ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΑΣ

219

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κ. Η. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ
ΔΙΠΛ. ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΤΡΑ 1985

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΑΣ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Κ. Η. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ
ΔΙΠΛ. ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΤΡΑ 1985

Ε γ κ ρ ί θ η κ ε

από πενταμελή εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους κ.κ.

Δ. Λαϊνιώτη, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

Δ. Μαρίτσα , Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών

Μ. Στρίντζη, Καθηγητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης.

Θ. Παπαθεοδώρου, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

Σ. Θεοδωρίδη, Λέκτορα του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

που ορίστηκε από την Γ.Σ. του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής στην συνεδρίασή της αριθμός 9/ /9-5-1985.

Αφιερώνεται
στους γονείς μου

Επιθυμώ να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Δ.Γ.Λαϊνιώτη, τόσο γιά την υπόδειξη του θέματος, όσο και γιά την συνεχή καθοδήγηση και συμπαράσταση σε όλη την διάρκεια της εργασίας.

Εκφράζω επίσης τις ευχαριστίες μου στα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, τους καθηγητές κ. Δ.Μαρίτσα και κ. Μ.Στρίντζη γιά τη βοήθεια και συμπαράστασή τους.

Ευχαριστώ επίσης τον λέκτορα κ. Σ.Θεοδωρίδη γιά τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί του κατά την συγγραφή της εργασίας.

Θεωρώ υποχρέωση να ευχαριστήσω τους συναδέλφους και συνεργάτες του τμήματος γιά την οποιαδήποτε βοήθεια και συμπαράστασή τους.

Τέλος ευχαριστώ την Σοφία Μπίτση γιά την επιμελή δακτυλογράφηση του κειμένου.

Κώστας Η. Αναγνώστου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διατριβή αυτή διαπραγματεύεται αλγόριθμους διαμελισμού γραμμικής εκτίμησης, γιά συστήματα διάκριτου χρόνου.

Κατ'αρχήν παρουσιάζονται τέσσερεις νέοι αναδρομικοί αλγόριθμοι διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης. Στη συνέχεια γίνεται μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση των νέων αυτών αλγόριθμων, με τρεις άλλους αλγόριθμους διαμελισμού (τον Γενικευμένο Αλγόριθμο Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, τον Αναδρομικό Αλγόριθμο Διαμελισμού των Andrisani, Gau και το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη) και με τον αλγόριθμο (Φίλτρο) Kalman, σχετικά με τις υπολογιστικές των απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου, τόσο γιά χρονικά αμετάβλητα όσο και γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

Τέλος οι οικονομικότεροι (από άποψη απαιτήσεων αποθήκευσης) και ταχύτεροι από τους αλγόριθμους αυτούς, εφαρμόζονται στο πρακτικό πρόβλημα της εκτίμησης των πολλών αισθητήρων.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Σελίδα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ vi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικά (Προηγούμενες εργασίες) 1
1.2 Μαθηματικό μοντέλο και διατύπωση του προβλήματος της γραμμικής εκτίμησης γιά κανονικά (gaussian) μοντέλα 3
1.3 Ανασκόπηση βέλτιστων γραμμικών εκτιμητών μ.τ.λ. 6
1.3.1 Αλγόριθμος (Φίλτρο) Kalman 6
1.3.2 Αλγόριθμοι Διαμελισμού Λαϊνιώτη 7
1.3.3 Αλγόριθμος Διαμελισμού Lainiotis-Andrisani 13
1.3.4 Αναδρομικός Αλγόριθμος Διαμελισμού των Andrisani-Gau 17
1.4 Περιεχόμενο της διατριβής 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΝΕΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΑΝΑ ΔΕΙΓΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή 21
2.2 Αλγόριθμοι Α,Β (Ταυτόχρονος διαμελισμός στο διάνυσμα της αρχικής συνθήκης και στο διάνυσμα του θορύβου διεργασίας) 21
2.3 Αλγόριθμος Γ (Διαμελισμός στην αρχική συνθήκη).. 33
2.4 Αλγόριθμος Δ1 (Ταυτόχρονος διαμελισμός στην αρχική συνθήκη και στο θόρυβο διεργασίας) 36
2.5 Ανακεφαλαίωση των νέων αλγορίθμων διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

3.1 Εισαγωγή 43
3.2 Βασικές υποθέσεις της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης 43
3.3 Υπολογιστική ανάλυση των αλγορίθμων γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα 46
3.3.1 Ανάλυση των αλγορίθμων 46
3.3.2 Σύγκριση των αλγορίθμων 68
3.4 Υπολογιστική ανάλυση των αλγορίθμων γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα 85
3.5 Ανακεφαλαίωση των συμπερασμάτων της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης των αλγορίθμων 127

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΑΙΣΘΗΤΗΡΩΝ

4.1 Εισαγωγή-Διατύπωση του προβλήματος 130
4.2 Χρονικά αμετάβλητα μοντέλα 132
4.3 Χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα 133
4.4 Ανακεφαλαίωση συμπερασμάτων 146

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 148

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΛΗΜΜΑΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΜΗΤΡΩΝ 152

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ Α ΚΑΙ Β 153

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Γ 178

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Δ1 181

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ 189

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ 190

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 202

SUMMARY 207

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

$\delta(k-j)$	Η συνάρτηση δέλτα του Kronecker που παίρνει την τιμή 1 γιά $k=j$ και την τιμή 0 γιά $k \neq j$
$E\{\cdot\}$	Ο τελεστής μέσης τιμής
i	Διάκριτη χρονική στιγμή
I_a	Μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων $a \times a$
j,k	Διάκριτες χρονικές στιγμές
K	Κέρδος φίλτρου
$\lambda(k,0)$	Η συλλογή όλων των μετρήσεων διάκριτου χρόνου, από τον αρχικό χρόνο 0 έως και την χρονική στιγμή k
l	Διάκριτη χρονική στιγμή
m	Διάσταση του διανύσματος μετρήσεων
n	Διάσταση του διανύσματος κατάστασης
$\mathbf{N}\{x,y\}$	Κανονική (Gaussian) συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος με μέση τιμή x και διασπορά y
$\mathbf{O}_{a \times b}$	Μηδενικό μητρώο διαστάσεων $a \times b$
p	Διάσταση του διανύσματος θορύβου διεργασίας
$P(k/k)$	Μητρώο διασποράς λάθους εκτίμησης του βέλτιστου εκτιμητή φιλτραρίσματος
$P(k+1/k)$	Μητρώο διασποράς λάθους πρόβλεψης κατά ένα βήμα
$P(l/k)$, $0 \leq l < k$	Μητρώο διασποράς λάθους εκτίμησης λείανσης
$P(k,0)$	Μητρώο διασποράς λάθους εκτίμησης του βέλτιστου εκτιμητή φιλτραρίσματος. Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται μόνο στους αλγόριθμους διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης
Q	Μητρώο διασποράς του θορύβου διεργασίας
r	Αριθμός των αισθητήρων (στο κεφάλαιο 4)

R	Μητρώο διασποράς του θόρυβου των μετρήσεων
u	Διάνυσμα του θορύβου διεργασίας
v	Διάνυσμα του θορύβου των μετρήσεων
x	Διάνυσμα της κατάστασης
$\hat{x}(k/k)$	Βέλτιστος εκτιμητής φιλτραρίσματος της x(k) δοθέντων των μετρήσεων λ(k,0)
$\hat{x}(k+1/k)$	Βέλτιστος εκτιμητής πρόβλεψης κατά ένα βήμα της x(k+1) δοθέντων των μετρήσεων λ(k,0)
$\hat{x}(l/k)$, $0 \leq l < k$	Βέλτιστος εκτιμητής λείανσης της x(l) δοθέντων των μετρήσεων λ(k,0)
$\hat{x}(k,0)$	Βέλτιστος εκτιμητής φιλτραρίσματος της x(k), δοθέντων των μετρήσεων λ(k,0). Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται μόνο στους αλγόριθμους διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης
z	Διάνυσμα των μετρήσεων

<u>Δείκτες</u>

a	Συμβολίζει ποσότητες του επαυξημένου καταστατικού μοντέλου που δίνεται στο Παράρτημα Β από τις εξισώσεις (Β.3)-(Β.4).
i,j	Γενικοί δείκτες
k	Συμβολίζει ποσότητες του φίλτρου Kalman
ℓ	Γενικός δείκτης
n	Συμβολίζει ποσότητες των συμβατικών φίλτρων των αλγορίθμων διαμελισμού
r	Συμβολίζει ποσότητες των φίλτρων της "υπολοίπου" συνιστώσας των αλγορίθμων διαμελσμού
0	Συμβολίζει αρχικό χρόνο μόνο όταν αναφέρεται στις ποσότητες x, P. Στις άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιείται σαν γενικός δείκτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ (ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ)

Εκτίμηση είναι η διαδικασία εξαγωγής πληροφορίας από ένα σύνολο μετρήσεων-μετρήσεις που συνήθως περιέχουν επιπλέον της επιθυμητής πληροφορίας και λάθη ("θόρυβος"). Η προσπάθεια να επινοηθούν λογικές μέθοδοι για να ελαττωθούν τα λάθη των μετρήσεων οδήγησαν στην ανάπτυξη της θεωρίας εκτίμησης. Μοντέρνες μέθοδοι εκτίμησης [1,9,12,27,46,50] χρησιμοποιούν γνωστές σχέσεις για να εξάγουν την επιθυμητή πληροφορία από τις μετρήσεις, λαμβάνοντας υπ'όψη τα λάθη μετρήσεων, τις επιδράσεις των διαταραχών, πράξεις ελέγχου πάνω στο σύστημα, και προηγούμενη γνώση της πληροφορίας. Οι μέθοδοι εκτίμησης εφαρμόζονται σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών, στοχαστικών και ντετερμινιστικών όπως προκύπτει από τις διάφορες επισκοπήσεις (surveys) [28,35,36]

Το πρόβλημα της εκτίμησης δεν είναι κάτι καινούργιο. Στην πράξη, 200 χρόνια πριν ο Karl Gauss [11] , επινόησε την τεχνική, των ελαχίστων τετραγώνων και την εφάρμοσε, για να προσδιορίσει, από αστρονομικές μετρήσεις, τις 6 παραμέτρους (κατάστασης) τις αναγκαίες, για να περιγράψουν την κίνηση σε ένα ουράνιο σώμα. Η επόμενη σημαντική συνεισφορά στο ευρύ αντικείμενο της θεωρίας εκτίμησης έλαβε χώρα 100 χρόνια αργότερα όταν ο Fisher (1910) δουλεύοντας με συναρτήσεις πυκνότητος πιθανότητος εισάγει την τεχνική της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimation) [12 , 28]. Στη συνέχεια και στις αρχές του 1940 οι Wiener [18, 28, 52] και Kolmogorov [1,12,28,53] ασχολήθηκαν με προβλήματα εκτίμησης τυχαίων σημάτων. Το αποτέλεσμα κλειδί από αυτή την εργασία είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση που ονομάζεται εξίσωση των Wiener-Hopf. Οι δυσκολίες όμως στην επίλυση αυτής της εξίσωσης είχε σαν αποτέλεσμα η εργασία αυτή να έχει περιορισμένη πρακτική εφαρμογή [53]. Το πιό κρίσιμο ίσως βήμα στην ανάπτυξη της πρακτικής θεωρίας της στοχαστικής εκτίμησης, έγινε στα 1960 και ήταν η προσέγγιση του χώρου κατάστασης που πήρε ο R.E.Kalman [19,12,52] και κατέληξε στο πολύ γνωστό φίλτρο Kalman.

Ειδικότερα, ο Kalman, χρησιμοποιόντας τον σκελετό (framework) του χώρου κατάστασης, έδωσε μία σειριακή και υπολογιστικά ικανοποιητική λύση των προβλημάτων γραμμικής εκτίμησης και πρόβλεψης συστημάτων διάκριτου χρόνου, ενώ οι Kalman, Bucy[20,10] έλυσαν το αντίστοιχο πρόβλημα συνεχούς χρόνου.

Η κομψότητα, η απλότητα και η πρακτικότητα των τεχνικών που παρουσιάζονται στις δύο αυτές εργασίες του Kalman έχουν εμπνεύσει ένα μεγάλο αριθμό από τεχνικές εργασίες, στις οποίες οι διάφοροι συγγραφείς κατέληξαν ουσιαστικά στον ίδιο αλγόριθμο, ο καθένας όμως χρησιμοποιόντας διαφορετικές απόψεις. Σημειώνονται οι ακόλουθες εργασίες: του Ho [15] που χρησιμοποιεί μία τεχνική στοχαστικής προσέγγισης, των Ho-Lee [16] που χρησιμοποιούν μία Bayessian προσέγγιση; του Rauch και άλλων [49] που χρησιμοποιούν την τεχνική της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood), του Kailath [17, 18] που χρησιμοποιεί τις "ανανεώσεις" (innovations) και του Meditch [48] που χρησιμοποιεί τις προβολές (projections).

Από την προτότυπη όμως εργασία του Kalman οι μόνες νέες ριζοσπαστικές διατυπώσεις αλγορίθμων εκτίμησης προήλθαν από τον Λαϊνιώτη (Lainiotis [22-29, 33-40]), ο οποίος επιπρόσθετα από την αναγνώριση των ισχυρών δυνατοτήτων της τεχνικής του χώρου κατάστασης, εισήγαγε προσεκτικά θέματα που συχνά χρησιμοποιούνται στη θεωρία Τηλεπικοινωνιών και στη Στατιστική. Έτσι με μία εντελώς διαφορετική τεχνική στο πρόβλημα της γραμμικής εκτίμησης χρησιμοποιόντας το δικό του "Θεώρημα Διαμελισμού" (Partitioning Theorem) (Lainiotis [22,23,25,26,29,35, 36,40]) πέτυχε ουσιαστικά νέους αλγόριθμους γραμμικού φίλτραρίσματος, λείανσης και πρόβλεψης. Οι φόρμουλες της γραμμικής εκτίμησης "διαμελισμού" βρέθηκαν το 1971 από τον Λαϊνιώτη, και μελετήθηκαν από τον ίδιο και τους μαθητές του στην περίοδο 1971-1983 (Lainiotis [22-40], Gonvidaraj-Lainiotis [13], Lainiotis-Andrisani [41,42], Lainiotis-Gonvidaraj [43-45], Andrisani [2]).

Η ανάπτυξη και η χρήση, των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, την τελευταία εικοσιπενταετία, έπαιξε ουσιαστικό ρόλο στην εξέλιξη της θεωρίας εκτίμησης, που η αρχή της βρίσκεται, όπως προαναφέρθηκε στην κλασσική εργασία του Gauss [11]. Συγχρόνως όλο και ένας μεγαλύτερος αριθμός προβλημάτων αναζητούν τη λύση τους στις

μεθόδους της θεωρίας εκτίμησης. Αυτό οδηγεί στην ανάγκη εύρεσης αλγορίθμων πραγματοποίησης των μεθόδων εκτίμησης, που να έχουν αξιόλογη υπολογιστική συμπεριφορά κατά την υλοποίηση τους σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. Στην κατεύθυνση αυτή ανάγονται οι εργασίες των Mendel [47], Kaminski και άλλων [21], Gura-Bierman [14], Schmidt [51] κ.α. που μελετούν από υπολογιστική άποψη τον αλγόριθμο Kalman [47,51] καθώς και άλλους αλγόριθμους [14, 21, 47] και τους συγκρίνανε μεταξύ τους. Τέλος ο Κοσμίδης (Cosmidis [5, 6]) έκανε μία πρώτη προσπάθεια υπολογιστικής ανάλυσης των φίλτρων διαμελισμού του Λαϊνιώτη και σύγκριση αυτών με το φίλτρο Kalman καθώς και με ορισμένους άλλους αλγόριθμους.

1.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ (GAUSSIAN) ΜΟΝΤΕΛΑ

Το πρόβλημα της στοχαστικής εκτίμησης μπορεί να διατυπωθεί σύντομα, σαν την εύρεση του "βέλτιστου" (με κάποιο σαφώς καθορισμένο κριτήριο) εκτιμητού ποσοτήτων, σχετιζομένων σε ένα μαθηματικό μοντέλο, που αντιπροσωπεύει μία φυσική κατάσταση. Συγκεκριμμένα δε το πρόβλημα της γραμμικής εκτίμησης της κατάστασης, είναι η διαδικασία μέσα από την οποία εξάγεται πληροφορία γιά την κατάσταση ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος, χρησιμοποιόντας παρατηρήσεις, που είναι μία γραμμική συνάρτηση αυτών των καταστάσεων.

Στην παρούσα διατριβή θα αναφερθούμε σε βέλτιστους εκτιμητές, που βασίζονται στο κριτήριο του μέσου-τετραγωνικού λάθους (mean-square error)(μ.τ.λ.), των καταστάσεων του διάκριτου γραμμικού δυναμικού μοντέλου

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + \Gamma(k)u(k) \quad , \quad x(0)=x_0 \tag{1.1}$$

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1) \quad , \quad k=0,1,2,... \tag{1.2}$$

όπου

$x(k)$: είναι το n-διάστατο διάνυσμα κατάστασης που πρόκειται να εκτιμηθεί

$u(k)$: είναι το p-διάστατο διάνυσμα του θορύβου διεργασίας (process noise). Η $u(k)$ είναι κανονική (gaussian, λευκή (white) διαδικασία με μηδενική μέση τιμή και διασπορά $Q(k)$,

$z(k+1)$: είναι το m-διάστατο διάνυσμα των μετρήσεων,

$v(k+1)$: είναι το m-διάστατο διάνυσμα του θορύβου των μετρήσεων. Η $v(k+1)$ είναι κανονική λευκή διαδικασία με μηδενική μέση τιμή και διασπορά $R(k+1)$,

$\Phi(k+1,k)$: είναι το μητρώο διέλευσης της κατάστασης διαστάσεων $n\times n$,

$\Gamma(k)$: είναι το μητρώο κέρδους του θορύβου διεργασίας, διαστάσεων $n\times p$,

$H(k+1)$: είναι το μητρώο εξόδου διαστάσεων $m\times n$,

$x(0)=x_0$: είναι το n-διάστατο διάνυσμα της αρχικής συνθήκης της μεταβλητής κατάστασης $x(k)$ και είναι ένα κανονικό τυχαίο διάνυσμα με μέση τιμή $\hat{x}(0)=\hat{x}_0$ και διασπορά $P(0)=P_0$ και στατιστικά ανεξάρτητο των $u(k)$, $v(k+1)$ (για όλα τα k).

Τέλος $u(k)$ και $v(j)$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες για όλα τα k και j.

Οι παραπάνω υποθέσεις, που αφορούν την στατιστική του μοντέλου, μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά ως εξής:

$$E\{u(k)\} = 0^*_{p\times 1} \tag{1.3}$$

$$E\{u(k)u^T(j)\} = Q(k)\delta^\dagger(k-j) \tag{1.4}$$

(όπου το συμμετρικό μητρώο $Q(k)$ είναι διαστάσεων $p\times p$)

---

* $0_{a\times b}$ είναι ένα μηδενικό μητρώο διαστάσεων $a\times b$

† $\delta(k-j)$ είναι το δέλτα του Kronecker, παίρνει την τιμή 1 για $k=j$, και την τιμή 0 για $k\neq j$.

$$u(k) \sim \mathbf{N}\left\{\mathbf{0}_{p\times 1}\ ,\ \ Q(k)\right\}^{*} \tag{1.5}$$

$$E\{v(k+1)\} = \mathbf{0}_{m\times 1} \tag{1.6}$$

$$E\{v(k+1)v^{T}(j+1)\} = R(k+1)\delta(k-j) \tag{1.7}$$

(όπου το συμμετρικό μητρώο $R(k+1)$ είναι διαστάσεων $m\times m$)

$$v(k+1) \sim \mathbf{N}\left\{\mathbf{0}_{m\times 1}\ ,\ R(k+1)\right\} \tag{1.8}$$

$$E\{x(0)\} = \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \tag{1.9}$$

$$E\{[x(0)-\hat{x}(0)][x(0)-\hat{x}(0)]^{T}\} = P(0) = P_0 \tag{1.10}$$

$$x(0) \sim \mathbf{N}\left\{\hat{x}_0,\ P_0\right\} \tag{1.11}$$

$$E\{x(0)u^{T}(k)\} = \mathbf{0}_{n\times p} \tag{1.12}$$

$$E\{x(0)v^{T}(k+1)\} = \mathbf{0}_{n\times m} \tag{1.13}$$

$$E\{u(k)v^{T}(j)\} = \mathbf{0}_{p\times m} \tag{1.14}$$

(όπου οι σχέσεις (1.3)-(1.8), (1.12)-(1.14) ικανοποιούνται γιά όλα τα k,j).

Το πρόβλημα εδώ είναι να βρεθεί ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ $\hat{x}(l/k)$, της κατάστασης $x(l)$, δοθέντων όλων των διάκριτων μετρήσεων από τον αρχικό χρόνο 0 έως και των χρονική στιγμή k, $\lambda(k,0) = \{z(1),\ z(2),\ldots,z(k)\}$, δηλαδή η εύρεση του

$$\hat{x}(l/k) = E\{x(l)/\lambda(k,0)\} \tag{1.15}$$

έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ακόλουθη ποσότητα:

$$E\{[x(l)-\hat{x}(l/k)]\ [x(l)-\hat{x}(l/k)]^{T}\ /\lambda(k,0)\} \tag{1.16}$$

---

* Ο συμβολισμός $\mathbf{N}\{x,y\}$ δηλώνει μία κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητος με μέση τιμή x και διασπορά y.

Οπότε προκύπτουν τρείς κατηγορίες προβλημάτων εκτίμησης, που καθορίζονται από την σχέση μεταξύ των χρονικών στιγμών l,k και πιό συγκεκριμμένα:

Γιά $l=k$ έχουμε φιλτράρισμα (filtering), γιά $l<k$ έχουμε λείανση (smoothing) και γιά $l>k$ έχουμε πρόβλεψη (prediction).

Στο επόμενο τμήμα του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στις πιό κλασσικές και σημαντικές λύσεις στο πρόβλημα (Αλγόριθμος (Φίλτρο) Kalman, Αλγόριθμοι Λαϊνιώτη) καθώς και σε λύσεις που μας ενδιαφέρουν άμεσα στην παρούσα διατριβή.

1.3 ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ Μ.Τ.Λ.

1.3.1 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (ΦΙΛΤΡΟ) KALMAN

Πρώτος λύση στο πρόβλημα (που αναφέραμε προηγουμένως) της εύρεσης του βέλτιστου γραμμικού εκτιμητού μ.τ.λ. έδωσε ο Kalman [19, 1, 9, 12, 50, 52].

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 1.1 (Αλγόριθμος Kalman)

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), τότε ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ. $\hat{x}(k+1/k+1)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1/k+1)$ δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \Phi(k+1,k)\hat{x}(k/k)+K(k+1)\tilde{z}(k+1/k) \tag{1.17}$$

$$P(k+1/k+1) = \left[I_n^{*}-K(k+1)H(k+1)\right]P(k+1/k) \tag{1.18}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0/0)=\hat{x}_0$, $P(0/0)=P_0$, ενώ το μητρώο κέρδους $K(k+1)$, η διαδικασία ανανέωσης (innovation process) $\tilde{z}(k+1/k)$ και μητρώο διασποράς λάθους πρόβλεψης κατά ένα βήμα $P(k+1/k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

$$K(k+1) = P(k+1/k)H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) \tag{1.19}$$

$$\tilde{z}(k+1/k) = z(k+1)-H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{x}(k/k) \tag{1.20}$$

---

* I_a είναι ένα μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων $a \times a$.

$$P(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P(k/k)\Phi^T(k+1,k)+\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \qquad (1.21)$$

όπου

$$P_{\tilde{z}}(k+1/k) = H(k+1)P(k+1/k)H^T(k+1)+R(k+1) \qquad (1.22)$$

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς.

1) Δοθέντων των μετρήσεων $\lambda(k+1,0)=\{z(1), z(2),...,z(k+1)\}$ η διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1/k+1)$ και η διασπορά λάθους πρόβλεψης κατά ένα βήμα $P(k+1/k)$ ορίζονται ως εξής:

$$P(k+1/k+1) = E\{[x(k+1)-\hat{x}(k+1/k+1)]\,[x(k+1)-\hat{x}(k+1/k+1)]^T/ \\ /\lambda(k+1,0)\} \qquad (1.23)$$

$$P(k+1/k) = E\,\{[x(k+1)-\hat{x}(k+1/k)][x(k+1)-\hat{x}(k+1/k)]^T/ \\ /\lambda(k+1,0)\} \qquad (1.24)$$

όπου η κατά ένα βήμα πρόβλεψη $\hat{x}(k+1/k)$ ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1,k)\hat{x}(k/k) \qquad (1.25)$$

2) Στη περίπτωση που οι ποσότητες Φ, Γ, H, Q, R είναι χρονικά σταθερές, το φίλτρο Kalman παραμένει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα.

3) Για να "τρέξει" το φίλτρο Kalman απαιτείται (ανά επανάληψη) μία αντίστροφη μητρώου* διαστάσεων $m\times m$.

