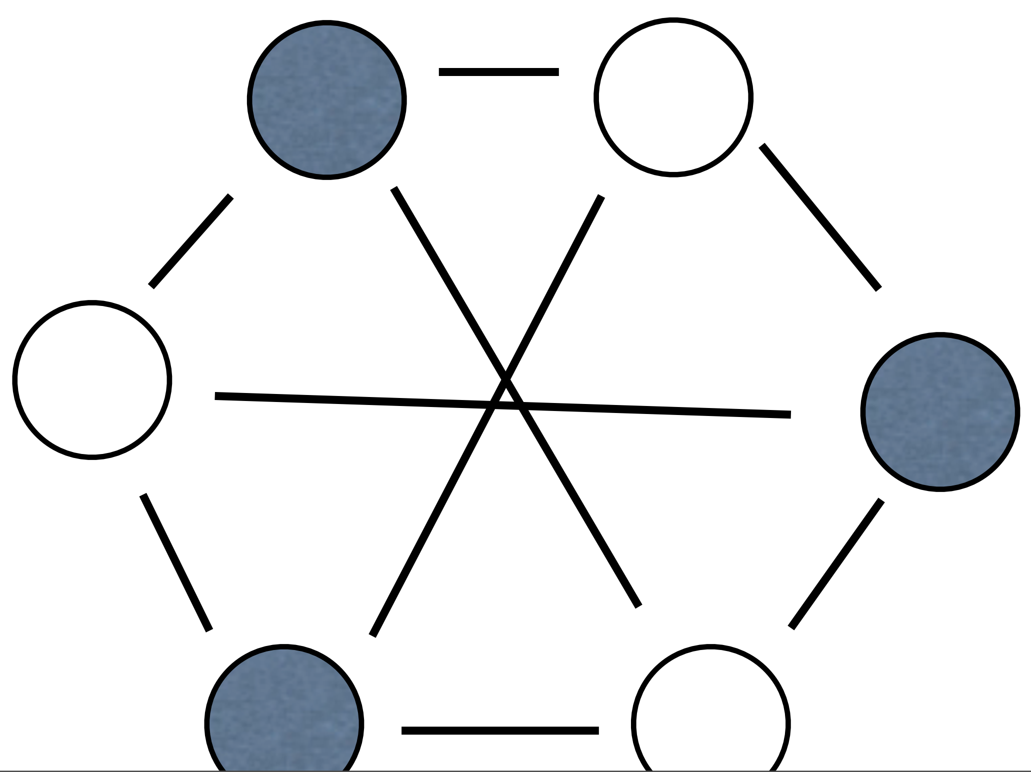




Definições

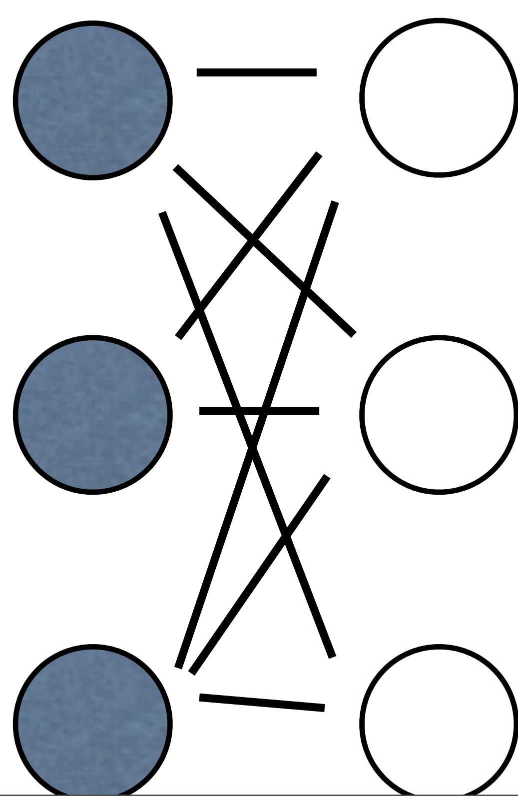
- Grafo Bipartido Completo
  - Se existem duas partições V1 e V2 de forma que qualquer aresta pertença a V1 e V2
  - Todo vértice de V1 é adjacente a todo vértice de V2

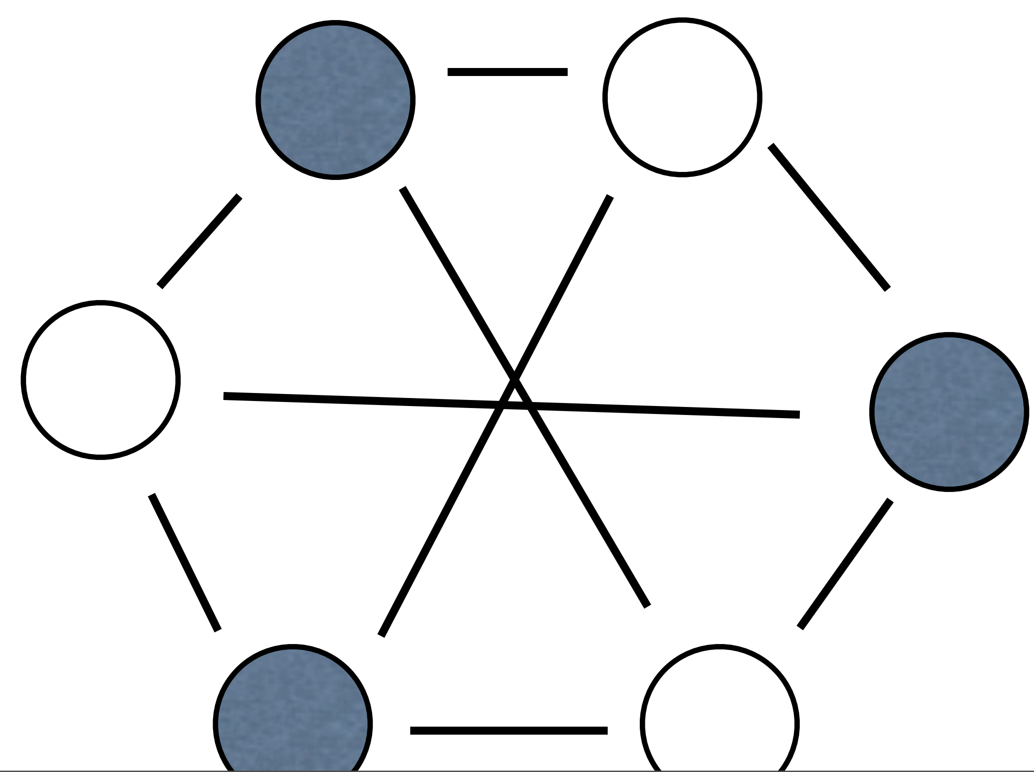




Definições

- Grafo Bipartido Completo
  - |E| = n x m (demonstre)



