

# Circuitos Eulerianos

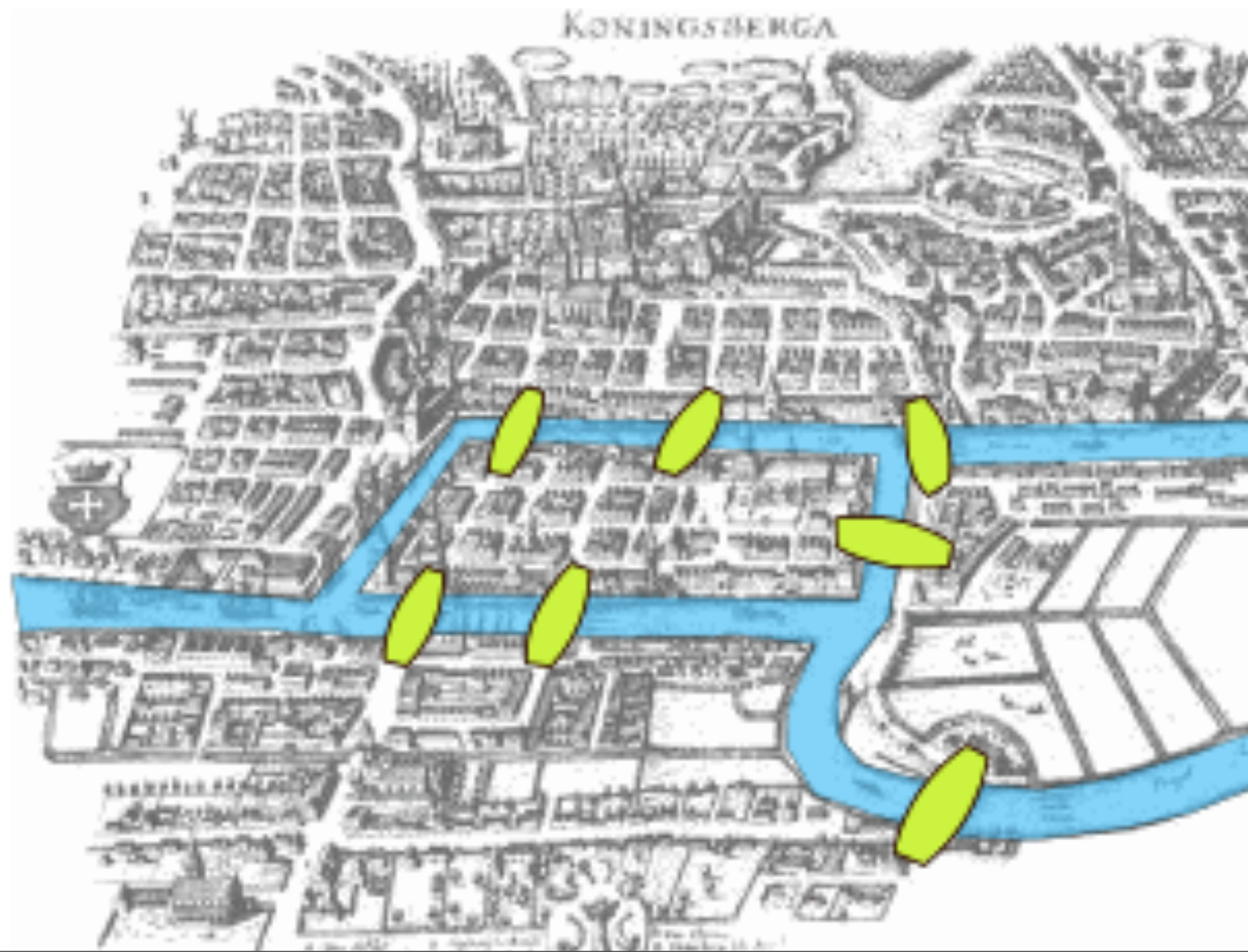
Prof. Leandro G. M. Alvim

# Agenda

- Grafos Eulerianos
- Algoritmo de Fleury
- Detecção de Pontes

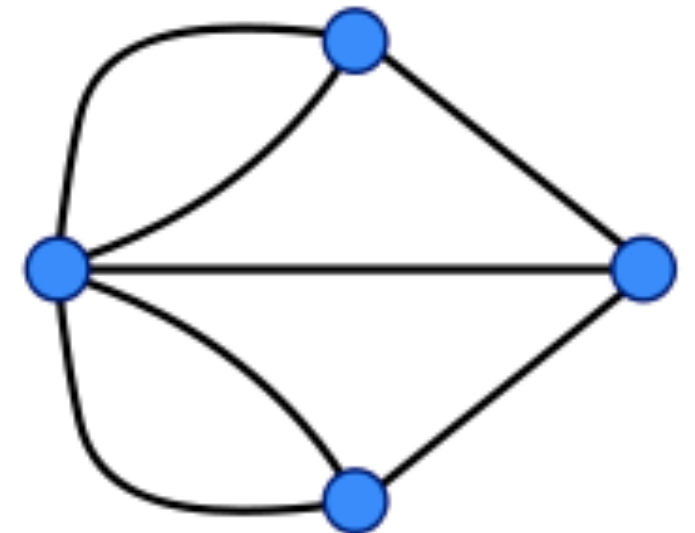
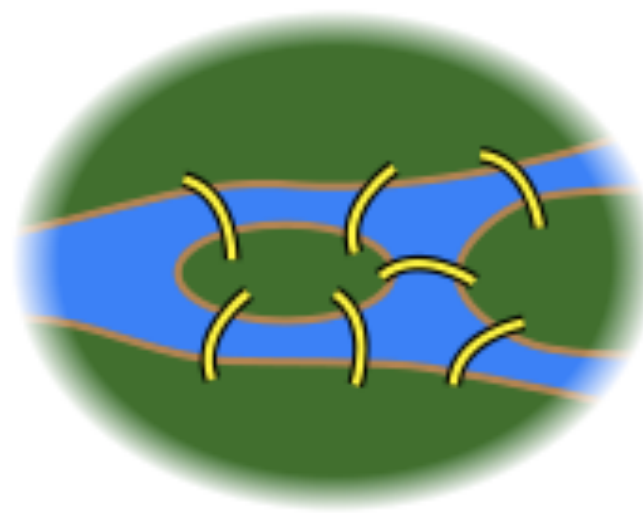
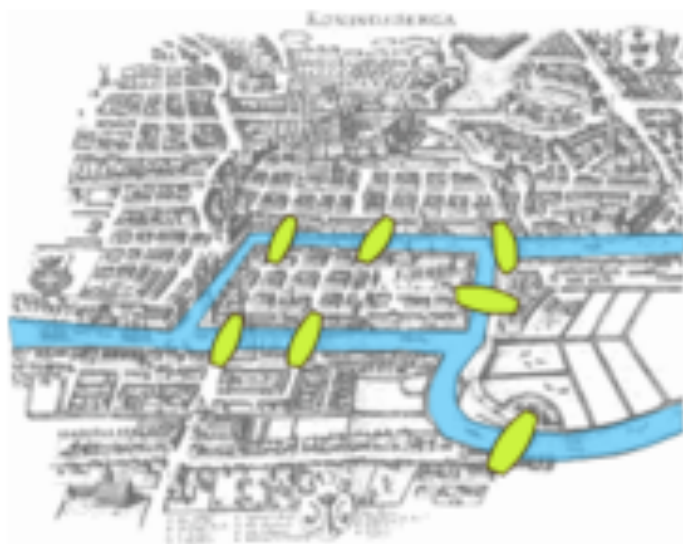
# As pontes de Königsberg

- É possível caminhar pela cidade passando por todas as pontes uma única vez?