1.3.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΛΑΪΝΙΩΤΗ

Με μία τελείως διαφορετική τεχνική, την "τεχνική του διαμελισμού του μοντέλου", ο Λαϊνιώτης (Lainiotis [22-29,34-36,40]) κατέληξε βασικά σε νέους αλγόριθμους γραμμικής εκτίμησης. Η τεχνική αυτή στηρίζεται στον διαχωρισμό του κανονικού διανύσματος της αρχικής κατάστασης $x(0)$ σε άθροισμα δύο στατιστικά ανεξάρτητων κανονικών διανυσμάτων $x_n(0)$, $x_r(0)$, ήτοι

---

* Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε σε αντιστροφές συμμετρικών μητρώων.

$$x(0) = x_n(0) + x_r(0), \tag{1.26}$$

τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$x_n(0) \sim \mathbf{N}\left\{\hat{x}_n(0),\ P_n(0)\right\} \tag{1.27α}$$

$$x_r(0) \sim \mathbf{N}\left\{\hat{x}_r(0),\ P_r(0)\right\} \tag{1.27β}$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0 = \hat{x}_n(0) + \hat{x}_r(0) \tag{1.28}$$

$$P(0) = P_0 = P_n(0) + P_r(0) \tag{1.29}$$

$$E\left\{x_n(0)x_r^T(0)\right\} = \mathbf{O}_{n\times n} \tag{1.30}$$

Ενώ η εκλογή της μέσης τιμής και της διασποράς της (συμβατικής) συνιστώσας $x_n(0)$, ονομαστικά $\hat{x}_n(0)$, $P_n(0)$ αντίστοιχα, είναι εντελώς τυχαία και οφείλεται στον σχεδιαστή του φίλτρου, η συνιστώσα (υπολοίπου) $x_r(0)$, θεωρείται η άγνωστη παράμετρος του μοντέλου την οποία αυτοπροσαρμόζουμε (Lainiotis [22,23,26,27,29,34,35]) Στο Θεώρημα 1.2 που ακολουθεί, δίνεται ο Γενικευμένος Αλγόριθμος Διαμελισμού του Λαϊνιώτη (Lainiotis Generalized Partititioning Algorithm)(Lainiotis [26, 27, 29, 40]).

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 1.2 (Γενικευμένος Αλγόριθμος Διαμελισμού του Λαϊνιώτη)

Για το σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), και με διαμελισμό του μοντέλου που δίνεται από τις σχέσεις (1.26)-(1.30) ο βέλτιστος εκτιμητής $\hat{x}(k+1/k+1)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1/k+1)$ δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_r(0/k+1) \tag{1.31}$$

$$P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0) \tag{1.32}$$

όπου η εκτίμηση λείανσης $\hat{x}_r(0/k+1)$, η αντίστοιχη διασπορά λάθους της λείανσης $P_r(0/k+1)$ της αρχικής κατάστασης $x_r(0)$, η εκτίμηση φιλτραρίσματος $\hat{x}_n(k+1/k+1)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους της εκτίμησης $P_n(k+1/k+1)$ δίνονται στη συνέχεια από τις παρακάτω

εξισώσεις:

$$\hat{x}_r(0/k+1) = P_r(0/k+1)\left[M_n(k+1,0)+P_r^{-1}(0)\hat{x}_r(0)\right] \tag{1.33}$$

$$P_r(0/k+1) = \left[O_n(k+1,0)+P_r^{-1}(0)\right]^{-1} \tag{1.34}$$

$$\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k)+K_n(k+1)\tilde{z}_n(k+1/k),$$

$$\hat{x}_n(0/0) = \hat{x}_n(0) \tag{1.35}$$

$$P_n(k+1/k+1) = \left[I_n-K_n(k+1)H(k+1)\right]P_n(k+1/k) \tag{1.36}$$

και

$$K_n(k+1) = P_n(k+1/k)H^T(k+1)P_{\tilde{z}_n}^{-1}(k+1/k) \tag{1.37}$$

$$P_{\tilde{z}_n}(k+1/k) = H(k+1)P_n(k+1/k)H^T(k+1)+R(k+1) \tag{1.38}$$

$$P_n(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P_n(k/k)\Phi^T(k+1,k)+\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \ ,$$

$$P_n(0/0) = P_n(0) \tag{1.39}$$

$$\tilde{z}_n(k+1/k) = z(k+1)-H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k) \tag{1.40}$$

$$M_n(k+1,0) = \sum_{j=1}^{k+1} \Phi_n^T(j,0)\Phi^T(j,j-1)H^T(j)P_{\tilde{z}_n}^{-1}(j/j-1)\tilde{z}_n(j/j-1) \tag{1.41}$$

$$O_n(k+1,0) = \sum_{j=1}^{k+1} \Phi_n^T(j,0)\Phi^T(j,j-1)H^T(j)P_{\tilde{z}_n}^{-1}(j/j-1)H(j)$$

$$\Phi(j/j-1)\Phi_n(j,0) \tag{1.42}$$

και τέλος η ποσότητα $\Phi_n(k+1,0)$ ορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,k-1), \quad \Phi_n(0,0) = I_n \tag{1.43}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right] \Phi(k+1,k) \tag{1.44}$$

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς.

1. Ο γενικευμένος αλγόριθμος διαμελισμού παρουσιάζει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα [40]:

α) Η προσέγγιση του διαμελισμού διαχωρίζει το αρχικό πρόβλημα εκτίμησης σε ένα καλλίτερο υπό συνθήκας πρόβλημα, ονομαστικά το ένα με μερική ή πλήρη γνώση της αρχικής συνθήκης, και σε ένα πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρου γιά το "άγνωστο" τμήμα $x_r(0)$ της $x(0)$. Οπότε $x_n(k+1/k+1)$ είναι η εκτίμηση φιλτραρίσματος εκείνου του τμήματος της $x(k+1)$ ένεκα των $x_n(0)$ και $\{u(k)\}$, και $\hat{x}_r(0/k+1)$ η εκτίμηση λείανσης της $x_r(0)$.

β) Το φίλτρο Kalman αποτελεί ειδική περίπτωση του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι ο εν λόγω αλγόριθμος αποτελεί μία οικογένεια πραγματοποίησης του βέλτιστου γραμμικού φίλτρου, ένα γιά κάθε διαμελισμό του αρχικού διανύσματος κατάστασης, και το φίλτρο Kalman είναι μέλος αυτής της οικογένειας γιά $\hat{x}_n(0)=\hat{x}(0)$, $P_n(0)=P(0)$ $\hat{x}_r(0)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_r(0)=\mathbf{0}_{n\times n}$.

γ) Ο εν λόγω αλγόριθμος είναι περισσότερος "ρωμαλαίος" (robust) από το φίλτρο Kalman και ακόμη,

δ) Είναι κατάλληλος γιά ικανή αλλαγή των αρχικών συνθηκών χωρίς να χρειάζεται να ξαναϋπολογισθούν οι εξισώσεις (1.31)-(1.44), δεδομένου ότι η κατάλληλη εκλογή των αρχικών συνθηκών δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα [29,30,33-35,37-39].

2. Σημαντικό υπολογιστικό πρόβλημα του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, είναι οι δύο αντιστροφές μητρώων διαστάσεων $n\times n$ και $m\times m$ που απαιτούνται ανά επανάληψη και μία αντιστροφή μητρώου διαστάσεων $n\times n$ που απαιτείται στο πρώτο βήμα.

Στη συνέχεια ο Λαϊνιώτης (Lainiotis [29, 30, 40]) εφαρμόζοντας τον διαμελισμό στο διάνυσμα της αρχικής κατάστασης $x(0)$, που δίνεται από τις εξισώσεις (1.26)-(1.30), σε κάθε δειγματολειπτική χρονική στιγμή t_k (διαμελισμός ανά δείγμα (per-sample partitioning)) και με συμβατικές αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(k) = \mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(k) = \mathbf{0}_{n\times n}$, γιά $k=1,2,...$ κατέληξε σε ένα απλό αναδρομικό αλγόριθμο, το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη

(Lainiotis Per-Sample Partitioning Filter)(Lainiotis [29,30,40])

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 1.3 (Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη)

Ο βέλτιστος εκτιμητής (φιλτραρίσματος) $\hat{x}(k+1,0)^*$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους της εκτίμησης $P(k+1,0)$, του συστήματος που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), για τον παραπάνω διαμελισμό του μοντέλου, δίνονται από τις ακόλουθες αναδρομικές εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)\left[O_n(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\right]^{-1}\cdot \left[M_n(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \tag{1.45}$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)\left[O_n(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\right]^{-1} \Phi_n^T(k+1,k) \tag{1.46}$$

όπου

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1) \tag{1.47}$$

$$K_n(k+1,k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1) \tag{1.48}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{1.49}$$

$$O_n(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} \tag{1.50}$$

$$M_n(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)z(k+1) \tag{1.51}$$

$$P_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \tag{1.52}$$

---

* Σε αντιδιαστολή με τον ως τώρα συμβολισμό, του βέλτιστου εκτιμητή (φιλτραρίσματος) με $\hat{x}(k+1/k+1)$ και της αντίστοιχης διασποράς λάθους της εκτίμησης $P(k+1/k+1)$, στην περίπτωση των φίλτρων (αλγορίθμων) διαμελισμού ανά δείγμα, οι αντίστοιχοι συμβολισμοί είναι $\hat{x}(k+1,0)$ και $P(k+1,0)$.

$$A(k+1) \equiv \left[H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)+R(k+1)\right]^{-1} \tag{1.53}$$

και με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0,0)=\hat{x}_0$, $P(0,0)=P_0$

Οι επόμενες παρατηρήσεις όσον αφορά την φύση του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη και τα πλεονεκτήματά του έχουν επισημανθεί από τον Λαϊνιώτη (Lainiotis [40])

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1. Το συμβατικό φίλτρο δίνεται από τις μη αναδρομικές εξισώσεις (1.47)-(1.53). Το δε κέρδος $K_n(k+1,k)$ υπολογίζεται εύκολα από την σχέση:

$$K_n(k+1,k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)\left[H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1) +R(k+1)\right]^{-1} \tag{1.54}$$

Επίσης ο υπολογισμός των ποσοτήτων $\hat{x}_n(\cdot)$, $K_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $O_n(\cdot)$, $M_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$ γίνεται απλά από τις μη αναδρομικές εξισώσεις (1.47)-(1.52) χρησιμοποιόντας μόνο τις ποσότητες του μοντέλου και των δεδομένων στη δεδομένη χρονική στιγμή t_{k+1}.

2) Ο παραπάνω αλγόριθμος γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, ακθώς επίσης και διά δύο ειδικές κατηγορίες χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων (τα περιοδικά μοντέλα και τα αργά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα) παρουσιάζει ελαττωμένες υπολογιστικές απαιτήσεις (χρόνου (time) και αποθήκευσης (storage)) ενώ το φίλτρο Kalman δεν έχει αυτήν την ιδιότητα [30, 40]

3) Σοβαρό υπολογιστικό πρόβλημα και εδώ είναι οι τρείς αντιστροφές μητρώων (δύο διαστάσεων n×n και μία m×m) που απαιτούνται ανά επανάληψη, γιά την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων. (Στην περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων απαιτούνται δύο αντιστροφές μητρώων διαστάσεων n×n, ανά επανάληψη, και μία αντιστροφή μητρώου διαστάσεων m×m γιά την πρώτη επανάληψη μόνο).

1.3.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ LAINIOTIS-ANDRISANI

Οι Lainiotis, Andrisani (Andrisani [2], Lainiotis-Adrisani [42] επιπλέον του διαμελισμού του διανύσματος της αρχικής κατάστασης $x(0)$, διαμέλισαν και το διάνυσμα του θόρυβου διεργασίας $u(k)$ σε δύο συνιστώσες, και συγκεκριμμένα σε μία συμβατική συνιστώσα $u_n(k)$ και σε μία συνιστώσα υπολοίπου $u_r(k)$, σε κάθε χρονική στιγμή k, ήτοι

$$u(k) = u_n(k) + u_r(k) \tag{1.55}$$

όπου $u_n(k)$, $u_r(k)$ είναι στοχαστικές διαδικασίες με μηδενικές μέσες τιμές, λευκές, κανονικές, με διασπορές $Q_n(k)$, $Q_r(k)$ αντίστοιχα, στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και επιπλέον στατιστικά ανεξάρτητες με το διάνυσμα αρχικής κατάστασης $x(0)$, δηλαδή:

$$E\left\{u_n(k)u_n^T(j)\right\} = Q_n(k)\delta(k-j) \tag{1.56}$$

$$E\left\{u_r(k)u_r^T(j)\right\} = Q_r(k)\delta(k-j) \tag{1.57}$$

$$E\left\{u_n(k)u_r^T(j)\right\} = \mathbf{0}_{p\times p} \tag{1.58}$$

$$E\left\{u_n(k)\right\} = E\left\{u_r(k)\right\} = \mathbf{0}_{p\times 1} \tag{1.59}$$

$$E\left\{u_n(k)x^T(0)\right\} = \mathbf{0}_{p\times n} \tag{1.60}$$

$$E\left\{u_r(k)x^T(0)\right\} = \mathbf{0}_{p\times n} \tag{1.61}$$

$$Q(k) = Q_n(k) + Q_r(k) \tag{1.62}$$

(όπου οι σχέσεις (1.56)-(1.62) ικανοποιούνται γιά όλα τα k,j) καταλήγοντας έτσι στον αλγόριθμο διαμελισμού που δίνεται στο θεώρημα 1.4 που ακολουθεί [2]:

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 1.4 (Αλγόριθμος Διαμελισμού των Lainiotis

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από σχέσεις (1.1)-(1.14), στο οποίο το μεν διάνυσμα της αρχικής κατάστασης $x(0)$ διαμελίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις (1.26)-(1.30), το δε διάνυσμα του θορύβου διεργασίας $u(k)$ σύμφωνα με τις σχέσεις (1.55)-(1.62), τότε ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ. $\hat{x}(k+1/k+1)$ και το αντίστοιχο μητρώο διασποράς λάθους της εκτίμησης $P(k+1/k+1)$ δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1)+C_\vartheta(k+1)\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1) \tag{1.63}$$

$$P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1)+C_\vartheta(k+1)P_\vartheta(k+1/k+1)C_\vartheta^T(k+1) \tag{1.64}$$

όπου (δοθέντων των μετρήσεων $\lambda(k+1,0)=\{z(1),\ z(2),\ldots,z(k+1)\}$)

$$\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1) = E\left\{U_\vartheta(k+1)/\lambda(k+1,0)\right\} \tag{1.65}$$

$$P_\vartheta(k+1/k+1) = E\left\{\left[U_\vartheta(k+1)-\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1)\right]\left[U_\vartheta(k+1)-\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1)\right]^T /\lambda(k+1,0)\right\} \tag{1.66}$$

με

$$U_\vartheta^T(k+1) = \left[x_r^T(0) \mid u_r^T(0) \mid u_r^T(1) \mid \ldots \mid u_r^T(k)\right] \tag{1.67}$$

Το $U_\vartheta(k+1)$ είναι ένα κανονικό τυχαίο διάνυσμα με μέση τιμή $\hat{U}_\vartheta(k+1)$ και διασπορά $P_\vartheta(k+1)$ που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\hat{U}_\vartheta^T(k+1) &= E\left\{U_\vartheta^T(k+1)\right\} = \\ &= \left[\hat{x}_r^T(0) \mid \mathbf{0}_{1\times p} \mid \mathbf{0}_{1\times p} \mid \ldots \mid \mathbf{0}_{1\times p}\right]\end{aligned} \tag{1.68}$$

$$P_\vartheta(k+1) = E\left\{\left[U_\vartheta(k+1)-\hat{U}_\vartheta(k+1)\right]\left[U_\vartheta(k+1)-\hat{U}_\vartheta(k+1)\right]^T\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_r(0) & \mathbf{0}_{n\times p} & \cdots & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times n} & Q_r(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p\times n} & \cdots & \cdots & Q_r(k) \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

Η βέλτιστη εκτίμηση $\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους της εκτίμησης $P_\vartheta(k+1/k+1)$ δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\hat{U}_\vartheta(k+1/k+1) = P_\vartheta(k+1/k+1)\left[M_\vartheta(k+1,0)+P_\vartheta^{-1}(k+1)\hat{U}_\vartheta(k+1)\right] \quad (1.70)$$

$$P_\vartheta(k+1/k+1) = \left[O_\vartheta(k+1,0)+P_\vartheta^{-1}(k+1)\right]^{-1} \quad (1.71)$$

Οι βοηθητικές εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_\vartheta(k+1,0) = \begin{bmatrix} M_\vartheta(k,0) \\ \hdashline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} + D_\vartheta^T(k+1)P_{z_n}^{-1}(k+1/k)\tilde{z}_n(k+1/k), \quad M_\vartheta(0,0) = \mathbf{0}_{n\times 1} \quad (1.72)$$

$$O_\vartheta(k+1,0) = \left[\begin{array}{c:c} O_\vartheta(k,0) & \mathbf{0}_{(n+kp)\times p} \\ \hdashline \mathbf{0}_{p\times(n+kp)} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] + D_\vartheta^T(k+1)P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$$

$$\cdot D_\vartheta(k+1), \qquad O_\vartheta(0,0) = \mathbf{0}_{n\times n} \quad (1.73)$$

όπου

$$C_\vartheta(k+1) = \left[\Phi_n(k+1,0) \;\vdots\; C_u(k+1)\right] \quad (1.74)$$

$$D_\vartheta(k+1) = \left[H(k+1)\Phi(k+1,k)\Phi_n(k,0) \;\vdots\; D_u(k+1)\right] \quad (1.75)$$

$$C_u(k+1) = \left[A(k+1,1) \;\vdots\; A(k+1,2) \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; A(k+1,k+1)\right] \quad (1.76)$$

$$A(k+1,i) = \Phi_n(k+1,i)\left[I_n-K_n(i)H(i)\right]\Gamma(i-1) \quad (1.77)$$

$$C_u(1) = A(1,1) = \left[I_n-K_n(1)H(1)\right]\Gamma(0) \quad (1.78)$$

$$D_u(k+1) = \left[H(k+1)\Phi(k+1,k)C_u(k) \;\vdots\; H(k+1)\Gamma(k)\right] \quad (1.79)$$

$$D_u(1) = H(1)\Gamma(0) \quad (1.80)$$

και τελικά το ανεξάρτητο συμβατικό φίλτρο Kalman δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k)+K_n(k+1)\tilde{z}_n(k+1/k) \tag{1.81}$$

$$\tilde{z}_n(k+1/k) = z(k+1)-H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k) \tag{1.82}$$

$$K_n(k+1) = P_n(k+1/k)H^T(k+1)P_{z_n}^{-1}(k+1/k) \tag{1.83}$$

$$P_{z_n}(k+1/k) = H(k+1)P_n(k+1/k)H^T(k+1)+R(k+1) \tag{1.84}$$

$$P_n(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P_n(k/k)\Phi^T(k+1,k)+\Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k) \tag{1.85}$$

$$P_n(k+1/k+1) = \left[I_n-K_n(k+1)H(k+1)\right]P_n(k+1/k) \tag{1.86}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{1.87}$$

$$\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0) \tag{1.88}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(0/0)=\hat{x}_n(0)$, $P_n(0/0)=P_n(0)$ και $\Phi_n(0,0)=I_n$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς [2].

1) Το θεώρημα 1.4 αποτελεί μία επέκταση των αποτελεσμάτων του θεωρήματος 1.2.

2) Το συμβατικό φίλτρο Kalman βασίζεται μόνο στο $u_n(k)$.

3) Οι διαστάσεις των μητρώων $C_\vartheta(k+1)$, $C_u(k+1)$, $D_\vartheta(k+1)$, $M_\vartheta(k+1,0)$, $O_\vartheta(k+1,0)$ εξαρτώνται από τον αριθμό των μετρήσεων k, με αποτέλεσμα το μητρώο $P_\vartheta(k+1/k+1)$ να είναι διαστάσεων $(n+p+kp)\times(n+p+kp)$ και η αντιστροφή του να αποτελεί σοβαρό υπολογιστικό πρόβλημα. Το ίδιο υπολογιστικό πρόβλημα δημιουργεί και η αντιστροφή του μητρώου $P_\vartheta(k+1)$. Τέλος ο ανωτέρω αλγόριθμος απαιτεί και άλλη μία αντιστροφή μητρώου διαστάσεων $m\times m$.

1.3.4 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ANDRISANI-GAU.

Οι Andrisani, Gau [3] ανήγαγαν το υπολογιστικό πρόβλημα των τριών αντίστροφων μητρώων (δύο διαστάσεων n×n και μία διαστάσεων m×m) του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, σε πρόβλημα δύο αντιστροφών μητρώων διαστάσεων m×m, όπως προκύπτει από τον Αναδρομικό Αλγόριθμο Διαμελισμού (Recursive Partitioning Algorithm), ο οποίος και αποτελεί "αναδιατύπωση" του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, και δίνεται στο θεώρημα 1.5 που ακολουθεί [3]:

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 1.5 (Αναδρομικός Αλγόριθμος Διαμελισμού)

Για το σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), θεωρούμε διαμελισμό του διανύσματος αρχικής κατάστασης $\underline{x}(0)$ σύμφωνα με τις σχέσεις (1.26)-(1.30), τότε ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ. $\hat{x}(k+1/k+1)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1/k+1)$ δίνονται από τις αναδρομικές εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1)+\Phi_n(k+1,0)\hat{x}_r(0/k+1) \tag{1.89}$$

$$P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1)+\Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0) \tag{1.90}$$

όπου για το φίλτρο της συμβατικής συνιστώσας έχουμε:

$$\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k)+K_n(k+1)\ \tilde{z}_n(k+1/k) \tag{1.91}$$

$$K_n(k+1) = P_n(k+1/k)H^T(k+1)P_{z_n}^{-1}(K+1/k) \tag{1.92}$$

$$P_n(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P_n(k/k)\Phi^T(k+1,k)+\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \tag{1.93}$$

$$P_{z_n}(k+1/k) = H(k+1)P_n(k+1/k)H^T(k+1)+R(k+1) \tag{1.94}$$

$$\tilde{z}_n(k+1/k) = z(k+1)-H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{x}_n(k/k) \tag{1.95}$$

$$P_n(k+1/k+1) = \left[I_n-K_n(k+1)\ H(k+1)\right] P_n(k+1/k) \tag{1.96}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n - K_n(k+1)H(k+1) \right] \Phi(k+1,k) \tag{1.97}$$

$$\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0) \tag{1.98}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(0/0)=\hat{x}_n(0)$, $P_n(0/0)=P_n(0)$ και $\Phi_n(0,0)=I_n$, και γιά την συνιστώσα του υπολοίπου θα έχουμε:

$$\hat{x}_r(0/k+1) = \hat{x}_r(0/k) + K_r(k+1)\ \tilde{z}_r(k+1) \tag{1.99}$$

$$P_r(0/k+1) = \left[I_n - K_r(k+1)C(k+1) \right] P_r(0/k) \tag{1.100}$$

$$K_r(k+1) = P_r(0/k)C^T(k+1)P_z^{-1}(k+1/k) \tag{1.101}$$

$$P_z(k+1/k) = P_{z_n}(k+1/k) + C(k+1)P_r(0/k)C^T(kk+1) \tag{1.102}$$

$$\tilde{z}_r(k+1) = \tilde{z}_n(k+1/k)C(k+1)\hat{x}_r(0/k) \tag{1.103}$$

όπου

$$C(k+1) = H(k+1)\Phi(k+1,k)\Phi_n(k,0) \tag{1.104}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}_r(0/0)=\hat{x}_r(0)$, $P_r(0/0)=P_r(0)$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1) Οι εξισώσεις (1.91)-(1.98) του συμβατικού φίλτρου του παραπάνω αλγόριθμου είναι ίδιες με τις εξισώσεις (1.35), (1.37), (1.39), (1.38), (1.40), (1.36), (1.44), (1.43), αντίστοιχα, του συμβατικού φίλτρου του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη.

2) Στην περίπτωση του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, οι ποσότητες $P_r(0/j)$, $x_r(0/j)$ που δίνονται από τις εξισώσεις (1.33), (1.34), αντίστοιχα, γιά να υπολογιστούν χρειάζονται δύο αντιστροφές μητρώων διαστάσεων n×n (μία ανά επανάληψη και μία κατά την πρώτη επανάληψη μόνο), ενώ στη περίπτωση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού, οι παραπάνω ποσότητες υπολογίζονται από τις αναδρομικές εξισώσεις (1.99)-(1.103), που απαιτούν ανά επανάληψη μία αντιστροφή μητρώου διαστάσεων m×m.

γ) Από τις εξισώσεις (1.33), (1.34) και (1.99)-(1.103) είναι προφανές ότι στην περίπτωση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού, ο υπολογισμός της εκτίμησης του λειαντή σταθερού σημείου (fixed-point smoother) τμήματος (ή όλης) της αρχικής συνθήκης επιτυγχάνεται από έναν προς τα εμπρός χρονικά αναδρομικό αλγόριθμο.

δ) Τέλος για να "τρέξει" ο Αναδρομικός Αλγόριθμος Διαμελισμού απαιτεί δύο αντιστροφές μητρώων διαστάσεων m×m, ανά επανάληψη.

1.4 ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Η σημασία του προβλήματος της εκτίμησης και το πλήθος των τεχνικών προβλημάτων που αναζητούν την επίλυση τους στις μεθόδους εκτίμησης, είναι προφανή από τα αναφερόμενα στο τμήμα 1.1 αυτού του κεφαλαίου. Επίσης όπως προαναφέρθηκε είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την υπολογιστική συμπεριφορά των αλγορίθμων εκτίμησης κατά την υλοποίηση τους στον υπολογιστή.