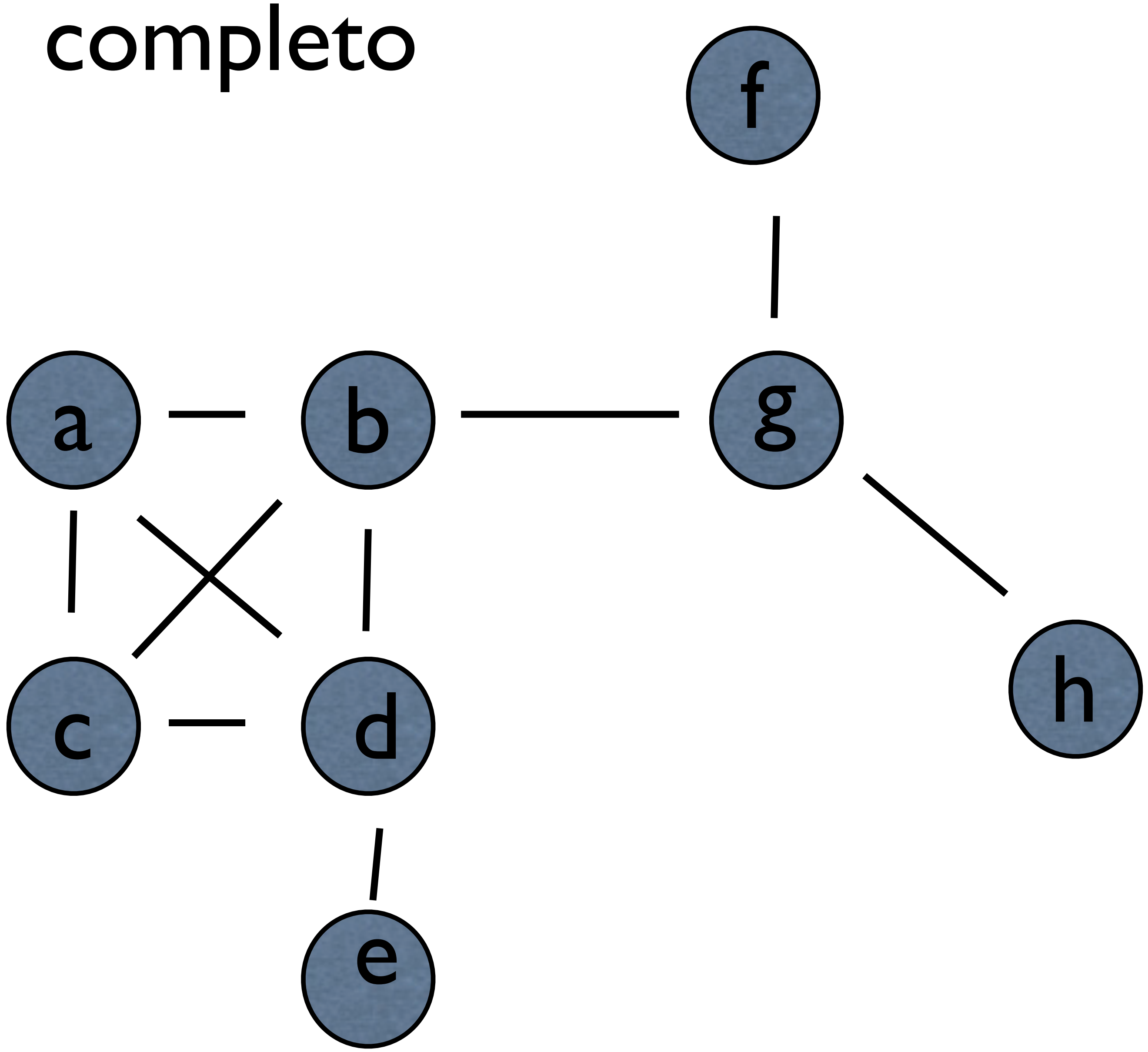


Definições

- Grafos Complementares
  - Arestas que faltam para um grafo completo

Definições

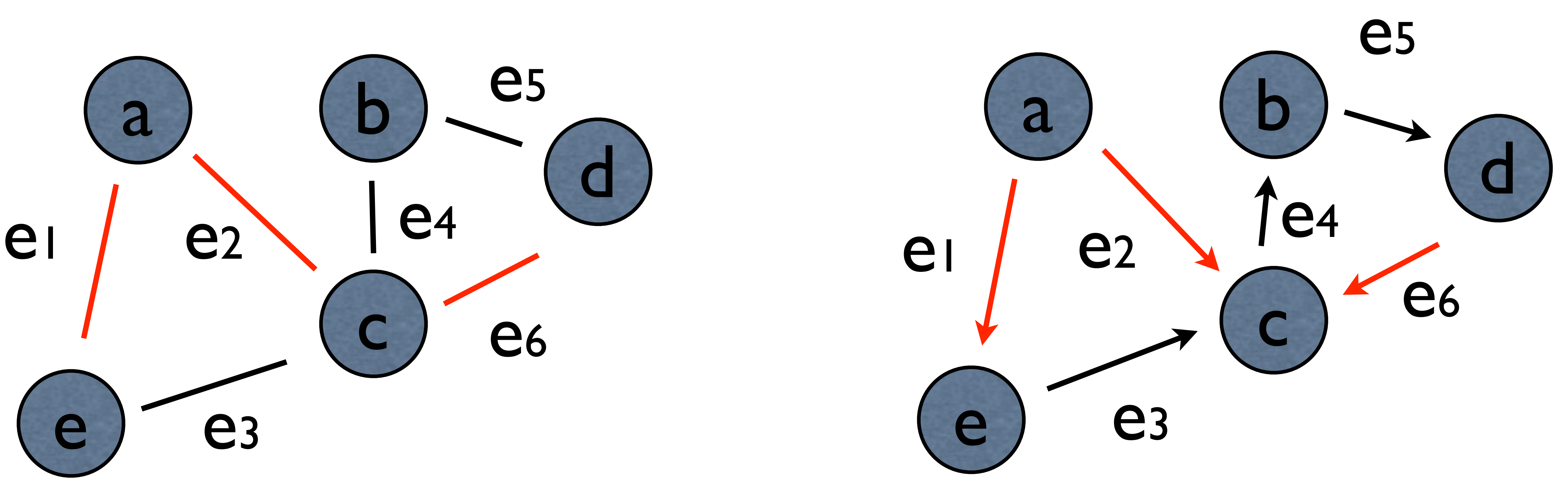
- Clique
  - Subconjunto de vértices que induz grafo completo



c = {a,b,c,d}

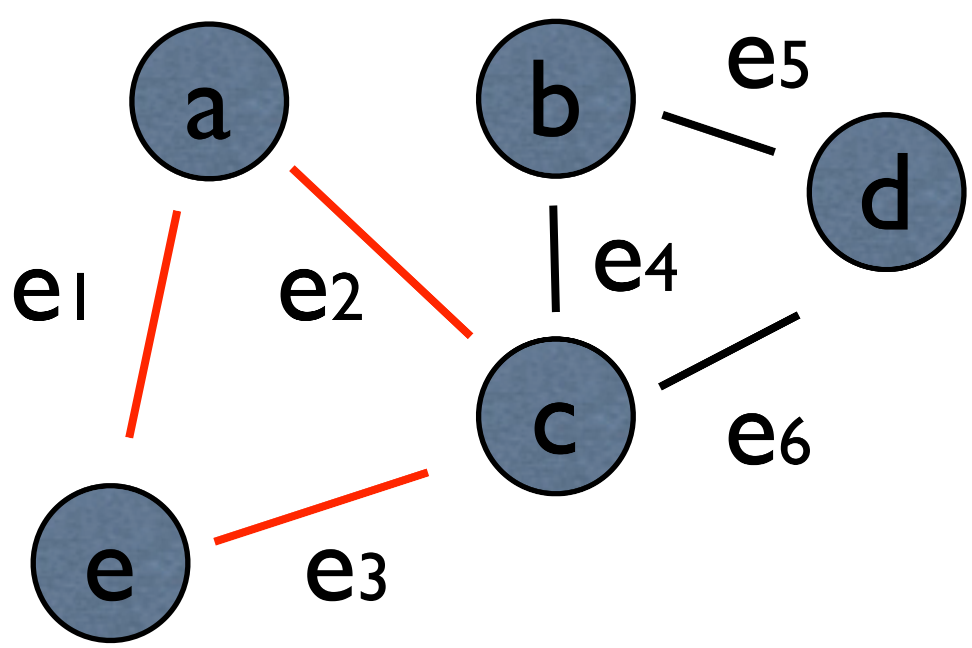
Definições

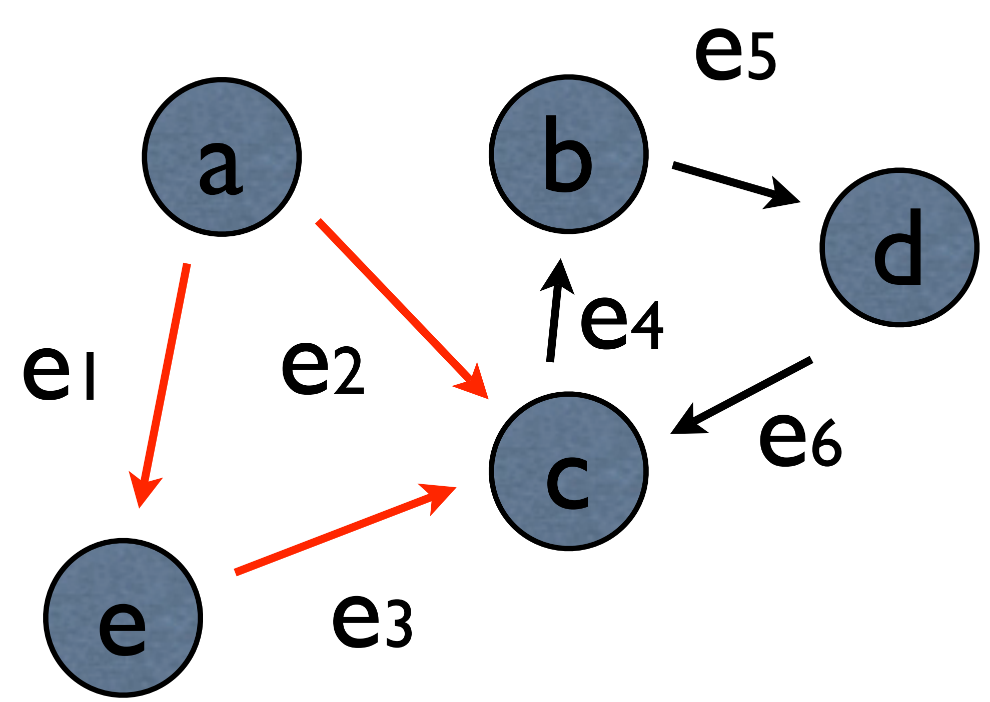
- Cadeia
  - Sequência de arestas $(e_1, e_2, \ldots e_n)$
  - e_i vértice comum a e_{i-1} e e_{i+1}



Definições

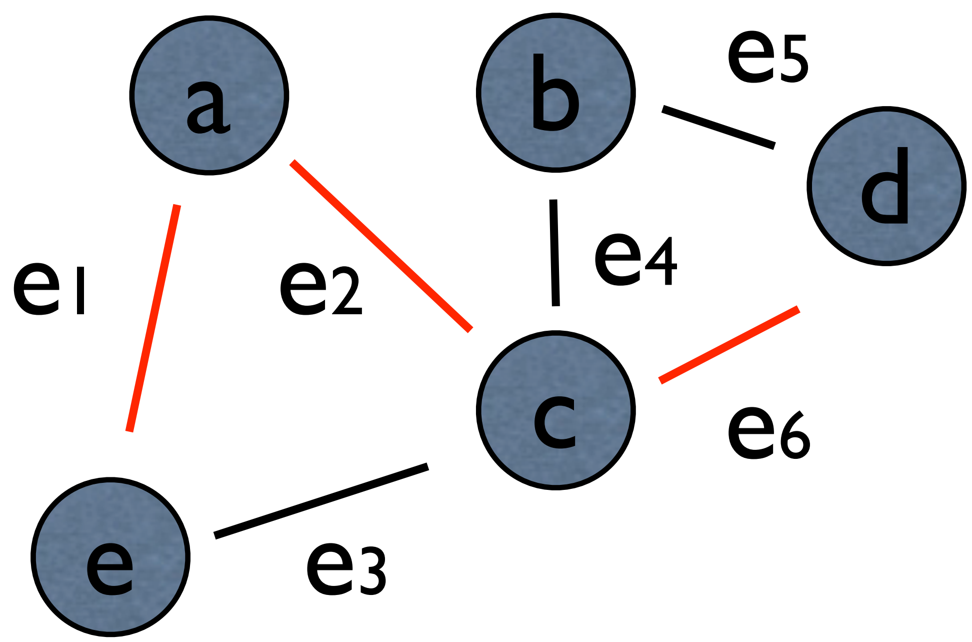
- Ciclo
  - Cadeia (e_1,e_2,...e_n)
  - Vértice comum e_1 e e_n