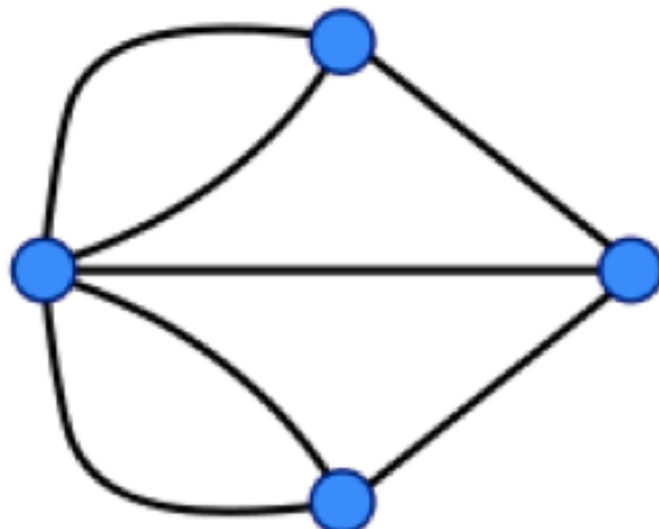
# As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
- Primeiro passo



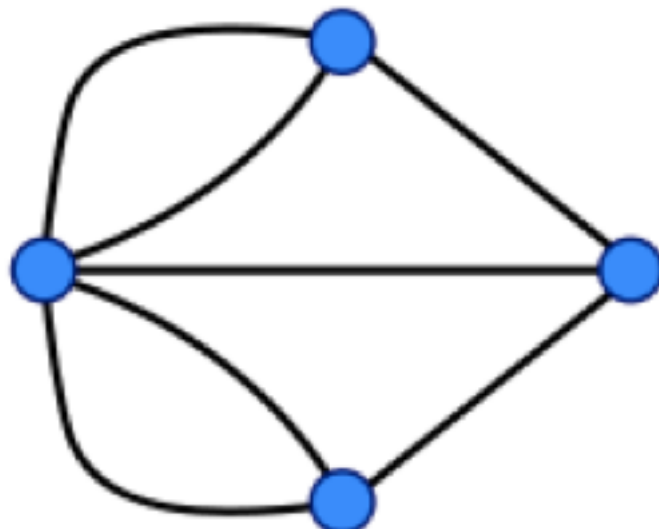
# As pontes de Königsberg

- Análise de Euler
- Segundo passo
- Para que tenha solução, devemos ter um número par de arestas em cada terreno



# As pontes de Königsberg

- Teorema de Euler
  - Um grafo não dirigido  $G$  é euleriano se e somente se  $G$  é conexo e cada vértice  $V$  tem grau par



- É euleriano ?

# Grafos Eulerianos

- Verificar se um grafo **não dirigido**  $G$  é euleriano
  - Verificar se  $G$  é conexo
  - Verificar se cada vértice de  $G$  tem grau par

# Grafos Eulerianos

- Verificar se um **grafo dirigido**  $G$  é euleriano
  - Verificar se  $G$  é conexo
  - Verificar se cada vértice de  $G$  tem grau de saída igual ao grau de entrada



# Circuitos Eulerianos

- Se um grafo é euleriano
  - Circuito Euleriano
    - Algoritmo de Fleury (1883)

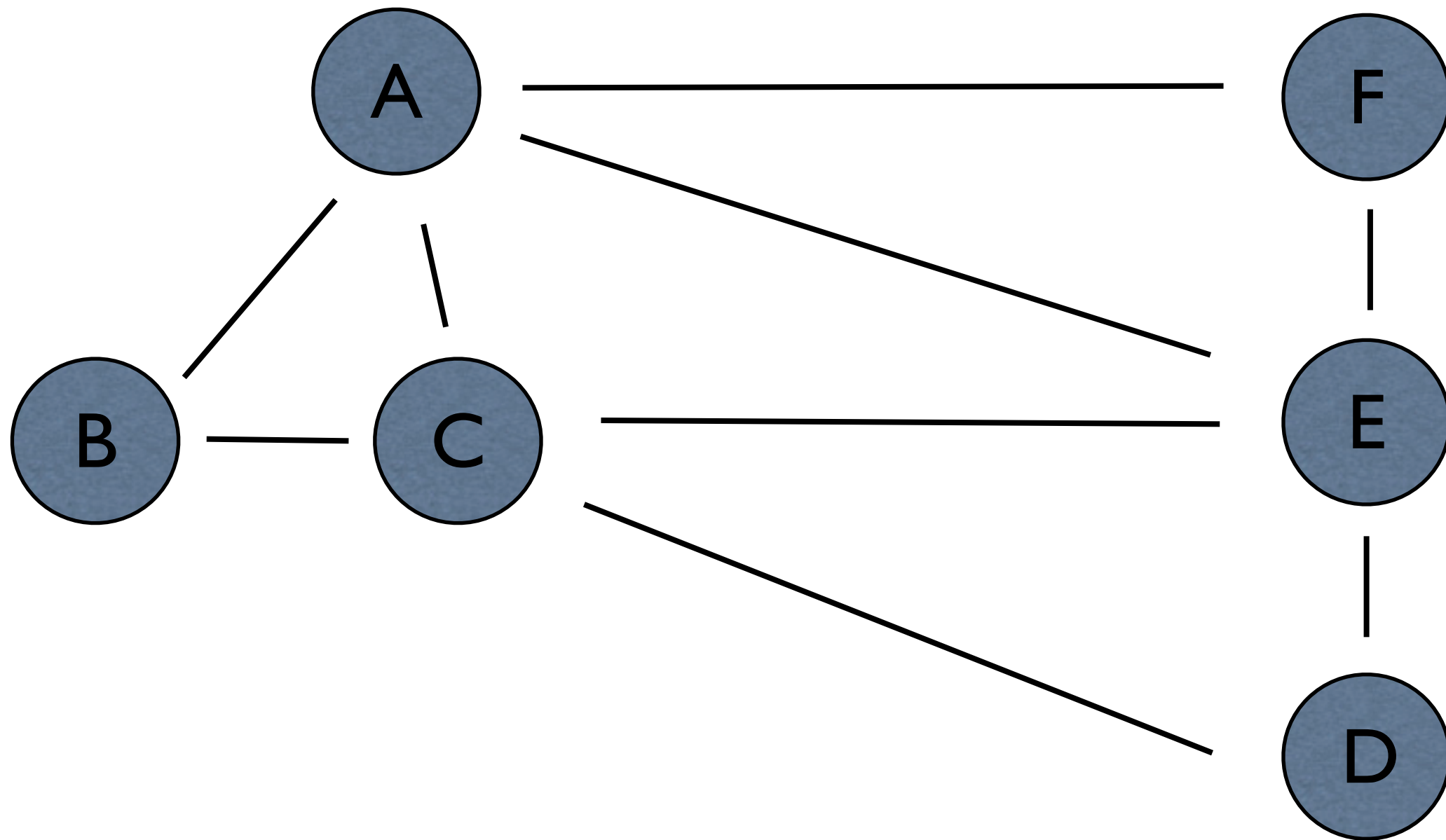
# Algoritmo de Fleury

1. Escolha um vértice inicial
2. **Escolha uma aresta** e marque como visitada
3. Caminhe para o próximo vértice
4. Volte ao passo 2