Τα θέματα τα οποία διαπραγματεύεται η διατριβή αυτή είναι τα εξής:

1) Παρουσιάζονται τέσσερεις νέοι, αλγόριθμοι διαμελισμού ανά δείγμα, γραμμικής εκτίμησης με υπολογιστικά πλεονεκτήματα ανάλογα του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη. Οι δύο νέοι αλγόριθμοι αποτελούν ανά δείγμα εκφράσεις του Αλγόριθμου Διαμελισμού των Lainiotis-Andrisani (που δίνεται στο θεώρημα 1.4), και προκύπτουν από το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, χρησιμοποιόντας ένα επαυξημένο καταστατικό μοντέλο του συστήματος. Ο τρίτος νέος αλγόριθμος αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού, των Andrisani, Gau (που δίνεται στο θεώρημα 1.5) από τον οποίο χρησιμοποιόντας το επαυξημένο μοντέλο συστήματος που προαναφέραμε, καταλήγουμε στον τέταρτο νέο αλγόριθμο.

2) Γίνεται μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση των τεσσάρων νέων αλγόριθμων, του φίλτρου Kalman, του Γενικευμένου Αλγόριθμου Διαμελισμού του Λαϊνιώτη, του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού και του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου (storage and time requirements), πρώτα για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα

και στη συνέχεια γιά χρονικά μεταβαλλόμενα.

3) Τέλος τα αποτελέσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης, και πιό συγκεκριμμένα οι αλγόριθμοι που προκύπτει ότι έχουν τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου, εφαρμόζονται στο πρακτικό πρόβλημα της εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (multisensor estimation problem).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΝΕΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΑΝΑ ΔΕΙΓΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται τέσσερεις νέοι αλγόριθμοι διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης μ.τ.λ. (γιά συστήματα διάκριτου χρόνου) και γίνεται μία αναλυτική παρουσίαση των ιδιοτήτων των αλγόριθμων αυτών. Ο διαμελισμός του διανύσματος της αρχικής συνθήκης σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα (που έχει προταθεί από τον Λαϊνιώτη (Lainiotis [22-29, 33-40]) αποτελεί το διαμελισμό του μοντέλου που χρησιμοποιείται στον ένα νέο αλγόριθμο, ενώ στους άλλους τρείς αλγόριθμους,ο χρησιμοποιούμενος διαμελισμός του μοντέλου αποτελείται από τον ταυτόχρονο διαμελισμό του διανύσματος της αρχικής συνθήκης και του διανύσματος του θορύβου διεργασίας, αντίστοιχα, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα (που έχει προταθεί από τους Lainiotis, Andrisani [2,42]) και σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο αντίστοιχος διαμελισμός όμως του μοντέλου, γίνεται στον κάθε ένα από τους τέσσερεις αλγόριθμους, σε κάθε δειγματιληπτική χρονική στιγμή, με κατάλληλα εκλεγμένες τις συμβατικές συνθήκες.

Οι δύο νέοι αλγόριθμοι αποτελούν ανά δείγμα εκφράσεις του Αλγόριθμου Διαμελισμού των Lainiotis, Andrisani, και επιπλέον μπορούν να προκύψουν από το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, χρησιμοποιόντας ένα επαυξημένο καταστατικό μοντέλο του συστήματος. Ο τρίτος αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού των Andrisani, Gau, και από τον οποίο καταλήγουμε στον τέταρτο νέο αλγόριθμο χρησιμοποιόντας το επαυξημένο μοντέλο του συστήματος που προαναφέραμε.

Οι τέσσερεις νέοι αλγόριθμοι γραμμικής εκτίμησης παρουσιάζουν ανάλογα υπολογιστικά πλεονεκτήματα με το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη.

2.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ Α,Β (ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ)

Γιά το γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις

(1.1)-(1.14), θεωρούμε ταυτόχρονο διαμελισμό στο διάνυσμα της αρχικής συνθήκης $x(0)$ και στο θόρυβο διεργασίας $u(k)$, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα. Ονομαστικά

$$x(k) = x_n(k) + x_r(k) \tag{2.1}$$

$$u(k) = u_n(k) + u_r(k) \tag{2.2}$$

και

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_n(k) + \hat{x}_r(k) \tag{2.3}$$

$$P(k) = P_n(k) + P_r(k) \tag{2.4}$$

$$Q(k) = Q_n(k) + Q_r(k) \tag{2.5}$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (1.27a),(1.27b), (1.30), (1.56)-(1.61).

Οπότε γιά μηδενικές τις συμβατικές αρχικές συνθήκες, $\hat{x}_n(k)$ και $P_n(k)$, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, προκύπτει ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 2.1 (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Α)

Ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ $\hat{x}(k+1,0)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1,0)$, γιά το παραπάνω γραμμικό σύστημα δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k)+\Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}\cdot \left[M(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.6}$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+C_n(k+1,k)\left[Q_r^{-1}(k)+O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} C_n^T(k+1,k)+\Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}\Phi_1^T(k+1,k) \tag{2.7}$$

όπου

$$\hat{x}_1(k+1,k) = K_1(k+1,k)\ z(k+1) \tag{2.8}$$

$$\Phi_1(k+1,k) = \left[I_n - K_1(k+1,k)\ H(k+1)\right] \Phi(k+1,k) \tag{2.9}$$

$$K_1(k+1,k) = K_n(k+1,k) + C_n(k+1,k) \left[Q_r^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}$$

$$\Gamma^T(k) H^T(k+1) A(k+1) \tag{2.10}$$

$$K_n(k+1,k) = \Gamma(k) Q_n(k) \Gamma^T(k) H^T(k+1) A(k+1) \tag{2.11}$$

$$C_n(k+1,k) = \left[I_n - K_n(k+1,k)\ H(k+1)\right] \Gamma(k) \tag{2.12}$$

$$P_n(k+1,k) = \left[I_n - K_n(k+1,k)\ H(k+1)\right] \Gamma(k)\ Q_n(k)\ \Gamma^T(k) \tag{2.13}$$

$$L(k+1,k) = \left[Q_r^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} O_{n3}^T(k+1,k) \tag{2.14}$$

$$N(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) - O_{n3}(k+1,k)\ L(k+1,k) \tag{2.15}$$

$$M(k+1,k) = \left[\Phi(k+1,k) - \Gamma(k) L(k+1,k)\right]^T H^T(k+1) A(k+1) z(k+1) \tag{2.16}$$

$$O_{n1}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1) \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} \tag{2.17}$$

$$O_{n2}(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A(k+1) \{H(k+1)\Gamma(k)\} \tag{2.18}$$

$$O_{n3}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1) \{H(k+1)\Gamma(k)\} \tag{2.19}$$

$$A(k+1) \equiv \left[H(k+1)\Gamma(k) Q_n(k) \Gamma^T(k) H^T(k+1) + R(k+1)\right]^{-1} \tag{2.20}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$, $P(0,0) = P(0)$, $\Phi_1(0,0) = I_n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1) Η απόδειξη του θεωρήματος 2.1 δίνεται στο Παράρτημα Β.

2) Ο αλγόριθμος Α αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αλγόριθμου Διαμελισμού Lainiotis-Andrisani (που συζητήθηκε στο προηγούμενο

κεφάλαιο, στο θεώρημα 1.4).*

3) Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\Phi_1(\cdot)$, $K_1(\cdot)$, $C_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$, $N(\cdot)$, $M(\cdot)$, $O_{n2}(\cdot)$ ορίζονται πλήρως, απλά και μη αναδρομικά από τις εξισώσεις (2.9)-(2.11), (2.12), (2.13), (2.15), (2.16), (2.18) χρησιμοποιόντας μόνο τις ποσότητες του μοντέλου και των δεδομένων στην τρέχουσα χρονική στιγμή t_{k+1}.

4) Ο υπολογισμός των ποσοτήτων $K_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$, $O_{ni}(\cdot)$ $\{i=1,2,3\}$ βασίζεται μόνο στη συμβατική συνιστώσα $u_n(k)$ του θόρυβου διεργασίας $u(k)$.

5) Ο εν λόγω αλγόριθμος απαιτεί πέντε αντιστροφές μητρώων: μιά διαστάσεων $m\times m$, δύο διαστάσεων $p\times p$ και δύο διαστάσεων $n\times n$. Ο παραπάνω αριθμός αντιστροφών είναι δυνατόν να ελλατωθεί στους τρείς, σύμφωνα με την τροποποίηση που εισάγει η παρατήρηση που ακολουθεί.

6) Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α1 που δίνεται στο Παράρτημα Α οι εξισώσεις (2.6), (2.7), μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k) + \Phi_1(k+1,k)\left[P(k,0)N(k+1,k) + I_n\right]^{-1} \left[P(k,0)M(k+1,k)+\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.21}$$

$$P(k+1,0) = P_1(k+1,k) + \Phi_1(k+1,k)\left[P(k,0)N(k+1,k)+I_n\right]^{-1} P(k,0)\Phi_1^T(k+1,k) + C_n(k+1,k)S_0(k+1,k)C_n^T(k+1,k) \tag{2.22}$$

όπου

$$S_0(k+1,k) = \left[Q_r(k)O_{n2}(k+1,k) + I_p\right]^{-1} Q_r(k) \tag{2.23}$$

$$L(k+1,k) = S_0(k+1,k)\,O_{n3}^T(k+1,k) \tag{2.24}$$

$$K_1(k+1,k) = K_n(k+1,k)+C_n(k+1,k)S_0(k+1,k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1) \tag{2.25}$$

Είναι προφανές ότι αυτή η τροποποίηση απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό φορτίο (ανάγκες χρόνου και αποθήκευσης) από την αρχική περίπτωση.

* Οι αποδείξεις των παρατηρήσεων 2,7,8,11 δίνονται στο Παράρτημα Β.

7) Ο αλγόριθμος Α αποτελεί μία γενίκευση του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελιομού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη.

8) Οι ποσότητες $\Phi_1(\cdot)$, $\hat{x}_1(\cdot)$, $M(\cdot)$ μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη μορφή:

$$\Phi_1(k+1,k) = \Phi_n(k+1,k) - C_n(k+1,k)L(k+1,k) \tag{2.26a}$$

$$= \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi_0(k+1,k) \tag{2.26b}$$

$$\hat{x}_1(k+1,k) = \hat{x}_n(k+1,k) + \hat{x}_2(k+1,k) \tag{2.27}$$

$$M(k+1,k) = M_{n1}(k+1,k) - L^T(k+1,k)M_{n2}(k+1,k) \tag{2.28}$$

όπου

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{2.29}$$

$$x_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)\, z(k+1) \tag{2.30}$$

$$x_2(k+1,k) = C_n(k+1,k)\left[Q_r^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} \Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1)z(k+1) \tag{2.31}$$

$$M_{n1}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)z(k+1) \tag{2.32}$$

$$M_{n2}(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A(k+1)z(k+1) \tag{2.33}$$

$$\Phi_0(k+1,k) = \Phi(k+1,k) - \Gamma(k)L(k+1,k) \tag{2.34}$$

9) Η υπολογιστική φύση αυτού του αλγόριθμου και τα υπολογιστικά του πλεονεκτήματα μπορούν να φανούν καλλίτερα θεωρόντας την περίπτωση χρονικών αμετάβλητων μοντέλλων, οπότε ο αλγόριθμος Α παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k) + \Phi_1\left[P^{-1}(k,0) + N\right]^{-1} \left[M(k+1,k) + P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right], \quad \hat{x}(0,0) = \hat{x}(0) \tag{2.35}$$

$$P(k+1,0) = P_n + C_n\left[Q_r^{-1} + O_{n2}\right]^{-1} C_n^T + \Phi_1\left[P^{-1}(k,0) + N\right]^{-1} \Phi_1^T \quad ,$$

$$P(0,0) = P(0) \qquad (2.36)$$

όπου τώρα

$$\hat{x}_1(k+1,k) = K_1 z(k+1) \qquad (2.37)$$

$$\Phi_1 = \left[I_n - K_1 H\right] \Phi \qquad (2.38)$$

$$N = O_{n1} - O_{n3} L \qquad (2.39)$$

$$L = \left[Q_r^{-1} + O_{n2}\right]^{-1} O_{n3}^T \qquad (2.40)$$

$$K_1 = K_n + C_n \left[Q_r^{-1} + O_{n2}\right]^{-1} \Gamma^T H^T A \qquad (2.41)$$

$$K_n = \Gamma Q_n \Gamma^T H^T A \qquad (2.42)$$

$$C_n = \left[I_n - K_n H\right] \Gamma \qquad (2.43)$$

$$P_n = \left[I_n - K_n H\right] \Gamma Q_n \Gamma^T \qquad (2.44)$$

$$O_{n1} = (H\Phi)^T A (H\Phi) \qquad (2.45)$$

$$O_{n2} = (H\Gamma)^T A (H\Gamma) \qquad (2.46)$$

$$O_{n3} = (H\Phi)^T A (H\Gamma) \qquad (2.47)$$

$$M(k+1,k) = (\Phi - \Gamma L)^T H^T A z(k+1) \qquad (2.48)$$

$$A \equiv \left[H\Gamma Q_n \Gamma^T H^T + R\right]^{-1} \qquad (2.49)$$

Γιά να εκτιμήσουμε πόσο ενδιαφέρουσα είναι η παραπάνω έκφραση του θεωρήματος πρέπει να σημειωθεί ότι το φίλτρο Kalman που προκύπτει γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα, είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Είναι προφανές ότι η παραπάνω πραγματοποίηση του βέλτιστου φίλτρου με διαμελισμό ανά δείγμα, γιά χρονικά αμετά-

βλητα μοντέλα, είναι ένα πλήρως χρονικά αμετάβλητο ακόμη και από την πρώτη επανάληψη. Σημειώνεται ότι οι ποσότητες K_1, Φ_1, N, $[\Phi-\Gamma L]^T H^T A$, $P_n+C_n\left[Q_r^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}C_n^T$, O_{ni} $(i = 1,2,3)$, L, A, K_n πρέπει να υπολογισθούν μία φορά και να αποθηκευθούν (εκτός από τις ποσότητες A, L, O_{n1}, O_{n2}, O_{n3}, K_n οι οποίες χρειάζονται μόνο στην πρώτη επανάληψη) γιά χρήση στη συνέχεια. Δύο αντιστροφές μητρώων ανά επανάληψη (διαστάσεων n×n) χρειάζονται και τρείς αντιστροφές μητρώων (μία διαστάσεων m×m και δύο διαστάσεων p×p) γιά την πρώτη επανάληψη.

10) Ο Αλγόριθμος Α έχει ελαττωμένες υπολογιστικές απαιτήσεις, χρόνου και αποθήκευσης γιά τα ακόλουθα μοντέλα συστημάτων.

α) Περιοδικά μοντέλα

Σε αυτή την χρονικά μεταβαλλόμενη περίπτωση, ο αλγόριθμος Α, δίνεται ξανά από τις εξισώσεις (2.6)-(2.20) μόνο που οι ποσότητες $K_1(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot)$, $N(\cdot)$, $P_n(\cdot)+C_n(\cdot)\left[Q_r^{-1}(\cdot)+O_{n2}(\cdot)\right]^{-1}C_n^T(\cdot)$, και ο συντελεστής του z(k+1) στην εξίσωση (2.16), του φίλτρου αν και χρονικά μεταβαλλόμενες, είναι τώρα περιοδικές με την ίδια περίοδο με αυτή του μοντέλου. Έτσι αυτές χρειάζεται να υπολογισθούν μόνο σε ένα υποδιάστημα δεδομένων (data) ίσο με την περίοδο, και να αποθηκευθούν γιά χρήση στη συνέχεια στο υπόλοιπο τμήμα του ολικού διαστήματος δεδομένων.

β) Αργά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα

Διαμελισμός του ολικού διαστήματος δεδομένων σε υποδιαστήματα στα οποία το μοντέλο είναι προσεγγιστικά χρονικά αμετάβλητο, έχει σαν αποτέλεσμα αν και διαφορετικός σε κάθε υποδιάστημα, ο αλγόριθμος Α, να δίνεται από τις απλούστερες εξισώσεις (2.37)-(2.49) (σε κάθε υποδιάστημα). Έτσι οι ποσότητες Φ_1, K_1, N, $P_n + C_n\left[Q_r^{-1} + O_{n2}\right]^{-1}C_n^T$, N, ο συντελεστής του z(k+1) στο M(·), του φίλτρου χρειάζεται να υπολογισθούν μόνο μία φορά γιά κάθε υποδιάστημα, και αποθηκεύονται γιά χρήση παντού στο υποδιάστημα που ανήκουν.

11) Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Α δίνεται συναρτήσει ορισμένων βασικών ποσοτήτων, ονομαστικά των $K_1(k+1,k)$, $\Phi_1(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $M(k+1,k)$. Είναι ενδιαφέρον από θεωρητικής πλευράς να βρούμε την σχέση μεταξύ των ανωτέρω βασικών ποσοτήτων του αλγόριθμου Α και των αντίστοιχων ποσοτήτων του φίλτρου Kalman, δηλουμένων με

$K_k(k+1,0)$, $\Phi_k(k+1,k)$, $O_k(k+1,k)$, $M_k(k+1,k)$ που ορίζεται ως εξής (σε ανάλογες σχέσεις μεταξύ των βασικών ποσοτήτων Αλγορίθμων Διαμελισμού του Λαϊνιώτη και αντίστοιχων του Φίλτρου Kalman, έχουν καταλήξει οι Lainiotis [26, 27, 34] και Gonvidaraj, Lainiotis [13])

$$K_k(k+1,0) = P(k+1/k)H^T(k+1)A_k(k+1) \tag{2.50}$$

$$\Phi_k(k+1,k) = \left[I_n - K_k(k+1,0)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{2.51}$$

$$O_k(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_k(k+1)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} \tag{2.52}$$

$$M_k(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_k(k+1) z_k(k+1) \tag{2.53}$$

όπου

$$P(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P(k/k)\Phi^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \tag{2.54}$$

$$A_k(k+1) = \left[H(k+1)P(k+1/k)H^T(k+1) + R(k+1)\right]^{-1} \tag{2.55}$$

$$Z_k(k+1) = z(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1,k)\hat{x}(k,0) \tag{2.56}$$

Οπότε οι ποσότητες $K_1(k+1,k)$ και $K_k(k+1,k)$, $\Phi_1(k+1,k)$ και $\Phi_k(k+1,k)$, $N(k+1,k)$ και $O_k(k+1,k)$, $M(k+1,k)$ και $M_k(k+1,k)$ συνδέονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$K_k(k+1,0) = K_1(k+1,k) + \Phi_0(k+1,k)H^T(k+1)A(k+1) \tag{2.57}$$

$$\Phi_k(k+1,k) = \Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} P^{-1}(k,0) \tag{2.58}$$

$$O_k(k+1,k) = N(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} P^{-1}(k,0) \tag{2.59}$$

$$M_k(k+1,k) = P^{-1}(k,0)\left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} \left[M\ (k+1,k) - N(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.60}$$

όπου οι ποσότητες $K_1(k+1,k)$, $\Phi_0(k+1,k)$, $A(k+1)$, $\Phi_1(k+1,k)$,

$N(k+1,k)$, $M(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.10), (2.34), (2.20), (2.9), (2.15), (2.16).

12) Τέλος δίνεται έμφαση στο γεγονός, ότι η εκλογή της διασποράς της $u_n(k)$, ονομαστικά $Q_n(k)$, είναι εντελώς τυχαία, οφείλεται στην κρίση και εμπειρία του σχεδιαστή του φίλτρου σύμφωνα με την εξίσωση: $Q(k) = Q_n(k) + Q_r(k)$. Όπως θα φανεί στη συνέχεια η $Q_n(k)$ μπορεί να εκλεγεί να δίνει ικανοποιητική υπολογιστική υλοποίηση του βέλτιστου γραμμικού φίλτρου.

Στη συνέχεια γιά το διαμελισμό του μοντέλου που αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του τμήματος του κεφαλαίου (στη περίπτωση του Αλγόριθμου Α), με μηδενικές συμβατικές συνθήκες, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k (ήτοι γιά $\hat{x}_n(k)=0_{n\times 1}$ $P_n(k)=0_{n\times n}$, $Q_n(k)=0_{p\times p}$ γιά $k=1,2,\ldots$ προκύπτει (από τον Αλγόριθμο Α) ο ακόλουθος αναδρομικός αλγόριθμος.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α 2.1 (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Β)

Ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ. $\hat{x}(k+1,0)$ και αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1,0)$ (γιά τον παραπάνω διαμελισμό του μοντέλου) δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k)\Phi_0(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}\left[M(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.61}$$

$$P(k+1,0) = \Gamma(k)\left[Q^{-1}(k)+0_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}\Gamma^T(k)+\Phi_0(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}\Phi_0^T(k+1,k) \tag{2.62}$$

όπου

$$\hat{x}_1(k+1,k) = K_1(k+1,k)z(k+1) \tag{2.63}$$

$$K_1(k+1,k) = \Gamma(k)\left[Q^{-1}(k)+0_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}\Gamma^T(k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1) \tag{2.64}$$

$$\Phi_0(k+1,k) = \Phi(k+1,k)-\Gamma(k)L(k+1,k) \tag{2.65}$$

$$L(k+1,k) = \left[Q^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} O_{n3}^{T}(k+1,k) \tag{2.66}$$

$$N(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) - O_{n3}(k+1,k)\, L(k+1,k) \tag{2.67}$$

$$M(k+1,k) = \Phi_0^T(k+1,k) H^T(k+1) R^{-1}(k+1) z(k+1) \tag{2.68}$$

$$O_{n1}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T R^{-1}(k+1)\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} \tag{2.69}$$

$$O_{n2}(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T R^{-1}(k+1)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\} \tag{2.70}$$

$$O_{n3}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T R^{-1}(k+1)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\} \tag{2.71}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0,0)=\hat{x}_0$ και $P(0,0)=P_0$

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1) Η απόδειξη του πορίσματος 2.1 δίνεται στο παράρτημα Β.

2) Ο Αλγόριθμος Β αποτελεί μία ανά δείγμα έκφραση του Αλγόριθμου Διαμελισμού των Lainiotis, Andrisani (που δίνεται στο Θεώρημα 1.4 του προηγουμένου κεφαλαίου)*.

3) Ο αλγόριθμος Β έχει λιγότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα από τον αλγόριθμο Α, διότι εδώ έχουμε $K_n(k+1,k)=0_{n\times m}$, $P(k+1,k)=0_{n\times n}$ $\Phi_1(k+1,k)=\Phi_0(k+1,k)$, $C_n(k+1,k)=\Gamma(k)$, $A(k+1)=R^{-1}(k+1)$.

4) Οι ποσότητες $O_{n2}(k+1,k)$, $K_1(k+1,k)$, $\Phi_0(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $\Phi_0^T(k+1,k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1)$ ορίζονται πλήρως, απλά και μη αναδρομικά χρησιμοποιώντας και τα δεδομένα στην τρέχουσα χρονική στιγμή t_{k+1}.

5) Ο ίδιος αριθμός αντιστροφών μητρώων απαιτείται όπως στον αλγόριθμο Α.

6) Χρησιμοποιόντας το Λήμμα Α1 (του Παραρτήματος Α) οι εξισώσεις (2.61), (2.62) μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη μορφή:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k) + \Phi_0(k+1,k)\left[P(k,0)N(k+1,k)+I_n\right]^{-1} \left[P(k,0)M(k+1,k)+\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.72}$$

---

* Οι αποδείξεις των παρατηρήσεων 2,7,10 δίνονται στο παράρτημα Β.

$$P(k+1,0) = \Gamma(k)S_0(k+1,k)\Gamma^T(k)+\Phi_0(k+1,k)\left[P(k,0)N(k+1,k)+I_n\right]^{-1}$$
$$P(k,0)\Phi_0^T(k+1,k) \tag{2.73}$$

όπου

$$S_0(k+1,k) = \left[Q(k)O_{n2}(k+1,k) + I_p\right]^{-1}Q(k) \tag{2.74}$$

$$L(k+1,k) = S_0(k+1)O_{n3}^T(k+1,k) \tag{2.75}$$

$$K_1(k+1,k) = \Gamma(k)S_0(k+1,k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1) \tag{2.76}$$

7) Γιά $Q(k)=O_{p\times p}$ από τις εξισώσεις (2.72), (2.71) έχουμε ότι:

$$\hat{x}(k+1,0) = \Phi(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+O_{n1}(k+1,k)\right]^{-1}$$
$$\left[\Phi^T(k+1,k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1)z(k+1)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.77}$$

$$P(k+1,0) = \Phi(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+O_{n1}(k+1,k)\right]^{-1}\Phi^T(k+1,k) \tag{2.78}$$

Αποτέλεσμα στον οποίον καταλήγει και το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη γιά $Q(k) = O_{p\times p}$.

8) Γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα ο αλγόριθμος Β δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k)+\Phi_0\left[P^{-1}(k,0)+N\right]^{-1}$$
$$\left[M(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \tag{2.79}$$

$$P(k+1,0) = \Gamma\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}\Gamma^T+\Phi_0\left[P^{-1}(k,0)+N\right]^{-1}\Phi_0^T \tag{2.80}$$

όπου

$$\hat{x}_1(k+1,k) = K_1 z(k+1) \tag{2.81}$$

$$K_1 = \Gamma\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}\Gamma^T H^T R^{-1} \tag{2.82}$$

$$\Phi_0 = \Phi - \Gamma L \tag{2.83}$$

$$N = O_{n1} - O_{n3}L \tag{2.84α}$$

$$L = \left[Q^{-1} + O_{n2}\right]^{-1} O_{n3}^{T} \tag{2.84β}$$

$$M(k+1,k) = \Phi_0^T H^T R^{-1} z(k+1) \tag{2.85}$$

$$O_{n1} = (H\Phi)^T R^{-1} (H\Phi) \tag{2.86}$$

$$O_{n2} = (H\Gamma)^T R^{-1} (H\Gamma) \tag{2.87}$$

$$O_{n3} = (H\Phi)^T R^{-1} (H\Gamma) \tag{2.88}$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω πραγματοποίηση του βέλτιστου φίλτρου γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα είναι ένα πλήρως χρονικά αμετάβλητο ακόμη και από την πρώτη επανάληψη. Επίσης οι ποσότητες, O_{n1}, O_{n2}, O_{n3}, Φ_0, K_1, $\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}$, L, N, $\Phi_0^T H^T R^{-1}$, $\Gamma\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}\Gamma^T$ υπολογίζονται μιά φορά και αποθηκεύονται (εκτός από τις ποσότητες O_{n1}, O_{n2}, O_{n3}, $\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}$, L οι οποίες δεν χρειάζονται εκτός από την πρώτη επανάληψη) γιά χρήση στην συνέχεια. Τέλος εδώ απαιτούνται δύο αντιστροφές μητρώων (διαστάσεων n×n) ανά επανάληψη και τρείς αντιστροφές μητρώων (μία διαστάσεων m×m και δύο διαστάσεων p×p) γιά την πρώτη επανάληψη.

9) Ο Αλγόριθμος Β παρουσιάζει τα ίδια υπολογιστικά πλεονεκτήματα με τον αλγόριθμο Α, για τις περιπτώσεις που το μοντέλο του συστήματος είναι περιοδικό ή αργά χρονικά μεταβαλλόμενο, όσον αφορά τις ποσότητες: Φ_0, K_1, N, $\Gamma\left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}\Gamma^T$, $\Phi_0^T H^T R^{-1}$.

10) Και τέλος οι βασικές ποσότητες $K_1(k+1,k)$, $\Phi_0(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $M(k+1,k)$ του αλγόριθμου Β συνδέονται με τις αντίστοιχες ποσότητες $K_k(k+1,k)$, $\Phi_k(k+1,k)$, $O_k(k+1,k)$, $M_k(k+1,k)$ (που ορίζονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.50), (2.51), (2.52), (2.53)) σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$K_k(k+1,0) = K_1(k+1,k)+\Phi_0(k+1,k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1) \tag{2.89}$$

$$\Phi_k(k+1,k) = \Phi_0(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}P^{-1}(k,0) \tag{2.90}$$

$$O_k(k+1,k) = N(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}P^{-1}(k,0) \qquad (2.91)$$

$$M_k(k+1,k) = P^{-1}(k,0)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}$$
$$\left[M(k+1,k)-N(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right] \qquad (2.92)$$

όπου οι ποσότητες $K_1(k+1,k)$, $\Phi_0(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $M(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.64), (2.65), (2.67), (2.68).

2.3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ (ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ)

Στο γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), θεωρούμε σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, διαμελισμό του διανύσματος αρχικής κατάστασης $x(0)$, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_n(0)$ και $x_r(0)$, ονομαστικά $x(k) = x_n(k) + x_r(k)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (2.3), (2.4), (1.27a), (1.27b), (1.30). Οπότε γιά μηδενικές τις συμβατικές αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(k)$, $P_n(k)$, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, προκύπτει ο αναδρομικός αλγόριθμος του παρακάτω θεωρήματος.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 2.2 (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ)

Ο βέλτιστος εκτιμητής μ. τ. λ. $\hat{x}(k+1,0)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης $P(k+1,0)$ (γιά τον παραπάνω διαμελισμό του μοντέλου) δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)\hat{x}_r(k/k+1) \qquad (2.93)$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)P_r(k/k+1)\Phi_n^T(k+1,k) \qquad (2.94)$$

όπου το συμβατικό φίλτρο δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1) \qquad (2.95)$$

$$K_n(k+1,k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1) \qquad (2.96)$$

$$A(k+1) = \left[H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)+R(k+1)\right]^{-1} \tag{2.97}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{2.98}$$

$$P_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \tag{2.99}$$

ενώ γιά το φίλτρο της υπολοίπου συνιστώσας θα ισχύει:

$$\hat{x}_r(k/k+1) = \hat{x}(k,0)+K_r(k+1,0)z_r(k+1,k) \tag{2.100}$$

$$K_r(k+1,0) = P(k,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T B(k+1,0) \tag{2.101}$$

$$B(k+1,0) = \left[A^{-1}(k+1) + \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ P(k,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T\right]^{-1} \tag{2.102}$$

$$z_r(k+1,0) = z(k+1) - \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ \hat{x}(k,0) \tag{2.103}$$

$$P_r(k/k+1) = \left[I_n-K_r(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\right]P(k,0) \tag{2.104}$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0,0)=\hat{x}_0$, $P(0,0)=P(0)$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1) Η απόδειξη του θεωρήματος 2.2 δίνεται στο Παράρτημα Γ.
2) Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού των Andrisani, Gau (που συζητήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο θεώρημα 1.5)*
3) Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $K_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$ υπολογίζονται απλά, πλήρως και μη αναδρομικά από τις σχέσεις (2.96), (2.98), (2.99) αντίστοιχα, χρησιμοποιόντας μόνο τις ποσότητες του μοντέλου και των δεδομένων στην τρέχουσα χρονική στιγμή t_{k+1}.
4) Απαιτούνται δύο αντιστροφές μητρώων, ανά επανάληψη, διαστάσεων m×m.

---

* Η απόδειξη της παρατήρησης 2 είναι η ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.3, ενώ οι αποδείξεις των παρατηρήσεων 5,8 δίνονται στο Παράρτημα Γ.

5) Η ποσότητα $B(k+1,0)$ που δίνεται από την εξίσωση (2.102) είναι ουσιαστικά η ποσότητα $P_z^{-1}(k+1/k)$ (εξίσωση (1.22)) του φίλτρου Kalman.

6) Όπως στην περίπτωση των αλγορίθμων Α,Β έτσι και εδώ τα υπολογιστικά πλεονεκτήματα του αλγόριθμου Γ προκύπτουν στην περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, όπου αυτός γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+\Phi_n\hat{x}_r(k/k+1) \tag{2.105}$$

$$P(k+1,0) = P_n+\Phi_n P_r(k/k+1)\Phi_n^T$$

όπου

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n z(k+1) \tag{2.107}$$

$$K_n = \Gamma Q\Gamma^T H^T A \tag{2.108}$$

$$A = \left[H\Gamma Q\Gamma^T H^T+R\right]^{-1} \tag{2.109}$$

$$\Phi_n = \left[I_n-K_n H\right]\Phi \tag{2.110}$$

$$P_n = \left[I_n-K_n H\right]\Gamma Q\Gamma^T \tag{2.111}$$

$$\hat{x}_r(k/k+1) = \hat{x}(k,0)+K_r(k+1,0)z_r(k+1,0) \tag{2.112}$$

$$K_r(k+1,0) = P(k,0)(H\Phi)^T B(k+1,0) \tag{2.113}$$

$$B(k+1,0)=\left[A^{-1}+(H\Phi)P(k,0)(H\Phi)^T\right]^{-1} \tag{2.114}$$

$$z_r(k+1,0)= z(k+1) - (H\Phi)\hat{x}(k,0) \tag{2.115}$$

$$P_r(k/k+1) = \left[I_n-K_r(k+1,0)(H\Phi)\right]P(k,0) \tag{2.116}$$

όπου τώρα οι ποσότητες K_n, A, A^{-1}, Φ_n, P_n, $(H\Phi)$ υπολογίζονται μία φορά και αποθηκεύονται γιά χρήση στη συνέχεια (εκτός από την ποσότητα Α που χρειάζεται μόνο στην πρώτη επανάληψη).

Τώρα απαιτείται μιά αντιστροφή μητρώου ανά επανάληψη και μία στην πρώτη επανάληψη, και οι δύο διαστάσεων m×m.

7) Ο αλγόριθμος Γ, όπως και οι αλγόριθμοι Α, Β, παρουσιάζει ανάλογα υπολογιστικά πλεονεκτήματα όταν το μοντέλο του συστήματος είναι περιοδικό ή αργά χρονικά μεταβαλλόμενο, όσον αφορά τις ποσότητες $K_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$, $A^{-1}(\cdot)$.

8) Οι βασικές ποσότητες $\Phi_n(\cdot)$, $K_n(\cdot)$, $K_r(\cdot)$ (που δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.98), (2.95), (2.100)) του αλγόριθμου Γ συνδέονται με τις αντίστοιχες $\Phi_k(\cdot)$, $K_k(\cdot)$ (που δίνονται από τις εξισώσεις (2.51), (2.50)) σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$K_k(k+1,0) = K_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)K_r(k+1,0) \tag{2.117}$$

$$\Phi_k(k+1,k) = \Phi_n(k+1,k)\left[I_n-K_r(k+1,0)\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\right] \tag{2.118}$$

2.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Δ1 (ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΙ ΣΤΟ ΘΟΡΥΒΟ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ)

Ο διαμελισμός του μοντέλου που θεωρούμε σε αυτό το τμήμα του κεφαλαίου, γιά το γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τις σχέσεις (1.1)-(1.14), είναι ο ίδιος με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση του αλγόριθμου Α και συγκεκριμμένα:

Θεωρούμε ταυτόχρονο διαμελισμό της αρχικής συνθήκης x(0) και του θορύβου διεργασίας u(k), σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.1),(2.2) και έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (1.27a)-(1.30) και (1.56)-(1.62). Οπότε, γιά μηδενικές συμβατικές αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(k)$ και $P_n(k)$, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, προκύπτει ο αναδρομικός αλγόριθμος του παρακάτω θεωρήματος.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α 2.3 (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Δ1)

Γιά τον παραπάνω διαμελισμό του μοντέλου ο βέλτιστος εκτιμητής μ.τ.λ. $\hat{x}(k+1,0)$ και η αντίστοιχη διασπορά λάθους εκτίμησης P(k+1,0) δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)\hat{x}_{r1}(k/k+1)+ +C_n(k+1,k)\hat{x}_{r2}(k/k+1) \tag{2.119}$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+\Big[\Phi_n(k+1,k)P_{r1}(k/k+1)+C_n(k+1,k) P_{r3}^T(k/k+1)\Big]\Phi_n^T(k+1,k)+\Big[\Phi_n(k+1,k)P_{r3}(k/k+1)+ +C_n(k+1,k)P_{r2}(k/k+1)\Big] C_n^T(k+1,k) \tag{2.120}$$

όπου:

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1) \tag{2.121}$$

$$K_n(k+1,k) = \Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1) \tag{2.122}$$

$$A(k+1) = \Big[H(k+1)\Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)+R(k+1)\Big]^{-1} \tag{2.123}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \Big[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\Big]\Phi(k+1,k) \tag{2.124}$$

$$C_n(k+1,k) = \Big[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\Big]\Gamma(k) \tag{2.125}$$

$$P_n(k+1,k) = \Big[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\Big]\Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k) \tag{2.126}$$

$$\hat{x}_{r1}(k/k+1) = \hat{x}(k,0)+K_{r1}(k+1,0)z_r(k+1,0) \tag{2.127}$$

$$K_{r1}(k+1,0) = P(k,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T B(k+1,0) \tag{2.128}$$

$$B(k+1,0)=\Big[A^{-1}(k+1) + \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ P(k,0)\ \{H(k+1)\cdot \Phi(k+1,k)\}^T+\{H(k+1)\Gamma(k)\}\ Q_r(k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T\Big]^{-1} \tag{2.129}$$

$$z_r(k+1,0)= z(k+1) - \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ \hat{x}(k,0) \tag{2.130}$$

$$\hat{x}_{r2}(k/k+1) = K_{r2}(k+1,0)z_r(k+1,0) \tag{2.131}$$

$$K_{r2}(k+1,0) = Q_r(k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T B(k+1,0) \tag{2.132}$$

$$P_{r1}(k/k+1) = \left[I_n - K_r(k+1,0)\,\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} \right] P(k,0) \qquad (2.133)$$

$$P_{r3}(k/K+1) = -K_{r1}(k+1,0)\,\{H(k+1)\Gamma(k)\}\,Q_r(k) \qquad (2.134)$$

$$P_{r2}(k/k+1) = \left[I_p - K_{r2}(k+1,0)\,\{H(k+1)\Gamma(k)\} \right] Q_r(k) \qquad (2.135)$$

με αρχικές συνθήκες $\hat{x}(0,0)=\hat{x}(0)$, $P(0,0)=P(0)$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1) Η απόδειξη του θεωρήματος 2.3 δίνεται στο Παράρτημα Δ.

2) Παρατηρούμε ότι και εδώ οι ποσότητες $K_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$, $P_n(\cdot)$ υπολογίζονται από τις μη αναδρομικές εξισώσεις (2.122), (2.124), (2.125), (2.126) που χρησιμοποιούν μόνο τις ποσότητες του μοντέλου και των δεδομένων στην τρέχουσα χρονική στιγμή t_{k+1}.

3) Εδώ απαιτούνται δύο αντιστροφές μητρώων διαστάσεων $m \times m$ ανά επανάληψη.

4) Και εδώ η ποσότητα $B(k+1,0)$ (εξίσωση (2.129)) είναι ουσιαστικά η ποσότητα $P_z^{-1}(k+1/k)$ (εξίσωση (1.22)) του φίλτρου Kalman*

5) Ο αλγόριθμος Δ1 αποτελεί μία γενίκευση του αλγόριθμου Γ.

6) Για $Q_n(k)=0_{p\times p}$, $Q_r(k)=Q(k)$ από τον αλγόριθμο Δ1 προκύπτει το φίλτρο Kalman.

7) Για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα ο αλγόριθμος Δ1 γράφεται:

$$x(k+1,0) = x_n(k+1,k) + \Phi_n x_{r1}(k/k+1) + C_n x_{r2}(k/k+1) \qquad (2.136)$$

$$P(k+1,0) = P_n + \left[\Phi_n P_{r1}(k/k+1) + C_n P_{r3}^T(k/k+1) \right] \Phi_n^T + \left[\Phi_n P_{r3}(k/k+1) + C_n P_{r2}(k/k+1) \right] C_n^T$$

όπου

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n z(k+1) \qquad (2.138)$$

---

* Οι αποδείξεις των παρατηρήσεων 4,5,6,9 δίνονται στο παράρτημα Δ.

$$K_n = \Gamma Q_n \Gamma^T H^T A \tag{2.139}$$

$$A = \left[H\Gamma Q_n \Gamma^T H^T + R \right]^{-1} \tag{2.140}$$

$$\Phi_n = \Phi - K_n (H\Phi) \tag{2.141}$$

$$C_n = \Gamma - K_n (H\Gamma) \tag{2.142}$$

$$P_n = \Gamma Q_n \Gamma^T - K_n H (\Gamma Q_n \Gamma^T) \tag{2.143}$$

$$B_0 = A^{-1} + (H\Gamma) Q_r (H\Gamma)^T \tag{2.144}$$

$$B(k+1,0) = \left[(H\Phi) P(k,0) (H\Phi)^T + B_0 \right]^{-1} \tag{2.145}$$

$$\hat{x}_{r1}(k/k+1) = \hat{x}(k,0) + K_{r1}(k+1,0) z_r(k+1,0) \tag{2.146}$$

$$K_{r1}(k+1,0) = P(k,0)(H\Phi)^T B(k+1,0) \tag{2.147}$$

$$z_r(k+1,0) = z(k+1) - (H\Phi)\hat{x}(k,0) \tag{2.148}$$

$$\hat{x}_{r2}(k/k+1) = K_{r2}(k+1,0) z_r(k+1,0) \tag{2.149}$$

$$K_{r2}(k+1,0) = Q_r (H\Gamma)^T B(k+1,0) \tag{2.150}$$

$$P_{r1}(k/k+1) = \left[I_n - K_{r1}(k+1,0)(H\Phi) \right] P(k,0) \tag{2.151}$$

$$P_{r2}(k/k+1) = \left[I_p - K_{r2}(k+1,0)(H\Gamma) \right] Q_r \tag{2.152}$$

$$P_{r3}(k/k+1) = -K_{r1}(k+1,0)(H\Gamma) Q_r \tag{2.153}$$

και συνεπώς οι ποσότητες K_n, A, Φ_n, C_n, P_n, B_0, $(H\Phi)$, $(H\Gamma)^T Q_r$, Q_r χρειάζεται να υπολογισθούν μόνο μιά φορά και να αποθηκευθούν (εκτός από την ποσότητα A) γιά χρήση στη συνέχεια. Έτσι χρειάζεται μόνο μιά αντιστροφή μητρώου ανά επανάληψη και άλλη μιά γιά την πρώτη επανάληψη, και οι δύο διαστάσεων m×m.

8) Έχουμε και εδώ υπολογιστικά πλεονεκτήματα, όσον αφορά τις

ποσότητες $K_n(\cdot),\Phi_n(\cdot),P_n(\cdot),C_n(\cdot),B_0(\cdot)$, γιά τις περιπτώσεις περιοδικών μοντέλων ή αργά χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων ανάλογα των αλγόριθμων Α,Β και Γ.

9) Οι βασικές ποσότητες $K_n(\cdot)$, $K_{r1}(\cdot)$, $K_{r2}(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$ (που δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.122), (2.128), (2.132), (2.124), (2.125)) του αλγόριθμου Δ1 συνδέονται με τις αντίστοιχες ποσότητες $K_k(\cdot)$, $\Phi_k(\cdot)$ (που δίνονται από τις εξισώσεις (2.49), (2.50)) σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$K_k(k+1,0) = K_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)K_{r1}(k+1,0)+C_n(k+1,k)K_{r2}(k+1,0) \tag{2.155}$$

$$\Phi_k(k+1,k) = \Phi_n(k+1,k)-\left[\Phi_n(k+1,k)K_{r1}(k+1,0)+C_n(k+1,k)K_{r2}(k+1,0)\right]\cdot H(k+1)\Phi(k+1,k) \tag{2.155}$$

10) Τέλος ο υπολογισμός των ποσοτήτων $K_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$,$P_n(\cdot)$, βασίζεται μόνο στη συμβατική συνιστώσα $u_n(k)$ του θορύβου διεργασίας $u(k)$. Η εκλογή όμως της διασποράς $Q_n(k)$, είναι εντελώς τυχαία, οφείλεται στην κρίση και εμπειρία του σχεδιαστή του φίλτρου σύμφωνα με την εξίσωση (2.5).

2.5 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΑΝΑ ΔΕΙΓΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν τέσσερις νέοι αναδρομικοί αλγόριθμοι διαμελισμού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης, οι αλγόριθμοι Α,Β,Γ,Δ1, γιά τους οποίους ανακεφαλαιόνοντας έχουμε ότι:

1) Ο χρησιμοποιούμενος διαμελισμός μοντέλου, στην περίπτωση των αλγορίθμων Α,Β και Δ1 αποτελείται, από ταυτόχρονο διαμελισμό του διανύσματος αρχικής συνθήκης $x(0)$ και του θορύβου διεργασίας $u(k)$, σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, αντίστοιχα, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα (σύμφωνα με τις σχέσεις (2.1), (2.2) και τις σχέσεις (2.3),(2,4),(2,5)), με κατάλληλα εκλεγμένες τις συμβατικές συνθήκες. Και συγκεκριμμένα, θεωρούμε σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, γιά μεν την περίπτωση

των αλγορίθμων Α,Δ1, ότι $\hat{x}_n(k)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(k)=\mathbf{0}_{n\times n}$ (γιά k=1,2,...), ενώ γιά την περίπτωση του αλγόριθμου Β ότι $\hat{x}_n(k)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(k)=\mathbf{0}_{n\times n}$, $Q_n(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$ (γιά k = 1,2,...). Στην περίπτωση του αλγόριθμου Γ, ο χρησιμοποιούμενος διαμελισμός του μοντέλου αποτελείται από τον διαμελισμό του διανύσματος της αρχικής συνθήκης x(0), σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k, σε δύο στατιστικά ανεξάρτητα διανύσματα (σύμφωνα με τις σχέσεις (2.1), (2.3),(2.4)), θεωρόντας μηδενικές συμβατικές αρχικές συνθήκες (ήτοι $\hat{x}_n(k)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(k)=\mathbf{0}_{n\times n}$ γιά k = 1,2,...).

2) Χρησιμοποιόντας ένα επαυξημένο, καταστατικό μοντέλο του συστήματος, από μεν το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη καταλήγουμε πρώτα στον αλγόριθμο Α και στη συνέχεια (από τον αλγόριθμο Α γιά $Q_n(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$) στον αλγόριθμο Β, από δε τον αλγόριθμο Γ προκύπτει ο αλγόριθμος Δ1.

3) Οι αλγόριθμοι Α,Β αποτελούν ανά δείγμα εκφράσεις του Αλγόριθμου Διαμελισμού των Lainiotis, Andrisani (που δίνεται στο θεώρημα 1.4), ενώ ο αλγόριθμος Γ αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού των Andrisani, Gau (που δίνεται στο θεώρημα 1.5).

4) Ο αλγόριθμος Α αποτελεί μία γενίκευση του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, ενώ ο αλγόριθμος Δ1 αποτελεί μία γενίκευση του αλγόριθμου Γ.

5) Ο αλγόριθμος Β έχει λιγότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα από τον αλγόριθμο Α.

6) Στους αλγόριθμους Α και Δ1, η εκλογή της διασποράς $Q_n(k)$ (της συμβατικής συνιστώσας $u_n(k)$ του θορύβου διεργασίας u(k)), είναι εντελώς τυχαία, οφείλεται στην κρίση και εμπειρία του σχεδιαστή του φίλτρου σύμφωνα με την εξίσωση (2.5).

7) Και οι τέσσερις νέοι αλγόριθμοι παρουσιάζουν αξιοσημείωτα υπολογιστικά πλεονεκτήματα γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα, καθώς επίσης και γιά δύο ειδικές κατηγορίες χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων, τα περιοδικά μοντέλα και τα αργά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα. Γιά την περίπτωση δε των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων, σημαντικό υπολογιστικό μειονέκτημα γιά τους νέους αυτούς αλγόριθμους είναι οι αντιστροφές μητρώων που απαιτούνται

ανά επανάληψη. Και συγκεκριμμένα γιά να "τρέξουν" οι αλγόριθμοι Α και Β απαιτούν πέντε αντιστροφές (συμμετρικών) μητρώων (μία διαστάσεων m×m, δύο διαστάσεων p×p και δύο διαστάσεων n×n) ανά επανάληψη, ενώ γιά να "τρέξουν" οι αλγόριθμοι Γ και Δ1 απαιτούν δύο αντιστροφές (συμμετρικών) μητρώων (διαστάσεων m×m) ανά επανάληψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πραγματοποίηση των βέλτιστων φίλτρων γραμμικής εκτίμησης των αλγόριθμων Α, Β, Γ, Δ1 που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, απαιτεί την χρησιμοποίηση υπολογιστή, γιαυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον και έχει και πρακτική σημασία η υπολογιστική ανάλυση των εν λόγω αλγορίθμων, και η σύγκριση μεταξύ των, καθώς και με τους αλγόριθμους Kalman, Γενικευμένο Αλγόριθμο Διαμελισμού του Λαϊνιώτη (ΓΑΔΛ), Αναδρομικό Αλγόριθμο Διαμελισμού (ΑΑΔ), Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη (ΓΦΔΑΔΛ) όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου υπολογισμών. Τα ζητούμενα δε ποσά αποθήκευσης και χρόνου υπολογισμών προκύπτουν σαν συναρτήσεις των διαστάσεων των διανυσμάτων κατάστασης, μετρήσεων και θορύβου διεργασίας (δηλαδή των n,m,p αντίστοιχα). Επίσης η παρούσα ανάλυση χωρίζεται σε δύο τμήματα, το ένα αναφέρεται σε χρονικά αμετάβλητα μοντέλα και το άλλο σε χρονικά μεταβαλλόμενα.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των αλγορίθμων θα αναφερθούμε αμέσως στη συνέχεια στις βασικές υποθέσεις που στηρίζεται η παρούσα συγκριτική ανάλυση.

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Οι βασικές υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται η παρούσα συγκριτική υπολογιστική ανάλυση, αποτελούν ένα συνδυασμό των υποθέσεων που έχουν γίνει στις εργασίες των Mendel [47], Gura-Bierman [14] , Κοσμίδη (Cosmidis [5, 6]) και είναι οι εξής:

1) Διακρίνουμε δύο τύπους αναγκών αποθήκευσης:

α) Την μόνιμη αποθήκευση (permament storage), δηλαδή το ποσό μνήμης του υπολογιστή που πρέπει να δοθεί μόνιμα στο φίλτρο και αποτελεί την μνήμη του φίλτρου.

β) Την βοηθητική αποθήκευση, (auxiliary storage) δηλαδή το επιπλέον ποσό της μνήμης του υπολογιστή που χρησιμοποιείται γιά

την αποθήκευση βοηθητικών μεταβλητών απαραίτητων ανά επανάληψη για να "τρέξει" το φίλτρο.

Το ολικό ποσό αποθήκευσης (σε λέξεις μνήμης)(menory words) προκύπτει από την άθροιση των ποσών μόνιμης και βοηθητικής αποθήκευσης. Στον Πίνακα Ε1 (Παράρτημα Ε) δίνονται τα απαιτούμενα ποσά για την αποθήκευση ενός γενικού και ενός συμμετρικού μητρώου, καθώς και ενός διανύσματος.

