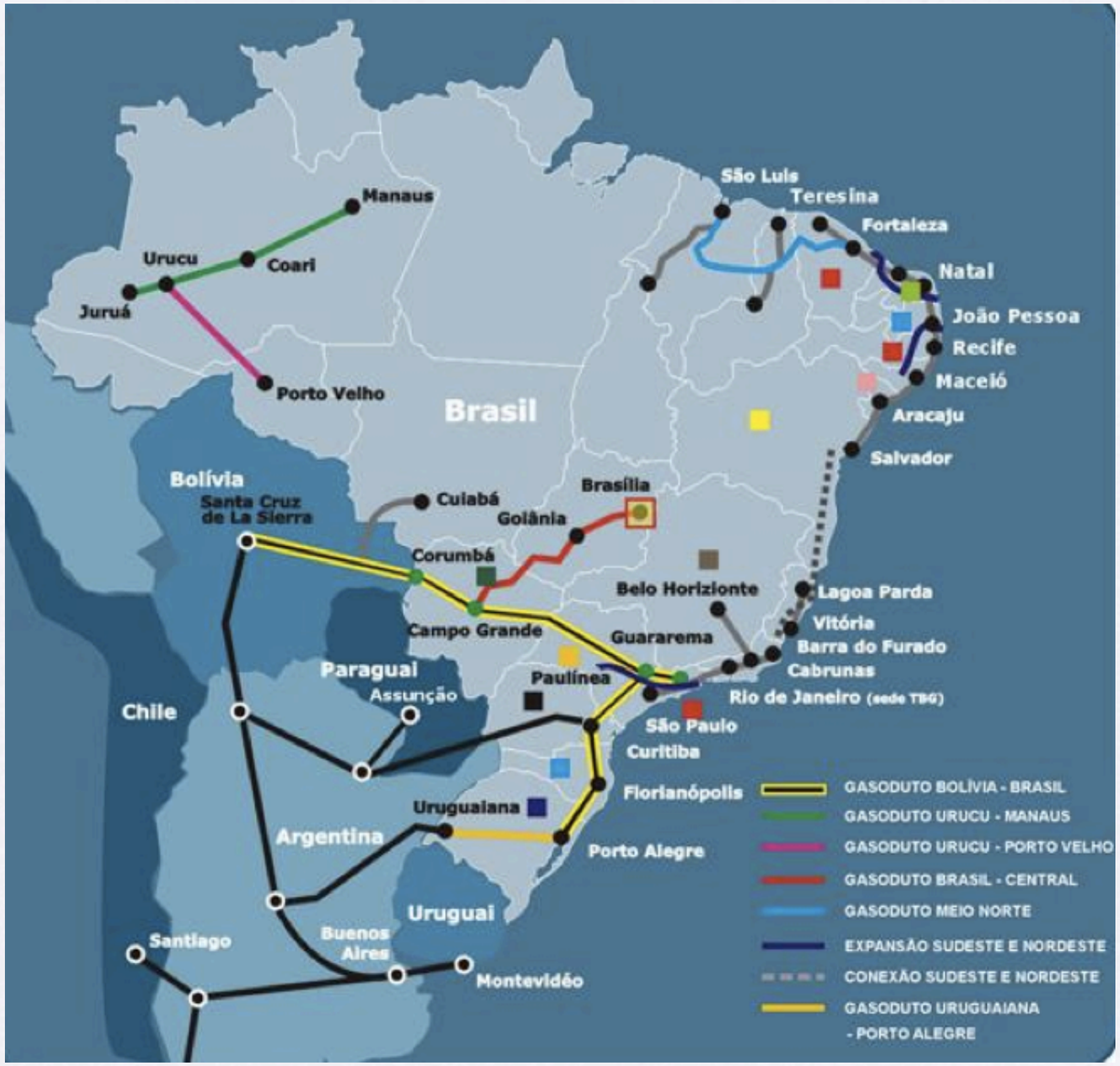
Redes de Fluxo

Leandro G. M. Alvim

(Baseado no livro do Tardos, do Cormen e nos slides de Humberto Brandão)

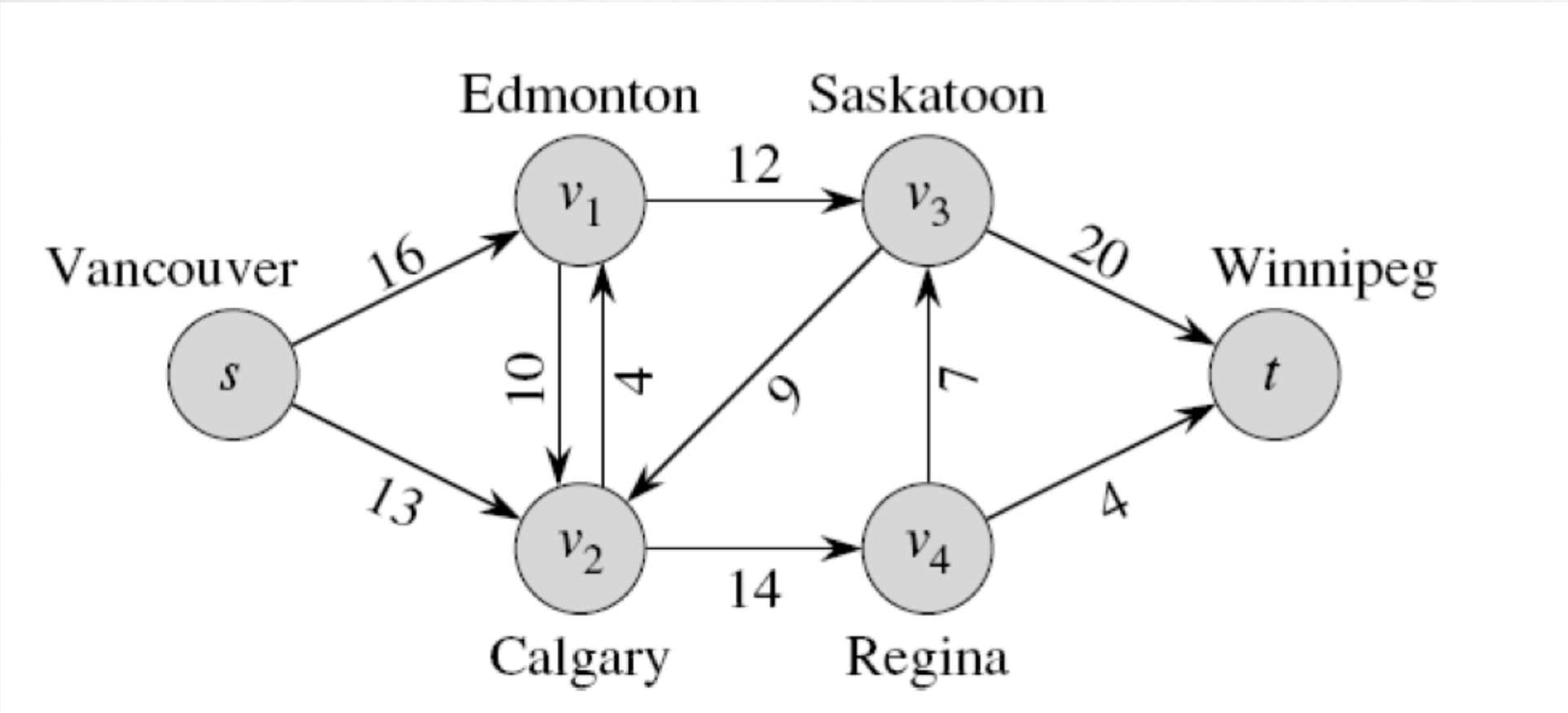
Fluxo Máximo

- O fluxo em um grafo pode ser interpretado como o fluxo de materiais



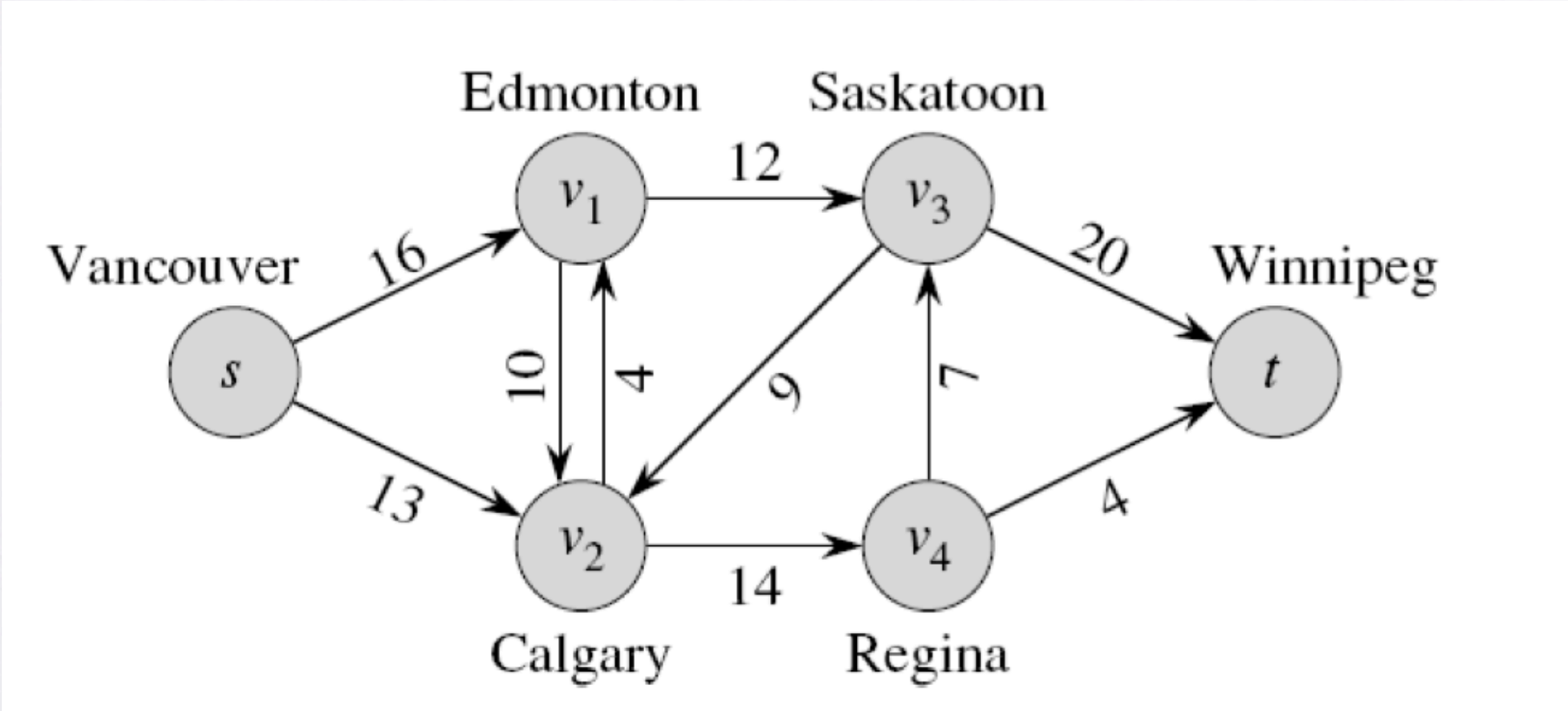
Fluxo Máximo

- Empresa fabrica discos em Vancouver
- Seu depósito é em Winnipeg
- Outra empresa aluga espaço em seus caminhões para transporte



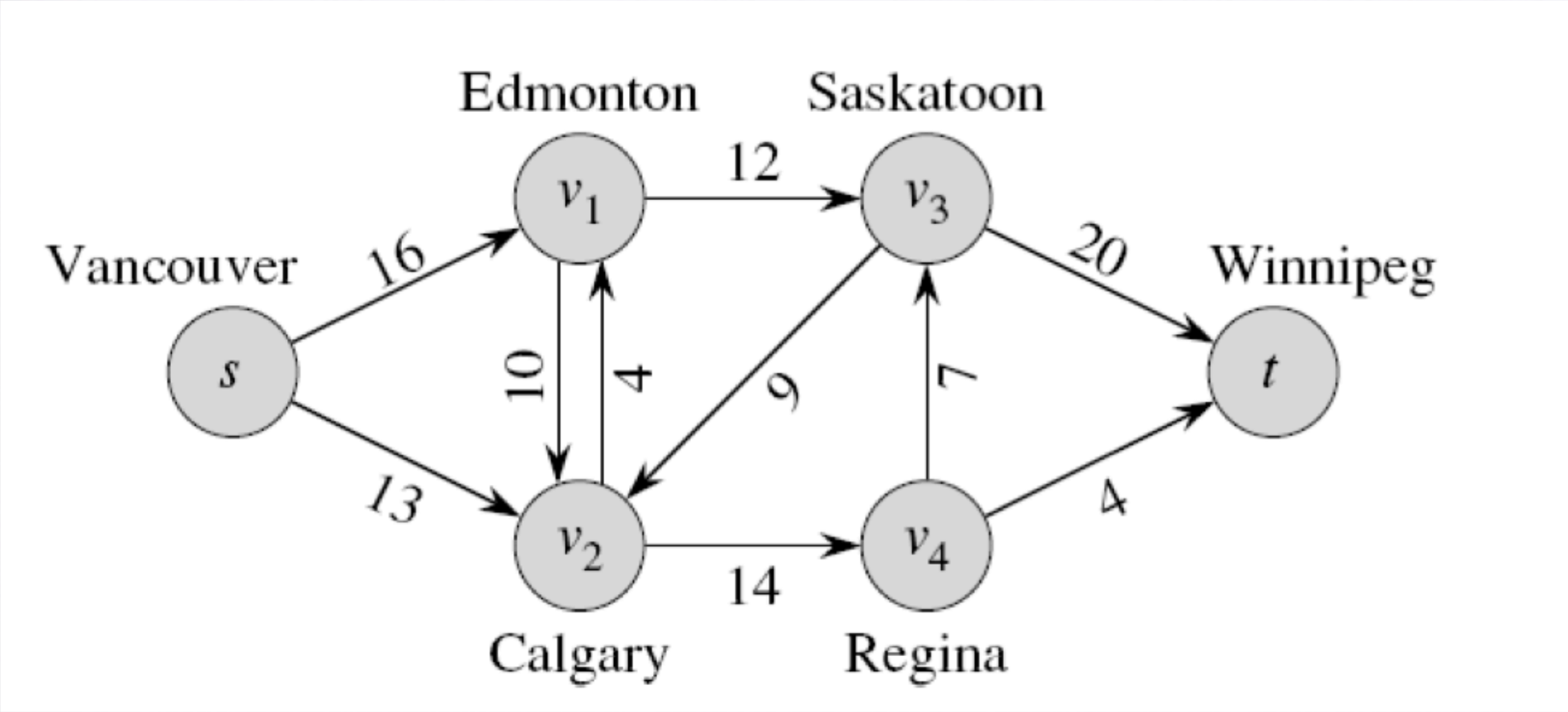
Fluxo Máximo

- Imagine caminhões carregando materiais por diversos caminhos em uma cidade desde uma **origem**, onde os materiais são produzidos até um **destino**, onde são consumidos.



Fluxo Máximo

- A origem produz material a uma taxa constante. O destino consome os materiais na mesma taxa.