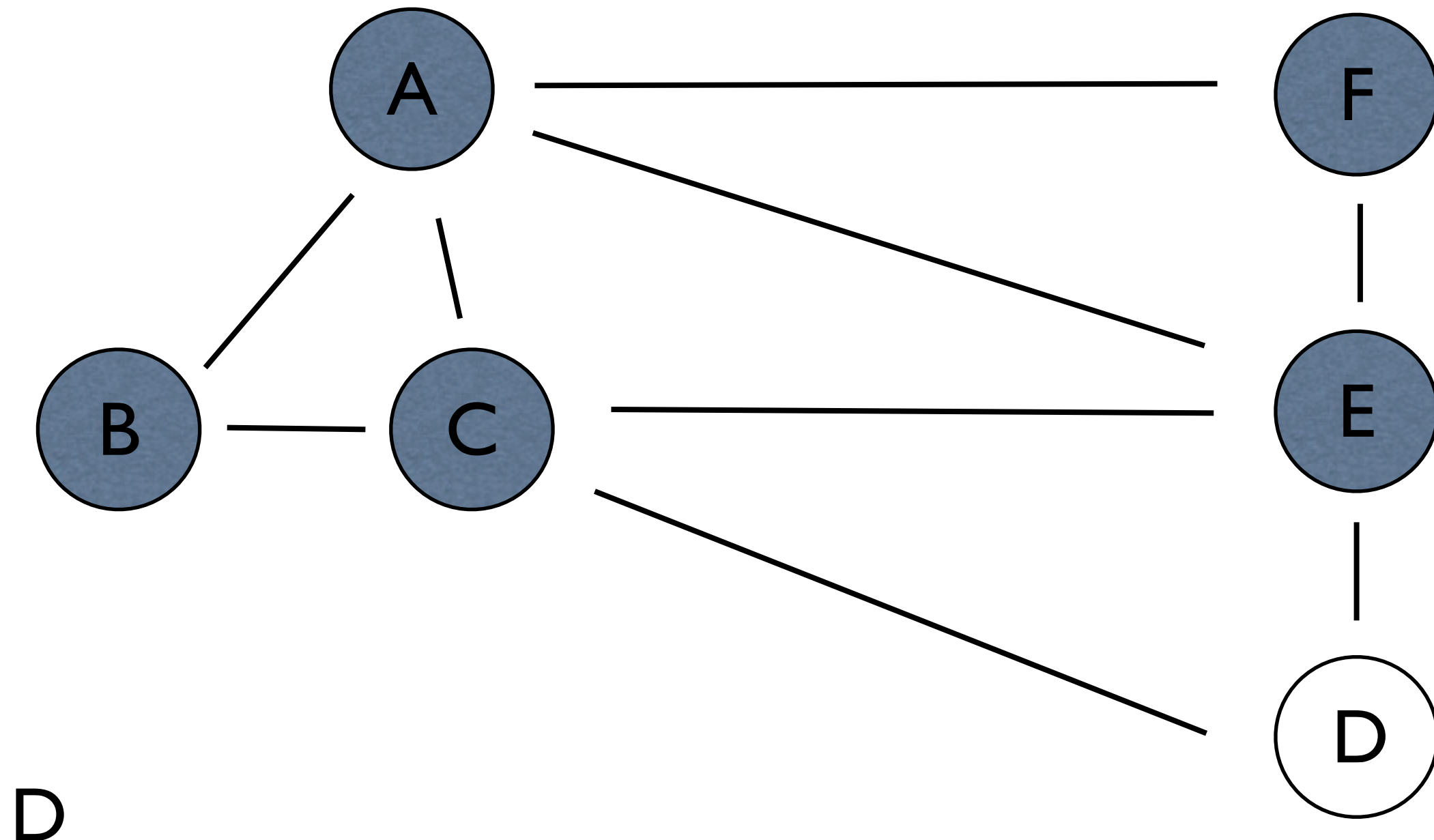
# Algoritmo de Fleury

- De preferência, a aresta escolhida não deve ser uma ponte
- A escolha de uma ponte deve ser a última opção