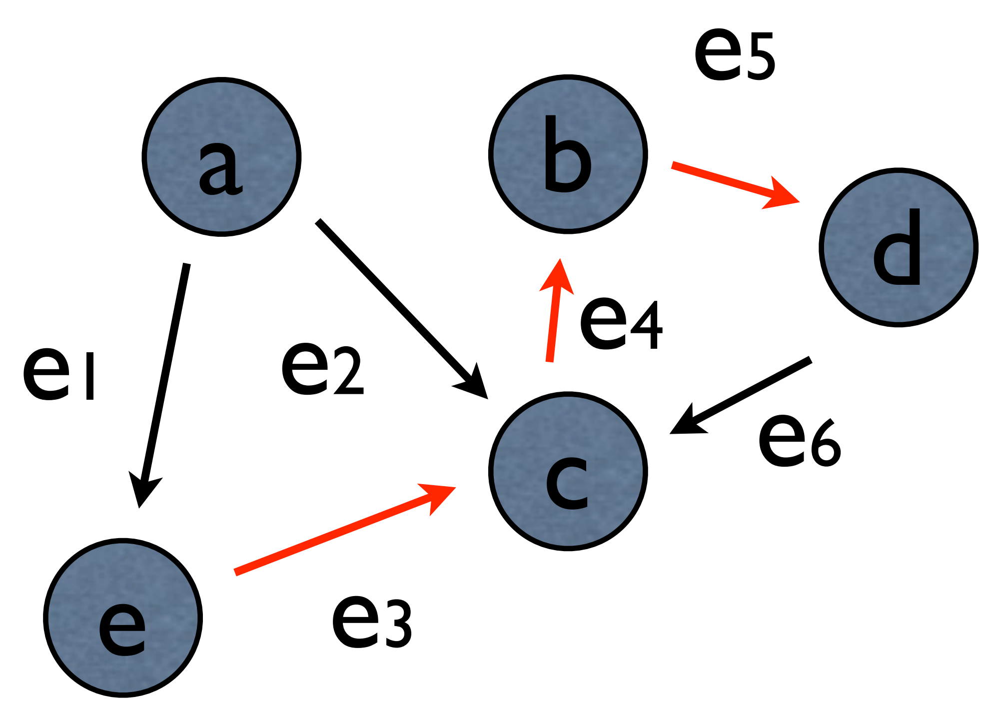




Definições

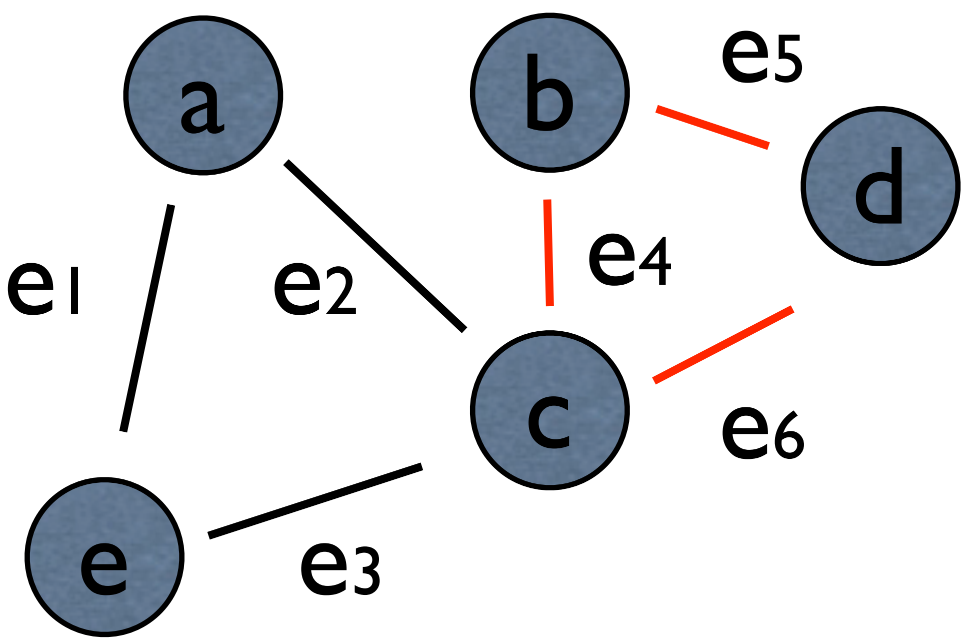
- Caminho
  - Cadeia ($e_1, e_2, \ldots e_n$)
  - Obedece sentido das arestas (Digrafo)

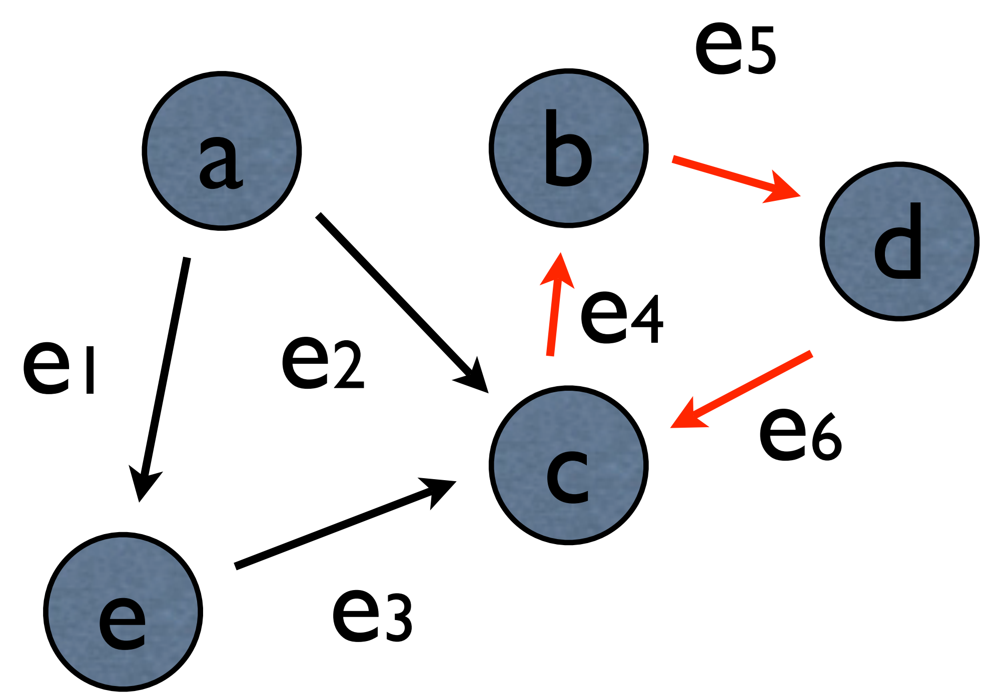




Definições

- Circuito
  - Caminho (e_1,e_2,...e_n)
  - Vértice comum e_1 e e_n





Definições

- Caminho Euleriano
  - Caminho sem repetições de arestas
  - Deve passar por todos os vértices
- Circuito Euleriano
  - Caminho Euleriano Fechado

Definições

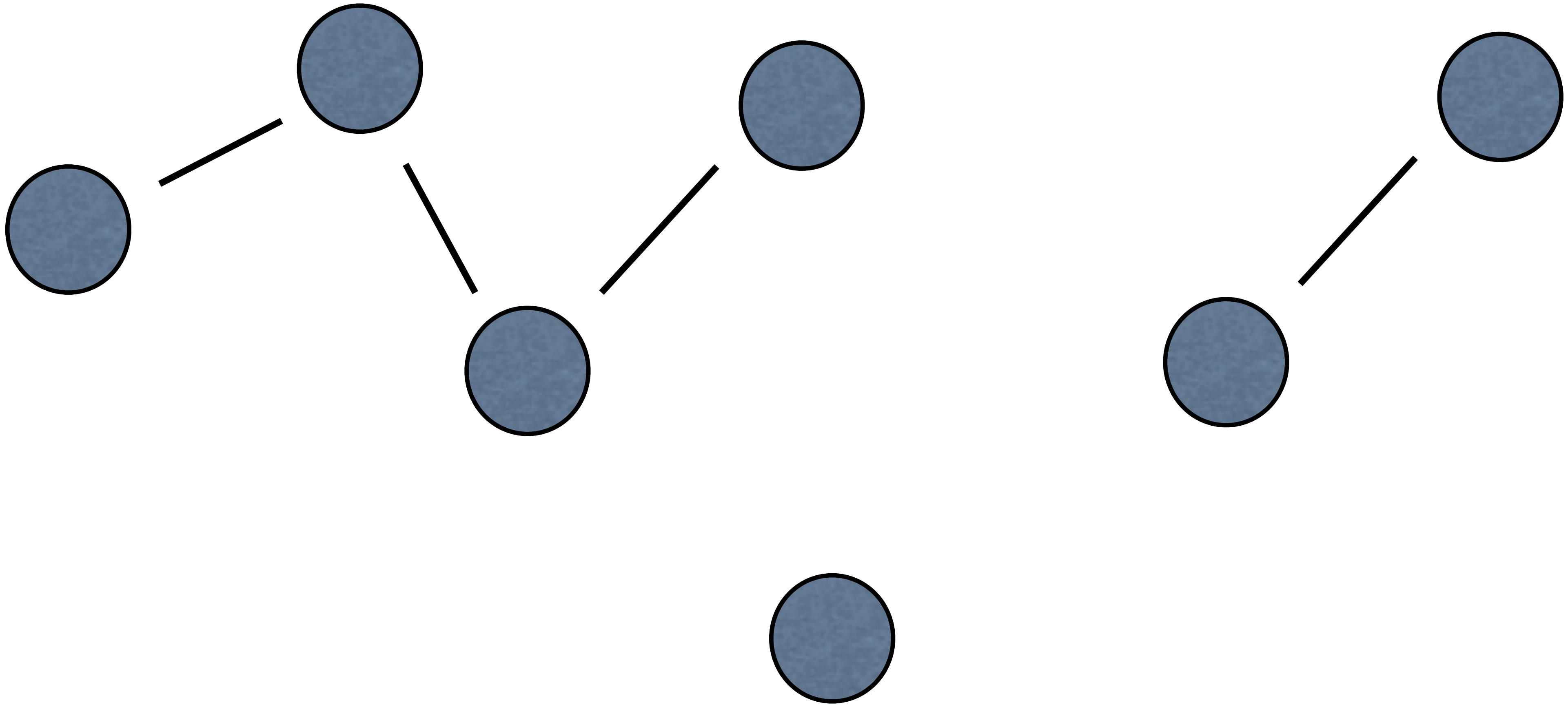
- Caminho Hamiltoniano
  - Caminho sem repetições de vértices
  - Passa por todos os vértices
- Circuito Hamiltoniano
  - Caminho Hamiltoniano Fechado