Fluxo Máximo

- Problemas
  - Líquidos em tubos
  - Peças em linhas de montagem
  - Corrente por redes elétricas
  - Pacotes transmitidos em uma rede
  - Etc..

Fluxo Máximo

- Desejamos calcular a maior taxa na qual um material pode ser enviado desde a **origem** até o **destino** sem que seja violada qualquer **restrição de capacidade**, ou seja, sem que a rede seja sobrecarregada.

- Informação importante para a fabricação de material

  - Se um produto é produzido além da capacidade de envio, será necessário armazená-lo.

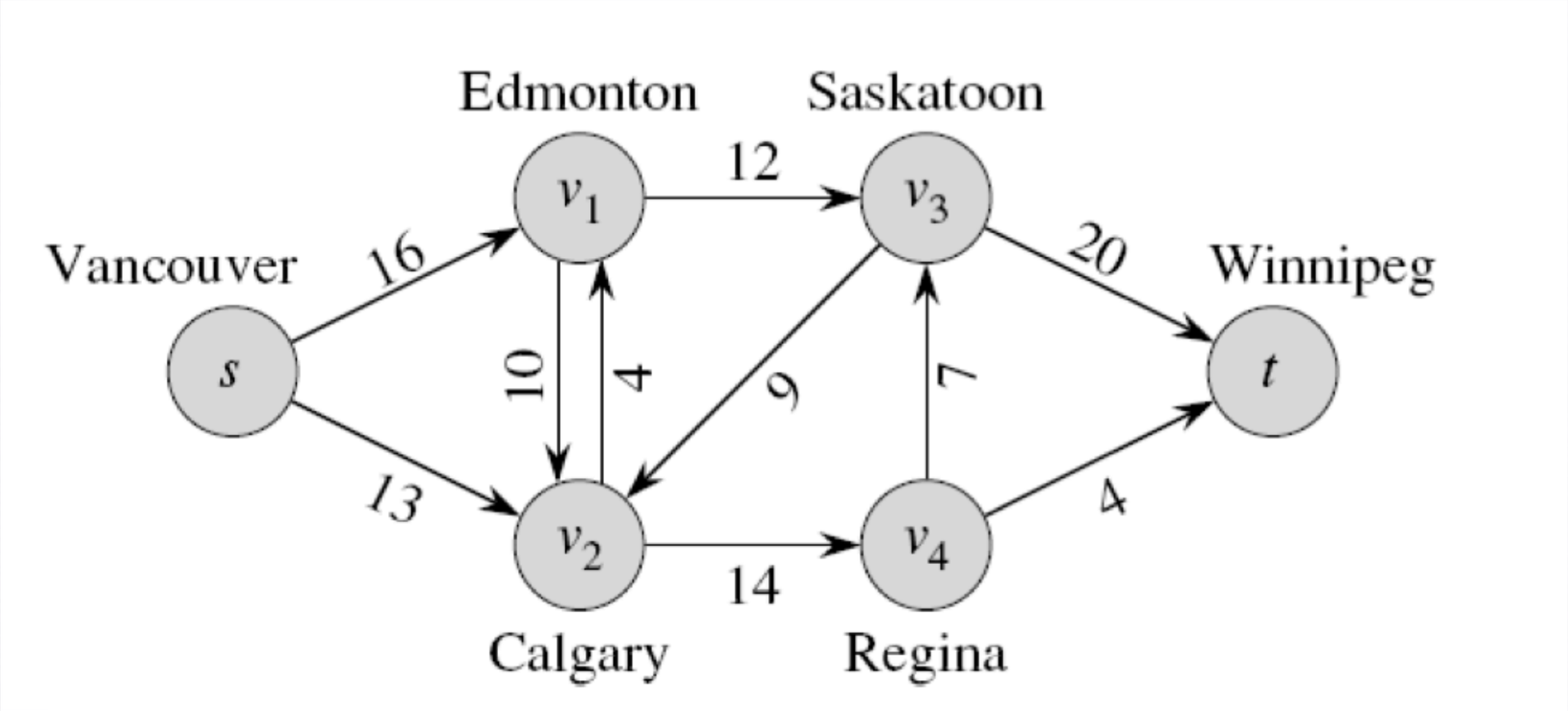
Fluxo Máximo

- Desejamos calcular a maior taxa na qual um material pode ser enviado desde a **origem** até o **destino** sem que seja violada qualquer **restrição de capacidade**, ou seja, sem que a rede seja sobrecarregada.

  - Numa rede de computadores, um envio constante de dados além dos que os roteadores podem suportar, pode acarretar em perda de pacotes depois da lotação dos seus *buffers*.

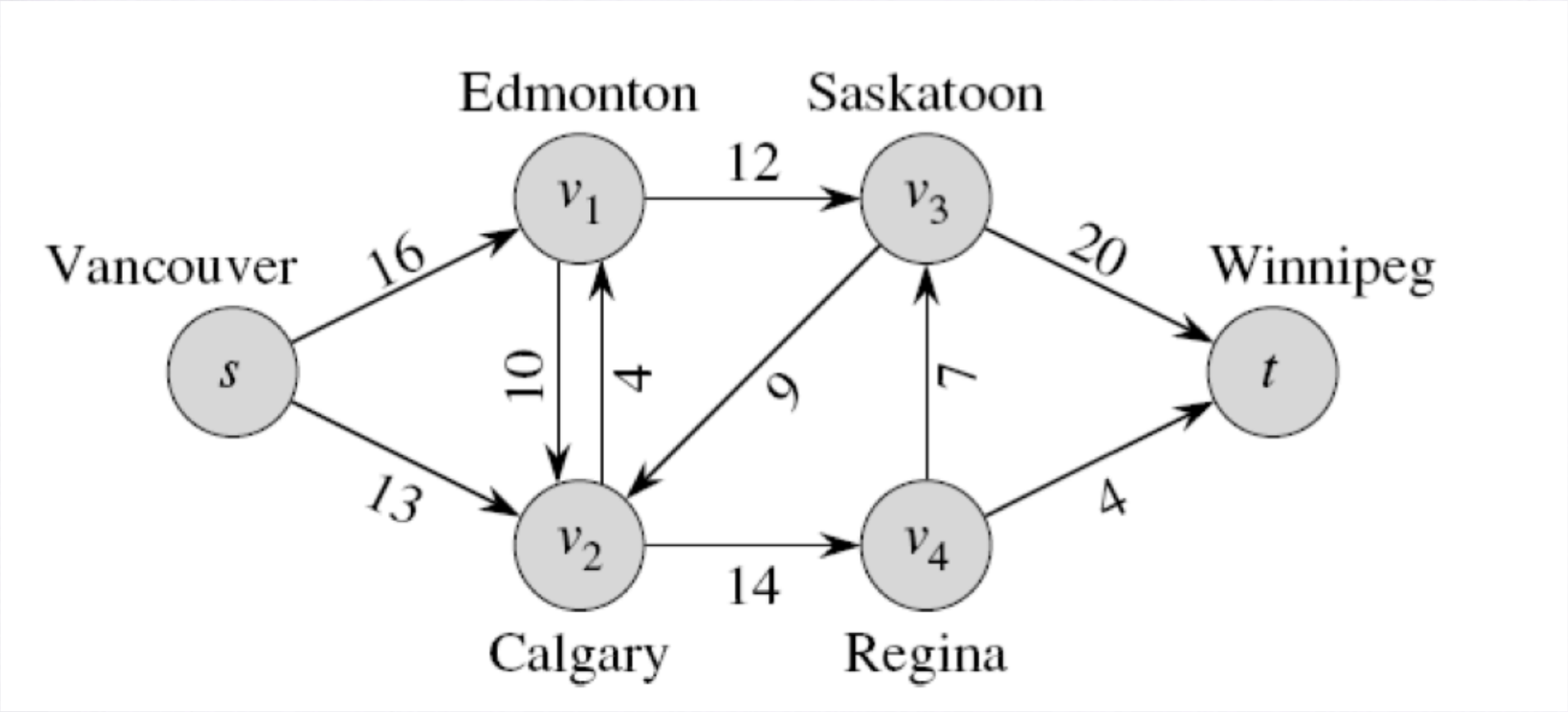
Representação

- Aresta
  - Um canal onde o material é transportado
  - Possui uma **capacidade** (ex. 200kbps, 100m3 de água/s, etc.)



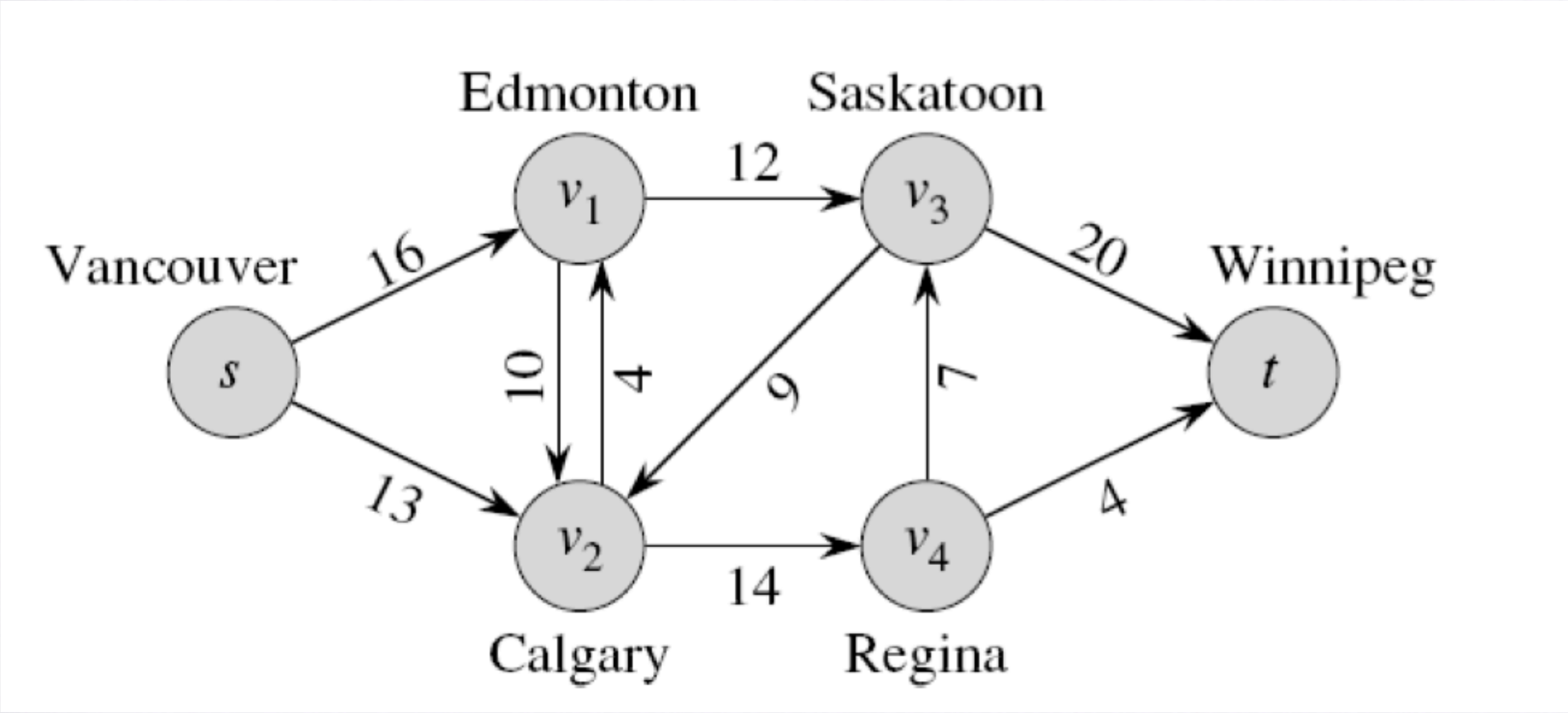
Representação

- Vértice
  - Junções dos canais, origem e destino (ex. roteadores, bifurcações elétricas, etc.)
  - **Não acumula material**