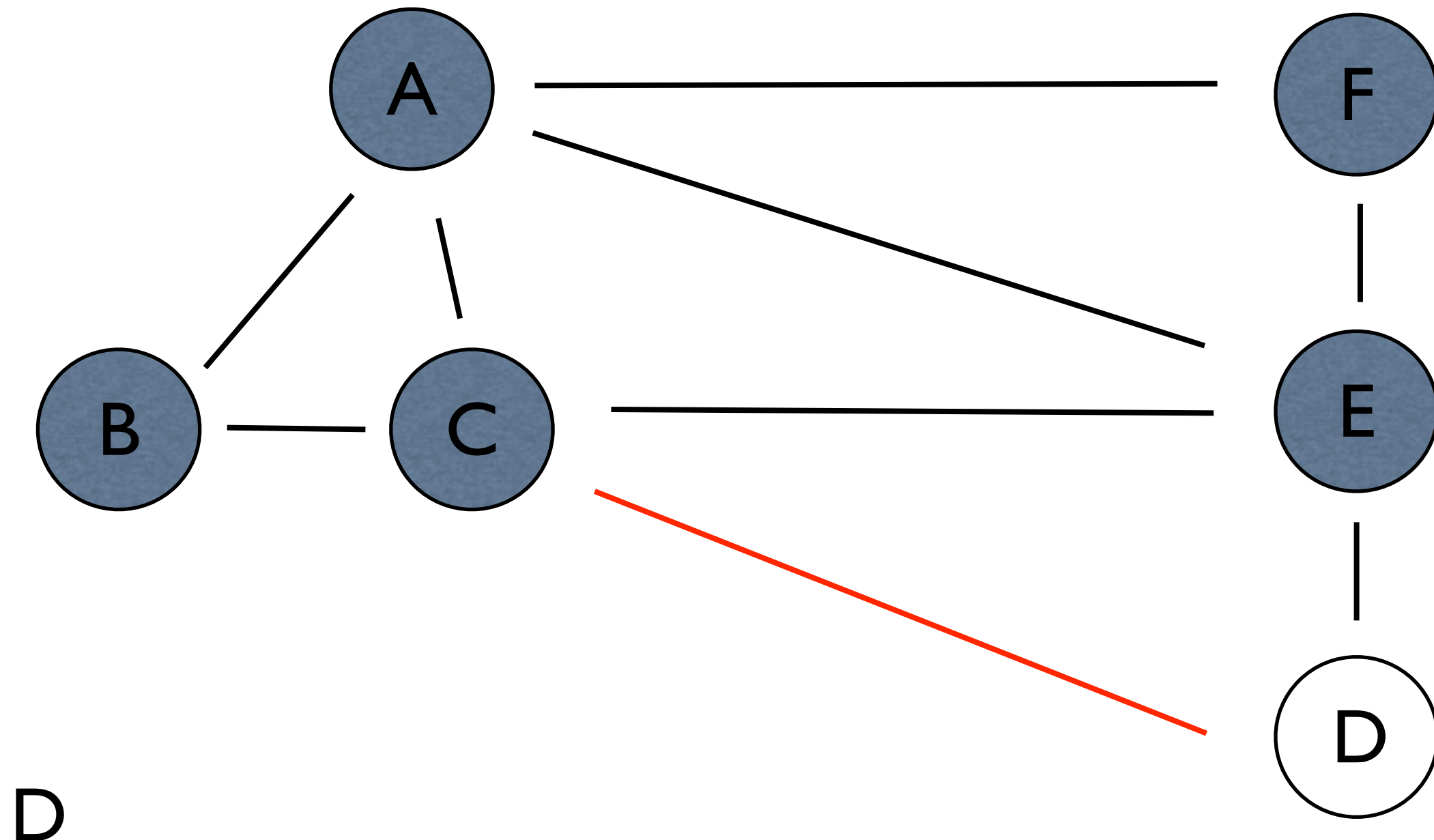
# Algoritmo de Fleury



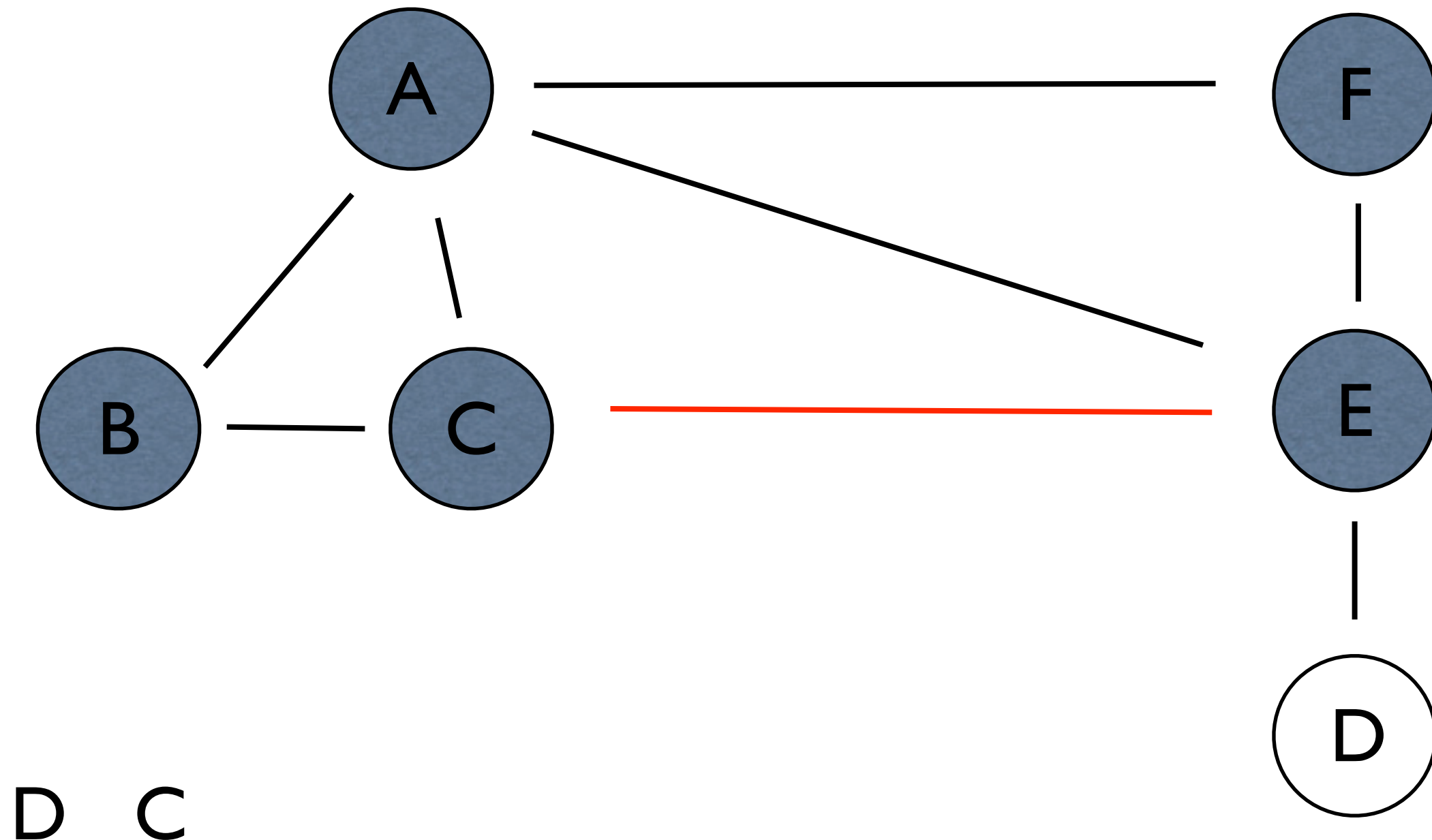
# Algoritmo de Fleury



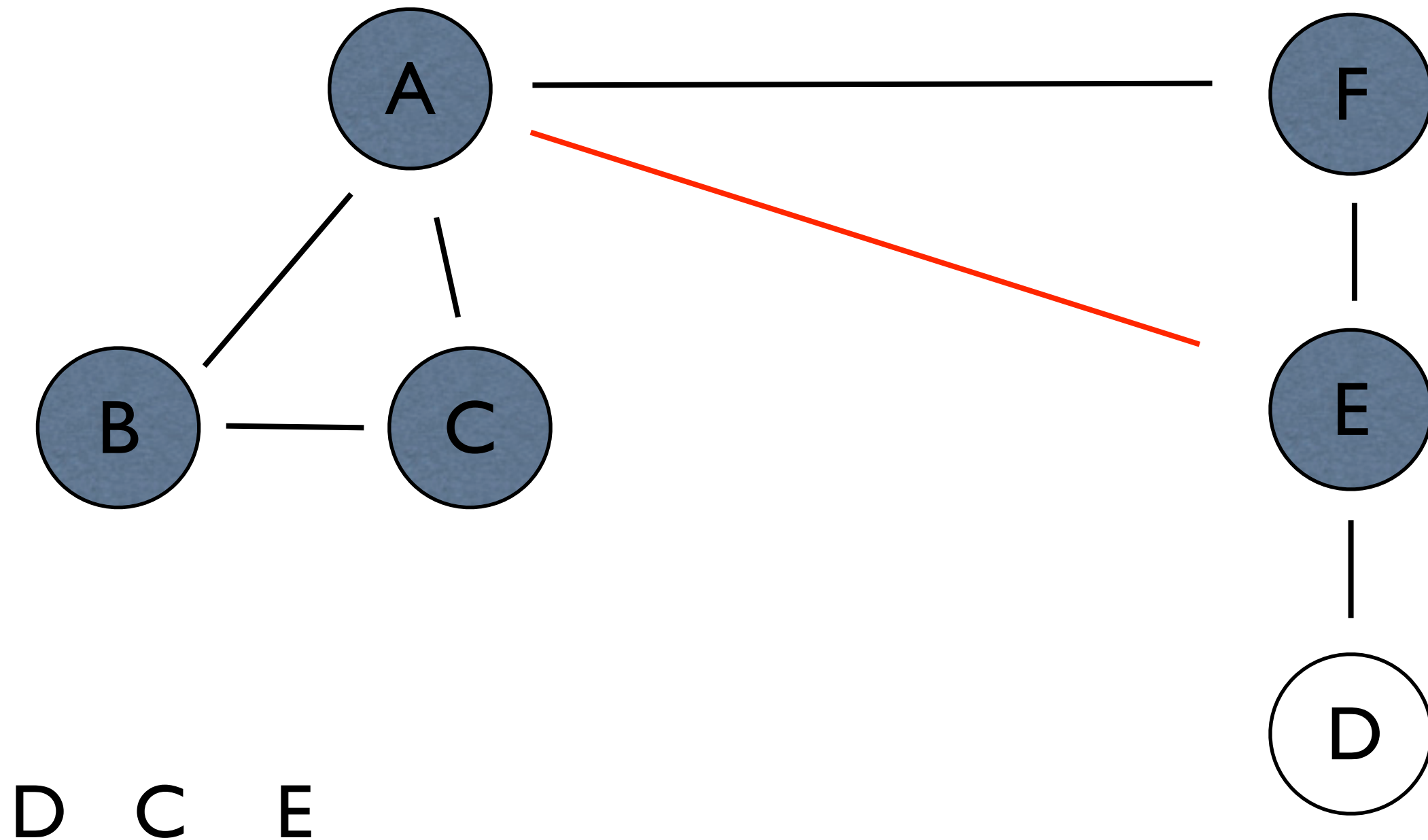
# Algoritmo de Fleury



# Algoritmo de Fleury

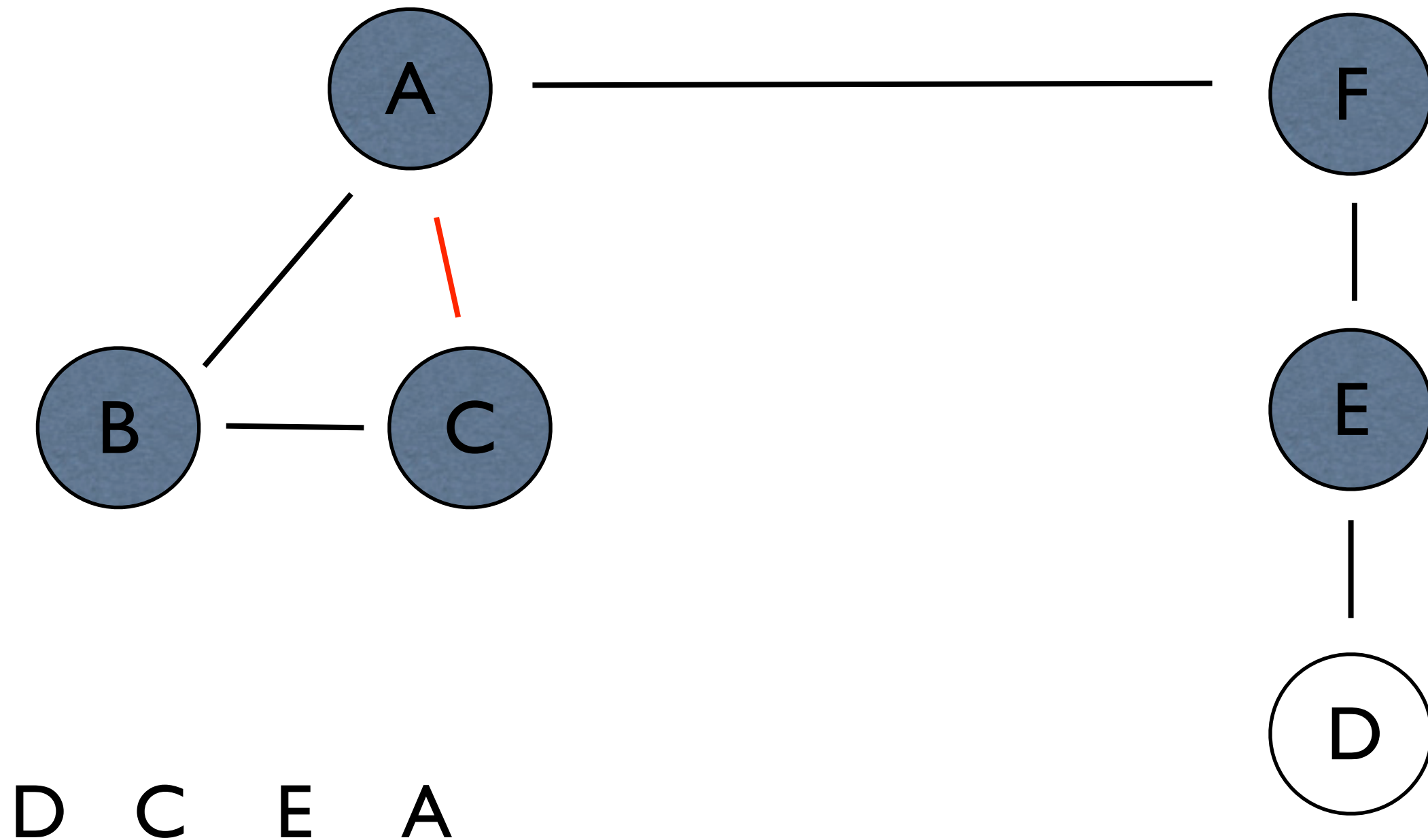


# Algoritmo de Fleury

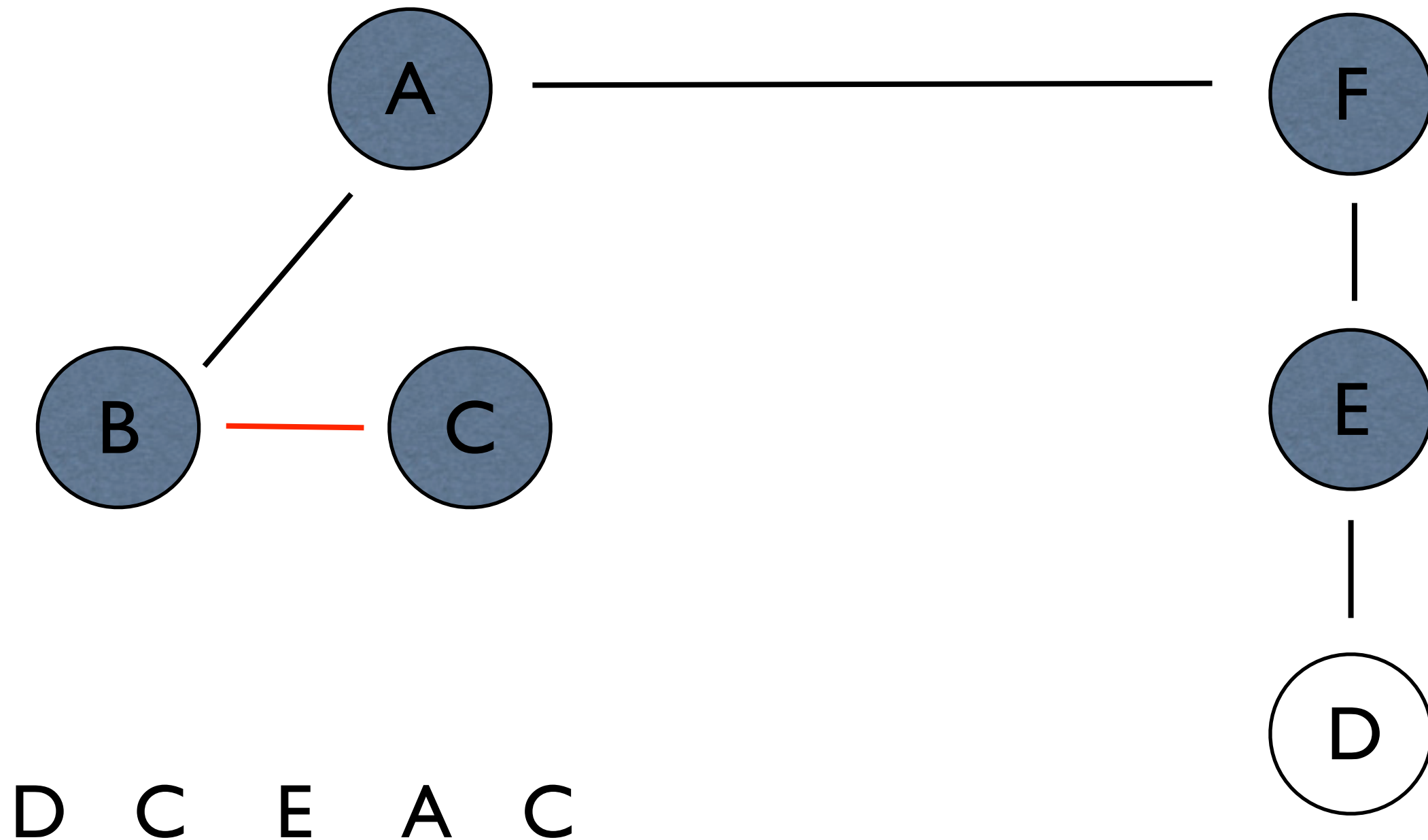




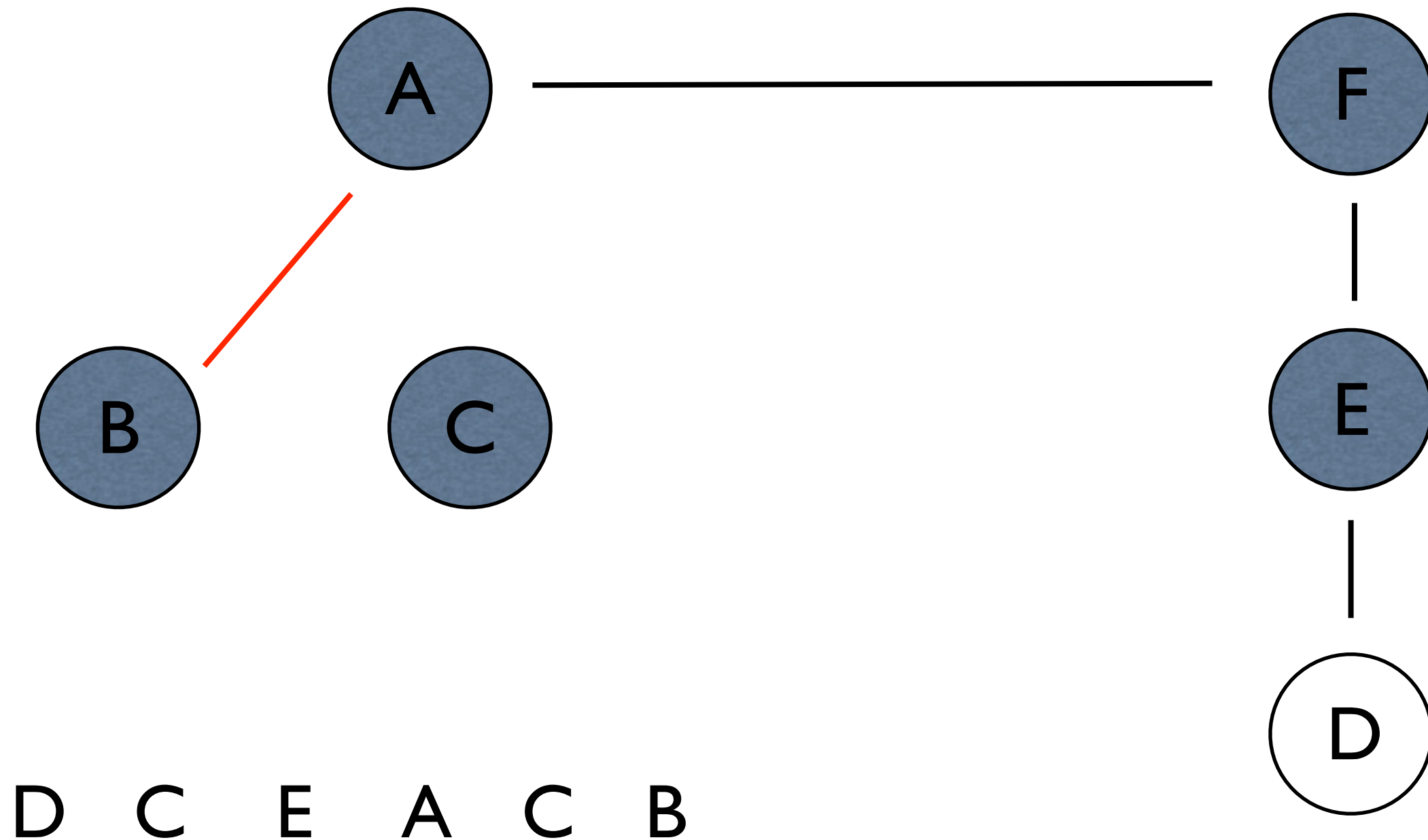
# Algoritmo de Fleury



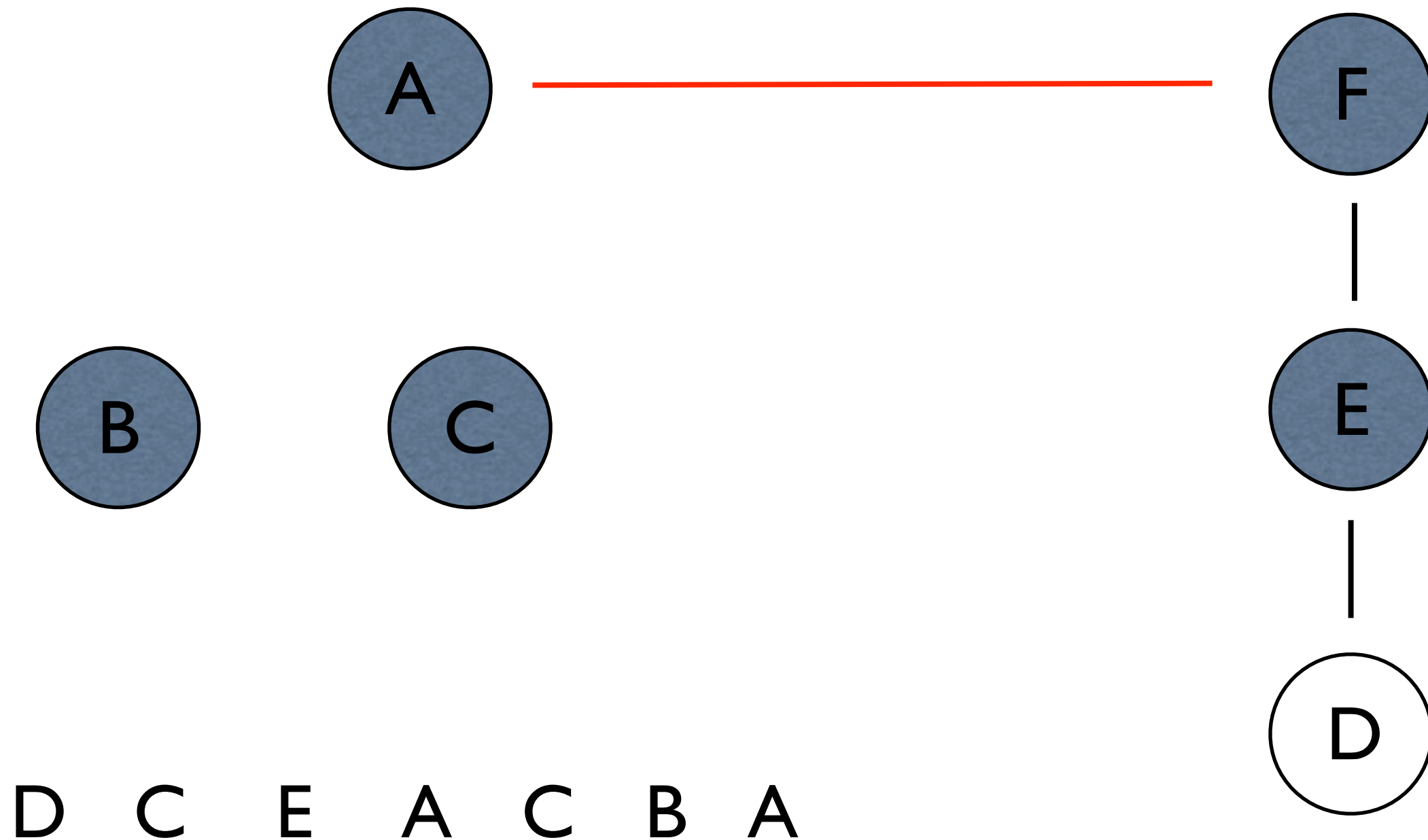