Definições

- Fecho Transitivo Direto
  - Conjunto de todos os vértices atingidos por um caminho a partir de v
- Fecho Transitivo Inverso
  - Conjunto de todos os vértices que podem atingir v por algum caminho

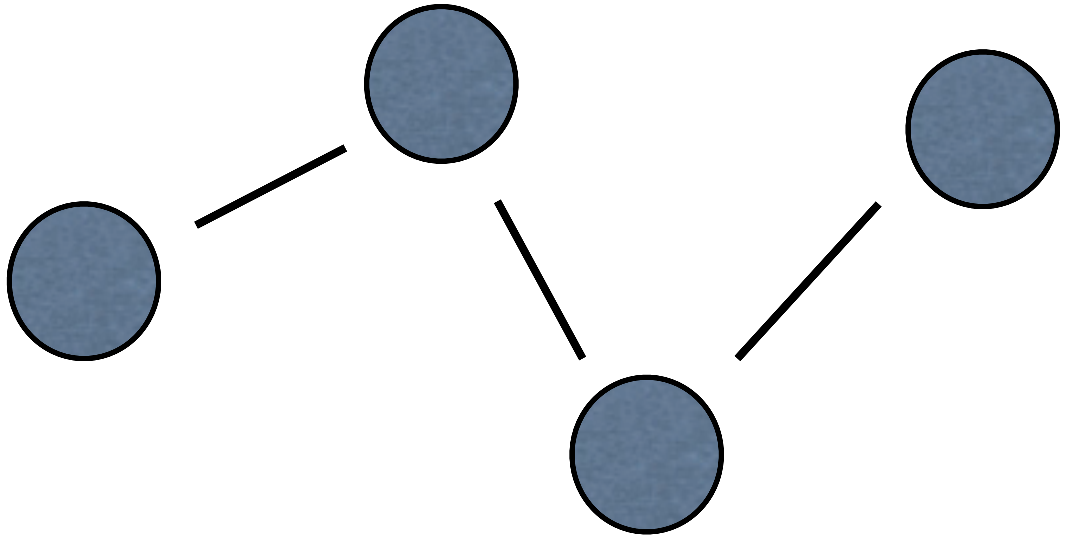
Definições

- Componente Conexa
  - Existe cadeia entre qualquer par de vértices



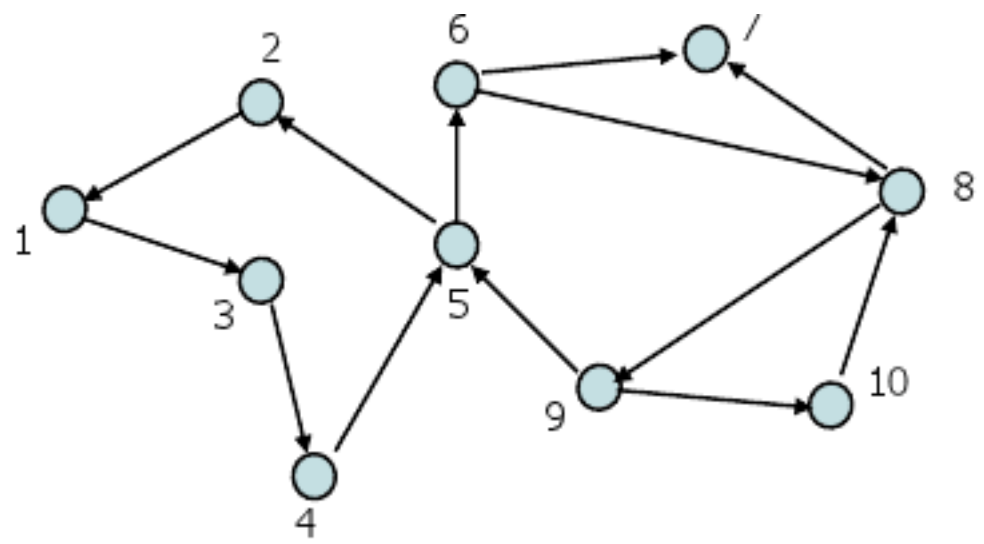
Definições

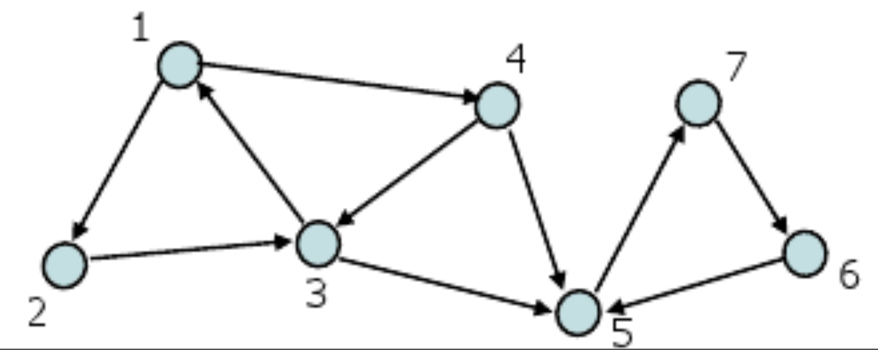
- Grafo Conexo
  - Pelo menos uma cadeia que liga cada par de vértices



Definições

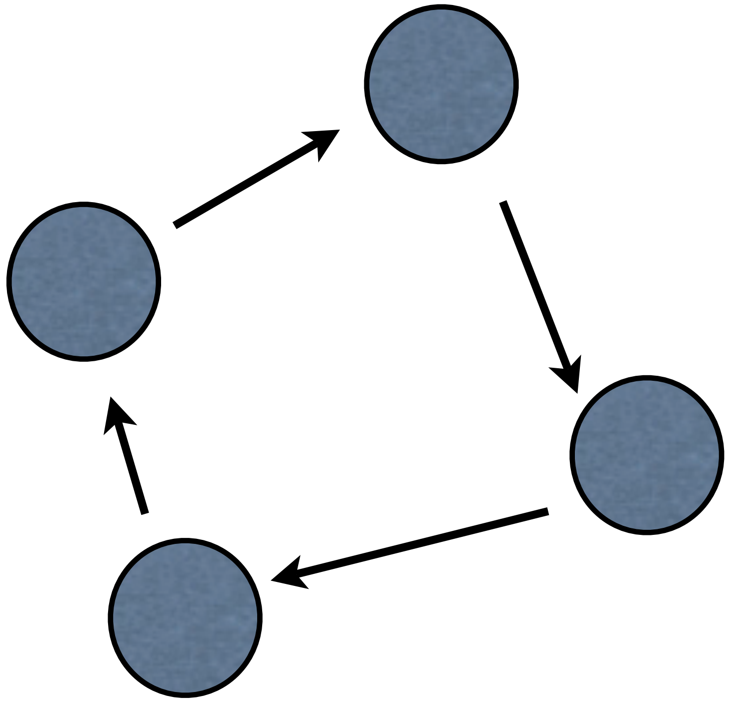
- Componente Fortemente Conexa
  - Caminho vi a vj
  - Caminho vj a vi