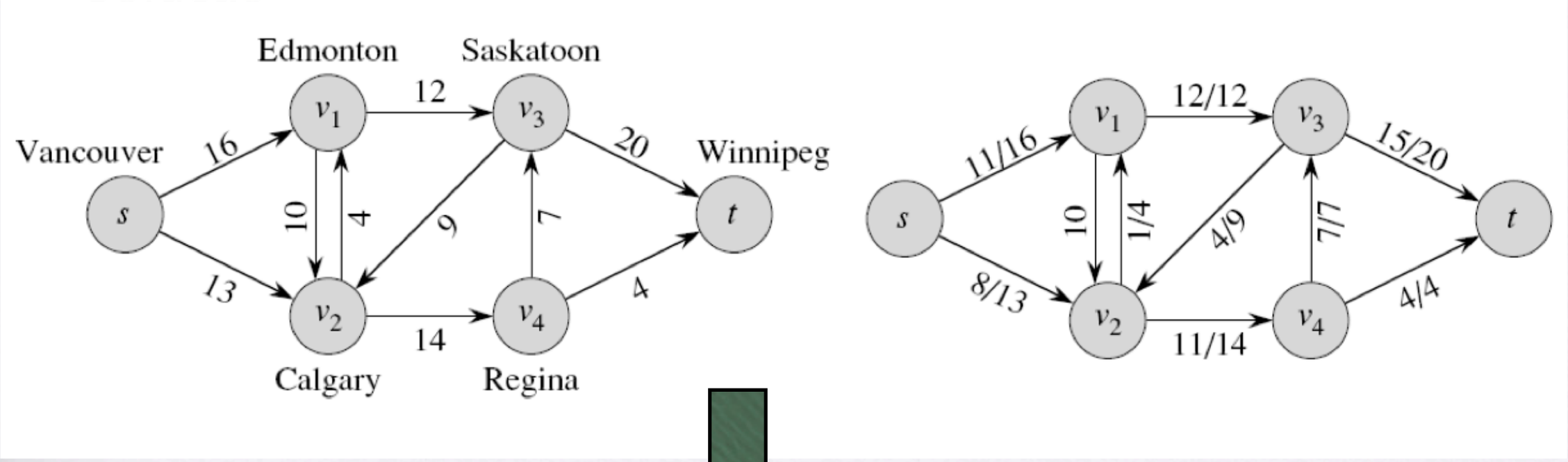
Desafio

- Encontre o fluxo máximo para o grafo



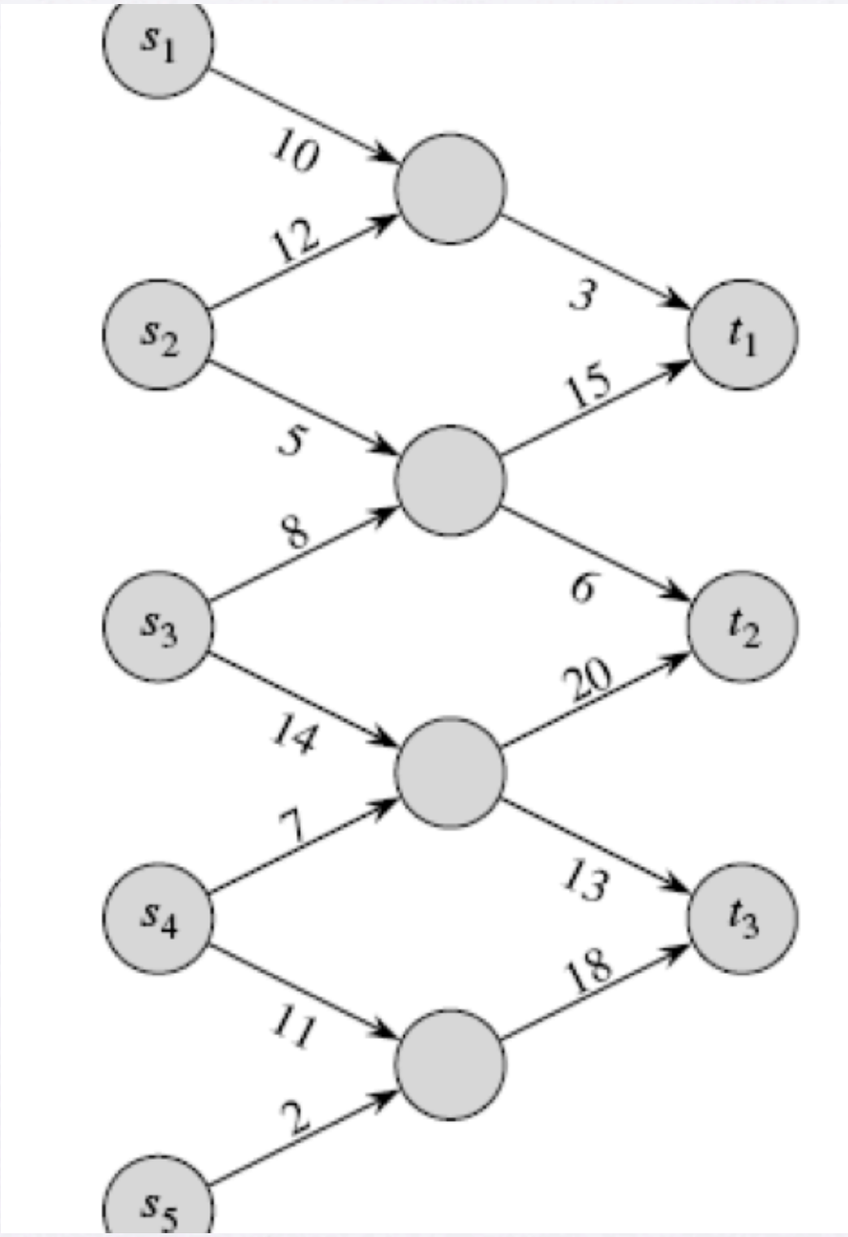
Desafio

- Solução



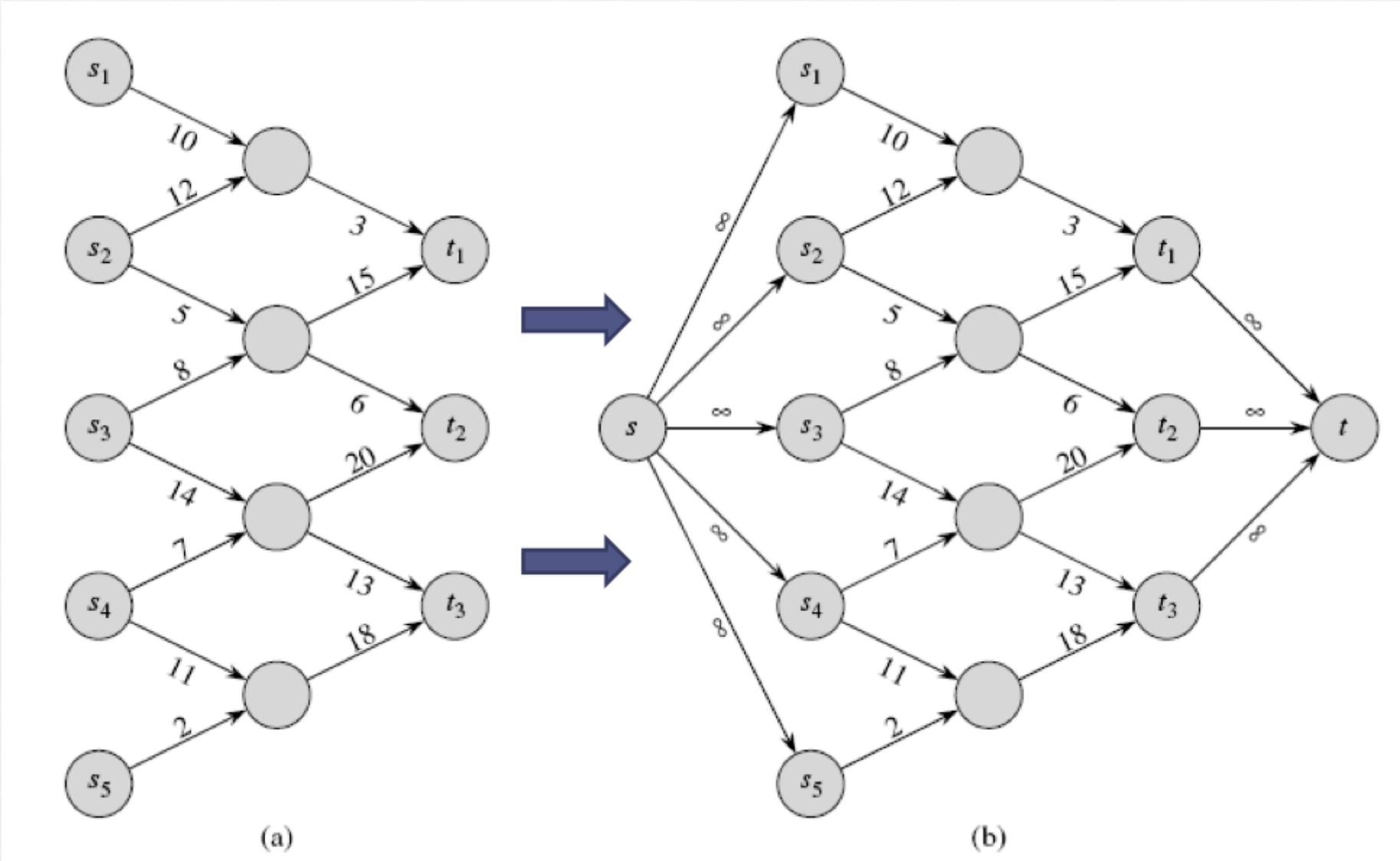
Desafio 2

- Várias fábricas e depósitos!



Desafio 2

- Solução



Definição Formal

- Um fluxo **s-t** é uma função **f: VxV -> R** que satisfaz as seguinte propriedades
  - **capacidade** $e \in E$: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
  - **conservação** $v \in V - \{s, t\}$: $\sum_{e \text{ in to } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$

Definição Formal

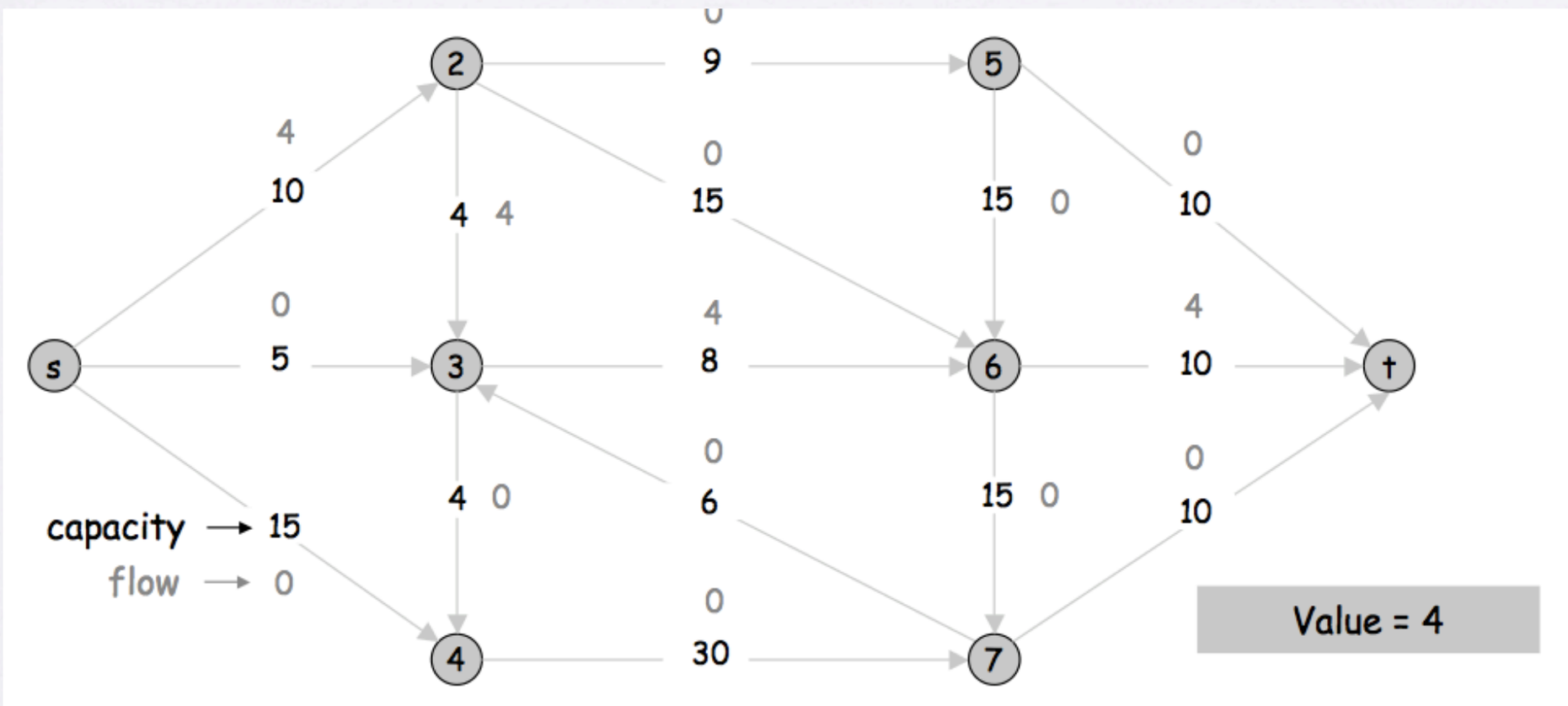
- Capacidade $e \in E$: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
  - Nenhuma aresta pode transportar mais que sua capacidade

Definição Formal

- Conservação $v \in V - \{s, t\}: \quad \sum_{e \text{ in to } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$
  - vértices não acumulam fluxo
  - vértices não são produtores de fluxo
  - vértices apenas repassam o fluxo

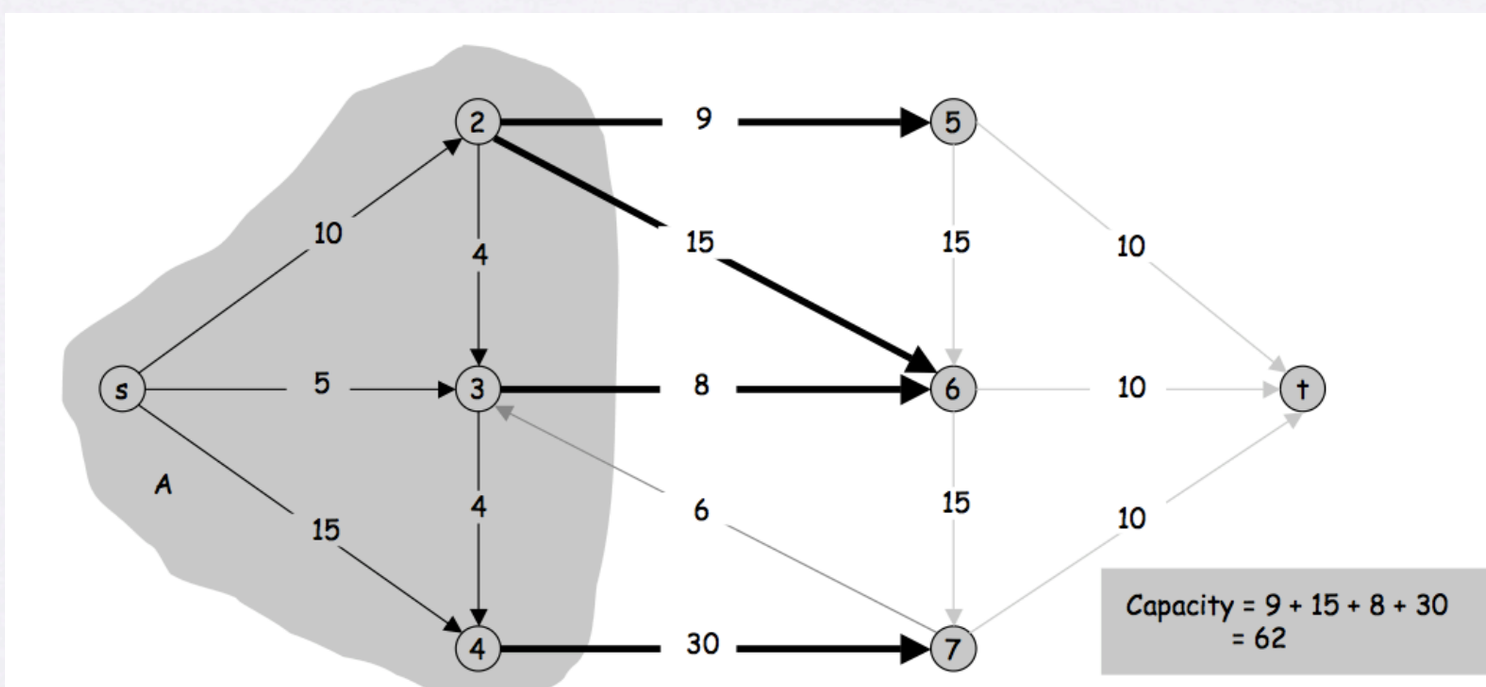
Definição Formal

- O valor do fluxo f $$v(f) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e) .$$