# Algoritmo de Fleury



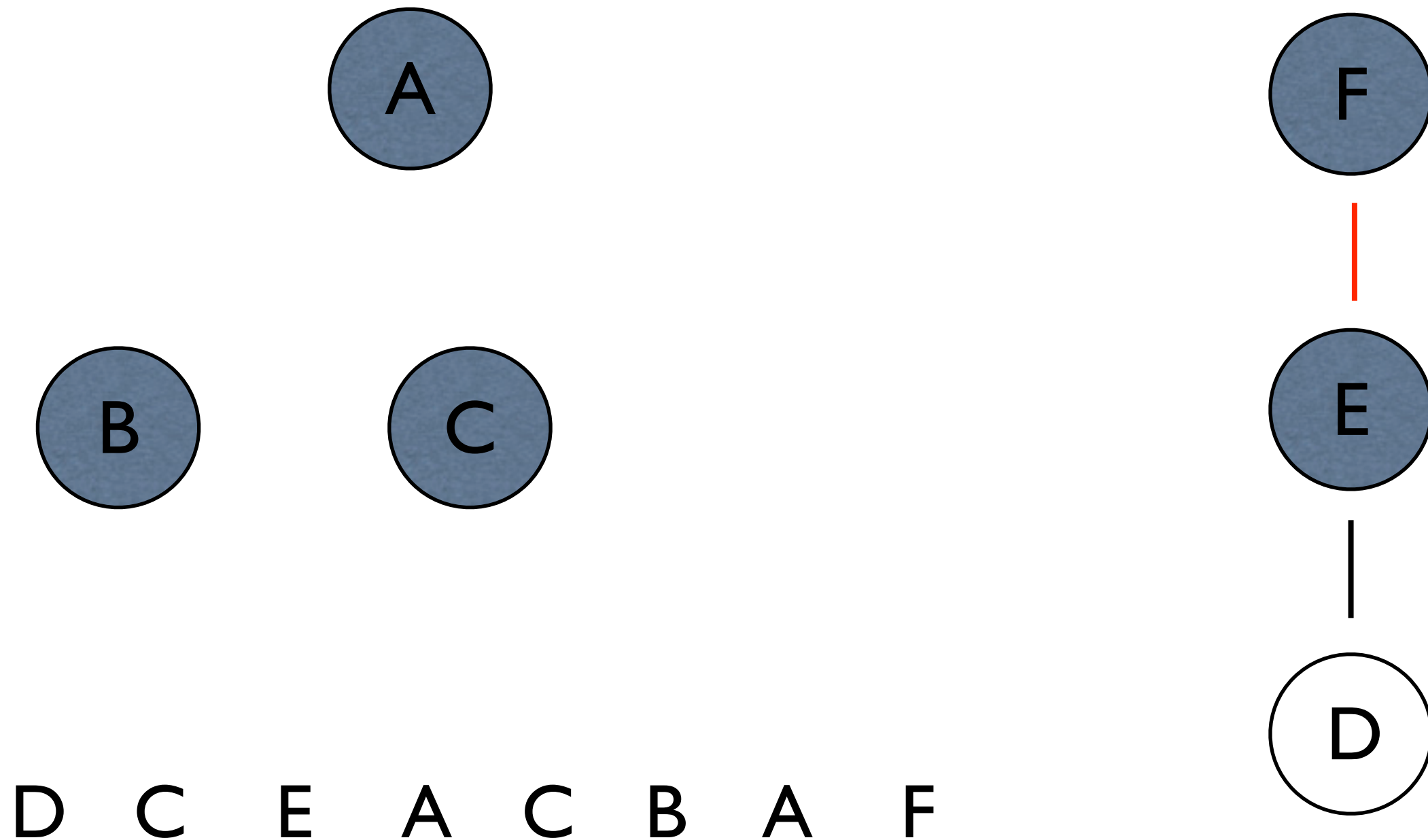
# Algoritmo de Fleury



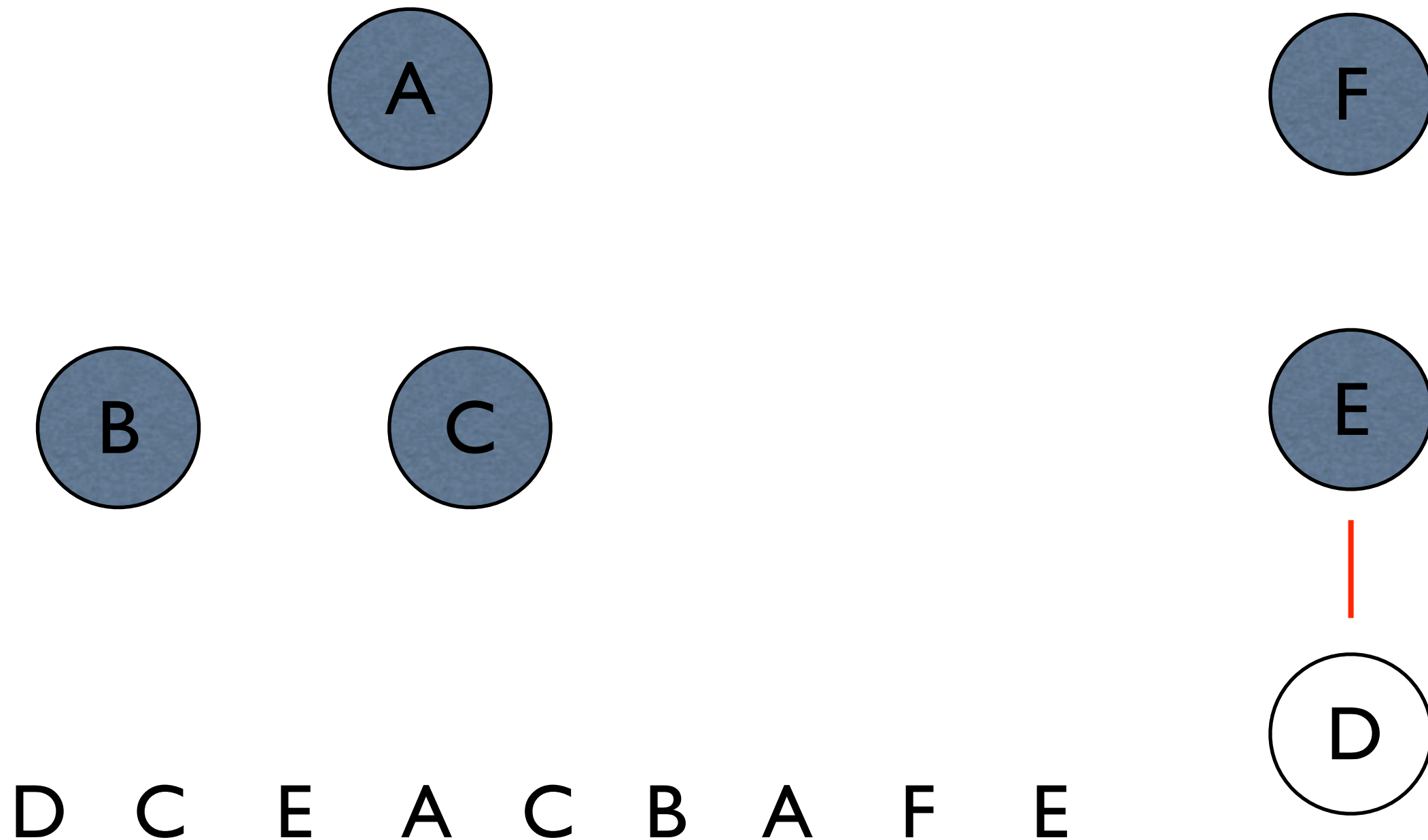
# Algoritmo de Fleury



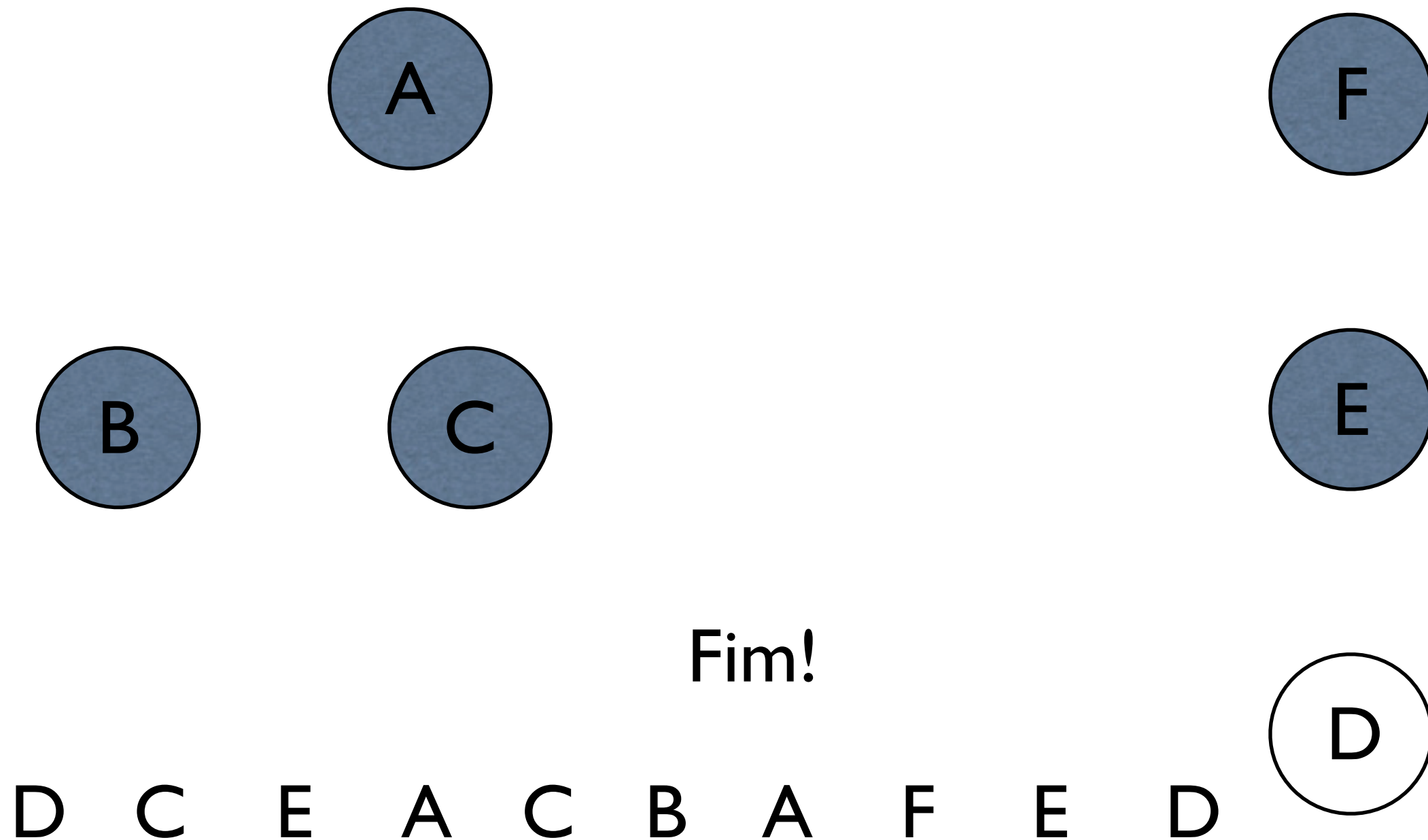
# Algoritmo de Fleury



# Algoritmo de Fleury



# Algoritmo de Fleury



# Algoritmo de Fleury

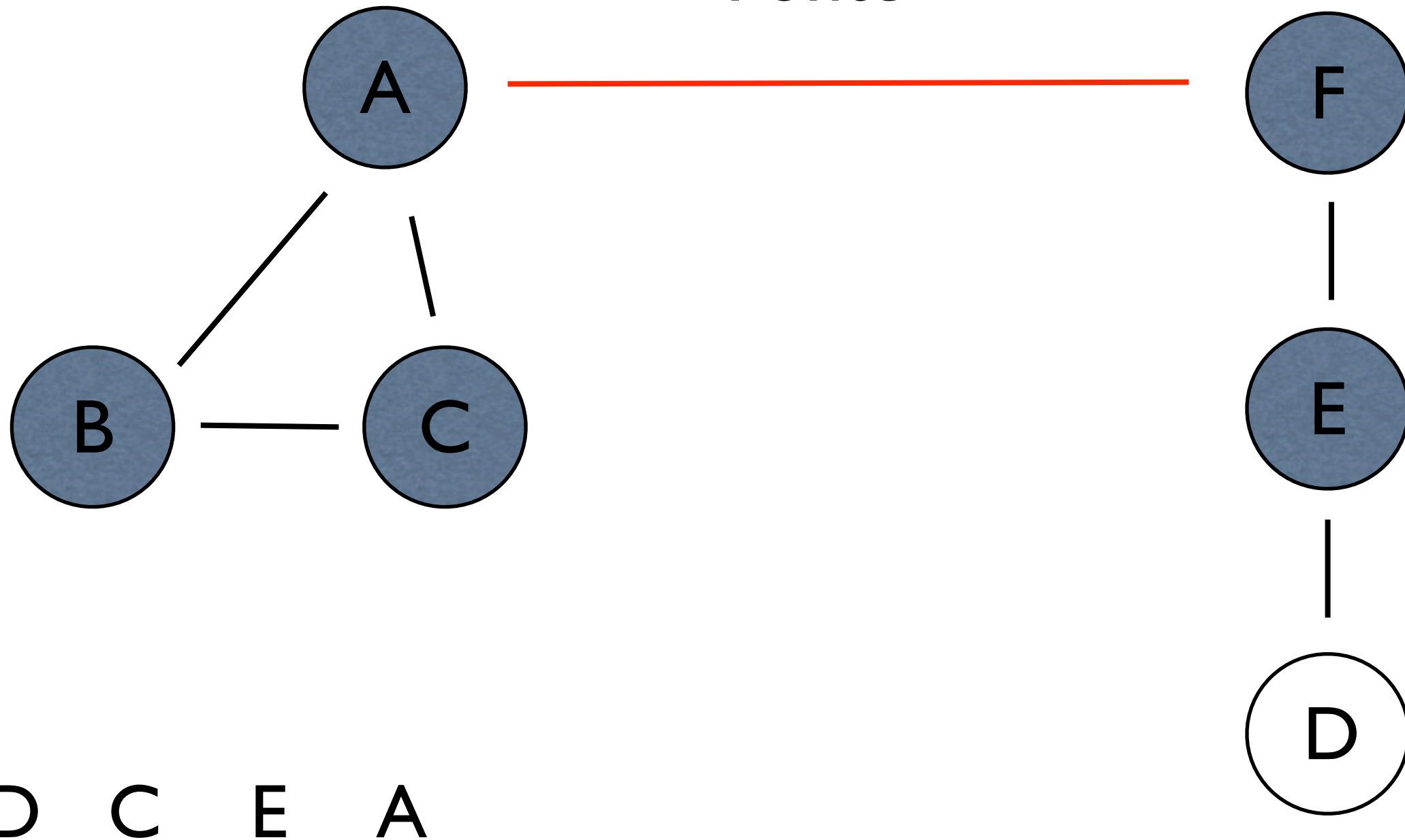
- De preferência, a aresta escolhida não deve ser uma ponte