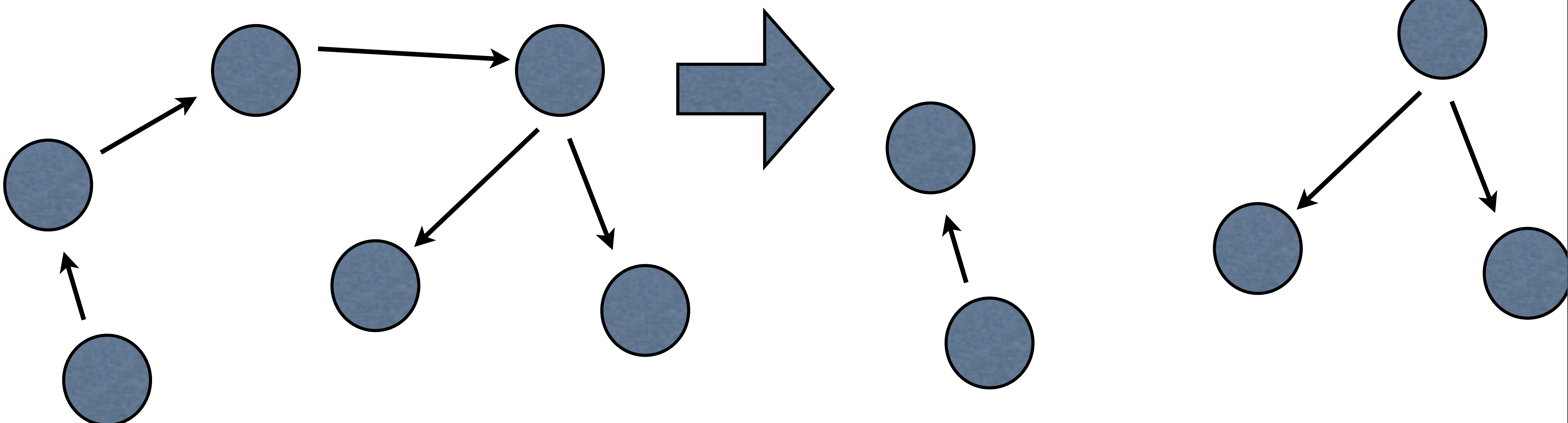
Definições

- Grafo Fortemente Conexo
  - Caminho de vi a vj
  - Caminho de vj a vi



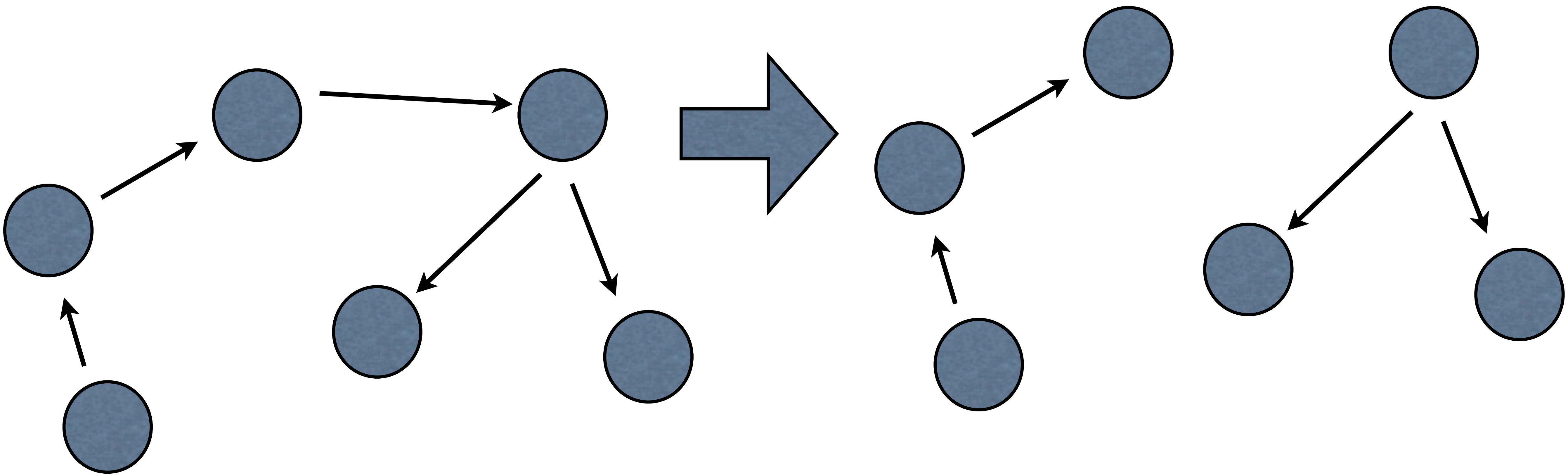
Definições

- Ponto de Articulação



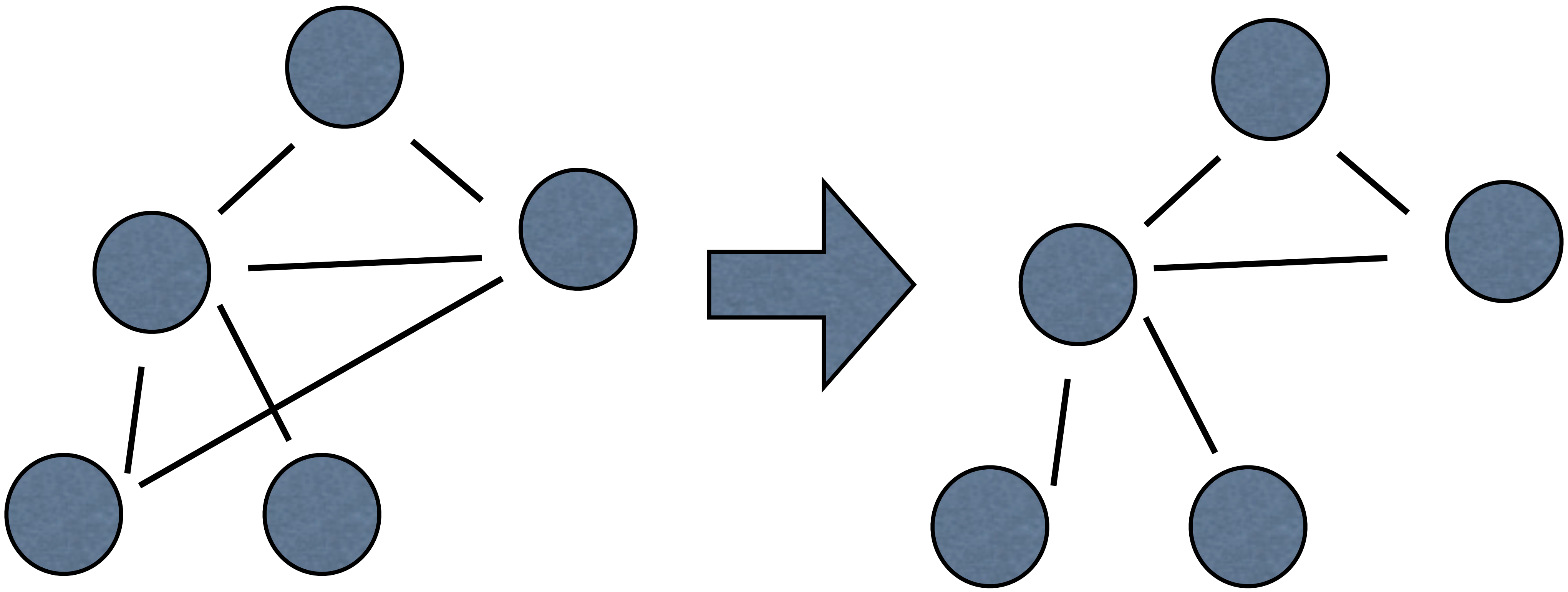
Definições

- Ponte



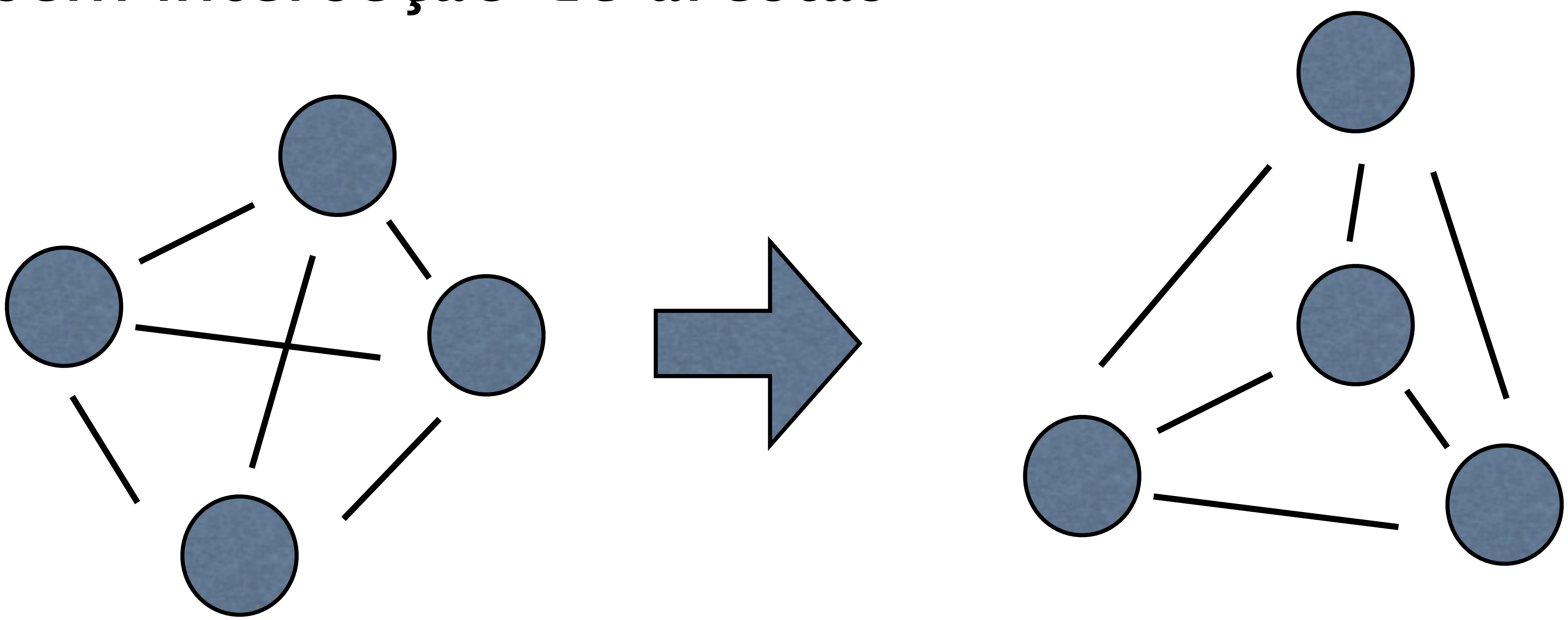
Definições

- Grafo Gerador
  - $G=(V,E)$, $G'=(V',E')$ e $V=V'$



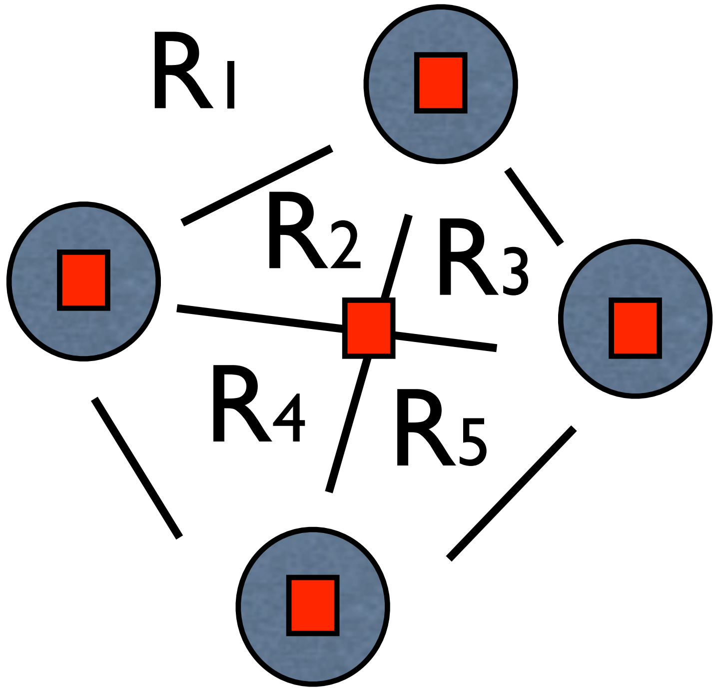
Definições

- Planar