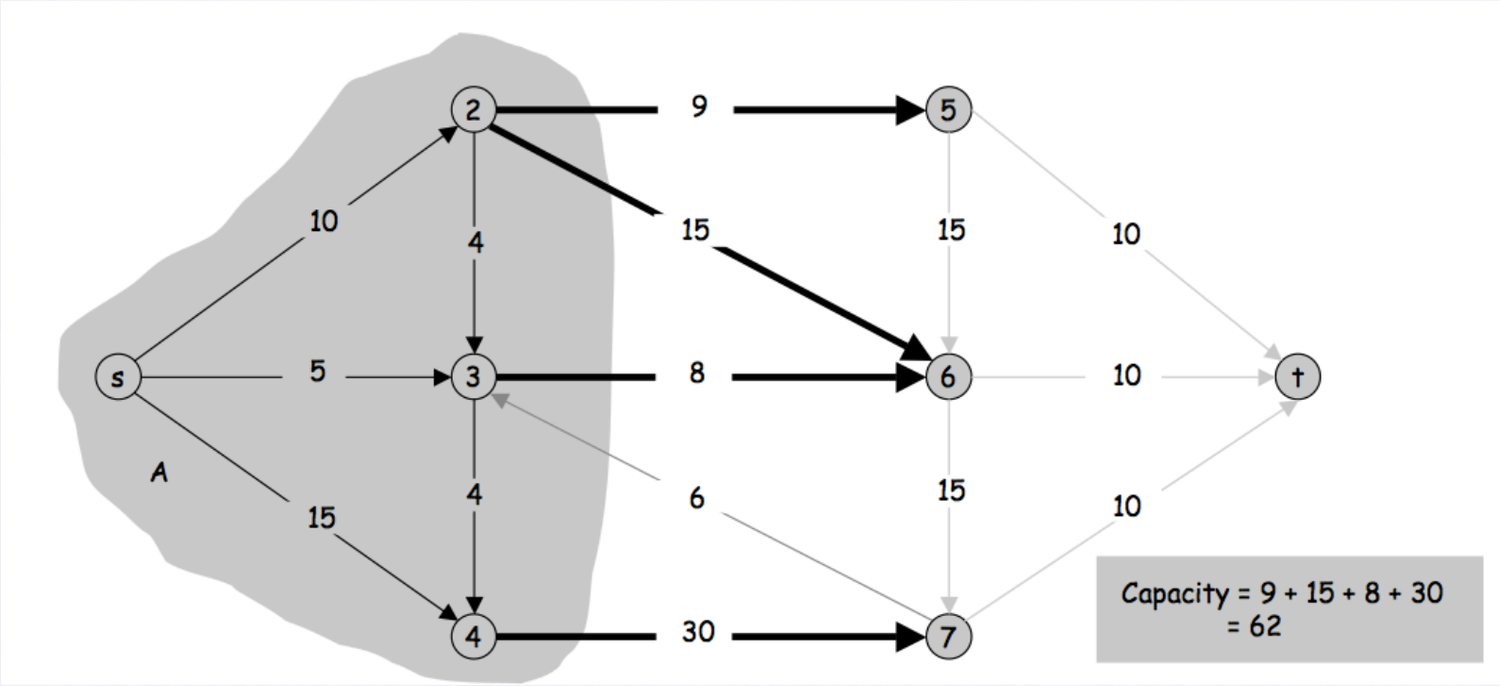
Problema do Corte Mínimo

- Corte s-t é uma partição (A,B) de V com $s \in A$ and $t \in B$
- A capacidade de um corte (A,B) é $cap(A, B) = \sum_{e \text{ out of } A} c(e)$



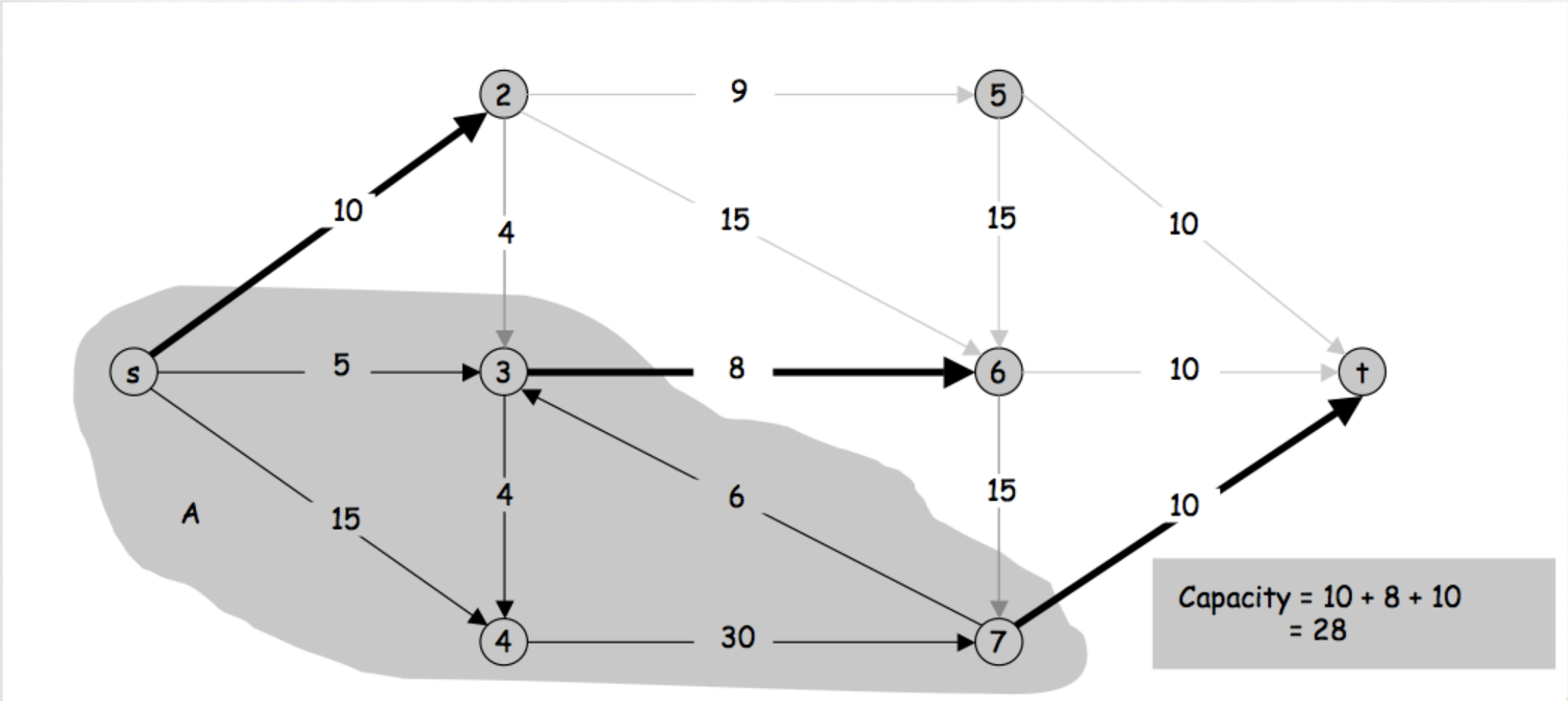
Problema do Corte Mínimo

- Queremos encontrar um corte s-t de capacidade mínima



Problema do Corte Mínimo

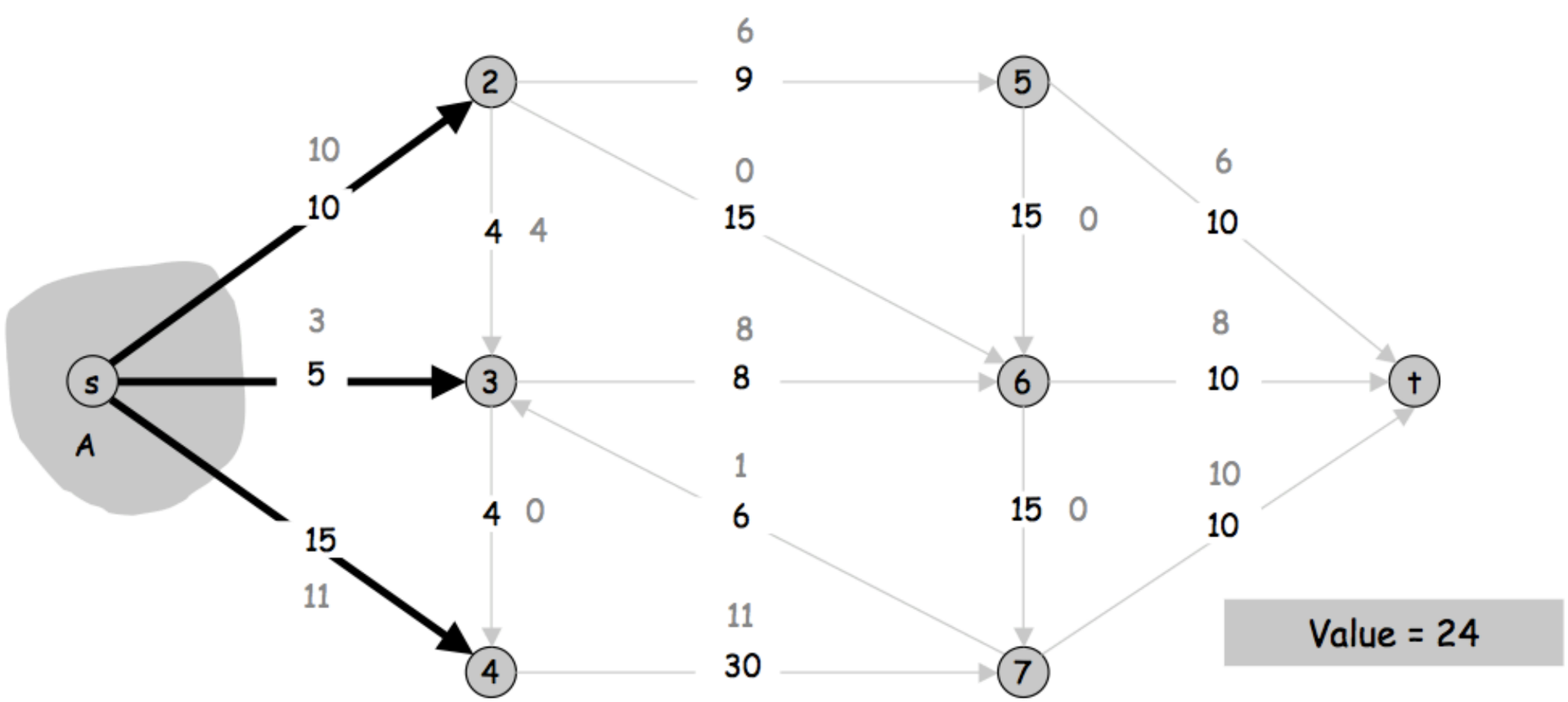
- Queremos encontrar um corte s-t de capacidade mínima



Fluxos e Cortes

Lema do fluxo. Seja f o fluxo e (A,B) um corte s-t qualquer. O fluxo do corte é igual ao que sai do vértice s.

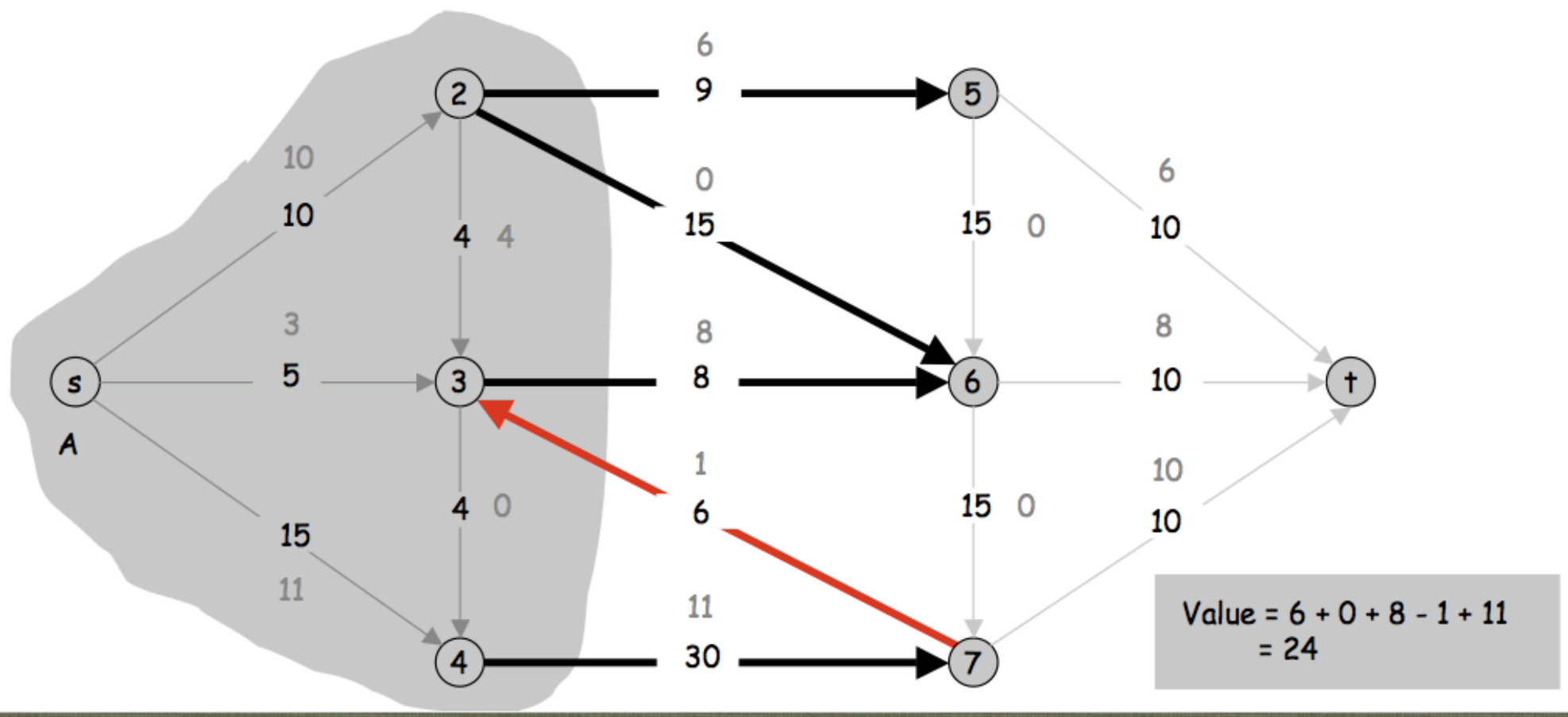
$$\sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to A}} f(e) = v(f)$$



Fluxos e Cortes

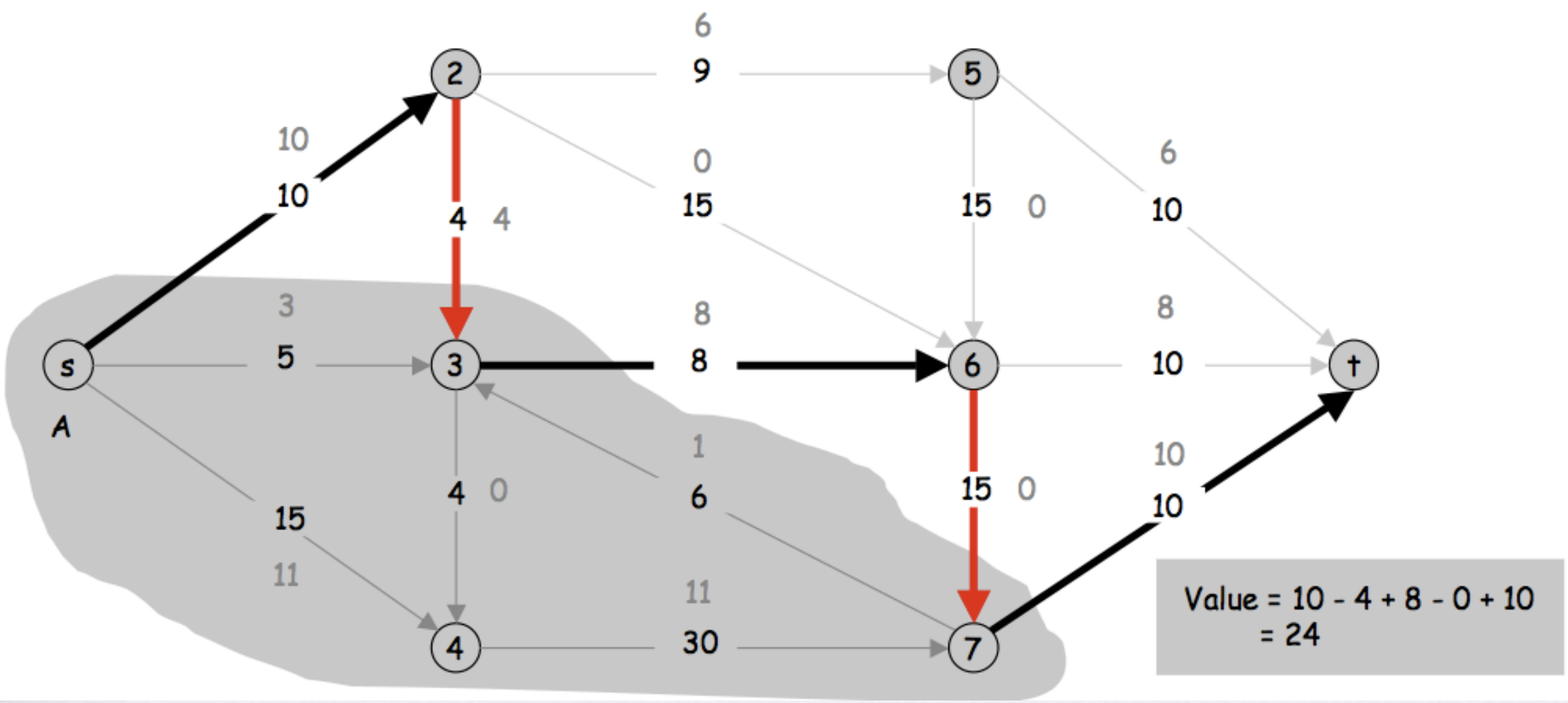
Lema do fluxo. Seja f o fluxo e (A,B) um corte s-t qualquer. O fluxo do corte é igual ao que sai do vértice s.

$$\sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to A}} f(e) = v(f)$$



Fluxos e Cortes

Lema do fluxo. Seja f o fluxo e (A,B) um corte s-t qualquer. O fluxo do corte é igual ao que sai do vértice s.