2) Η εκτέλεση ενός αλγόριθμου προϋποθέτει τη χρησιμοποίηση λειτουργιών που είναι χειρισμοί μητρώων ή διανυσμάτων. Μετρώντας τον αριθμό των "πολλαπλασιασμών", "προσθέσεων", "διαιρέσεων" και "τετραγωνικών ριζών" κάθε λειτουργίας του αλγόριθμου, σύμφωνα με τον Πίνακα Ε2 (του Παραρτήματος Ε) και "αθροίζοντας" (κατάλληλα) τα αποτελέσματα καταλήγουμε στον υπολογισμό του ζητούμενου υπολογιστικού χρόνου.

3) Υποθέτουμε πάντα την χρήση αριθμητικών μεταβλητών απλής ακρίβειας (single precision)

4) Στον υπολογισμό ποσών χρόνου και αποθήκευσης λαμβάνεται υπ' όψιν η σημμετρία μητρώων όπου εμφανίζεται.

5) Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης (ή αφαίρεσης) μητρώων (ή διανυσμάτων) μπορεί να αποθηκεύεται στην ίδια θέση μνήμης με ένα από τα δύο μητρώα (ή διανύσματα) τα οποία συμμετέχουν στην πράξη.

6) Όλες οι αντιστροφές των συμμετρικών θετικά καθορισμένων μητρώων υποτίθεται ότι εκτελούνται με την ικανή μέθοδο παραγοντοποίησης του Cholesky [4,8]. Το αντεστραμμένο μητρώο αποθηκεύεται στις ίδιες θέσεις που κατείχε το αρχικό μητρώο.

7) Όποιες ποσότητες υπολογίζονται μία φορά και χρειάζονται στη συνέχεια, φυλάσσονται.

8) Δεν έχει λειφθεί πρόνοια για τον υπολογισμό των μητρώων Φ, Η, Γ, Q, R. Ο αριθμός των λειτουργιών των αναγκαίων για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων εξαρτάται από την συγκεκριμμένη εφαρμογή. Γι αυτό εμείς εδώ θεωρούμε ότι τα ποσά αυτά είναι τα ίδια για όλους τους αλγόριθμους και δεν τα λαμβάνουμε υπ'όψιν.

9) Η διάσταση του διανύσματος θορύβου διεργασίας είναι μικρότερη ή ίση της διάστασης του διανύσματος κατάστασης ($p \leq n$).

Στη συνέχεια ακολουθεί η υπολογιστική ανάλυση των ανά δείγμα διαμελισμέων αλγορίθμων Α, Β, Γ, Δ1 και ΓΦΔΑΔΛ, του βασικού στη θεωρία της γραμμικής εκτίμησης φίλτρου Kalman, των σημαντικών αλγόριθμων διαμελισμού ΓΑΔΛ και ΑΑΔ, και τέλος γίνεται μία σύγκριση μεταξύ των (με βάση μία επανάληψη). Η ανάλυση όμως χωρίζεται σε δύο μέρη, το ένα αναφέρεται σε χρονικά αμετάβλητα μοντέλα και το άλλο σε χρονικά μεταβαλλόμενα. Η ανάγκη αυτού του διαχωρισμου προκύπτει από τους εξής λόγους:

1) Στη περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων* εμφανίζονται ποσότητες που παραμένουν χρονικά αμετάβλητες σε κάθε επανάληψη, που τις αποθηκεύουμε μόνιμα στη μνήμη του υπολογιστή, χωρίς να αποθηκεύονται στις θέσεις τους, κατά την εκτέλεση της κάθε επανάληψης, ενδιάμεσα άλλες ποσότητες. Στη περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων δεν υπάρχουν τέτοιες ποσότητες (εκτός από δύο στην περίπτωση του ΓΑΔΛ που είναι ο μόνος από τους αλγόριθμους που αναλύουμε που απαιτεί υπολογισμούς που εκτελούνται μόνο μία φορά (στην πρώτη επανάληψη) στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων).

2) Στη περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων κάθε αλγόριθμος περιλαμβάνει του υπολογισμούς που εκτελούνται μόνο μία φορά (τους προκαταρκτικούς υπολογισμούς) και τους υπολογισμούς ανά επανάληψη. Επειδή στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση με βάση μία επανάληψη, γιαυτό οι υπολογιστικές απαιτήσεις των προκαταρκτικών υπολογισμών δεν λαμβάνονται υπ'όψιν (αν και στη συνέχεια θα αναφερθούν, αλλά απλώς και μόνο γιά την πληρότητα της ανάλυσης). Στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων δεν υπάρχει αυτός ο διαχωρισμός (εκτός από εκείνες τις δύο ποσότητες του ΓΑΔΛ).

Γιά την καλλίτερη κατάνοηση αυτών των διαφορών, δίνονται στην ανάλυση που ακολουθεί, η αναλυτική εκτέλεση του Αλγόριθμου Β καιτου Φίλτρου Kalman, γιά χρονικά αμετάβλητα και χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η υπολογιστική ανάλυση γιά το Φίλτρο

---

* Στην περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων θεωρούμε ότι όλες οι ποσότητες Φ, Η, Γ, Q, R είναι χρονικά σταθερές.

Kalman βασίστηκε στην ανάλυση που έχει γίνει από τους Gura - Bierman [14] γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα, έχει όμως επεκταθεί γιά να περιλάβει την επίδραση του κέρδους του θόρυβου διεργασίας, (Γ(k)) τόσο γιά χρονικά αμετάβλητα όσο και γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα. Μία πρώτη δε προσπάθεια ανάλυσης των ΓΦΔΑΔΛ, ΓΑΔΛ, μόνο γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων έχει γίνει από την Κοσμίδη (Cosmidis [5]).

3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

3.3.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Α

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

1.3 Q_n

1.4 Q_r

με $Q_n + Q_r = Q$

2. Προκαταρκτικοί Υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q_n \Gamma^T$

2.2 $A = \left[(HQ_1)H^T + R \right]^{-1}$

2.3 $K_n = (HQ_1)^T A$

2.4 $P_n = Q_1 - K_n (HQ_1)$

2.5 $C_n = \Gamma - K_n (H\Gamma)$

2.6 $O_{n1} = (H\Phi)^T A (H\Phi)$

2.7 $O_{n2} = (H\Gamma)^T A (H\Gamma)$

2.8 $O_{n3} = (H\Phi)^T A (H\Gamma)$

2.9 $S_0 = \left[Q_r^{-1} + O_{n2}\right]^{-1}$

2.10 $K_1 = K_n + C_n S_0 (H\Gamma)^T A$

2.11 $L = S_0 O_{n3}^T$

2.12 $N = O_{n1} - O_{n3} L$

2.13 $\Phi_1 = \Phi - K_1 (H\Phi)$

2.14 $C_1 = C_n S_0 C_n^T$

2.15 $P_1 = P_n + C_1$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $M(k+1,k) = D\, z(k+1)$ όπου $D = (\Phi - \Gamma L)^T H^T A$

3.2 $x_1(k+1,k) = K_1 z(k+1)$

3.3 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + N\right]^{-1}$

3.4 $x(k+1,0) = x_1(k+1,k) + \Phi_1 S(k+1,0)\left[M(k+1,k) + P^{-1}(k,0)x(k,0)\right]$

3.5 $P(k+1,0) = P_1 + \Phi_1 S(k+1,0)\Phi_1^T$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Όπως βλέπουμε ο αλγόριθμος Α απαιτεί ορισμένους προκαταρκτικούς υπολογισμούς, που μας δίνουν τις ποσότητες D, K_1, N, Φ_1, P_1, οι οποίες είναι απαραίτητες στους υπολογισμούς ανά επανάληψη.

Η εκτέλεση αυτών των προκαταρκτικών υπολογισμών απαιτεί βοηθητική αποθήκευση:

$$2np+nm+\max(n^2,nm)+\max\left(\frac{m^2+m}{2},\ n^2\right) + \left(\frac{m^2+m}{2},\ \frac{n^2+n}{2}\right) \qquad (3.1)$$

λέξεις μνήμης

και χρόνο που προκύπτει από τους κάτωθι αριθμούς λειτουργιών

ΠΟΛ.* $2.5n^3+0.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+p^3+3p^2-2p+6.5n^2p+3.5np^2+$

$2np+6n^2m+2.5nm^2+1.5nm$

ΠΡ. $2.5n^3-5n^2-1.5n+0.5m^3-0.5m+p^3+0.5p^2-0.5p+6.5n^2p+$ (3.2)

$3.5np^2-3np+6n^2m+2.5nm^2-2.5nm$

ΔΙΑΙΡ. $2m+4p-3$

Τ.Ρ. $m+2p$

Στον Πίνακα 3.1 δίνεται η αναλυτική εκτέλεση των υπολογισμών ανά επανάληψη του αλγόριθμου Α που γιά να "τρέξει" χρειάζεται την μόνιμη αποθήκευση των χρονικά στεθερών ποσοτήτων D, K_1, N, Φ_1, P_1 και των ποσοτήτων $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$ ήτοι

$2.5n^2+2.5n+m+2nm$ λέξεις μνήμης (3.3)

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.1 ο αλγόριθμος Α απαιτεί ποσό βοηθητικής αποθήκευσης:

n^2+n λέξεις μνήμης (3.4)

και επομένως το ποσό της ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη) είναι:

$3.5n^2+3.5n+m+2nm$ λέξεις μνήμης (3.5)

Τέλος ο χρόνος (ανά επανάληψη), όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.1 δίνεται από τους ακόλουθους αριθμούς πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων και τετραγωνικών ριζών.

---

* Όπου ΠΟΛ. = Πολλαπλασιασμοί, ΠΡ. = Προσθέσεις, ΔΙΑΙΡ. = Διαιρέσεις, Τ.Ρ. = Τετραγωνικές ρίζες. Οι συμβολισμοί αυτοί θα χρησιμοποιηθούν και στο υπόλοιπο μέρος της διατριβής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1 Εκτέλεση αλγόριθμου Α γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	Τ.ΡΙΖΕΣ	ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ. Μνήμης)
1. $P_0=P^{-1}$	$0,5(n^3+3n^2-2n)$	$0.5(n^3-n)$	$2n-1$	n	απ.* στο P
2. $M_0=P_0\ \hat{x}$	n^2	n^2-n			n
3. $M=D\ z$	nm	$nm-n$			απ. στο $\hat{x}$
4. $M_1=M_0+M$		n			απ. στο $\hat{x}$
5. $\hat{x}_1=K_1\ z$	nm	$nm-n$			απ. στο 2
6. $S_1=N+P_0$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο P
7. $S=S_1^{-1}$	$0.5(n^3+3n^2-2n)$	$0.5(n^3-n)$	$2n-1$	n	απ. στο P
8. $Y=\Phi_1\ S$	n^3	n^3-n^2			n^2
9. $\hat{x}_3=Y.M_1$	n^2	n^2-n			απ. στο P
10. $\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_3$		n			απ. στο $\hat{x}$
11. $P_2=Y\ \Phi_1^T$	$0.5(n^3+n^2)$	$0,5(n^3-n)$			απ. στο P
12. $P=P_1+P_2$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο P

*. απ. = αποθηκεύεται

ΠΟΛ. $2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$

ΠΡ. $2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$ (3.6)

ΔΙΑΙΡ. $4n-2$

Τ.Ρ. $2n$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Β

α) Περιγραφή του Αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $A_0 = R^{-1}$

2.2 $O_{n2} = (H\Gamma)^T A_0 (H\Gamma)$

2.3 $O_{n3} = (H\Phi)^T A_0 (H\Gamma)$

2.4 $O_{n1} = (H\Phi)^T A_0 (H\Phi)$

2.5 $S_0 = \left[Q^{-1}+O_{n2}\right]^{-1}$

2.6 $L = S_0 O_{n3}^T$

2.7 $N = O_{n1} - O_{n3} L$

2.8 $\Phi_0 = \Phi - \Gamma L$

2.9 $P_1 = \Gamma S_0 \Gamma^T$

2.10 $K_1 = P_1 H^T A_0$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $M(k+1,k) = D\, z(k+1)$ όπου $D = \Phi_0^T H^T A$

3.2 $\hat{x}_1(k+1,k) = K_1 z(k+1)$

3.3 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + N\right]^{-1}$

3.4 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k) + \Phi_0 S(k+1,0) \left[M(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]$

3.5 $P(k+1,0) = P_1 + \Phi_0 S(k+1,0)\Phi_0^T$

β) Ανάλυση

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών, μας δίνει τις ποσότητες D, K_1, N, Φ_0, P_1 που χρειάζονται στους υπολογισμούς ανά επανάληψη και απαιτούν βοηθητική αποθήκευση:

$$1.5n^2+0.5n+np+nm+\max\left(\frac{m^2+m}{2},\ np\right) \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.7)$$

και χρόνο που προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $1.5n^3+0.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+p^3+3p^2-2p+nm^2+2.5n^2m+$
$0.5nm+4n^2p+2.5np^2+1.5np$

ΠΡ. $1.5n^3-2n^2-1.5n+0.5m^3-0.5m+p^3-p+nm^2+2.5n^2m-2.5nm+$ (3.8)
$4n^2p+2.5np^2-2.5nm$

ΔΙΑΙΡ. $2m+4p-3$

Τ.Γ. $2p+m$

Γιά την εκτέλεση μιάς επανάληψης ο αλγόριθμος Β απαιτεί την μόνιμη αποθήκευση των ποσοτήτων D, K_1, N, Φ_0, P_1 και $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$ και συνεπώς ποσό μόνιμης αποθήκευσης:

$$2.5n^2+2.5n+m+2nm \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.9)$$

και ακολουθόντας την ίδια υπολογιστική ακολουθία με τον Αλγόριθμο Α, προκύπτει από τον Πίνακα 3.1 ποσό βοηθητικής αποθήκευσης

n^2+n λέξεις μνήμης (3.10)

και επομένως προκύπτει το ακόλουθο ποσό ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη):

$3.5n^2+3.5n+m+2nm$ λέξεις μνήμης (3.11)

Τέλος ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος (ανά επανάληψη), όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.1, δίνεται από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ $2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$

ΠΡ. $2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$

ΔΙΑΙΡ. $4n-2$ (3.12)

Τ.Ρ. $2n$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q \Gamma^T$

2.2 $A_1 = (HQ_1)H^T + R$

2.3 $A = A_1^{-1}$

2.4 $K_n = (HQ_1)^T A$

2.5 $\Phi_n = \Phi - K_n(H\Phi)$

2.6 $P_n = Q_1 - K_n(HQ_1)$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $B(k+1,0) = \left[A_1 + (H\Phi)P(k,0)(H\Phi)^T\right]^{-1}$

3.2 $K_r(k+1,0) = P(k,0)(H\Phi)^T B(k+1,0)$

3.3 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n z(k+1)$

3.4 $z_r(k+1,0) = z(k+1) - (H\Phi)\hat{x}(k,0)$

3.5 $\hat{x}_r(k/k+1) = \hat{x}(k,0) + K_r(k+1,0)z_r(k+1,0)$

3.6 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k) + \Phi_n\hat{x}_r(k/k+1)$

3.7 $P_r(k/k+1) = P(k,0) - K_r(k+1,0)(H\Phi)P(k,0)$

3.8 $P(k+1,0) = P_n + \Phi_n P_r(k/k+1)\Phi_n^T$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών απαιτεί ποσό βοηθητικής αποθήκευσης ίσο με

$$0.5(m^2+m) + \max(n^2,nm) \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.11)$$

και χρόνο που προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $0.5m^3+1.5m^2-m+np^2+0.5n^2p+0.5np+3.5n^2m+1.5nm^2+nm$

ΠΡ. $0.5m^3-0.5m+np^2+0.5n^2p-0.5np+3.5n^2m+1.5nm^2-2nm-0.5n^2-0.5n$ (3.12)

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

Το απαιτούμενο ποσό ολικής αποθήκευσης ανά επανάληψη είναι:

$$2n^2+2n+4nm+0.5m^2+1.5m+\max\left(\frac{m^2+m}{2},\ n^2\right) \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.13)$$

όπου το απαιτούμενο ποσό της μόνιμης αποθήκευσης είναι:

$$2n^2+2n+2nm+0.5m^2+1.5m \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.14}$$

και προκύπτει από την μόνιμη αποθήκευση των στεθερών χρονικά ποσοτήτων (ΗΦ), P_n, Φ_n, A_1, K_n και των ποσοτήτων $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$, ενώ το απαιτούμενο ποσό της βοηθητικής αποθήκευσης είναι:

$$2nm + \max(\frac{m^2+m}{2}, n^2) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.15}$$

Ο απαιτούμενος δε υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών

ΠΟΛ. $1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+1.5n^2m+1.5nm+4nm$

ΠΡ. $1.5n^3+0.5n^2-n+0.5m^3-0.5m+1.5n^2m+1.5nm^2+2nm$ (3.16)

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

Σημειώνεται ότι μία άλλη σειρά εκτέλεσης των υπολογισμών ανά επανάληψη, δίνει ποσό βοηθητικής αποθήκευσης ίσο με

$$nm + \max(n^2,nm) + \max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2}) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.17}$$

που γιά $m < 0.5n$ είναι χειρότερο, ενώ γιά $0.5n < m < 2n$ είναι καλλίτερο του αντίστοιχου ποσού που δίνεται από την σχέση (3.15). Τέλος τα ποσά των σχέσεων (3.15), (3.17) γιά $m \geq 2n$ συμπίπτουν.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Δ1

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

1.3 Q_n

1.4 Q_r

με $Q = Q_n + Q_r$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q_n \Gamma^T$

2.2 $A_1 = (HQ_1)\Gamma^T + R$

2.3 $A = A_1^{-1}$

2.4 $K_n = (HQ_1)^T A$

2.5 $P_n = Q_1 - K_n(HQ_1)$

2.6 $\Phi_n = \Phi - K_n(H\Phi)$

2.7 $C_n = \Gamma - K_n(H\Gamma)$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $B(k+1,0) = \left[B_0 + (H\Phi)P(k,0)(H\Phi)^T \right]^{-1}$ όπου $B_0 = A_1 + (H\Gamma)Q_r(H\Gamma)^T$

3.2 $K_{r1}(k+1,0) = P(k,0)(H\Phi)^T B(k+1,0)$

3.3 $K_{r2}(k+1,0) = Q_r(H\Gamma)^T B(k+1,0)$

3.4 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n z(k+1)$

3.5 $z_r(k+1,0) = z(k+1) - (H\Phi)\hat{x}(k,0)$

3.6 $\hat{x}_{r1}(k/k+1) = K_{r1}(k+1,0)z_r(k+1,0) + \hat{x}(k,0)$

3.7 $\hat{x}_{r2}(k/k+1) = K_{r2}(k+1,0)z_r(k+1,0)$

3.8 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k) + \Phi_n \hat{x}_{r1}(k/k+1) + C_n \hat{x}_{r2}(k/k+1)$

3.9 $P_{r1}(k/k+1) = P(k,0) - K_{r1}(k+1,0)(H\Phi)P(k,0)$

3.10 $P_{r3}(k/k+1) = -K_{r1}(k+1,0)(H\Gamma)Q_r$

3.11 $P_{r2}(k/k+1) = Q_r - K_{r2}(k+1,0)(H\Gamma)Q_r$

3.12 $P(k+1,0) = P_n+\Phi_n^T P_{r1}(k/k+1)\Phi_n^T+\Phi_n P_{r3}(k/k+1)C_n^T +$
$C_n P_{r3}^T(k/k+1)\Phi_n^T+C_n P_{r2}(k/k+1)C_n^T$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών απαιτεί βοηθητική αποθήκευση:

$$\max(n^2,nm) + \max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2}) \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.18)$$

και υπολογιστικό χρόνο που προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $0.5m^3+1.5m^2-m+np^2+0.5n^2p+0.5np+3.5n^2m+1.5nm^2+nm +$
$p^2m+0.5pm^2+0.5pm+2nmp.$

(3.19)

ΠΡ. $0.5m^3-0.5m+0.5p^2+0.5p+np^2+0.5n^2p-0.5np+3.5n^2m +$
$1.5nm^2-2nm+p^2m+ 0.5pm^2-1.5pm+2nmp$

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

και ακόμη μας δίνει τις απαραίτητες, γιά την εκτέλεση των υπολογισμών ανά επανάληψη, χρονικά στεθερές ποσότητες C_n, P_n, Φ_n K_n, B_0, $(H\Phi)$, $Q_r(H\Gamma)^T$, οι οποίες μαζί με την σταθερή ποσότητα Q_r και τις ποσότητες $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$ αποτελούν την μόνιμη αποθήκευση του αλγόριθμου Δ1, ανά επανάληψη, που δίνεται από το ακόλουθο ποσό:

$$2n^2+2n+0.5p^2+0.5p+0.5m^2+1.5m+2nm+pm+nm \quad \text{λέξεις μνήμης} \qquad (3.20)$$

Λαμβανομένου υπ'όψιν ότι απαιτείται ποσό βοηθητικής αποθήκευσης ίσο με:

$$n^2 + 2nm + \max(\frac{m^2+m}{2}, n^2) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.21}$$

προκύπτει τελικά ποσό ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη) ίσο με

$$3n^2+2n+0.5p^2+0.5p+0.5m^2+1.5m^2+4nm+pm+np+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2)$$

λέξεις μνήμης (3.22)

Τέλος ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη, προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων, τετραγωγικών ριζών

ΠΟΛ. $1.5n^3+0.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+1.5n^2m+1.5nm^2+4nm$

$+pm^2+0.5p^2m+1.5pm+npm+2.5n^2p+np^2+1.5np$

ΠΡ. $1.5n^3+0.5n^2-p+0.5m^3-0.5m+1.5n^2m+1.5nm^2+2nm+$

$+0.5p^2m+pm^2+0.5pm+npm+2.5n^2p+np^2-0.5np$ (3.23)

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0/0) = P(0)$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q \Gamma^T$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $P(k+1/k) = \Phi\ P(k/k)\Phi^T + Q_1$

3.2 $P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) = \left[H\ P(k+1/k)H^T + R\right]^{-1}$

3.3 $K(k+1) = P(k+1/k)H^T P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k)$

3.4 $P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1)H\ P(k+1/k)$

3.5 $\hat{x}(k+1/k) = \Phi\ \hat{x}(k/k)$

3.6 $\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k)+K(k+1)\left[z(k+1)-H\ \hat{x}(k+1/k)\right]$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών μας δίνει την ποσότητα Q_1 και απαιτούν ποσό βοηθητικής αποθήκευσης:

$$2np \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.24}$$

και τους κάτωθι αριθμούς πολλαπλασιασμών και προσθέσεων

$$\begin{aligned} &\text{ΠΟΛ.} \quad np^2+0.5n^2p+0.5np \\ &\text{ΠΡ.} \quad np^2+0.5n^2p-0.5np-0.5n^2-0.5n \end{aligned} \tag{3.25}$$

Στον Πίνακα 3.2 δίνεται η αναλυτική εκτέλεση των υπολογισμών ανά επανάληψη του φίλτρου Kalman. Για να τρέξει το Φίλτρο Kalman χρειάζεται την μόνιμη αποθήκευση των σταθερών ποσοτήτων Φ, H, R, Q_1 και των ποσοτήτων $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$ απαιτώντας έτσι ένα ποσό μόνιμης αποθήκευσης

$$2n^2+2n+nm+0.5m^2+1.5m \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.26}$$

και όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.2, απαιτείται ποσό βοηθητικής αποθήκευσης

$$2nm + \max\left(\frac{m^2+m}{2},\ n^2\right) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.27}$$

και συνεπώς χρειάζεται το ακόλουθο ποσό ολικής αποθήκευσης ανά επανάληψη:

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2 Εκτέλεση φίλτρου Kalman γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	ΤΡΙΖΕΣ	ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ. Μνήμης)
1. $P_2=\Phi P$	n^3	$n^3 - n^2$			$\max(n^2, \frac{m^2+m}{2})$
2. $P_3=P_2\Phi^T$	$0.5(n^3+n^2)$	$0.5(n^3-n)$.			απ. στο P
3. $P_1=P_3+Q_1$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο P
4. $H_1=H.P_1$	n^2m	$n^2m - nm$			nm
5. $H_2=H_1H^T$	$0.5(nm^2+nm)$	$0.5(nm^2+nm-m^2-m)$			απ. στο 1
6. $P_z=H_2+R$		$0.5(m^2+m)$			απ. στο 1
7. $A=P_z^{-1}$	$0.5(m^3+3m^2-2m)$	$0.5(m^3-m)$	2m-1	m	απ. στο 1
8. $K=H_1^T A$	nm^2	$nm^2 - nm$			nm
9. $P_4=K H_1$	$0.5(n^2m+nm)$	$0.5(n^2m+nm-n^2-n)$			απ. στο 1
10. $P=P_1-P_4$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο P
11. $\hat{x}_1=\Phi\hat{x}$	n^2	$n^2 - n$			απ. στο 4
12. $z_2=H\hat{x}_1$	nm	nm - m			απ. στο 1
13. $z_1=z-z_2$		m			απ. στο z
14. $\hat{x}_2=Kz_1$	nm	nm - m			απ. στο $\hat{x}$
15. $\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_2$		n			απ. στο $\hat{x}$

$$2n^2+2n+3nm+0.5m^2+1.5m+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2) \quad \text{λέξεις μνήμης} \quad (3.28)$$

Επίσης ο απαιτούμενος χρόνος για να τρέξει το φίλτρο Kalman, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.2, δίνεται από τον ακόλουθο αριθμό πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων και τετραγωνικών ριζών:

ΠΟΛ. $15n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+1.5n^2m+1.5nm^2+3nm$