  - **Pode ser representado** no plano sem interseção de arestas



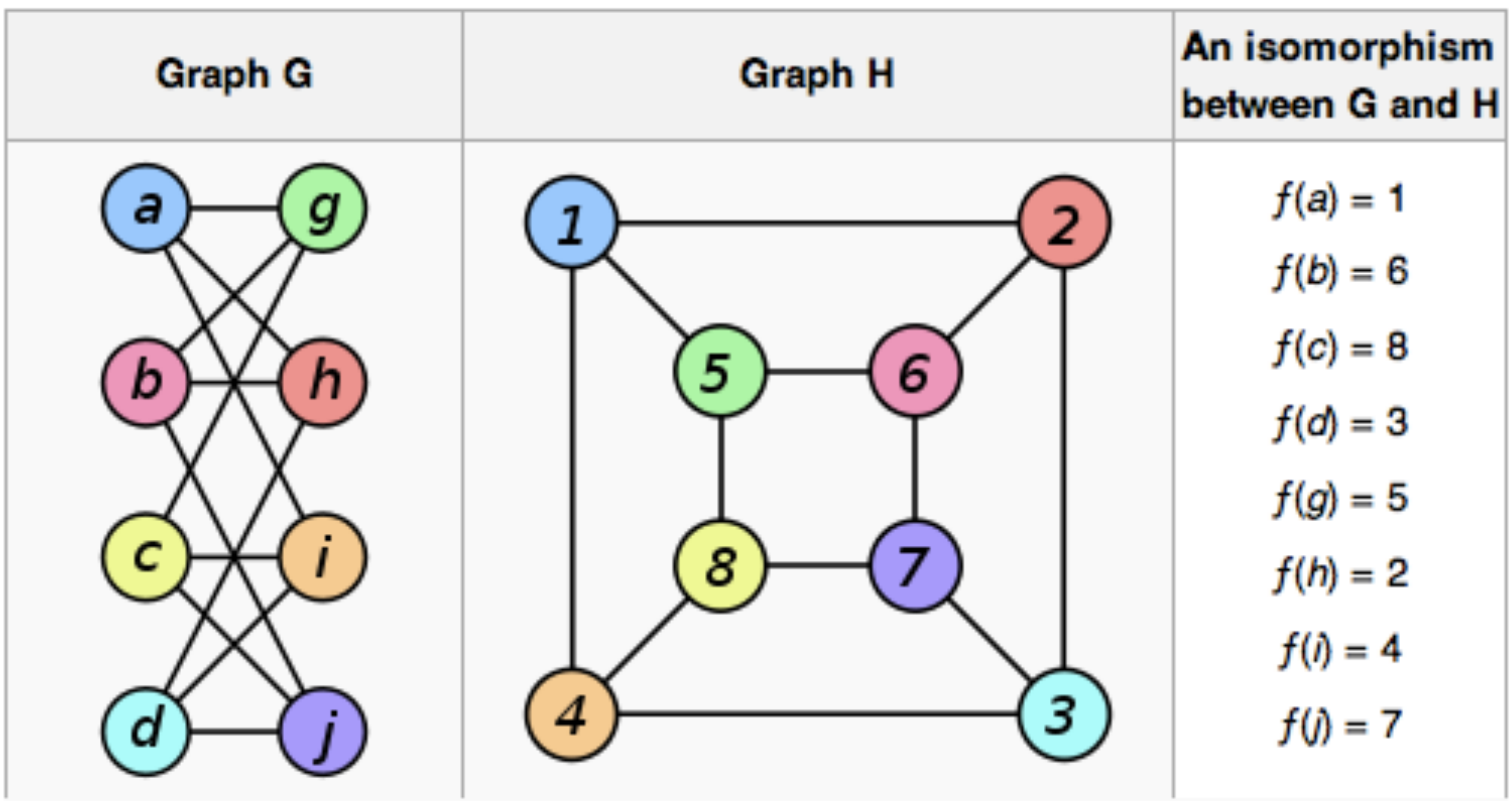
Definições

- Planar
  - $|R| = |E| - |V| + 2$ (demonstre)



Definições

- Grafos Isomorfos
  - G = (V,E) e G’ = (V’,E’)
  - f: V -> V’ | (f(u’),f(v’)) E G’ <-> (u,v) E G

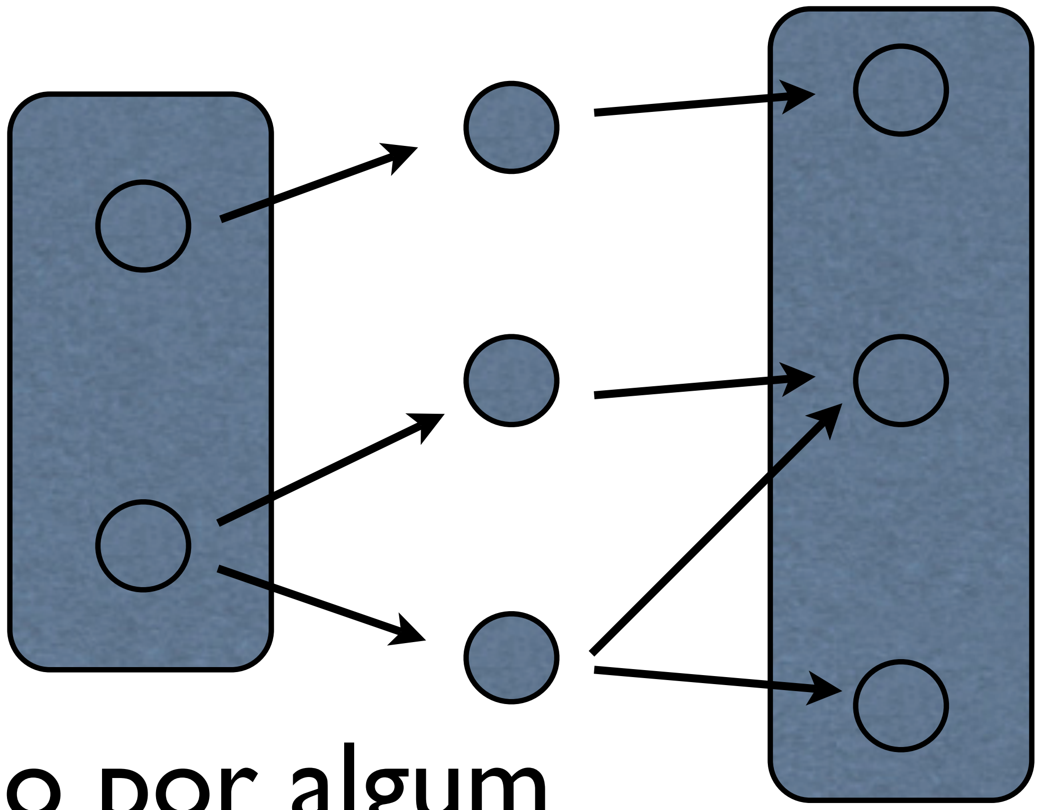


Definições

- Grafos Isomorfos
  - Encontre um grafo G_5 isomorfo a seu complementar
  - Não há algoritmo eficiente