Fluxos e Cortes

Lema do fluxo. Seja f o fluxo e (A,B) um corte s-t qualquer. O fluxo do corte é igual ao que sai do vértice s.

$$\sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to } A} f(e) = v(f).$$

Pf.

$$v(f) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e)$$

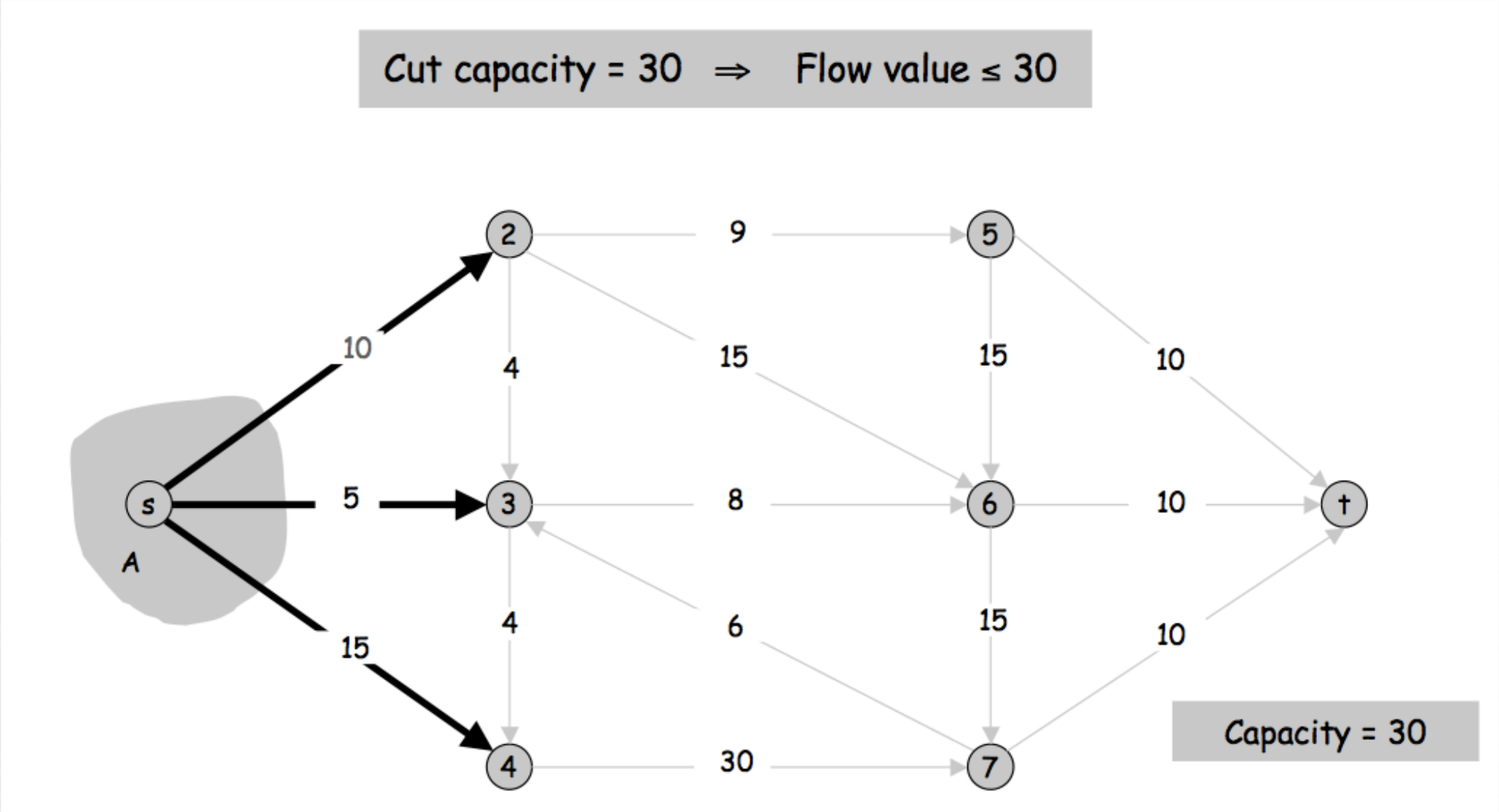
by flow conservation, all terms except v = s are 0 $\longrightarrow$

$$= \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \text{ out of } v} f(e) - \sum_{e \text{ in to v}} f(e) \right)$$

$$= \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to A}} f(e).$$

Fluxos e Cortes

Dualidade Fraca. Seja f um fluxo qualquer e (A,B) um corte s-t qualquer. O valor do fluxo é no máximo igual à capacidade do corte



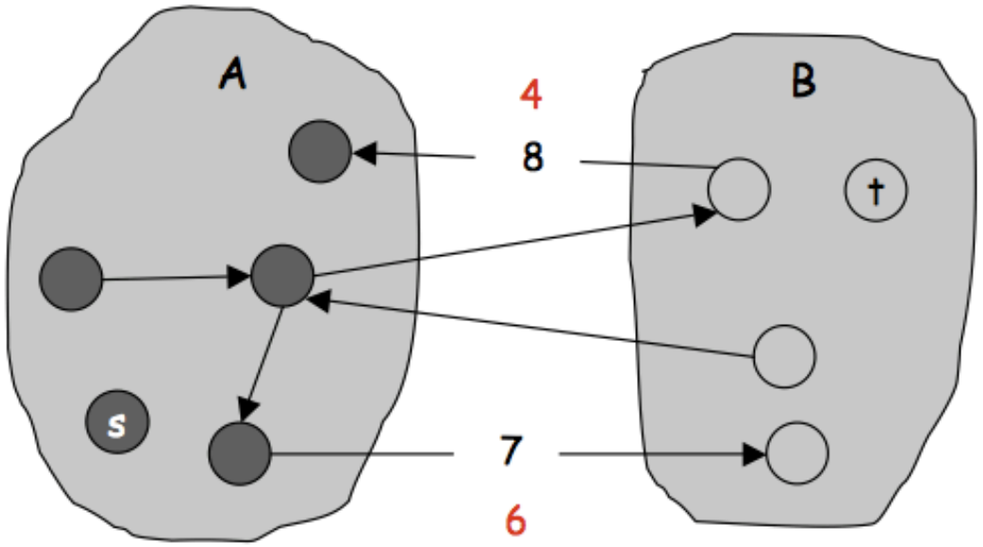
Fluxos e Cortes

Dualidade Fraca. Seja f um fluxo qualquer e (A,B) um corte s-t qualquer. O valor do fluxo é no máximo igual à capacidade do corte

$v(f) \leq cap(A, B)$.

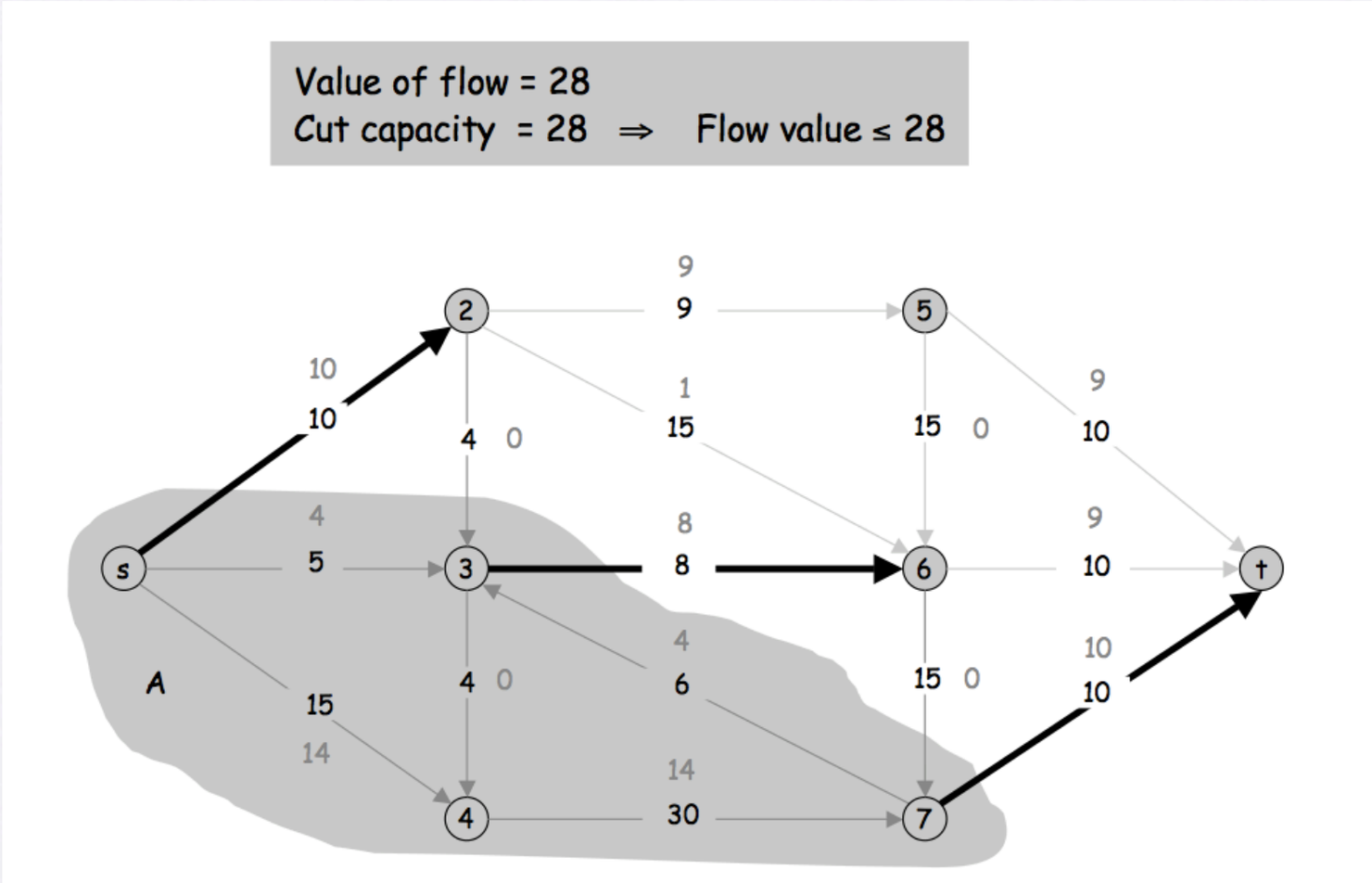
Pf.

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to } A} f(e) \\
&\leq \sum_{e \text{ out of } A} f(e) \\
&\leq \sum_{e \text{ out of } A} c(e) \\
&= \text{cap}(A, B) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$



Certificado de Otimalidade

Corolário. Seja f um fluxo qualquer e (A,B) um corte s-t qualquer. Se v(f)=cap(A,B), então f é um fluxo máximo e (A,B) um corte mínimo

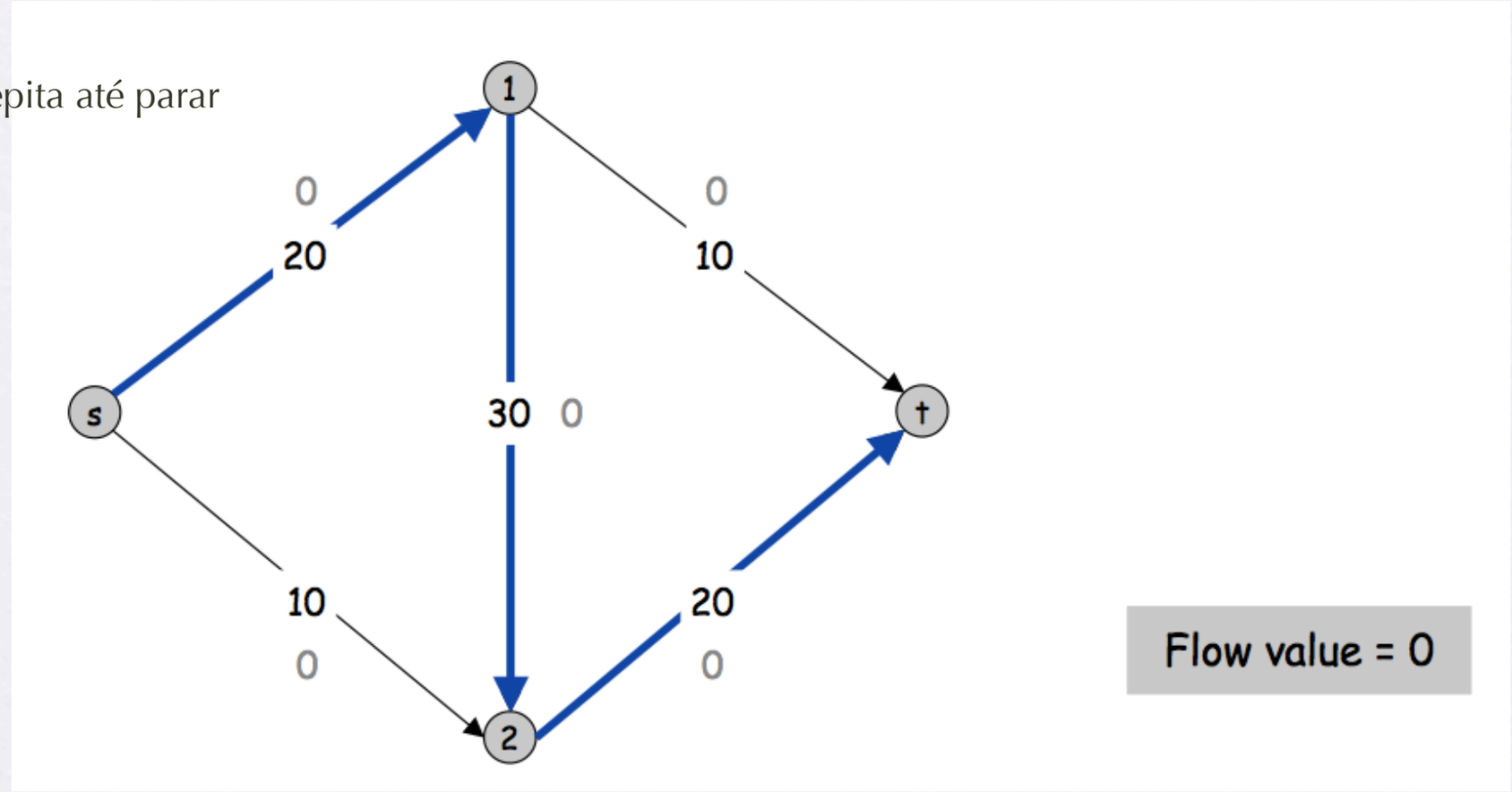


Algoritmos

- Não-ótimo
  - Guloso
- Ótimo
  - Ford-Fulkerson
  - Edmonds-Karp
  - Push-Relabel