ΠΡ. $1.5n^3+0.5n^2-n+0.5m^3-0.5m+1.5n^2m+1.5nm^2+nm$

(3.29)

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι ακολουθόντας μία άλλη σειρά υπολογισμών από αυτή που δίνεται στον Πίνακα 3.2 μας δίνει τον ίδιο χρόνο υπολογισμών, διαφορετικό όμως ποσό βοηθητικής αποθήκευσης που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$nm+\max(n^2,nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2}) \quad \text{λέξεις μνήμης} \quad (3.30)$$

Το ποσό της βοηθητικής αποθήκευσης της σχέσης (3.30) είναι μικρότερο για $0.55n < m < n$ και μεγαλύτερο για $m \leq 0.55n$ από το αντίστοιχο ποσό της σχέσης (3.27), ενώ για $m \geq n$ τα ποσά των σχέσεων (3.27), (3.30) συμπίπτουν.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΛΑΙΝΙΩΤΗ (ΓΑΔΛ)

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

1.2 $\hat{x}_n(0/0) = \hat{x}_n(0)$

1.3 $\hat{x}_r(0/0) = \hat{x}_r(0)$

με $\hat{x}(0) = \hat{x}_n(0) + \hat{x}_r(0)$

1.4 $P(0/0) = P(0)$

1.5 $P_n(0/0) = P_n(0)$

1.6 $P_r(0/0) = P_r(0)$

με $P(0) = P_n(0) + P_r(0)$

1.7 $M_n(0,0) = \mathbf{0}_{n\times 1}$

1.8 $O_n(0,0) = \mathbf{0}_{n\times n}$

1.9 $\Phi_n(0,0) = I_n$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $P_1 = P_r^{-1}(0)$

2.2 $\hat{x}_1 = P_1\hat{x}_r(0)$

2.3 $H_1 = H\Phi$

2.4 $Q_1 = \Gamma Q \Gamma^T$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $P_n(k+1/k) = \Phi P_n(k/k)\Phi^T + Q_1$

3.2 $P_{z_n}^{-1}(k+1/k) = \left[HP_n(k+1/k)H^T + R\right]^{-1}$

3.3 $K_n(k+1) = P_n(k+1/k)H^T P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$

3.4 $P_n(k+1/k+1) = P_n(k+1/k) - K_n(k+1)HP_n(k+1/k)$

3.5 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi - K_n(k+1)H_1$

3.6 $\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0)$

3.7 $\tilde{z}_n(k+1/k) = z(k+1) - H_1\ \hat{x}_n(k/k)$

3.8 $\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi\hat{x}_n(k/k) + K_n(k+1)\tilde{z}_n(k+1/k)$

3.9 $E_n(k+1,0) = H_1\Phi_n(k+1,0)$

3.10 $E_0(k+1,0) = E_n^T(k+1,0)P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$

3.11 $E_1(k+1,0) = E_0(k+1,0)E_n(k+1,0)$

3.12 $O_n(k+1,0) = O_n(k,0) + E_1(k+1,0)$

3.13 $M_n(k+1,0) = M_n(k,0) + E_0(k+1,0)\tilde{z}_n(k+1/k)$

3.14 $P_r(0/k+1) = \left[O_n(k+1,0) + P_1\right]^{-1}$

3.15 $P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1)+\Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0)$

3.16 $\hat{x}_r(0/k+1) = P_r(0/k+1)\left[M_n(k+1,0) + \hat{x}_1\right]$

3.17 $\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_r(0/k+1)$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών απαιτεί βοηθητική αποθήκευση

$$np \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.31}$$

και χρόνο να δίνεται από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $0.5n^3+2.5n^2-n+np^2+0.5n^2p+0.5np+n^2m$

ΠΡ. $0.5n^3+0.5n^2-2n+np^2+0.5n^2p-0.np+n^2m-nm$

ΔΙΑΙΡ. $2n-1$ (3.32)

Τ.Ρ. n

και μας δίνει τις ποσότητες P_1, $\hat{x}_1$, H_1, Q_1 που είναι αναγκαίες στους υπολογισμούς ανά επανάληψη. Το ποσό της μόνιμης αποθήκευσης που απαιτείται ανά επανάληψη είναι:

$$4.5n^2+6.5n+0.5m^2+1.5m+2nm \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.33}$$

και προέρχεται από την μόνιμη αποθήκευση των χρονικά σταθερά ποσοτήτων Φ, H, Q_1, R, P_1, $\hat{x}_1$, H_1 και των ποσοτήτων $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{x}_n(\cdot)$, $z(\cdot)$, $P(\cdot)$, $P_n(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $O_n(\cdot)$, $M_n(\cdot)$, ενώ το απαιτούμενο ποσό της βοηθητικής αποθήκευσης είναι

$$2\max(n^2,\ mn) + 0.5(m^2+m) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.34}$$

οπότε από τις σχέσεις (3.33), (3.34) προκύπτει το ακόλουθο ποσό ολικής αποθήκευσης, ανά επανάληψη του ΓΑΔΛ.

$$4.5n^2+6.5n+m^2+2m+2nm+2\max(n^2,\ nm) \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.35}$$

Για να "τρέξει" ο αλγόριθμος αυτός απαιτεί υπολογιστικό χρόνο (ανά επανάληψη) που προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων, τετραγωνικών ριζών:

ΠΟΛ. $4.5n^3+4.5n^2-n+0.5m^3+1.5m^2-m+4n^2m+2.5nm^2+4.5nm$

ΠΡ. $4.5n^3+0.5n^2+n+0.5m^2-0.5m+4n^2m+2.5nm^2+0.5nm$

ΔΙΑΙΡ. $2m+2n-2$ (3.36)

Τ.Ρ. $m+n$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΑΝΑ ΔΕΙΓΜΑ ΛΑΙΝΙΩΤΗ (ΓΦΔΑΔΛ)

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0)=\hat{x}(0,0)$

1.2 $P(0) = P(0,0)$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q \Gamma^T$

2.2 $A = \left[(HQ_1)H^T + R\right]^{-1}$

2.3 $K_n = (HQ_1)^T A$

2.4 $P_n = Q_1 - K_n(HQ_1)$

2.5 $\Phi_n = \Phi - K_n(H\Phi)$

2.6 $O_n = (H\Phi)^T A(H\Phi)$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

3.1 $M_n(k+1,k) = Dz(k+1)$ όπου $D = (H\Phi)^T A$

3.2 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n z(k+1)$

3.3 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + O_n\right]^{-1}$

3.4 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k) + \Phi_n S(k+1,0)\left[M_n(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]$

3.5 $P(k+1.0) = P_n + \Phi_n S(k+1,0)\Phi_n^T$

β) Ανάλυση του αλγόριθμου

Η εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών απαιτεί ποσό βοηθητικής αποθήκευσης:

$m^2+m+\max(np, nm)$ λέξεις μνήμης (3.37)

και τους παρακάτω αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $0.5m^3+1.5m^2-m+4n^2m+2.5nm^2+np^2+0.5np^2+0.5np$

ΠΡ. $0.5m^3-0.5m+4n^2m+2.5nm^2+np^2+0.5n^2p-0.5np-n^2-n$

(3.38)

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

και μας δίνει τις χρονικά σταθερές ποσότητες D, K_n, O_n, Φ_n, P_n, που χρειάζονται στην εκτέλεση των υπολογισμών ανά επανάληψη. Για να τρέξει το ΓΦΔΑΔΛ χρειάζεται την μόνιμη αποθήκευση των παραπάνω ποσοτήτων και των $\hat{x}(\cdot)$, $P(\cdot)$, $z(\cdot)$, δηλαδή ποσό μόνιμης

αποθήκευσης:

$$2.5n^2+2.5n+m+2nm \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.39}$$

και ακόμη ποσό βοηθητικής αποθήκευσης

$$n^2+n \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.40}$$

και επομένως το απαιτούμενο ολικό ποσό αποθήκευσης (ανά επανάληψη) ισούται με

$$3.5n^2+3.5n+m+2nm \quad \text{λέξεις μνήμης} \tag{3.41}$$

Τέλος ο απαιτούμενος χρόνος (ανά επανάληψη) γιά να τρέξει το ΓΦΔΑΔΛ, δίνεται από τους ακόλουθους αριθμούς πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων και τετραγωνικών ριζών:

ΠΟΛ. $2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$

ΠΡ. $2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$

ΔΙΑΙΡ. $4n-2$ (3.42)

Τ.Ρ. $2n$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ (ΑΑΔ)

α) Περιγραφή του αλγόριθμου

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

1.2 $\hat{x}_n(0/0) = \hat{x}_n(0)$

1.3 $\hat{x}_r(0/0) = \hat{x}_r(0)$

με $\hat{x}(0) = \hat{x}_n(0) + \hat{x}_r(0)$

1.4 $P(0/0) = P(0)$

1.5 $P_n(0/0) = P_n(0)$

1.6 $P_r(0/0) = P_r(0)$

$P(0) = P_n(0) + P_r(0)$

1.7 $\Phi_n(0,0) = I_n$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί

2.1 $Q_1 = \Gamma Q \Gamma^T$

2.2 $H_1 = H\Phi$

3. Υπολογισμοί ανά-επανάληψη

3.1 $P_n(k+1/k) = \Phi P_n(k/k)\Phi^T + Q_1$

3.2 $P_{z_n}^{-1}(k+1/k) = \left[\{HP_n(k+1/k)\}\ H^T + R\right]^{-1}$

3.3 $K_n(k+1) = \{HP_n(k+1/k)\}^T P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$

3.4 $P_n(k+1/k+1) = P_n(k+1/k) - K_n(k+1)\ \{H\ P_n(k+1/k)\}$

3.5 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi - K_n(k+1)\ H_1$

3.6 $\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0)$

3.7 $\tilde{z}_n(k+1) = z(k+1) - H_1\ \hat{x}_n(k/k)$

3.8 $\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_n(k/k) + K_n(k+1)\tilde{z}_n(k+1)$

3.9 $C(k+1) = H_1\Phi_n(k+1,0)$

3.10 $P_z^{-1}(k+1/k) = \left[\{C(k+1)P_r(0/k)\}\ C^T(k+1) + P_{z_n}(k+1/k)\right]^{-1}$

3.11 $K_r(k+1) = \{C(k+1)P_r(0/k)\}^T P_z^{-1}(k+1/k)$

3.12 $z_r(k+1) = \tilde{z}_n(k+1) - C(k+1)\hat{x}_r(0/k)$

3.13 $x_r(0/k+1) = \hat{x}_r(0/k) + K_r(k+1)z_r(k+1)$

3.14 $\hat{x}(k+1\ /\ k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_r(0/k+1)$

3.15 $P_r(0/k+1) = P_r(0/k) - K_r(k+1)\{C(k+1)P_r(0/k)\}$

3.16 $P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0)$

β) Ανάλυση αλγορίθμου

Οι αναγκαίες στην εκτέλεση των υπολογισμών ανά επανάληψη, χρονικά στεθερές ποσότητες Q_1, H_1, λαμβάνονται από την εκτέλεση των προκαταρκτικών υπολογισμών που απαιτούν ποσό βοηθητικής αποθήκευσης ίσο με

np λέξεις μνήμης (3.43)

και τους παρακάτω αριθμούς πολλαπλασιασμών και προσθέσεων:

ΠΟΛ. $np^2+0.5n^2p-0.5np+n^2m$

ΠΡ. $np^2+0.5n^2p-0.5np-0.5n^2-0.5n+n^2m-nm$ (3.44)

Γιά να τρέξει ο αλγόριθμος χρειάζεται την μόνιμη αποθήκευση των χρονικά σταθερών ποσοτήτων Φ, H, H_1, Q_1, R και των ποσοτήτων $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{x}_n(\cdot)$, $\hat{x}_r(\cdot)$, $P(\cdot)$, $P_n(\cdot)$, $P_r(\cdot)$, $\Phi_n(\cdot)$, $z(\cdot)$ προκύπτοντας έτσι απαιτούμενο ποσό μόνιμης αποθήκευσης ίσο με:

$4n^2+5n+0.5m^2+1.5m+2nm$ λέξεις μνήμης (3.45)

ενώ το ποσό της βοηθητικής αποθήκευσης που απαιτείται δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$m^2+m+2\max(n^2, mn)$ λέξεις μνήμης (3.46)

και τελικά προκύπτει ποσό ολικής αποθήκευσης ανά επανάληψη ίσο με:

$4n^2+5n+1.5m^2+2.5m+2nm+2\max(n^2, nm)$ λέξεις μνήμης (3.47)

Τέλος ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη αυτού του αλγόριθμου προκύπτει από τους ακόλουθους αριθμούς λειτουργιών:

ΠΟΛ. $4n^3+3n^2+m^3+3m^2-2m+5n^2m+3nm^2+6nm$

ΠΡ. $4n^3+m^3-m+5n^2m+3nm^2+nm$

ΔΙΑΙΡ. $4m-2$ (3.48)

Τ.Ρ. $2m$

3.3.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ανάλυσης (όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου γιά μία επανάληψη) των αλγορίθμων Α, Β, Γ, Δ1, ΓΑΔΛ, ΓΦΔΑΔΛ, ΑΑΔ, Kalman συνοψίζονται στους Πίνακες 3.3 και 3.4.

Πριν προχωρήσουμε στη γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων της μέχρι τώρα υπολογιστικής ανάλυσης, θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ένα επιπλέον ποσό αποθήκευσης, που απαιτείται ανά επανάληψη γιά να "τρέξει" κάθε φίλτρο, το οποίο είναι σταθερό και ανεξάρτητο των n, m, p. Συγκεκριμμένα το απαιτούμενο ποσό αποθήκευσης, ανά επανάληψη, γιά να υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος αποτελείται από δύο τμήματα: από το ποσό της μνήμης του υπολογιστή, που καταλαμβάνει το πρόγραμμα που υλοποιεί το φίλτρο και από τις ανάγκες αποθήκευσης των δεδομένων. Τα ποσά αποθήκευσης του Πίνακα 3.3 αναφέρονται στις ανάγκες αποθήκευσης των δεδομένων μόνο. Όσον αφορά όμως το πρόγραμμα υλοποίησης κάθε αλγόριθμου, αυτό αποτελείται από το κυρίως πρόγραμμα των βασικών εξισώσεων του αλγορίθμου και από τις απαιτούμενες υπορουτίνες υλοποίησης της κάθε εξίσωσης. Στη συγκεκριμμένη περίπτωση οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ έχουν περίπου το ίδιο μήκος του κυρίως προγράμματος, ενώ οι αλγόριθμοι Γ και Kalman έχουν μήκη κυρίως προγραμμάτων μεγαλίτερα περίπου κατά 20% και 30%, αντίστοιχα, από το απαιτούμενο μήκος του κυρίως προγράμματος των αλγορίθμων Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ. Όσον αφορά τα μήκη των κυρίως προγραμμάτων των αλγορίθμων Δ1, ΓΑΔΛ, ΑΑΔ, αυτά είναι περίπου διπλάσια του μήκους του κυρίως προγράμματος των αλγορίθμων Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ. Επίσης όταν "τρέχουν" οι αλγόριθμοι Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ χρησιμοποιούν 6 υπορουτίνες, οι αλγόριθμοι Γ και Kalman 7, οι αλγόριθμοι ΓΔΑΔΛ, ΑΑΔ 9 και ο αλγόριθμος Δ1 10.

Σε μία τέτοια γενική υπολογιστική ανάλυση είναι δύσκολο να καθορίσεις ένα "σταθερό" ποσό απαιτήσεων αποθήκευσης του προγράμματος υλοποίησης κάθε αλγόριθμου. Τούτο οφείλεται στο γεγονός, ότι ο υπολογισμός του παραπάνω ποσού αποθήκευσης, εξαρτάται από τις δυνατότητες του υπολογιστή που χρησιμοποιείς, την γλώσσα προγραμματισμού, από τις ικανότητες και εμπειρίες του προγραμματιστή.

Γιά λόγους πληρότητας της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης που γίνεται σε αυτή εδώ την εργασία έγινε μία προσπάθεια

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3: Ποσά ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη) αλγορίθμων γραμμικής εκτίμησης για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λέξεις μνήμης)
Α	$3.5n^2+3.5n+2nm+m$
Β	$3.5n^2+3.5n+2nm+m$
Γ	$2n^2+2n+0.5m^2+1.5m+4nm+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2)$
Δ1	$3n^2+2n+0.5p^2+0.5p+0.5m^2+1.5m+4nm+pm+np+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2)$
KALMAN	$2n^2+2n+0.5m^2+1.5m+3nm+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2)$
ΓΦΔΑΔΛ	$3.5n^2+3.5n+2nm+m$
ΓΑΔΛ	$4.5n^2+6.5n+m^2+2m+2nm+2\max(n^2, nm)$
ΑΑΔ	$4n^2+5n+1.5m^2+2.5m+2nm+2\max(n^2, nm)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4: Υπολογιστικοί χρόνοι (ανά επανάληψη) αλγορίθμων γραμμικής εκτίμησης για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	Τ.ΡΙΖΕΣ
Α	$2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$	$2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$	$4n-2$	$2n$
Β	$2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$	$2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$	$4n-2$	$2n$
Γ	$1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+1.5n^2m+1.5nm^2+4nm$	$1.5n^3+0.5n^2-n+0.5m^3-0.5m+$ $+1.5n^2m+1.5nm^2$	$2m-1$	m
Δ1	$1.5n^3+0.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+1.5n^2m+1.5nm^2+4nm+pm^2+0.5p^2m+$ $+1.5pm+npm+2.5n^2p+np^2+1.5np$	$1.5n^3+0.5n^2-p+0.5m^3-0.5m+1.5n^2m+$ $+1.5nm^2+2nm+0.5p^2m+pm^2+0.5pm+$ $+npm+2.5n^2p+np^2-0.5np$	$2m-1$	m
KALMAN	$1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+1.5n^2m+1.5nm^2+3nm$	$1.5n^3+0.5n^2-n+0.5m^3-0.5m+$ $1.5n^2m+1.5nm^2+nm$	$2m-1$	m
ΓΦΔΑΔΛ	$2.5n^3+5.5n^2-2n+2nm$	$2.5n^3+2n^2-2.5n+2nm$	$4n-2$	$2n$
ΓΑΔΛ	$4.5n^3+4.5n^2-n+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+4n^2m+2.5nm^2+4.5nm$	$4.5n^3+0.5n^2+n+0.5m^3-0.5m+$ $+4n^2m+2.5nm^2+0.5nm$	$2m+2n-2$	$n+m$
ΑΑΔ	$4n^3+3n^2+m^3+3m^2-2m+5n^2m+3nm^2+6nm$	$4n^3+m^3-m+5n^2m+3nm^2+nm$	$4m-2$	$2m$

υπολογισμού των ενδεικτικών αυτών ποσών αποθήκευσης στον υπολογιστή CROMENKO 68000 (system one), με γλώσσα προγραμματισμού την FORTRAN 77

Η συμπεριφορά των αλγορίθμων ως προς τις ανάγκες αποθήκευσης των δεδομένων δίνεται στα σχήματα 3.1-3.5*. Ειδικότερα στα σχ. 3.1-3.4 δίνεται η μεταβολή των απαιτούμενων ποσών αποθήκευσης των αλγορίθμων συναρτήσει του αριθμού καταστάσεων (n), γιά διάφορες τιμές του m και όταν p=1, p=n. Ενώ στο σχ. 3.5 δίνεται η μεταβολή των παραπάνω ποσών αποθήκευσης συναρτήσει των διαστάσεων του διανύσματος μετρήσεων (m) γιά n=10, p=1 και p=n. (Τα (p=1), (p=n), στα Σχ. 3.1-3.5, αναφέρονται μόνο στον αλγόριθμο Δ1).

Από τα Σχ. 3.1-3.5 προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, που έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης, είναι γιά $m \geq 0.5n$ οι πιό οικονομικοί αλγόριθμοι (από άποψη απαιτήσεων αποθήκευσης), ενώ γιά $m < 0.5n$ ο αλγόριθμος Kalman έχει τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης.

2) Τις περισσότερες απαιτήσεις αποθήκευσης γιά $m < 0.5n$ έχει ο ΓΑΔΛ, γιά $0.5 \leq m < n$ έχει ο Δ1(p=n) και γιά $m > n$ έχει ο ΑΑΔ.

3) Γιά m=0.1n ο πιό οικονομικός αλγόριθμος μετά το φίλτρο Kalman είναι ο αλγόριθμος Γ.

4) Ο αλγόριθμος ΓΑΔΛ είναι οικονομικότερος του ΑΑΔ γιά $m > n$, ενώ γιά $m < n$ οι ρόλοι αντιστρέφονται. Γιά m=n οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης.

5) Γιά $m < 0.5n$ ο αλγόριθμος Γ είναι οικονομικότερος του ΓΦΔΑΔΛ.

6) Ο αλγόριθμος Δ1(p=1) είναι πάντα οικονομικότερος των ΓΑΔΛ και ΑΑΔ.

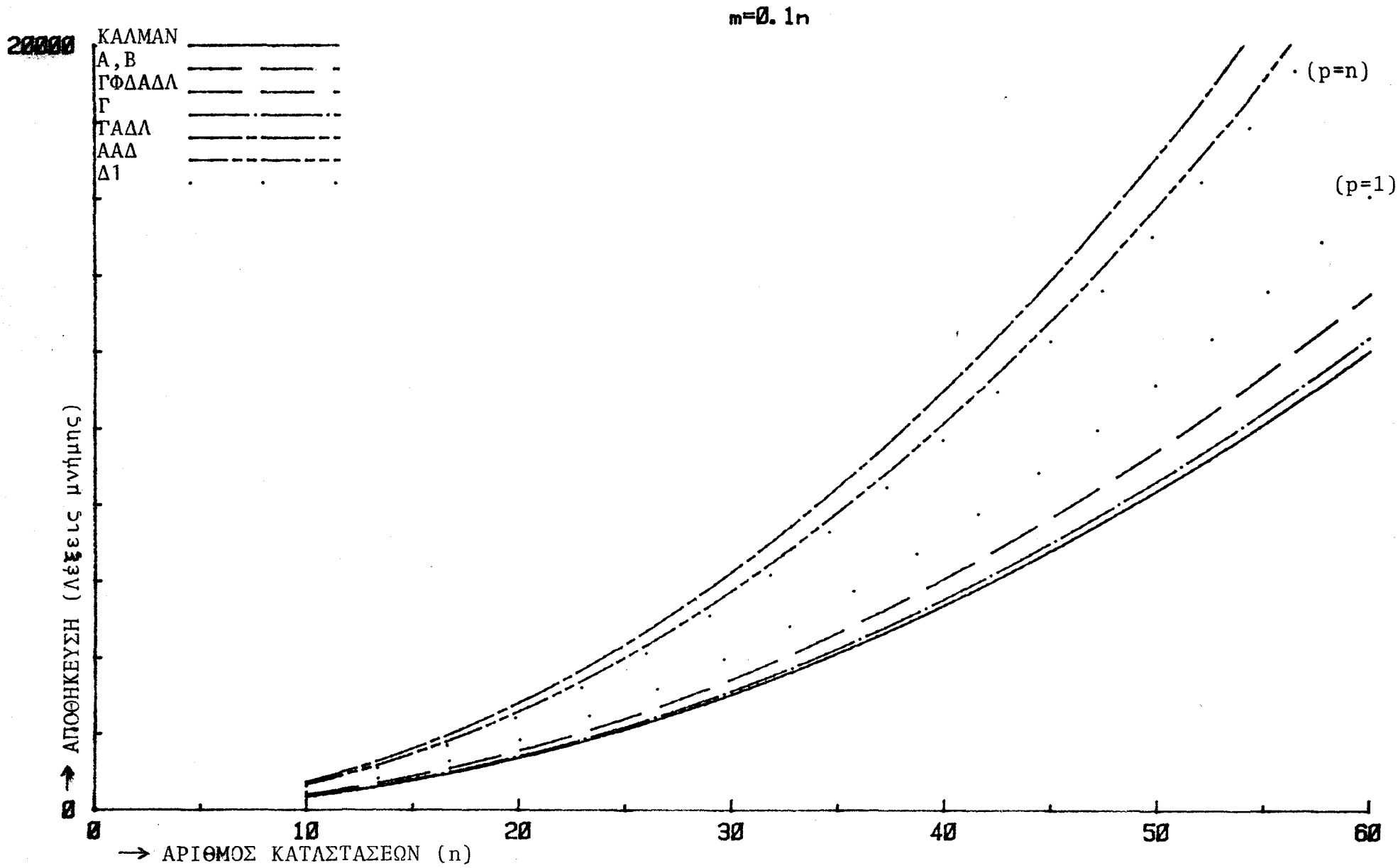
7) Οι λιγότεροι ευαίσθητοι αλγόριθμοι στις μεταβολές των διαστάσεων του διανύσματος μετρήσεων m (όταν ο αριθμός καταστάσεων n είναι σταθερός) είναι οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ.