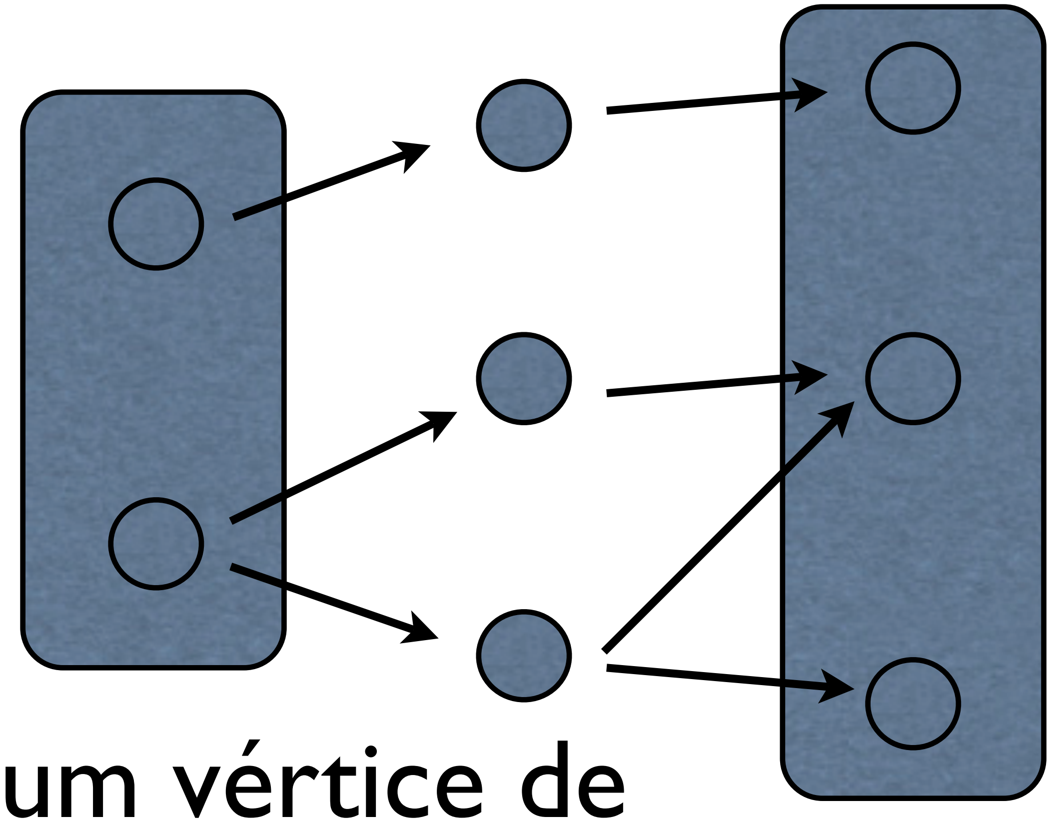
Definições

- Base
  - Vértices em A
    - Nenhuma aresta
  - Vértices fora de A
    - Todo vértice é atingido por algum caminho que parte de A



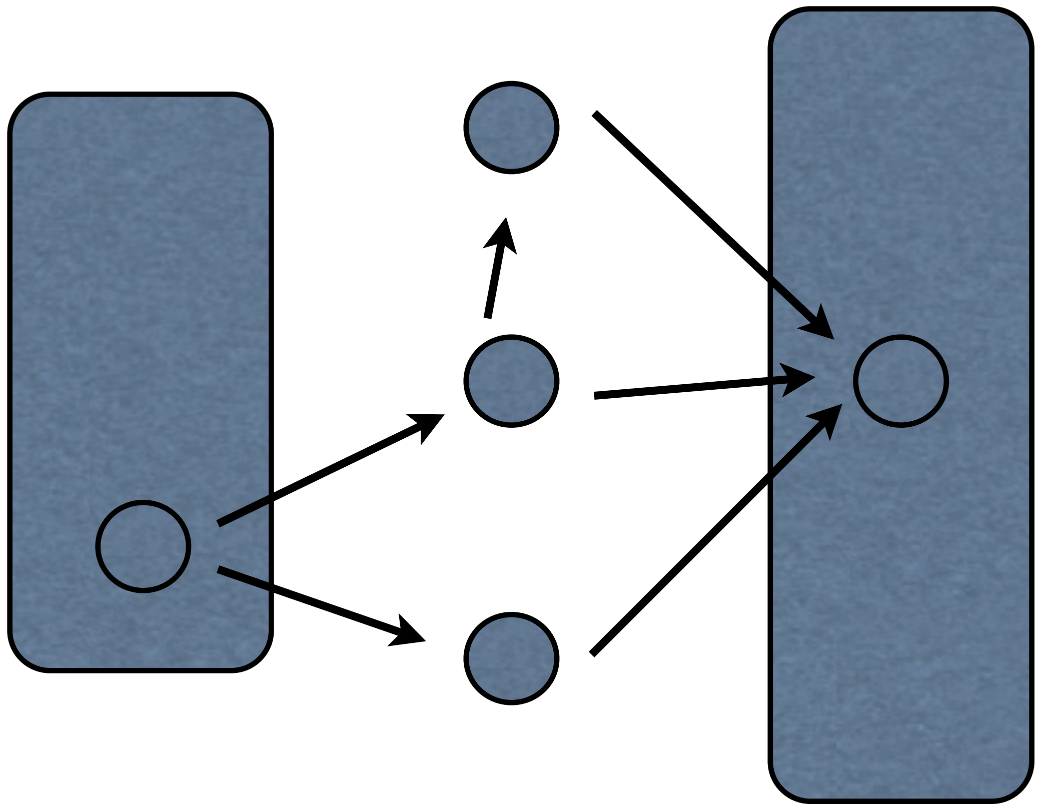
Definições

- Anti-Base
  - Vértices em B
    - Nenhuma aresta
  - Vértices fora de B
    - Atingem pelo menos um vértice de B por algum caminho



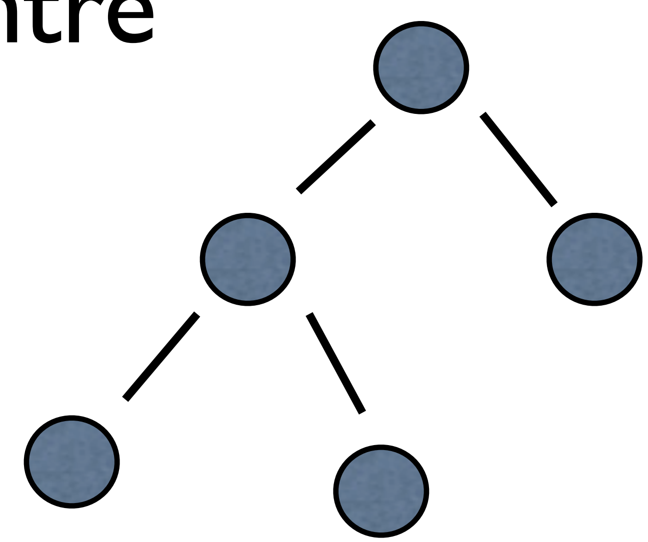
Definições

- Raiz
  - Base unitária
- Anti-Raiz
  - Anti-Base unitária



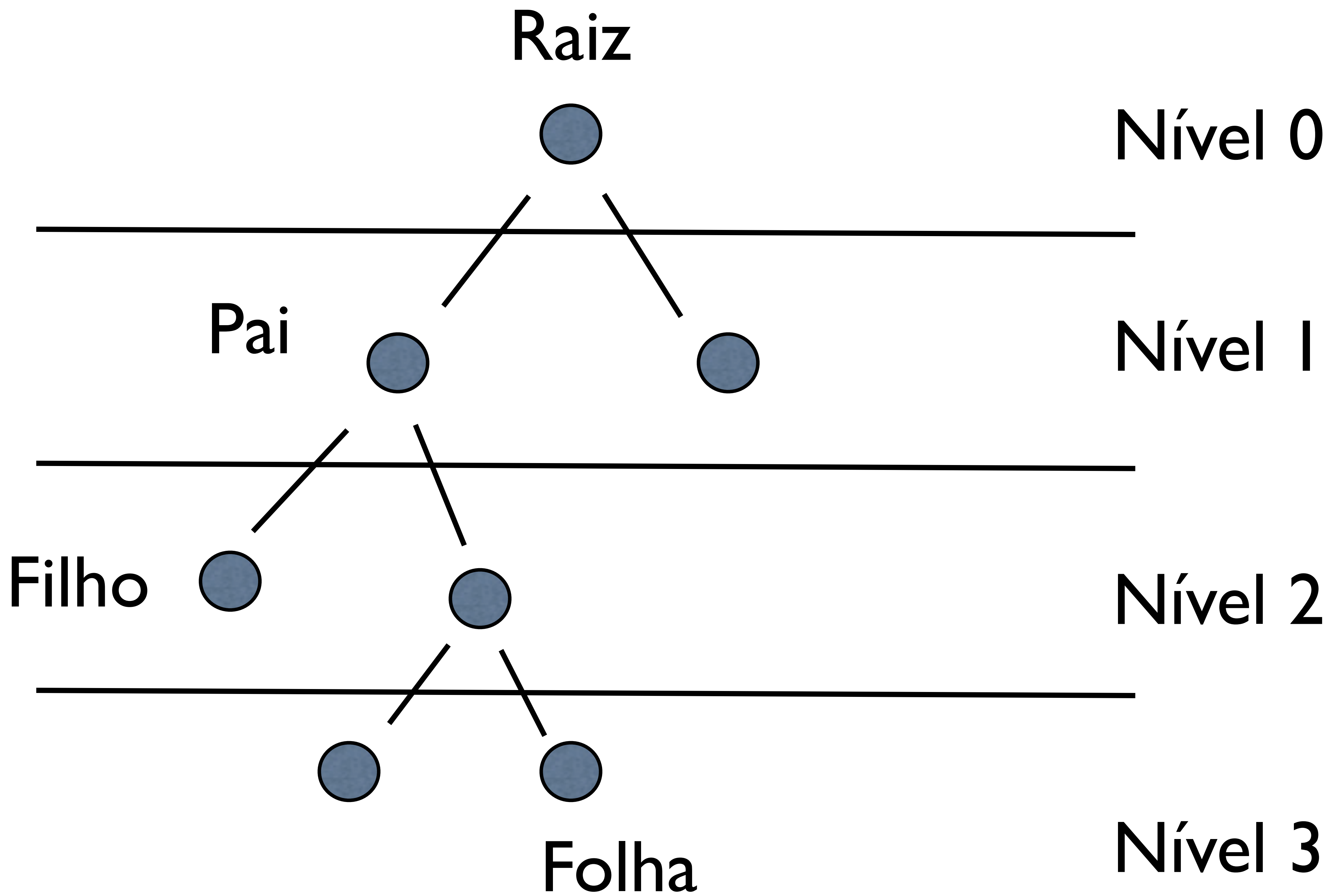
Definições

- Árvore
  - Conexo
  - Sem ciclos
  - Único caminho entre dois vértices
  - $|E| = |V| - 1$