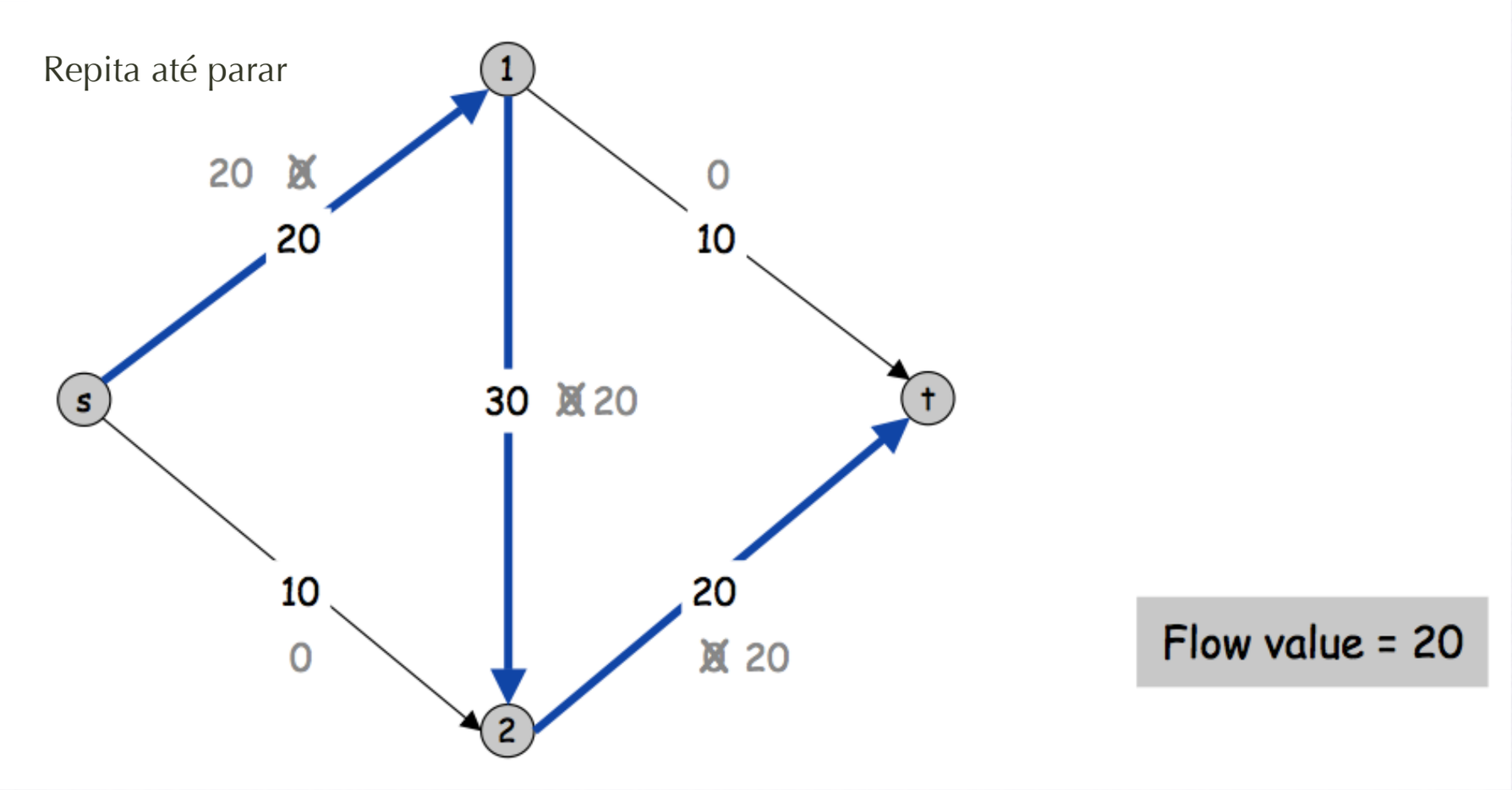
Guloso

- Comece com f(e) = 0 para todas as arestas $e \in E$.
- Encontre um caminho P s-t em que cada aresta respeita f(e) < c(e)
- Aumente o fluxo pelo caminho P
- Repita até parar



Guloso

- Comece com f(e) = 0 para todas as arestas $e \in E$.
- Encontre um caminho P s-t em que cada aresta respeita f(e) < c(e)
- Aumente o fluxo pelo caminho P
- Repita até parar

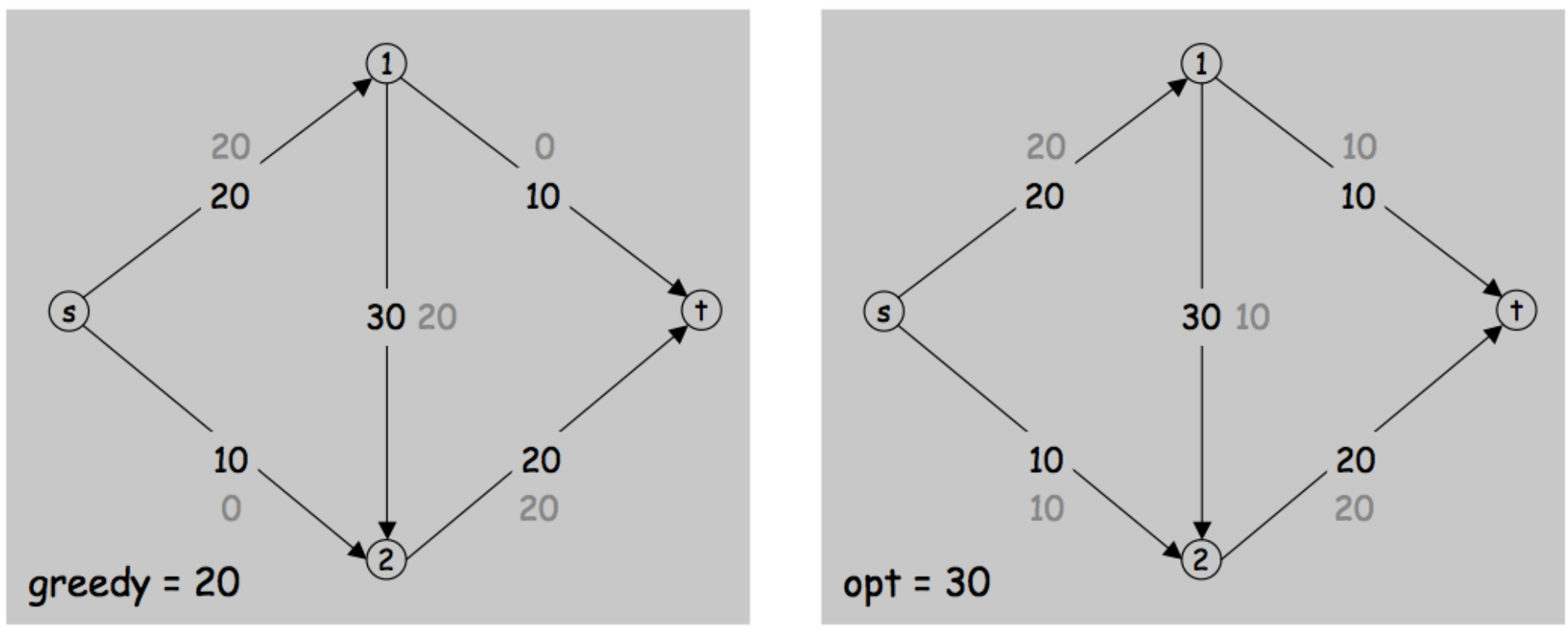


Algoritmos

- Não-ótimo
  - Guloso
- Ótimo
  - Ford-Fulkerson
  - Edmonds-Karp
  - Push-Relabel

Guloso

- Comece com f(e) = 0 para todas as arestas $e \in E$.
- Encontre um caminho P s-t em que cada aresta respeita f(e) < c(e)
- Aumente o fluxo pelo caminho P
- Repita até **parar**



Ótimo local

Ótimo global

Redes Residuais

- Arestas que podem admitir mais fluxo
- Seja f um fluxo em G, e considere um par de vértices u,v e V
    - A quantidade de fluxo adicional que podemos empurrar de u para v antes de exceder a capacidade c(u,v) é a **capacidade residual**

Redes Residuais

- Capacidade residual
- Exemplo
  - Capacidade de a para b é de 10Kbps
  - Estamos utilizando 2Kbps
  - Então, a capacidade residual é de 8Kbps

Redes Residuais

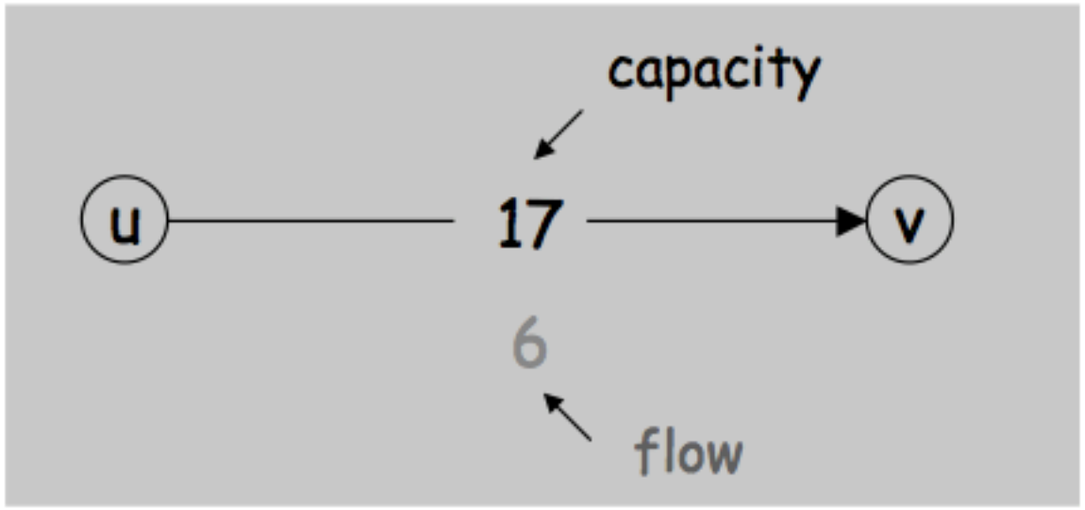
- Capacidade residual

$$c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{if } e \in E \\ f(e) & \text{if } e^R \in E \end{cases}$$

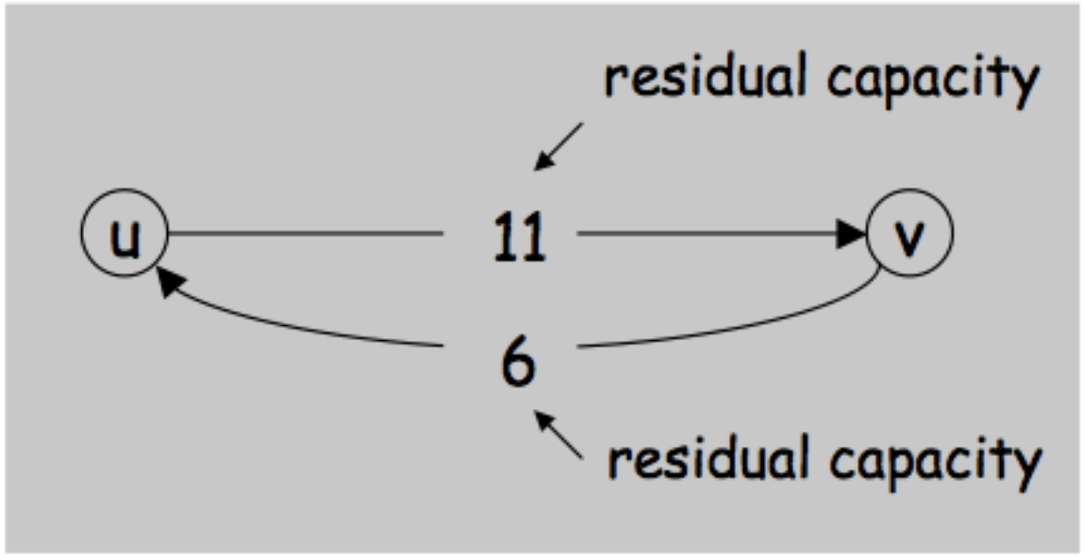
- Rede residual

$$G_f = (V, E_f).$$

$$E_f = \{e : f(e) < c(e)\} \cup \{e^R : f(e) > 0\}.$$

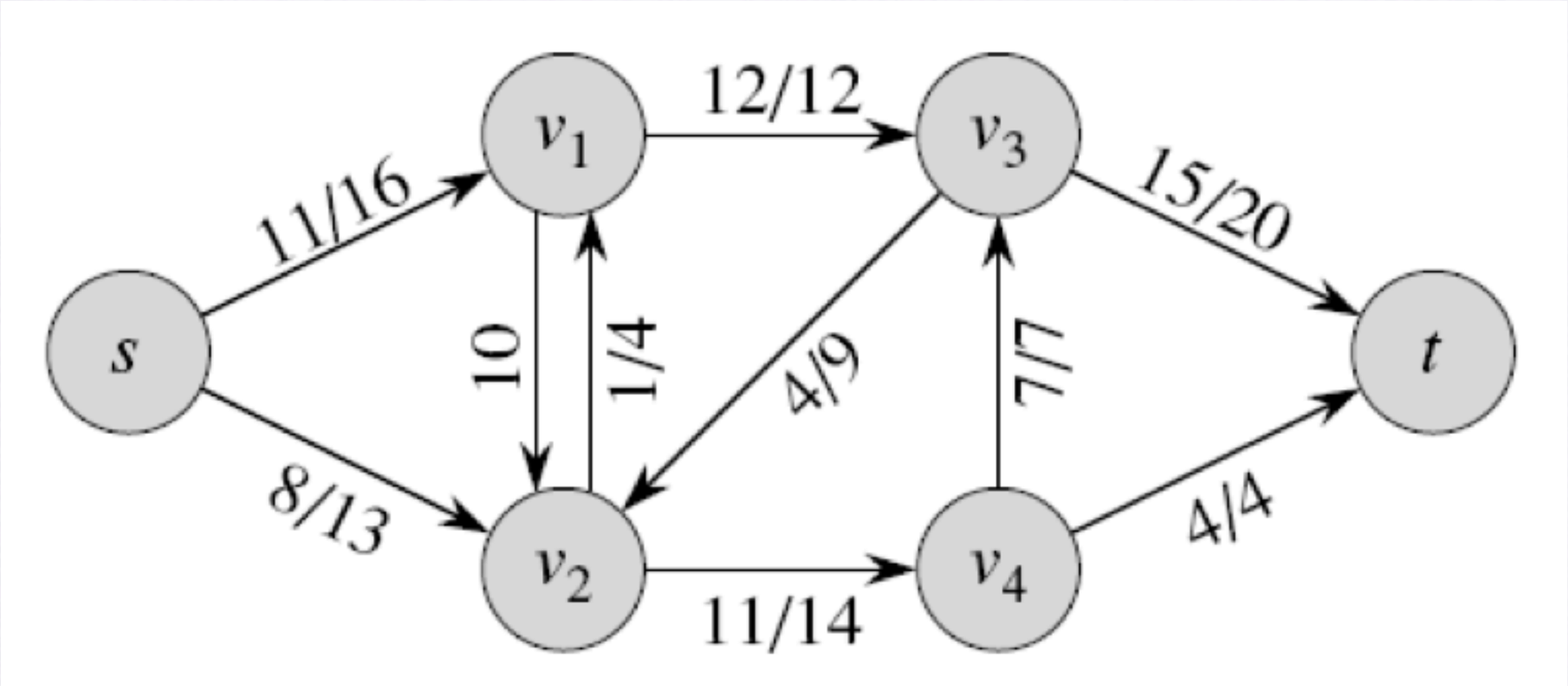


$e = (u, v)$ and $e^R = (v, u)$.