Εάν λάβουμε υπ'όψιν τα απαιτούμενα ποσά αποθήκευσης των προγραμμάτων των αλγορίθμων στον υπολογιστή CROMENKO, προκύπτει

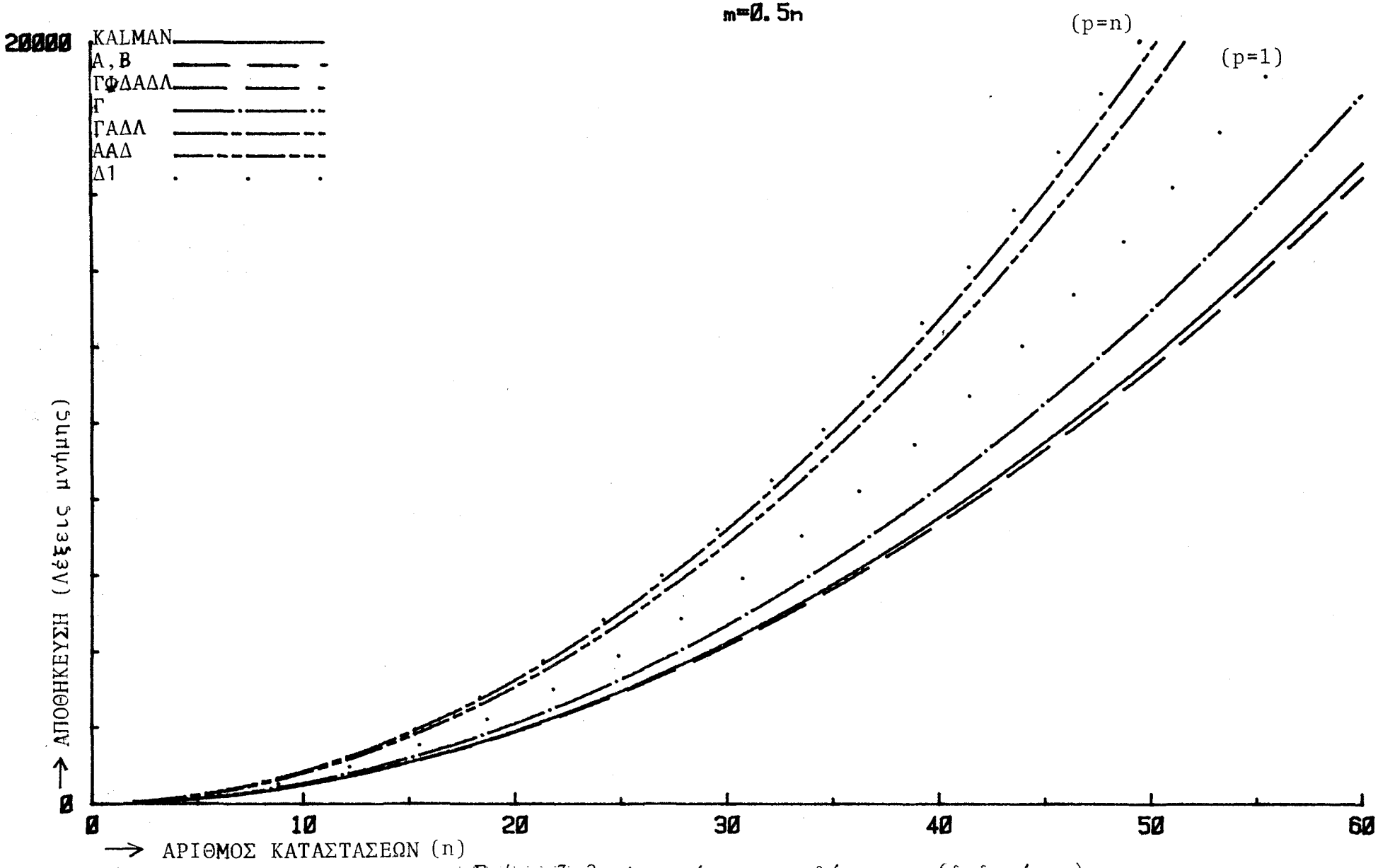
---

* Οι αλγόριθμοι Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ ένεκα του ότι έχουν τις ίδιες υπολογιστικές απαιτήσεις (αποθήκευσης και χρόνου), γιαυτό η γραφική παράσταση των υπολογιστικών των απαιτήσεων αποθήκευσης και χρόνου, δίνεται και στους τρείς αλγορίθμους με την ίδια καμπύλη.

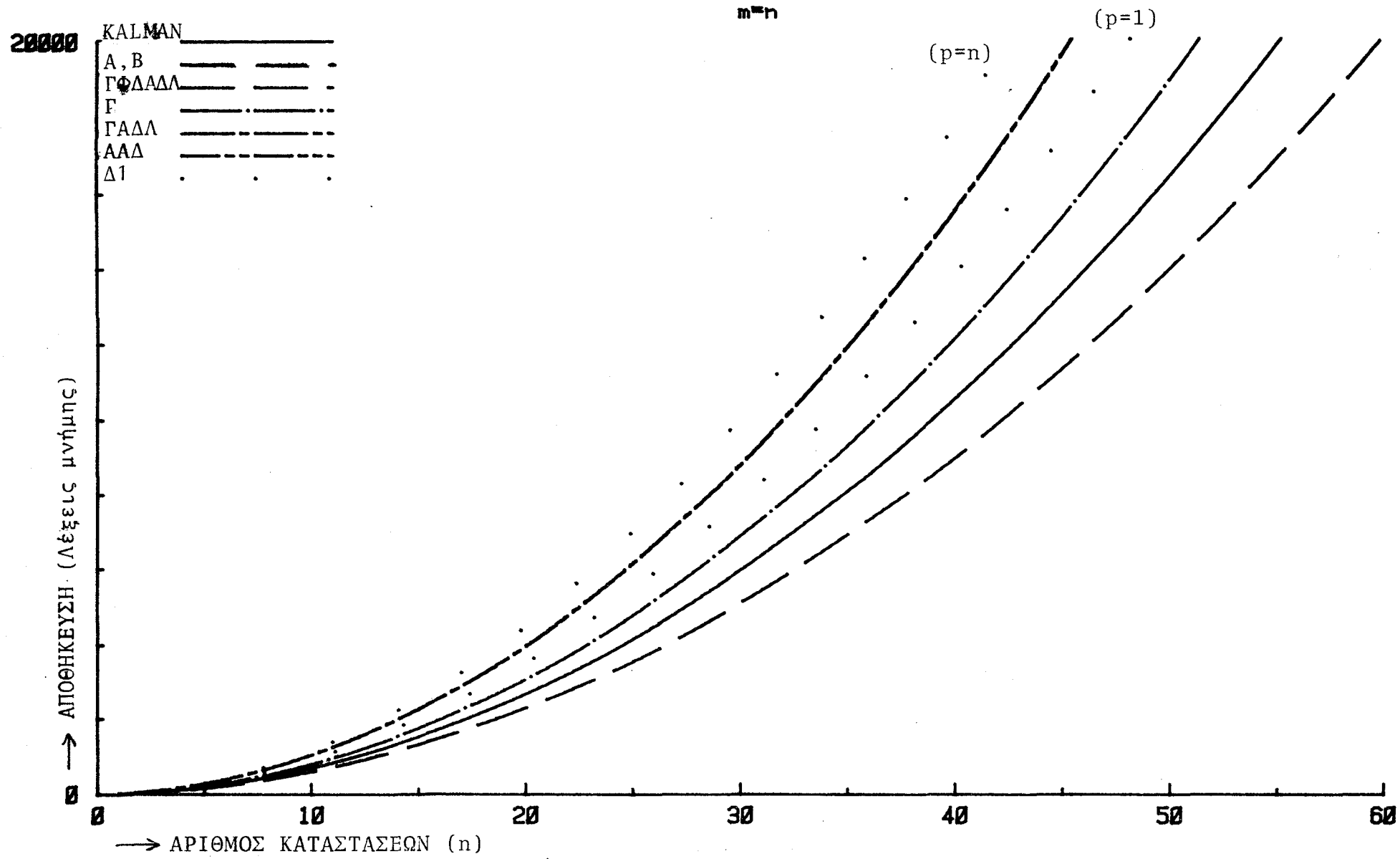
† Στο Σχ.3.3 οι καμπύλες των απαιτήσεων αποθήκευσης των αλγορίθμων ΓΑΔΛ και ΑΑΔ συμπίπτουν.



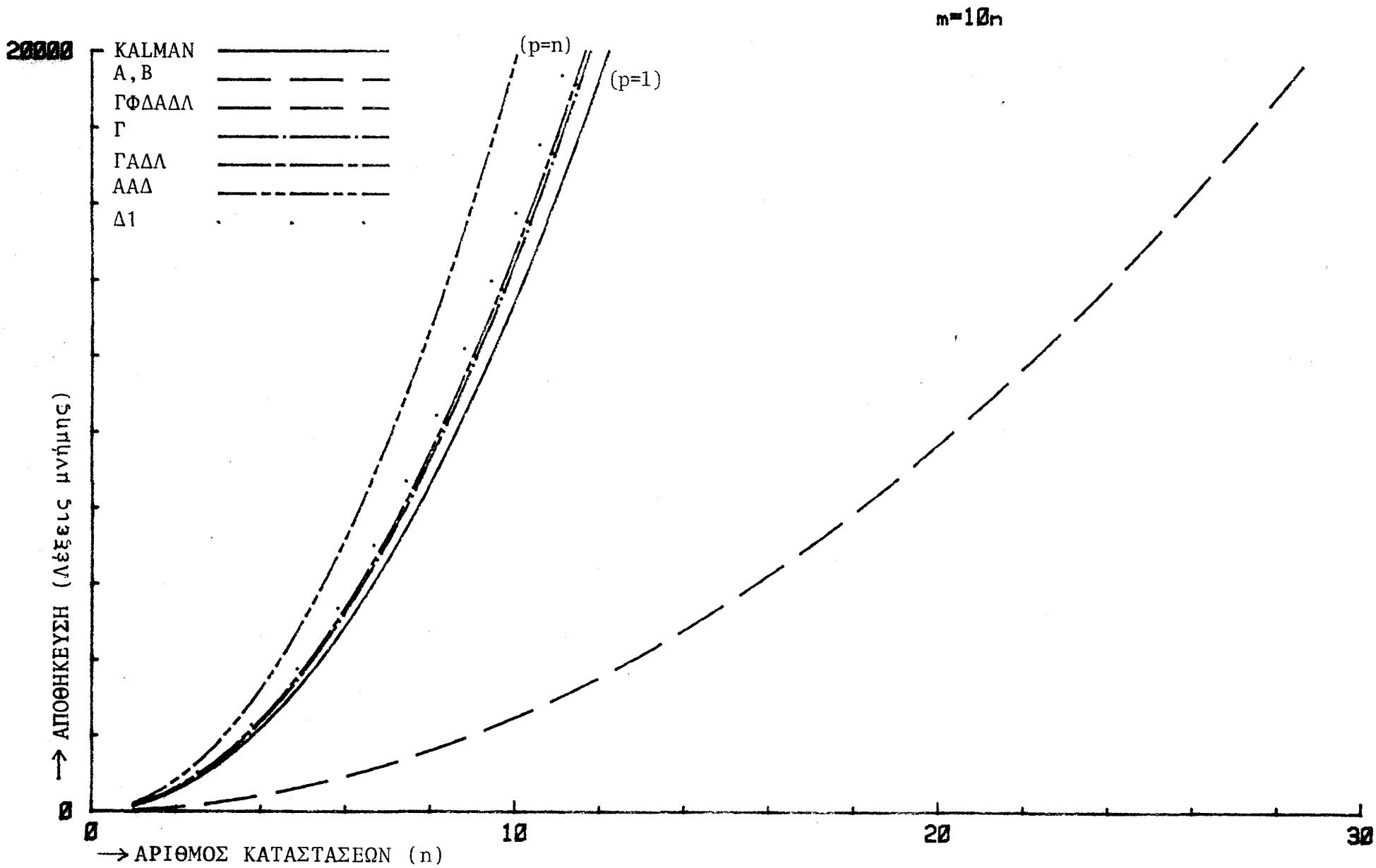
Σχήμα 3.1 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



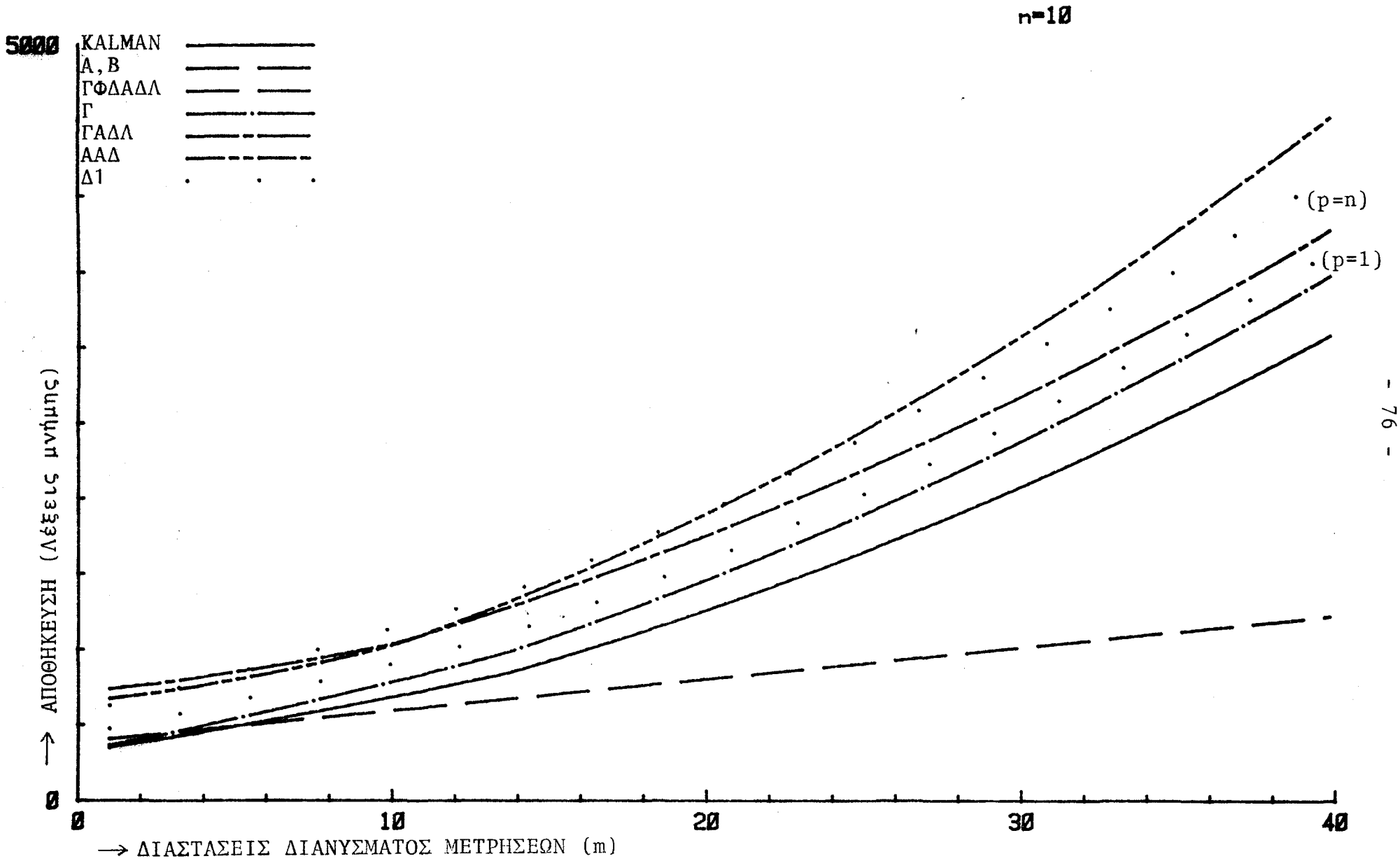
Σχήμα 3.2 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.3 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.4 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.5 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

ότι δεν επέρχεται ουσιαστική μεταβολή στα αποτελέσματα της μέχρι τώρα ανάλυσης. Ενδεικτικά δίνονται οι μεταβολές των νέων απαιτήσεων αποθήκευσης (ποσά αποθήκευσης προγραμμάτων και δεδομένων) των αλγορίθμων στα σχ. 3.6 (συναρτήσει του n γιά m=0.5n) και 3.7 (συναρτήσει του m γιά n=10).

Η γραφική παράσταση των χρονικών απαιτήσεων των αλγορίθμων που αναλύσαμε δίνεται στα σχ. 3.8-3.12*. Αυτά τα σχήματα προήλθαν από τον Πίνακα 3.4 χρησιμοποιόντας την ιδέα του ολικού "κανονικοποιημένου" αριθμού λειτουργιών ο οποίος προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις τετραγωνικές ρίζες, διαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς με ένα ισοδύναμο αριθμό προσθέσεων, σύμφωνα με την εργασία του Κοσμίδη [5]. Αυτές οι ισοδυναμίες είναι ενδεικτικές στους περισσότερους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που χρησιμοποιούν την αριθμητική κινητή υποδιαστολή.

1 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ = 25 ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ

1 ΔΙΑΙΡΕΣΗ = 6 ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ

1 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ = 4 ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ

Στα σχ. 3.8-3.11 δίνονται οι μεταβολές του ολικού κανονικοποιημένου αριθμού λειτουργιών των αλγορίθμων ως προς τον αριθμό καταστάσεων n γιά m=0.1n, m=0.5n,m=n,m=3n (όταν p=1,p=n γιά τον αλγόριθμο Δ1) ενώ στο Σχ. 3.12 δίνονται οι μεταβολές του εν λόγω αριθμού λειτουργιών ως προς τις διαστάσεις του διανύσματος μετρήσεων (m) γιά n=10 (όταν p=1, p=n όσον αφορά τον αλγόριθμο Δ1).

Από τα σχ. 3.8-3.12† προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

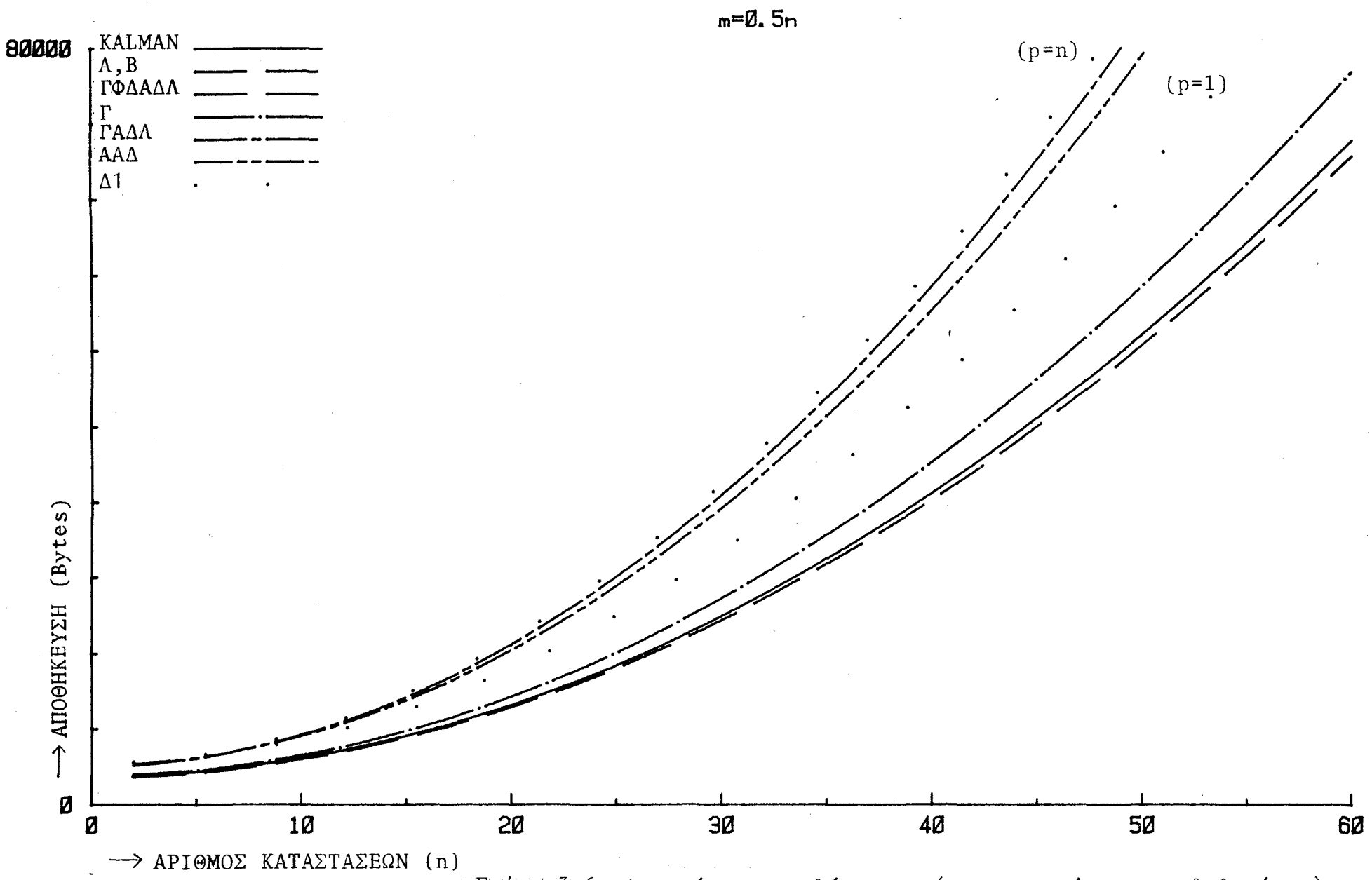
1) Οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, που έχουν τις ίδιες χρονικές απαιτήσεις, γιά $m \geq 0.5n$ είναι οι ταχύτεροι αλγόριθμοι. Ενώ γιά $m \leq 0.5n$ η κατάσταση αλλάζει, και οι πιό γρήγοροι αλγόριθμοι είναι το φίλτρο Kalman (κατά πρώτο λόγο), ο Γ και ο Δ1 (όταν p=1).

2) Ο πιό αργός αλγόριθμος γιά $m < n$ είναι ο ΓΑΔΛ, ενώ γιά $m \geq n$ είναι ο ΑΑΔ.

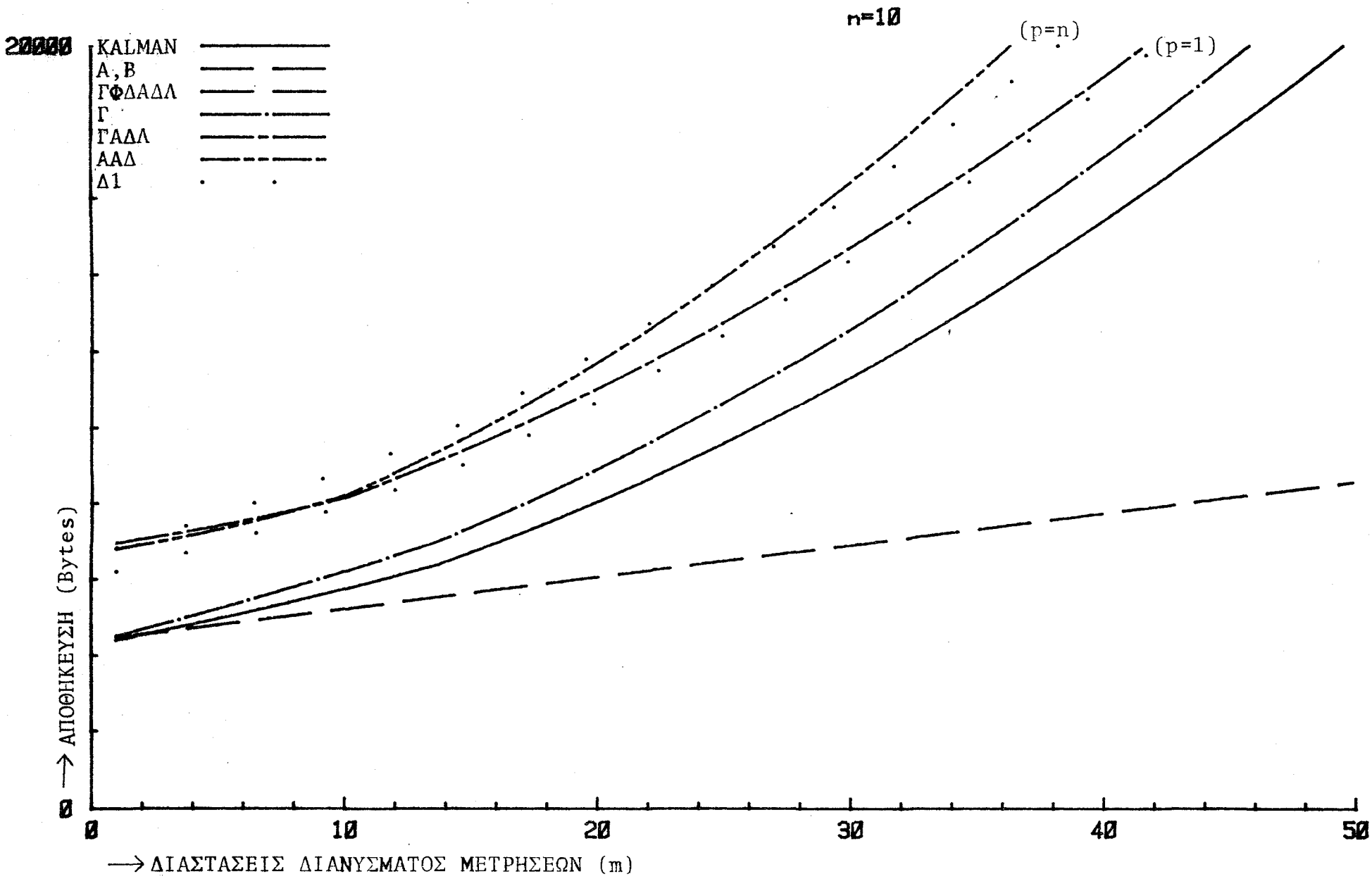
3) Ο αλγόριθμος Δ1, (όταν p=1) είναι πάντα ταχύτερος των ΓΑΔΛ

* Όπου ΚΑΝ.=Κανονικοποιημένος, Ο συμβολισμός αυτός θα χρησιμοποιηθεί και στο υπόλοιπο μέρος της διατριβής.