- A escolha de uma ponte deve ser a última opção

E se escolhermos uma ponte como primeira opção?



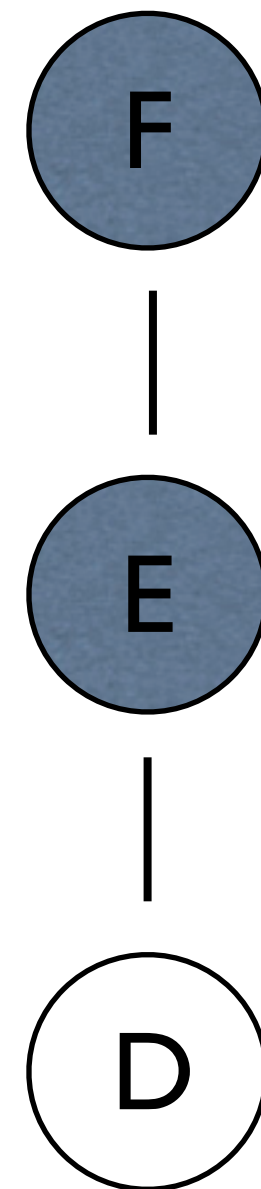
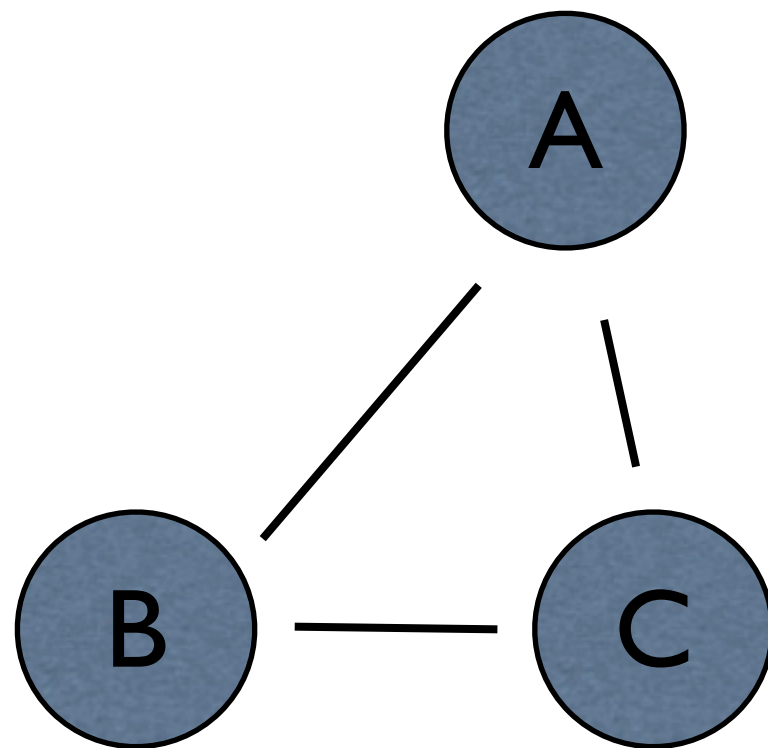
# Algoritmo de Fleury

Ponte



# Algoritmo de Fleury

Grafo Desconexo



Não há caminho de volta

D C E A F

# Algoritmo de Fleury

- De preferência, a aresta escolhida não deve ser uma ponte
- A escolha de uma ponte deve ser a última opção

# Algoritmo de Fleury

CiruitoEuleriano(u):

pos = 0

visita(u)

# Algoritmo de Fleury

visita(u):

  Enquanto vizinhos(u):

    v=vizinho(u)

    Se  $\text{grau}(u) == 1$  ou  $(\text{grau}(u) > 1 \text{ e não é ponte}(u,v))$ :

      remove(u,v)

      visita(v)

  circuito[pos++] = u

# Algoritmo de Fleury

visita(u):

Enquanto vizinhos(u):

$v = \text{vizinho}(u)$

Se  $\text{grau}(u) == 1$  ou  $(\text{grau}(u) > 1 \text{ e não é ponte}(u,v))$ :

$\text{circuito}[\text{pos}++] = u$

$\text{remove}(u,v)$

$u = v$

# Complexidade

- Fleury  $O(E^2)$ 
  - Percorrer o Grafo  $O(E)$
  - Para cada aresta, verificar pontes
  - Tarjan  $O(V+E)$

# Caminho Euleriano

- Seja um grafo  $G$  que possui apenas dois vértices de grau ímpar
- Como podemos encontrar um caminho euleriano qualquer?