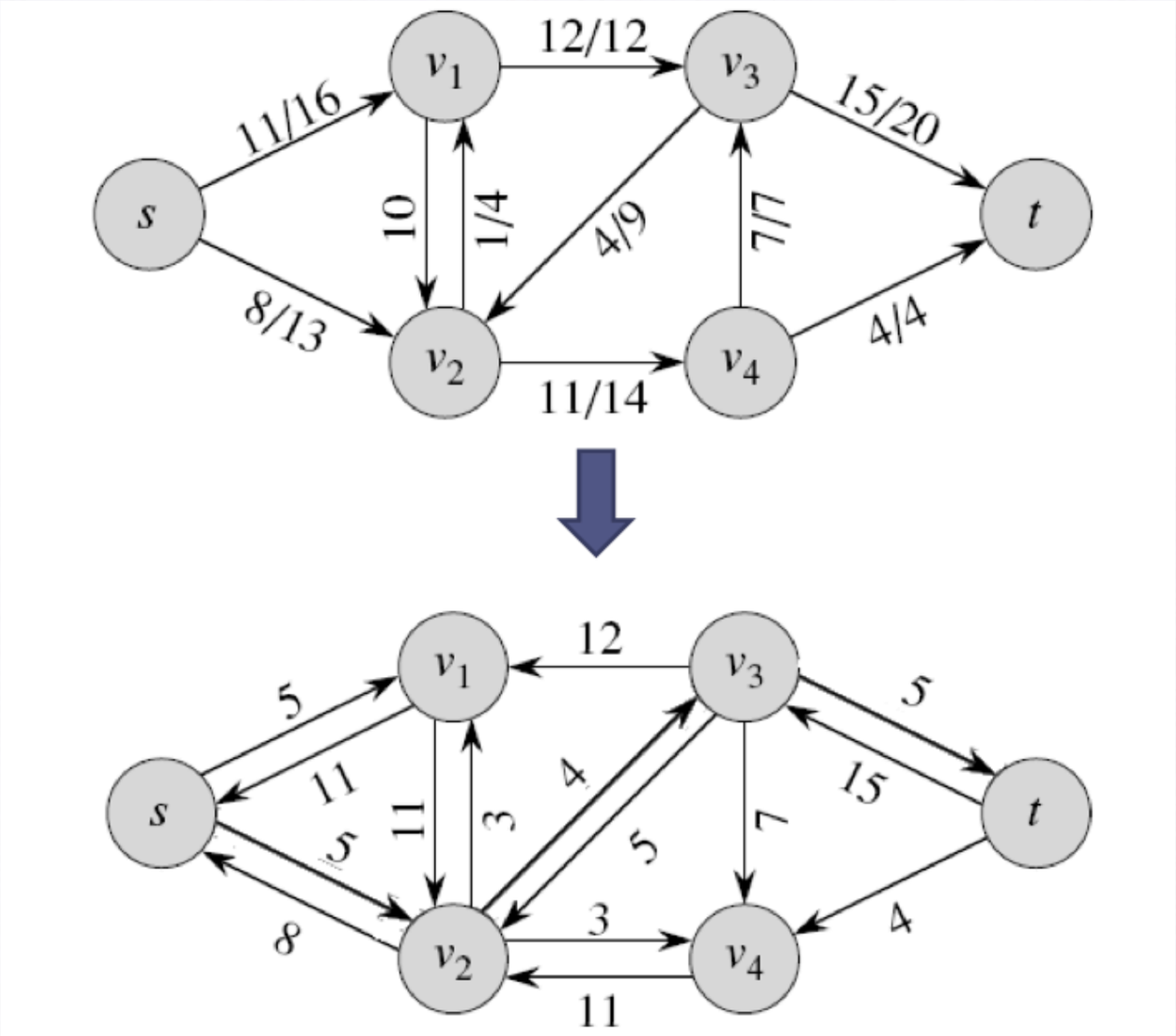
Desafio

- Calcule a rede residual



Desafio

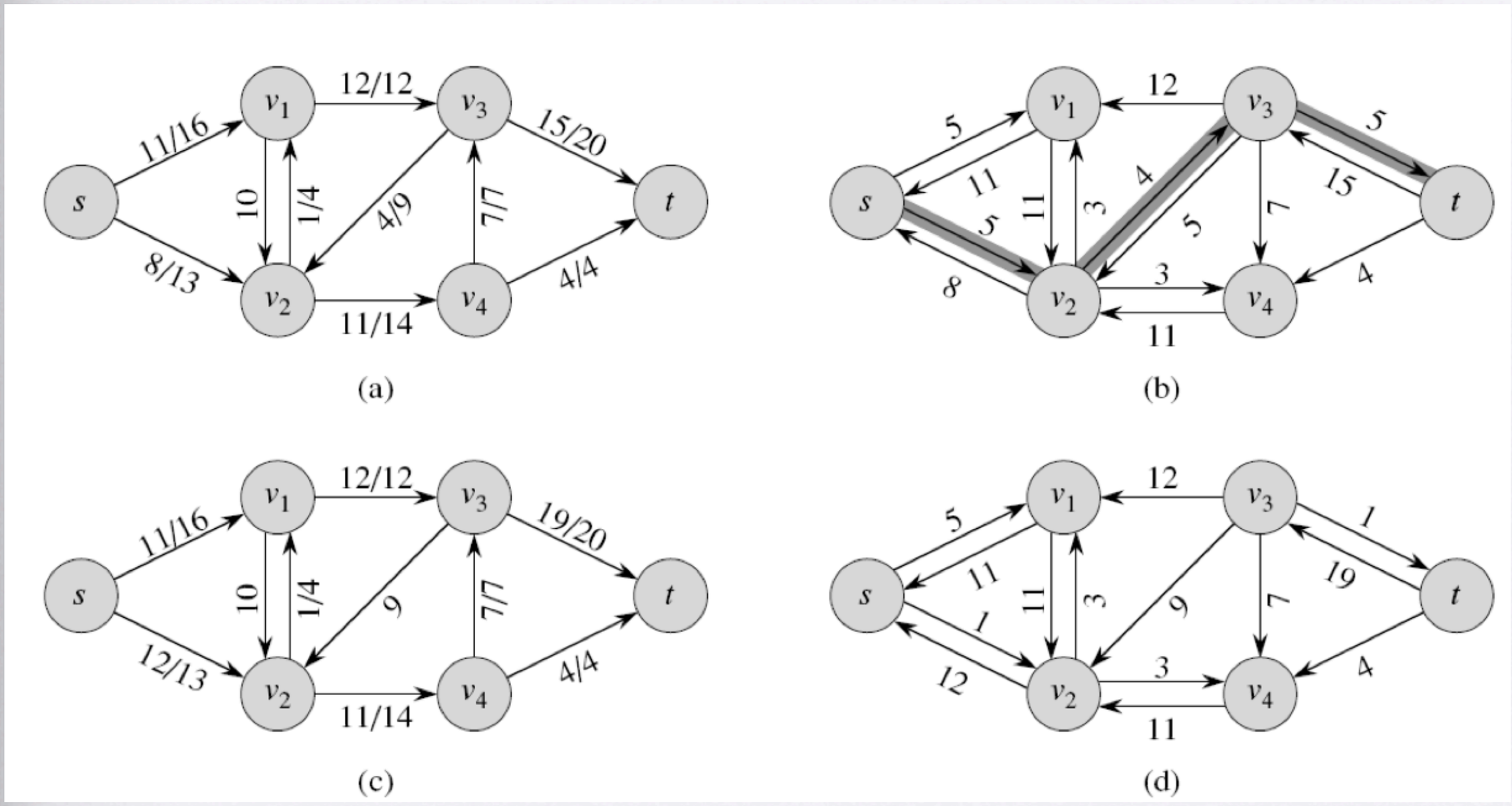
- Solução



Ford-Fulkerson

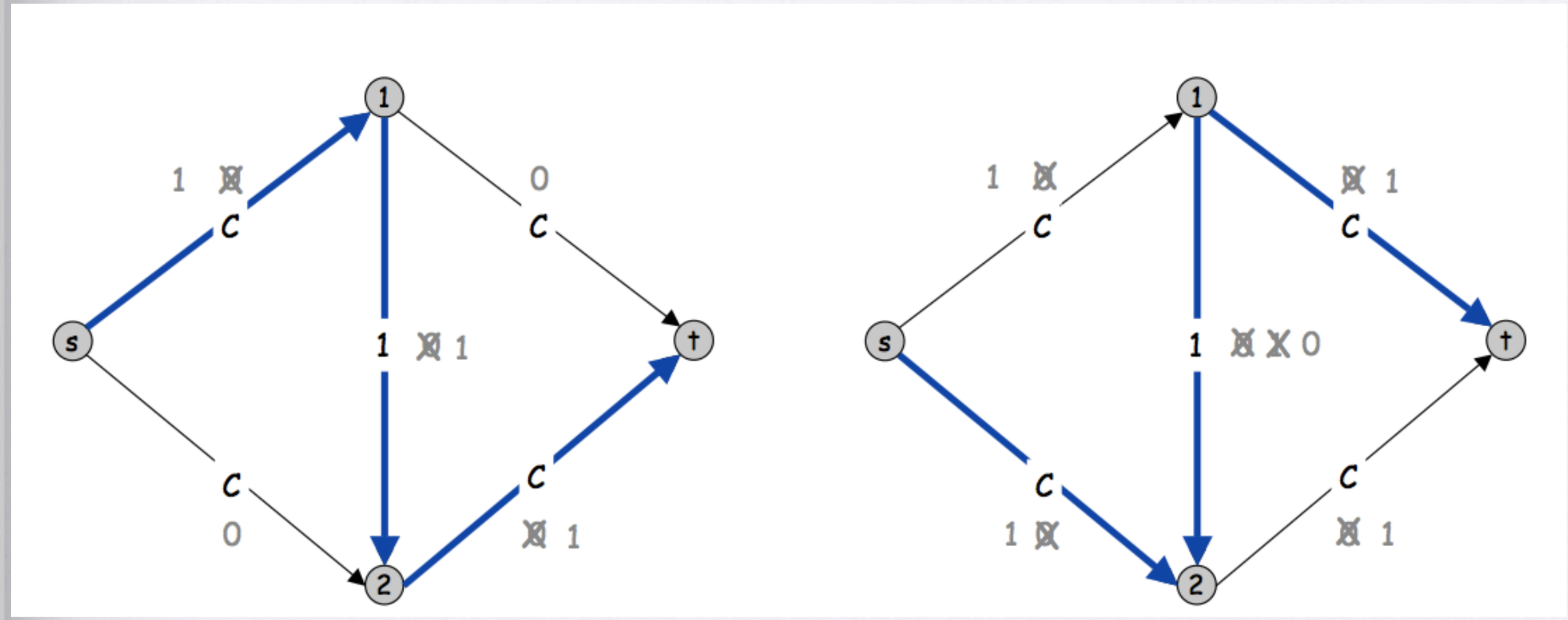
- Existe caminho da origem para o destino na rede residual (**caminho aumentante**)?
- Se sim, aumente o fluxo no grafo de fluxos
- Repita o processo até parar

Ford-Fulkerson



Ford-Fulkerson

- Dependendo da **escolha do caminho** faz 2c iterações!



Ford-Fulkerson

para cada aresta (u, v)$\in$ A faça

$f[u,v] \leftarrow 0$

$f[v,u] \leftarrow 0$

fim para

enquanto existir um caminho p de s ate t em Gf

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) : (u,v)$ está no caminho $p\}$

para cada aresta (u, v) em p faça

$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$

$f[v,u] \leftarrow c(u,v) - f[u,v]$

fim para

fim enquanto

retornar fluxo máximo e a matriz f

Ford-Fulkerson

para cada aresta (u, v)∈ A faça

$f[u,v] \leftarrow 0$

$f[v,u] \leftarrow 0$

fim para

enquanto existir um caminho p de s ate t em Gf

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) : (u,v)$ está no caminho $p\}$

para cada aresta (u, v) em p faça

$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$

$f[v,u] \leftarrow c(u,v) - f[u,v]$

fim para

fim enquanto

retornar fluxo máximo e a matriz f

Como encontrar um caminho?

Saturação

Tempo de Execução

para cada aresta (u, v)∈ A faça O(?)

$f[u,v] \leftarrow 0$

$f[v,u] \leftarrow 0$

fim para

busca em largura

O(?)

enquanto existir um caminho p de s ate t em Gf O(?)

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) : (u,v)$ está no caminho $p\}$

para cada aresta (u, v) em p faça O(?)