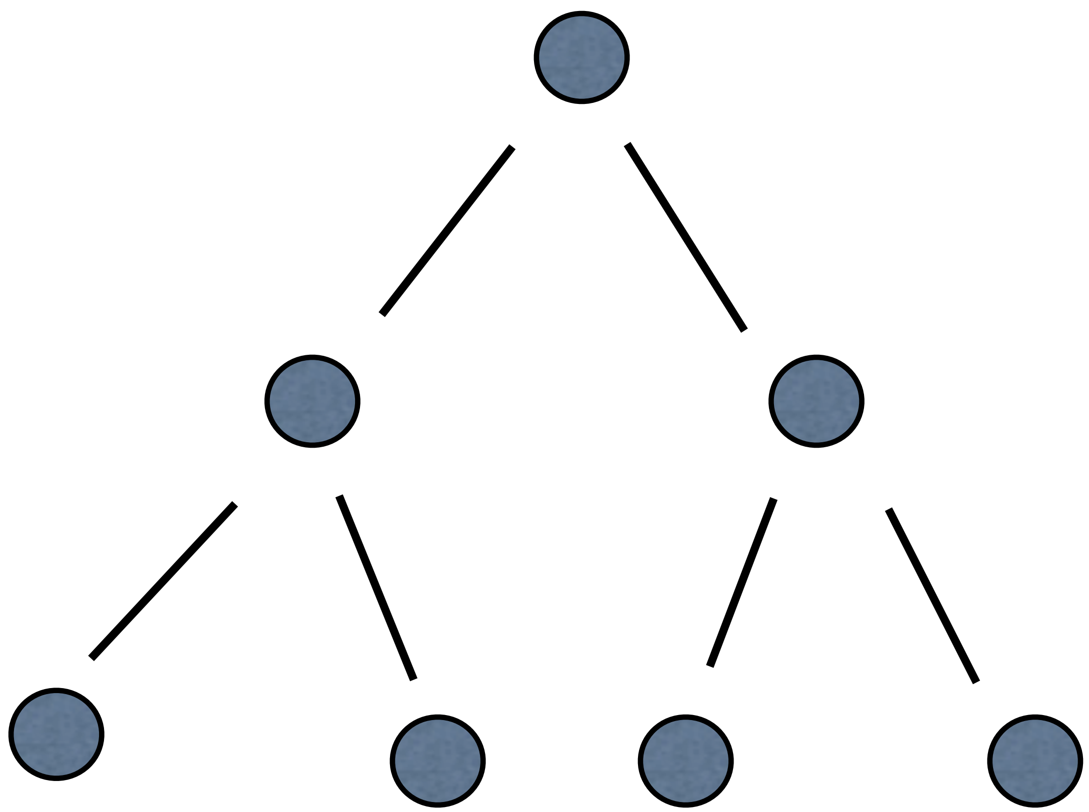
Definições

- Árvore



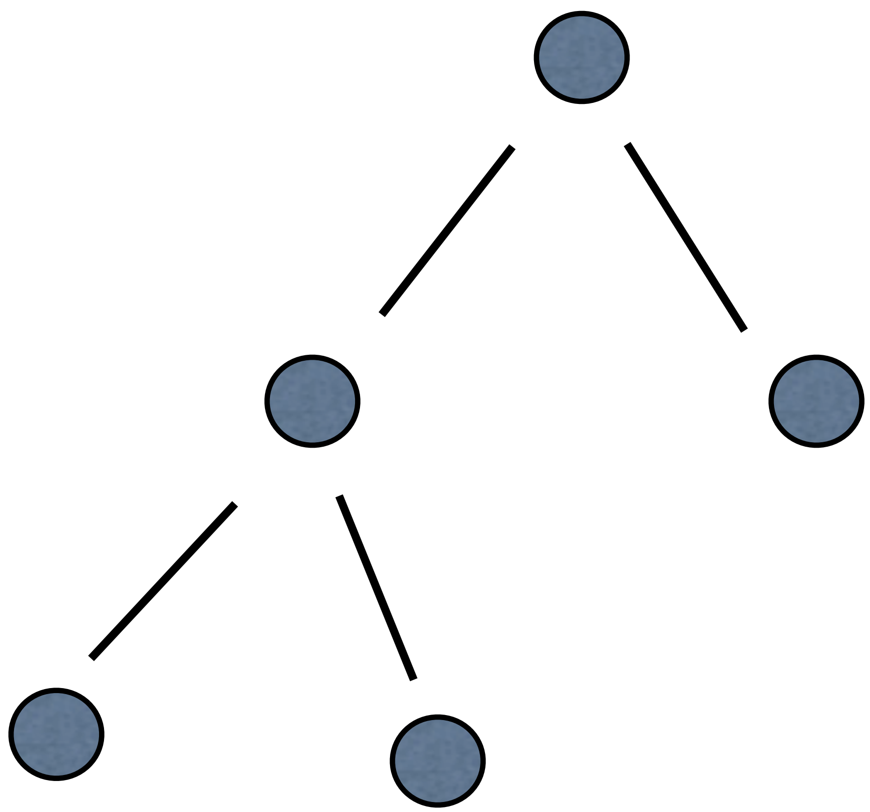
Definições

- Árvore Cheia
  - Subárvore vazia apenas no último nível



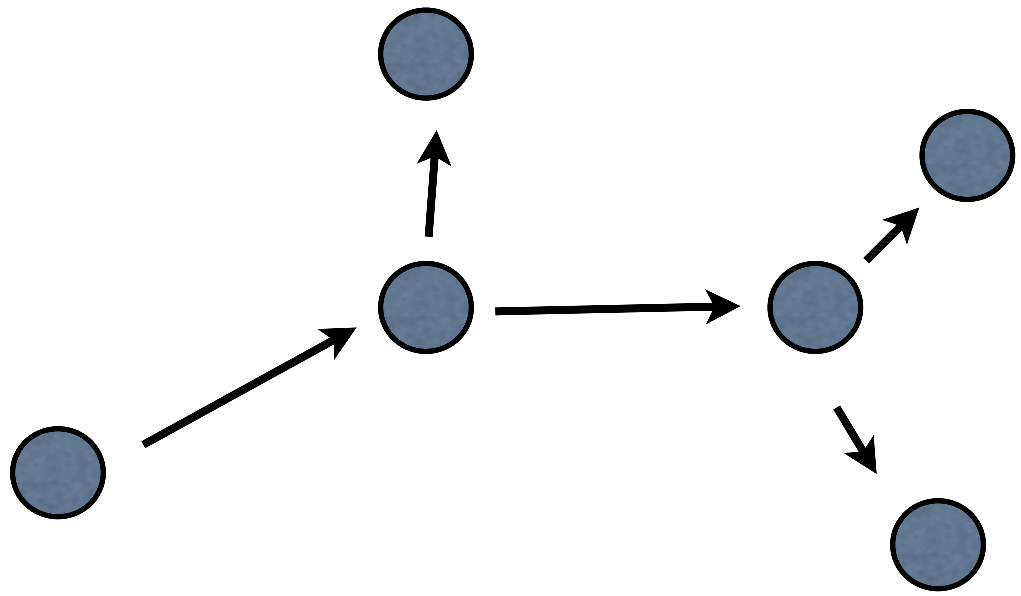
Definições

- Árvore Completa
  - Subárvore vazia apenas no último nível ou penúltimo nível



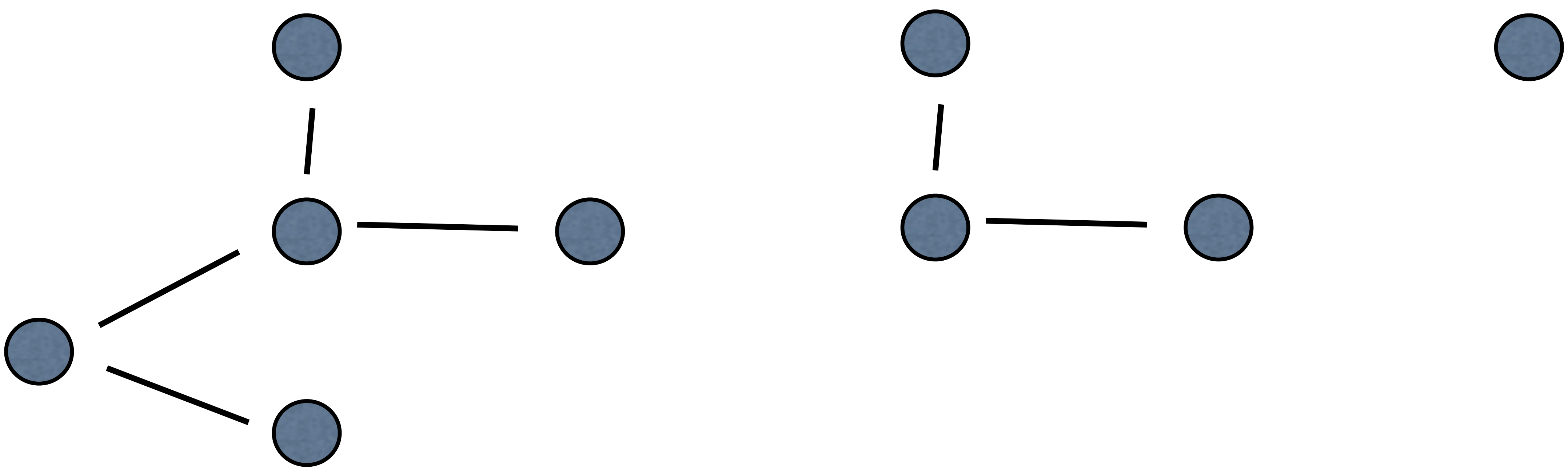
Definições

- Arborescência
  - Árvore Orientada



Definições

- Floresta



Definições

- Árvore Geradora
  - Árvore de G
  - G=(V,E), G'=(V',E') e V=V'