$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$

$f[v,u] \leftarrow c(u,v) - f[u,v]$

fim para

fim enquanto

retornar fluxo máximo e a matriz f

Tempo de Execução

para cada aresta (u, v)∈ A faça O(E)

$f[u,v] \leftarrow 0$

$f[v,u] \leftarrow 0$

fim para

O(V+E) = O(E)

enquanto existir um caminho p de s ate t em Gf O((f*)E)

$c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u,v) : (u,v)$ está no caminho $p\}$

para cada aresta (u, v) em p faça O(E)

$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c_f(p)$

$f[v,u] \leftarrow -f[u,v]$

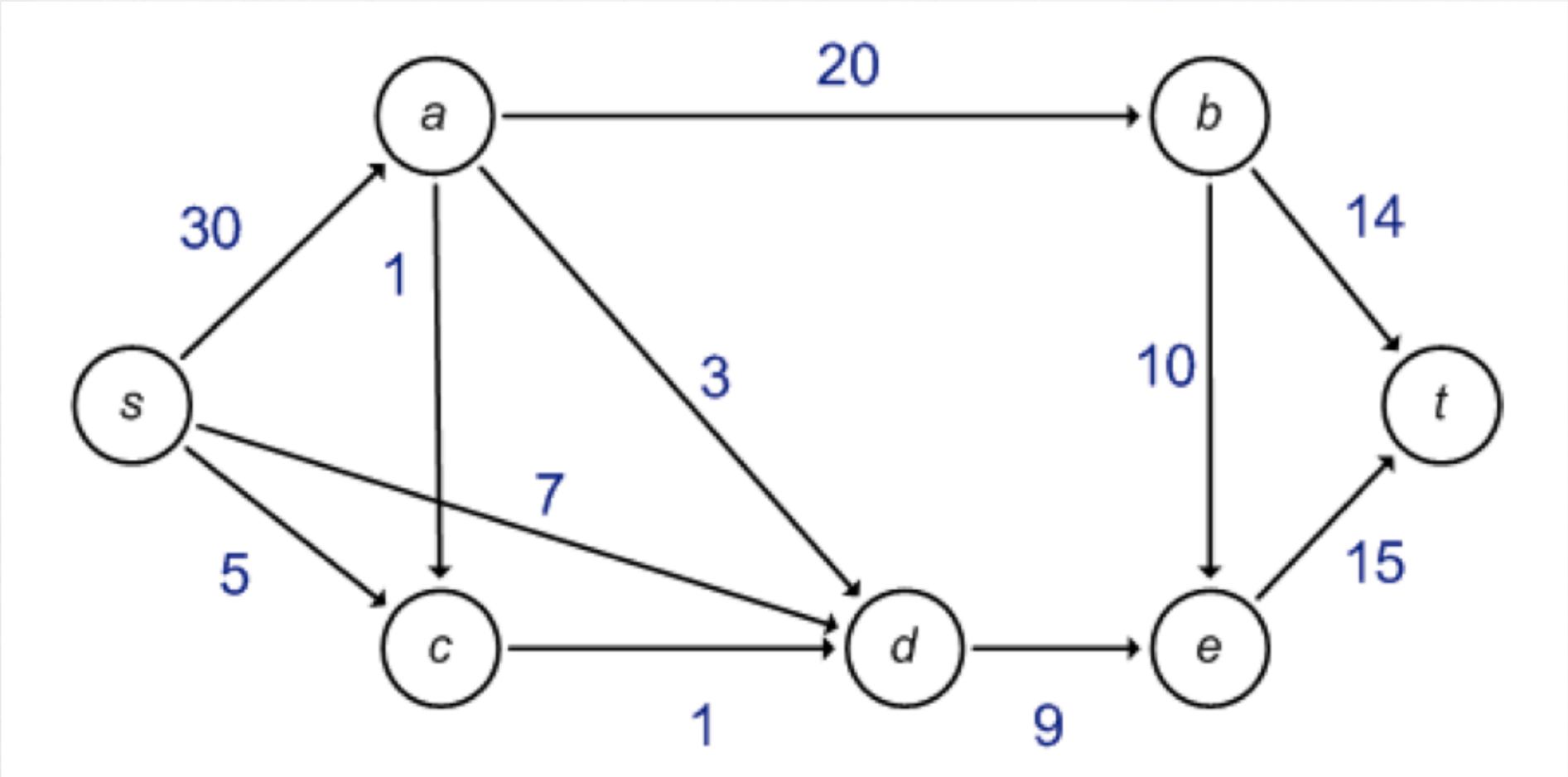
fim para

fim enquanto

retornar fluxo máximo e a matriz f

Ford-Fulkerson

- Encontre o fluxo máximo



Análise

- Assumindo que todas as capacidades são números inteiros entre 1 e C.
  - Cada fluxo f(e) e cada capacidade residual c(e) permanecem números inteiros durante a execução do algoritmo.
  - Teorema. O algoritmo termina em Ef* passos.
    - Cada aumento corresponde a no mínimo 1.

Análise

- O algoritmo pode não terminar se e somente se as capacidades foram números irracionais.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

- Teorema do caminho aumentante. Um fluxo f é máximo se não existem mais caminhos aumentantes.

- Teorema do fluxo máximo corte mínimo. O valor do fluxo máximo é igual ao valor do corte mínimo.

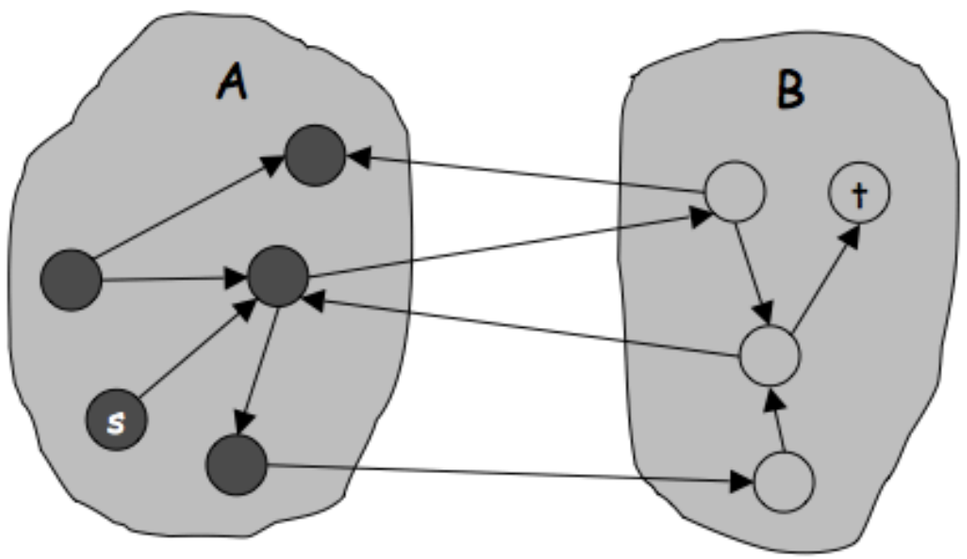
Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

- (1) Existe um corte (A,B) em que v(f)=cap(A,B) em G
- (2) O Fluxo f é máximo em G
- (3) Não existe caminho aumentante relativo a f em G′
- (1)->(2) Corolário do lema da dualidade fraca
- (2) -> (3) Suponha que f é um fluxo máximo e existe um caminho aumentante. Então existe um f′> f. Logo f não é máximo. O que contradiz a assertiva.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

- (3)->(1)
  - Seja f um fluxo sem caminhos aumentantes em G′
  - Seja A um conjunto de vértices alcançáveis a partir de s em um grafo residual G′
  - Por definição de A, $s \in A$.
  - Por definição de f, $t \notin A$.

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{e \text{ out of } A} f(e) - \sum_{e \text{ in to A}} f(e) \\
&= \sum_{e \text{ out of } A} c(e) \\
&= cap(A,B) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$



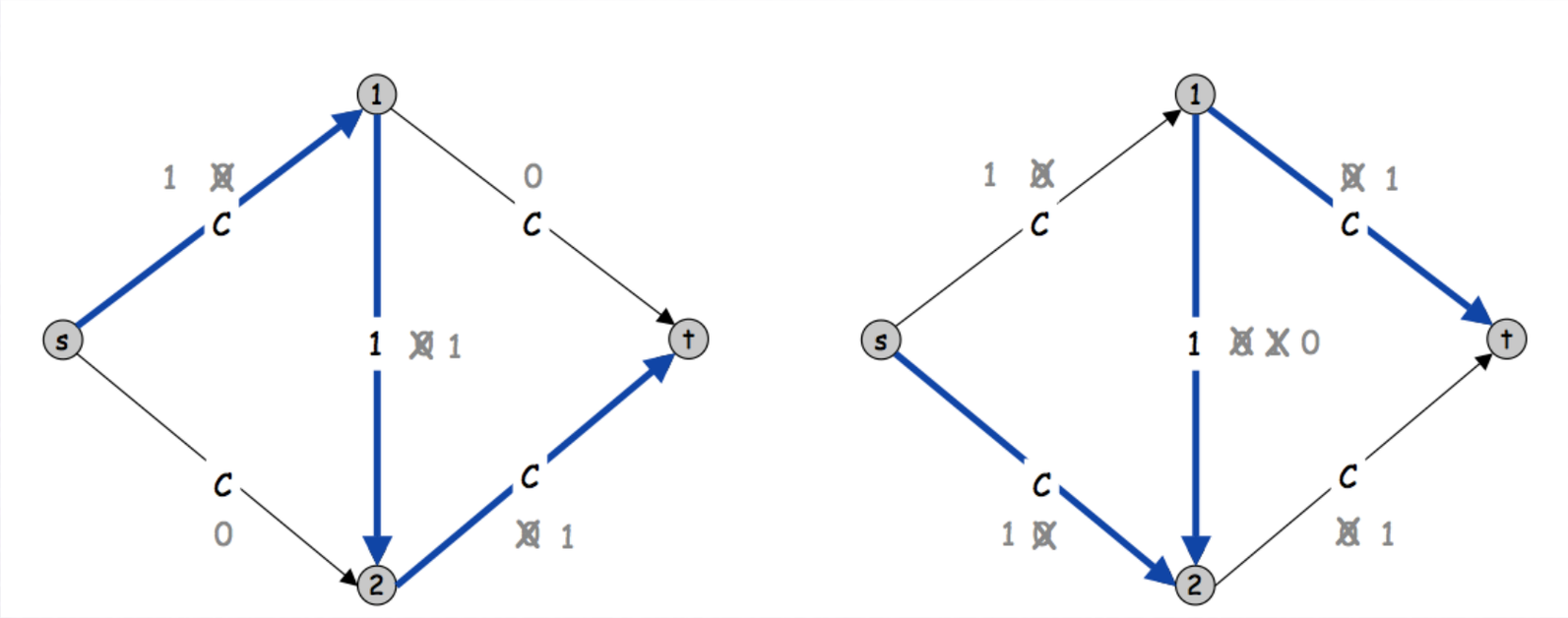
original network

Algoritmos

- Não-ótimo
  - Guloso
- Ótimo
  - Ford-Fulkerson
  - Escolha de caminhos de máxima capacidade
  - Edmonds-Karp
  - Push-Relabel

Deficiências do Ford Fulkerson

- Escolha de caminhos com capacidade baixa
- Coloca fluxo desnecessário em algumas arestas

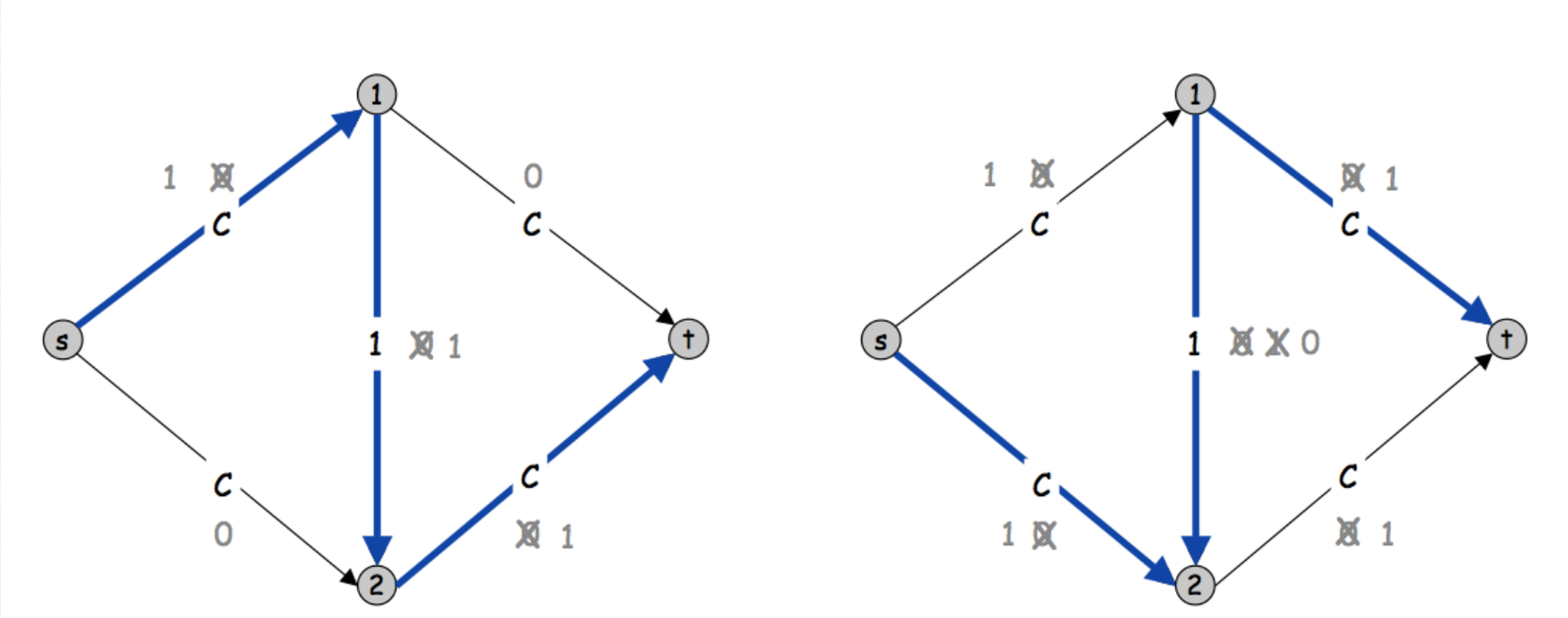


Escolha de Caminhos Capacidade Alta

- Escolha de um caminho com maior “gargalo” O (Elog(C)). C <= soma de todas as capacidades. [Kleinberg e Tardos]
  - Polinomial
  - Depende da capacidade

Deficiências do Ford Fulkerson

- Escolha de caminhos com capacidade baixa
- Coloca fluxo desnecessário em algumas arestas



Algoritmos

- Não-ótimo
  - Guloso
- Ótimo
  - Ford-Fulkerson
  - Escolha de caminhos de máxima capacidade
  - Edmonds-Karp
  - Push-Relabel

Edmonds-Karp

- Determinadas escolhas fazem com que o algoritmo dependa do fluxo
- Objetivo
  - Encontrar caminhos aumentantes de forma eficiente
- Como?
  - Menor número de arestas

Edmonds-Karp

- Encontrar caminhos mínimos considerando arestas unitárias
  - Busca em largura O(V+E)
- Teorema. Se o algoritmo de Edmonds-Karp executa em uma rede de fluxos G=(V,E) com fonte s e sumidouro t, então o número total de incrementos de fluxo é limitado a O(VE) [Cormen]
- Como cada iteração do Ford-Fulkerson é O(E), logo Edmonds-Karp é limitado a O(VE^2) [Cormen]