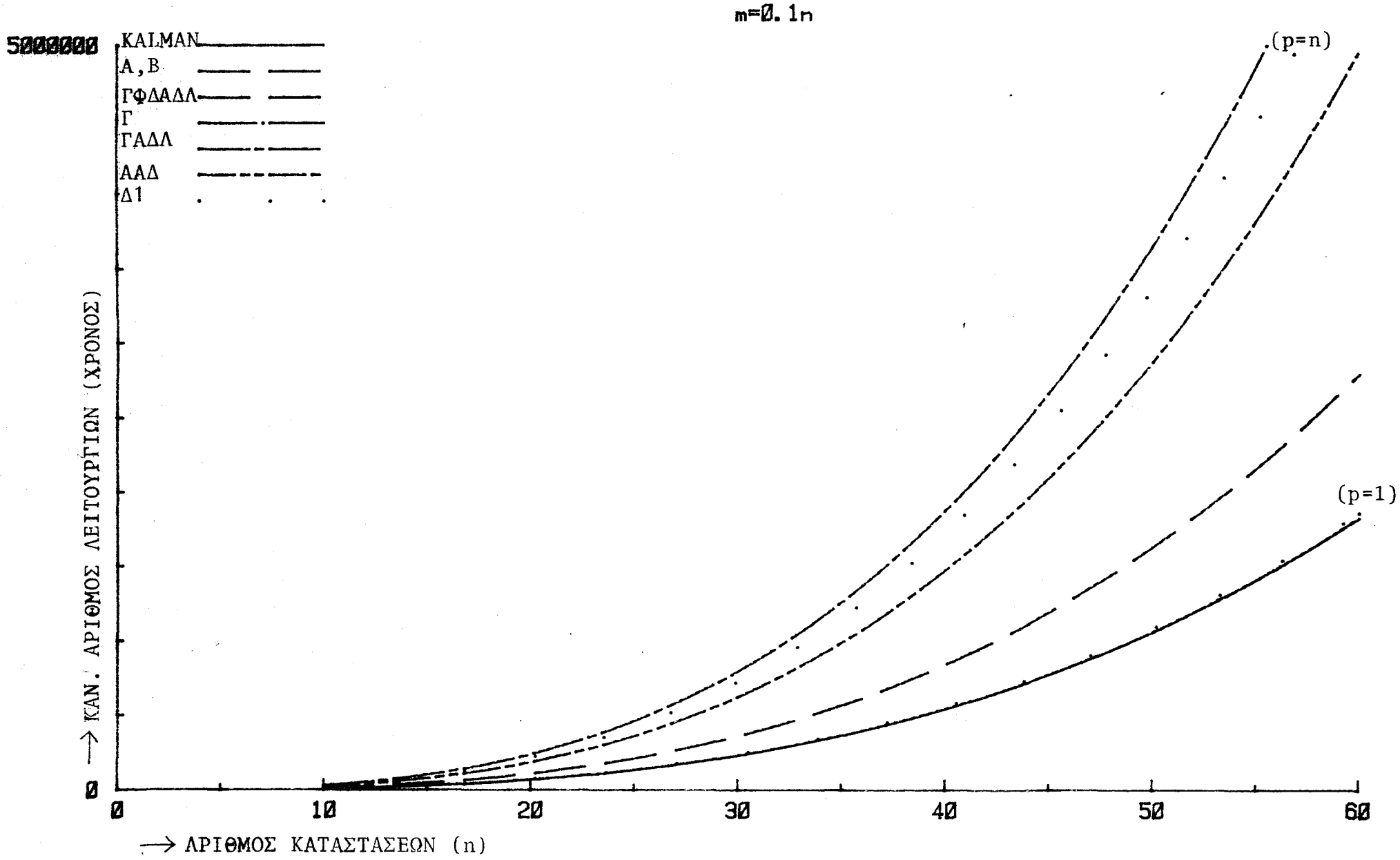
† Στα Σχ. 3.8-3.12 οι καμπύλες των χρονικών απαιτήσεων των αλγορίθμων Γ και Kalman σχεδόν συμπίπτουν (δηλαδή οι δύο αυτοί αλγόριθμοι έχουν περίπου τις ίδιες χρονικές απαιτήσεις).



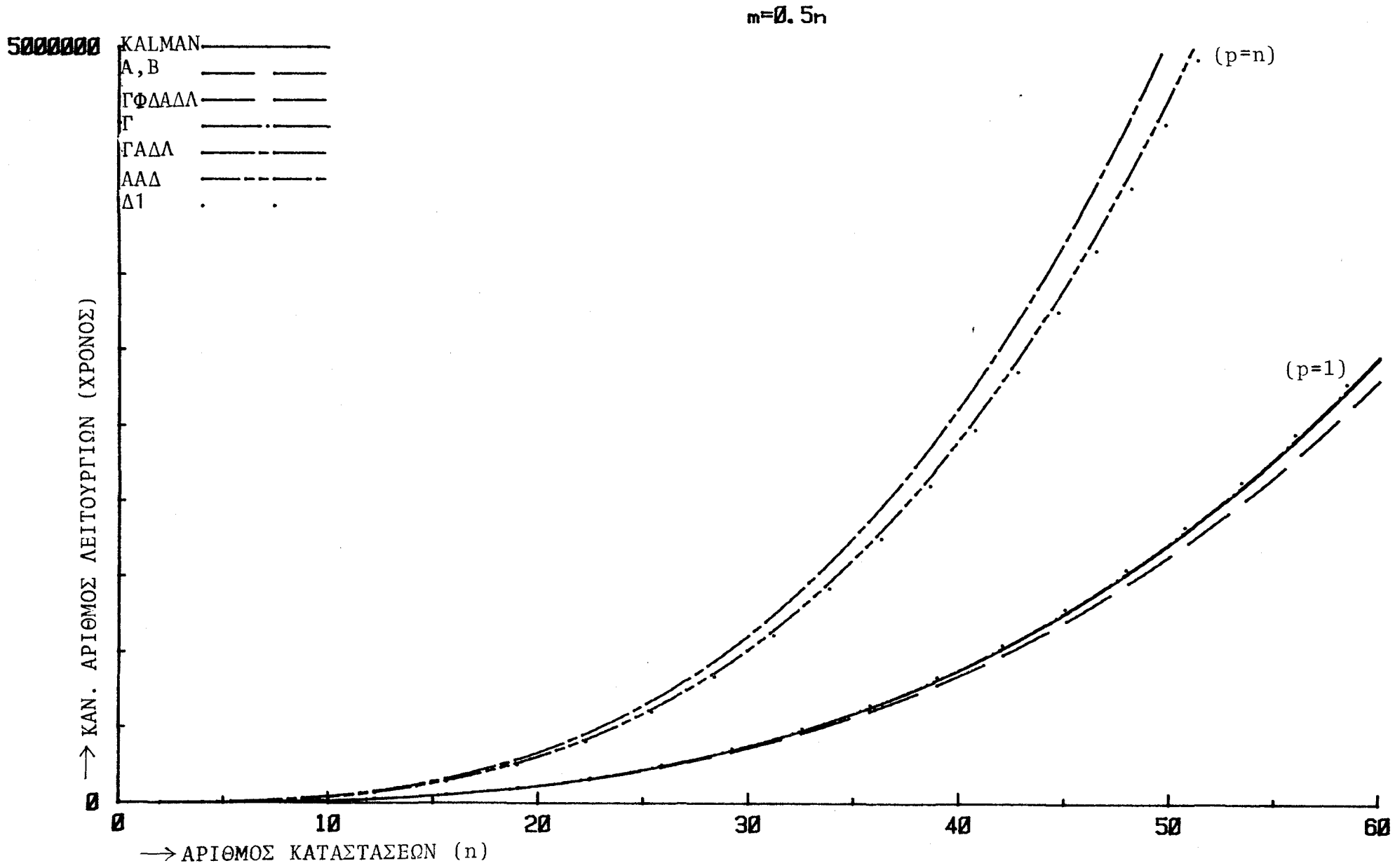
Σχήμα 3.6 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



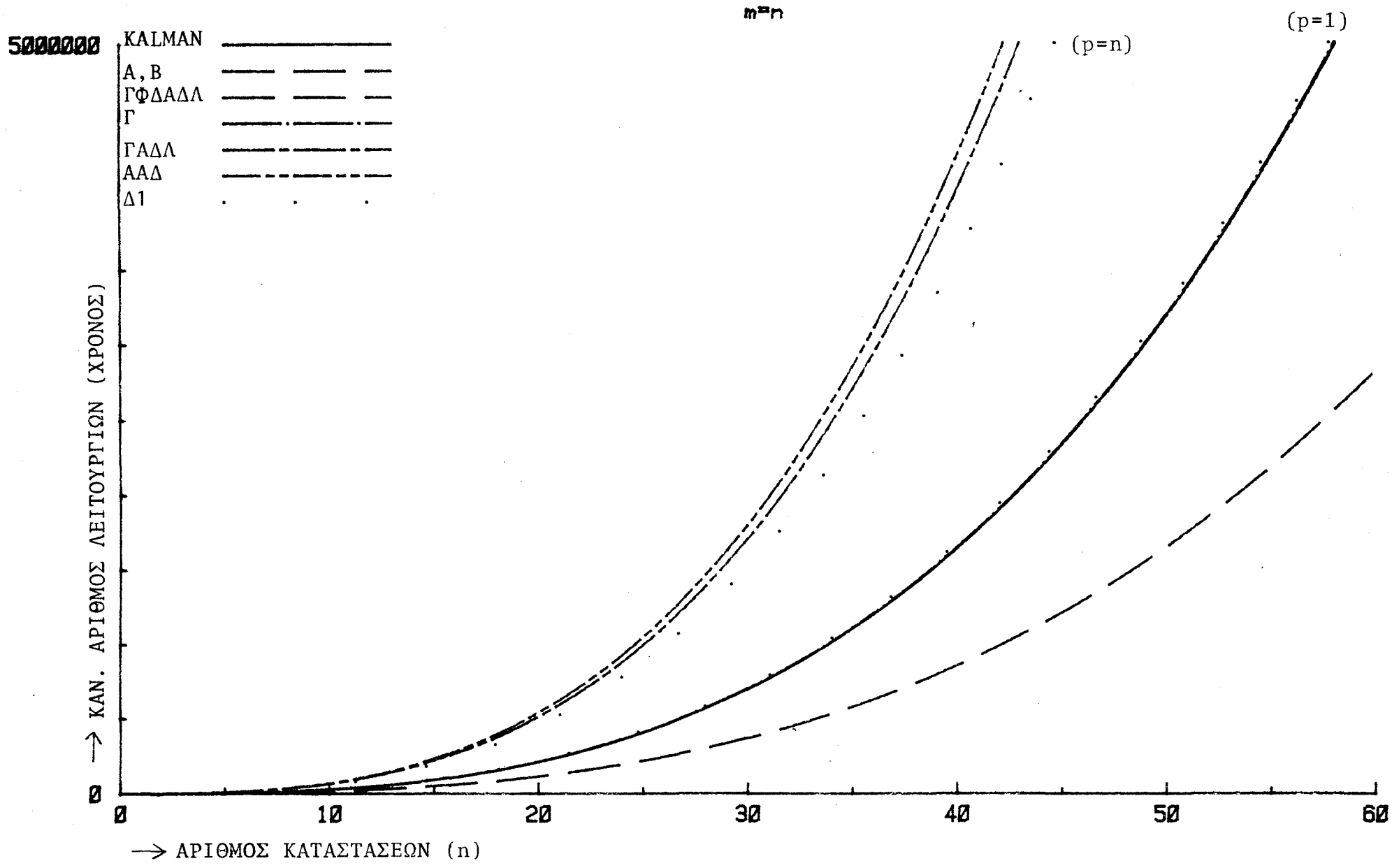
Σχήμα 3.7 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



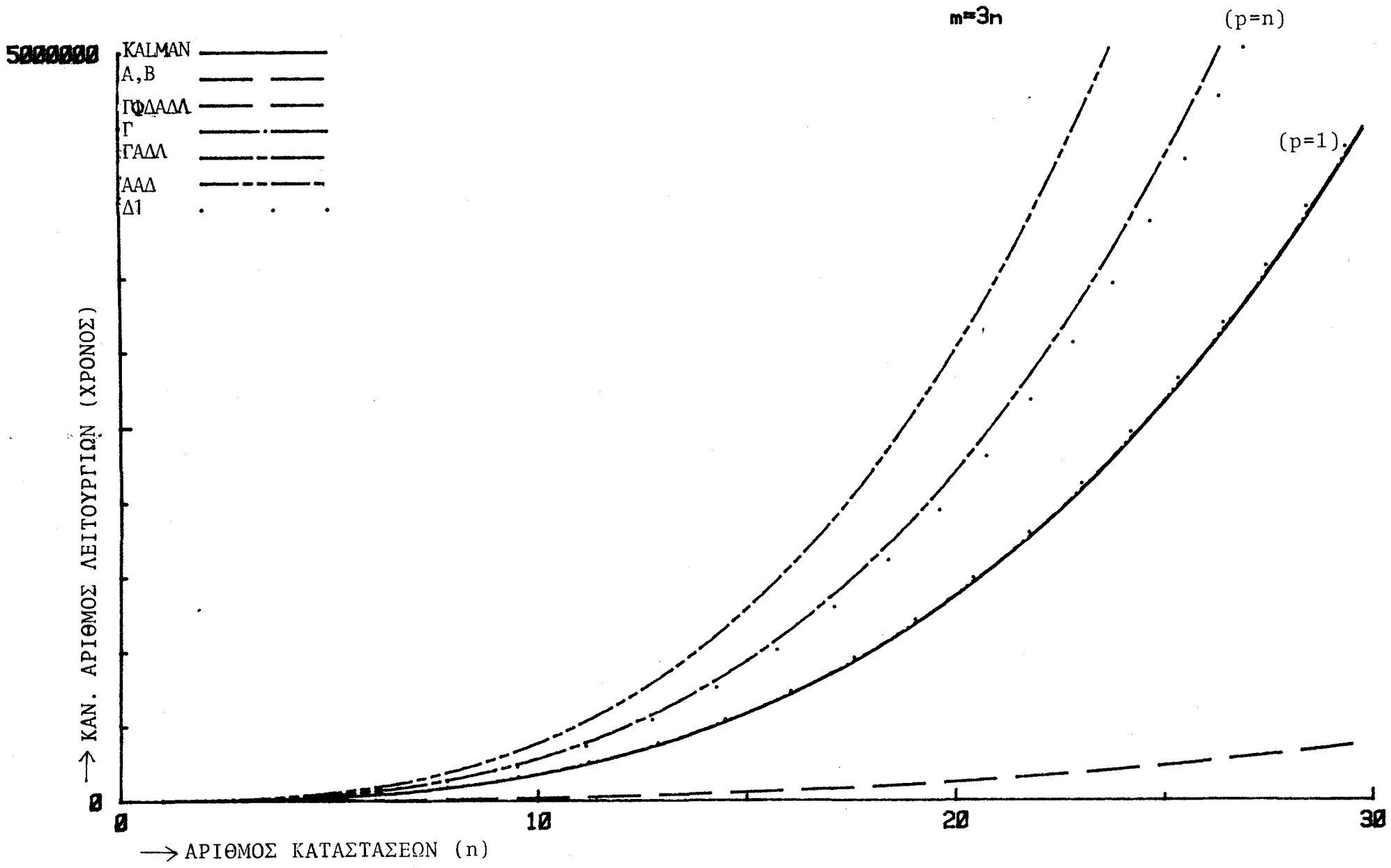
Σχήμα 3.8 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



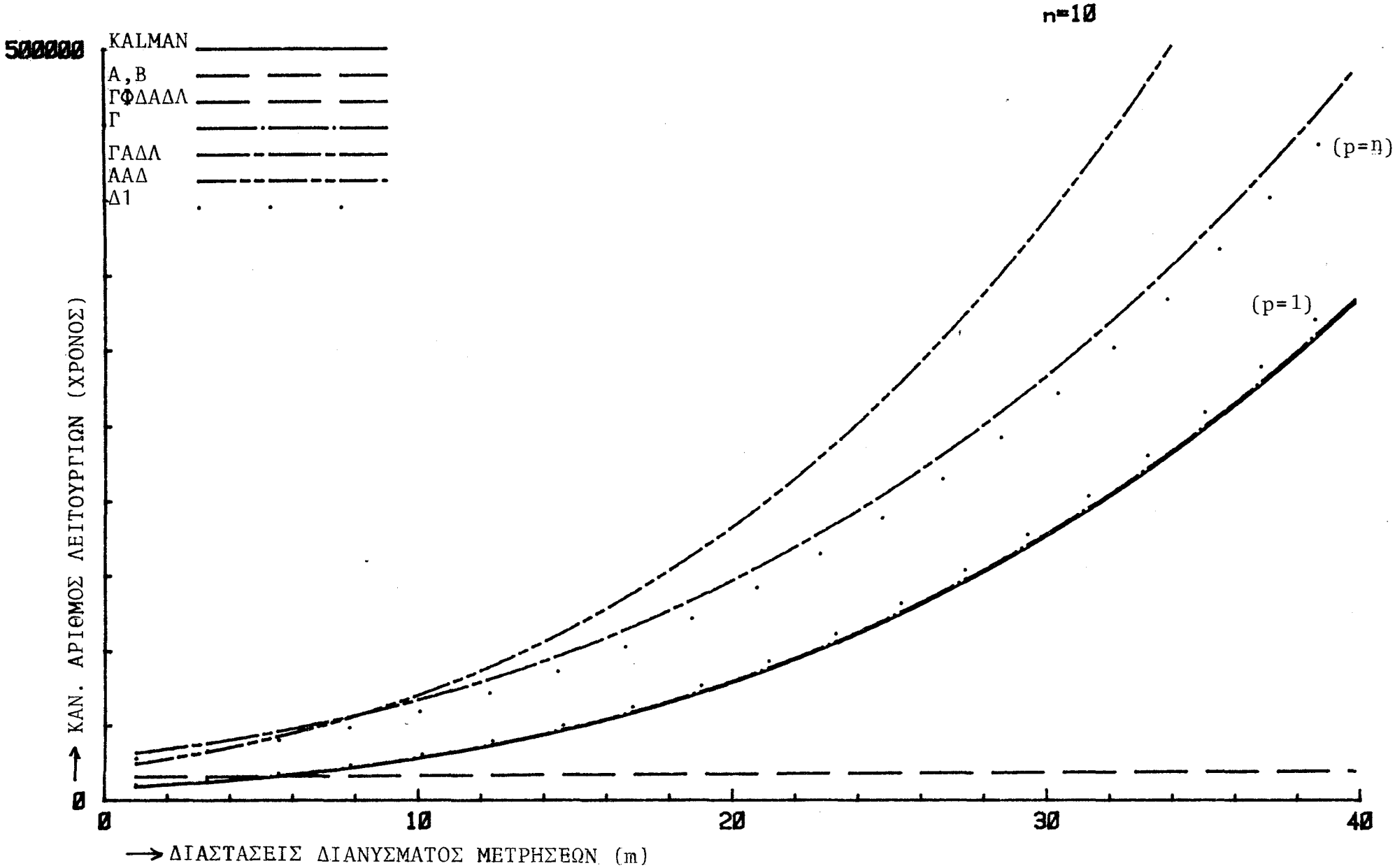
Σχήμα 3.9 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.10 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.11 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 3.12 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

και ΑΑΔ, όταν p=n,γιά m ≥0.5n είναι ταχύτερος του ΑΑΔ, ενώ είναι πάντα ταχύτερος του ΓΑΔΛ.
5) Η ταχύτητα των αλγορίθμων Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ έχει την μικρότερη ευαισθησία στις μεταβολές του m όταν το n είναι σταθερό.

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Η υπολογιστική ανάλυση των αλγορίθμων Α, Β, Γ, Δ1, Kalman, ΓΑΔΛ, ΓΦΔΑΔΛ, ΑΑΔ, γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα, παρουσιάζει δύο βασικές διαφορές από την αντίστοιχη ανάλυση που έγινε στο προηγούμενο τμήμα 3.3 του κεφαλαίου γιά τα χρονικά αμετάβλητα μοντέλα, τις οποίες και έχουμε αναφέρει στην αρχή (και πιό συγκεκριμμένα στο τμήμα 3.2) αυτού του κεφαλαίου. Γιά την καλλίτερη κατανόηση των διαφορών αυτών και του τρόπου της υπολογιστικής ανάλυσης των αλγορίθμων γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα δίνεται, στο μεν Παράρτημα ΣΤ η περιγραφή των παραπάνω αλγορίθμων γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα, στους δε Πίνακες 3.5 και 3.6 η αναλυτική εκτέλεση των αλγορίθμων Β και Kalman αντίστοιχα. Οπότε γιά τους παραπάνω αλγορίθμους προκύπτουν οι υπολογιστ-κές απαιτήσεις αποθήκευσης (των δεδομένων) και χρόνου που δίνονται αντίστοιχα στους Πίνακες 3.7 και 3.8. Θα ήταν δε και εδώ χρήσιμο να αναφερθούμε στις απαιτήσεις αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης των αλγορίθμων, οπότε θα έχουμε ότι:
Ο αλγόριθμος Kalman έχει το μικρότερο μήκος κυρίως προγράμματος ενώ οι αλγόριθμοι (Β,Γ,ΓΦΔΑΔΛ)*, (ΓΑΔΛ,ΑΑΔ), (Α,Δ1) έχουν αντίστοιχα 1.5,2 και 2.5 φορές μεγαλύτερο μήκος κυρίως προγράμματος από του Kalman. Επίσης όταν τρέχει το φίλτρο Kalman χρησιμοποιεί 7 υπορουτίνες, οι αλγόριθμοι Γ, ΑΔΛ, ΑΑΔ 9, οι αλγόριθμοι Β, Δ1, ΓΦΔΑΔΛ 10 και ο αλγόριθμος Α 11.

Η γραφική παράσταση των απαιτήσεων αποθήκευσης των δεδομένων δίνεται: στα σχ. 3.13-3.20 συναρτήσει του αριθμού των καταστάσεων n γιά m=0.1n (όταν p=1 και p=n), m=n (όταν p=1 και όταν p=n), m=2n (όταν p=1), m=3n (όταν p=n) , m=10n (όταν p=1 και p=n), ενώ στα σχ. 3.21, 3.22 συναρτήσει των διαστάσεων του δια-

---

* Οι αλγόριθμοι που είναι μέσα στις παρενθέσεις έχουν το ίδιο μήκος κυρίως προγράμματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 Εκτέλεση αλγόριθμου Β γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	ΤΡΙΖΕΣ	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ.Μνήμης)
1. $\hat{x}$					n
2. P					$0,5(n^2+n)$
3. Q					$0.5(p^2+p)$
4. $Q_1=Q^{-1}$	$0.5(p^3+3p^2-2p)$	$0.5(p^3-p)$	2p-1	p	store in 3
5. R					$\max(\frac{m^2+m}{2},\frac{n^2+n}{2})$
6. $A_0=R^{-1}$	$0.5(m^3+3m^2-2m)$	$0.5(m^3-m)$	2m-1	m	απ. στο 5
7. H					$\max(nm,n^2)$
8. $H_1=H^TA_0$	nm^2	nm^2-nm			$\max(nm,n^2)$
9. $H_2=H_1H$	$0.5(n^2m+nm)$	$0.5(n^2m+nm-n^2-n)$			απ. στο 5
10. z					m
11. $D_1=H_1^T z$	nm	nm-n			n
12. Γ					n p
13. $J=\Gamma^TH_2$	n^2p	n^2p-np			n p
14. $O_2=J\Gamma$	$0.5(np^2+np)$	$0,5(np^2+np-p^2-p)$			$0.5(n^2+n)$
15. $J_0=O_2+Q_1$		$0,5(p^2+p)$			απ. στο 3
16. $S_0=J_0^{-1}$	$0.5(p^3+3p^2-2p)$	$0.5(p^3-p)$	2p-1	p	απ. στο 3

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 (συνέχεια)

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	Τ.ΡΙΖΕΣ	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ.Μνήμης)
17.Φ					απ. στο 7
18.$O_3=\Phi^T J^T$	n^2p	n^2p-np			απ. στο 8
19.$L=S_0 O_3^T$	np^2	np^2-np			απ. στο 13
20.$L_1=O_3 L$	$0.5(n^2p+np)$	$0.5(n^2p+np-n^2-n)$			απ. στο 14
21.$T=\Phi^T H_2$	n^3	n^3-n^2			απ. στο 8
22.$O_1=T\Phi$	$0.5(n^3+n^2)$	$0.5(n^3-n)$			απ. στο 5
23.$N=O_1-L_1$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο 5
24.$P_0=P^{-1}$	$0.5(n^3+3n^2-2n)$	$0.5(n^3-n)$	$2n-1$	n	απ. στο 2
25.$S_1=N+P_0$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο 14
26.$S=S_1^{-1}$	$0.5(n^3+3n^2-2n)$	$0.5(n^3-n)$	$2n-1$	n	απ. στο 14
27.$\Gamma_1=\Gamma\cdot L$	n^2p	$n^2p - n^2$			απ. στο 8
28.$\Phi_0=\Phi-\Gamma_1$		n^2			απ. στο 7
29.$M=\Phi_0 D_1$	n^2	$n^2 - n$			απ. στο 5
30.$\hat{x}_0=P_0\hat{x}$	n^2	$n^2 - n$			απ. στο 8
31.$M_0=\hat{x}_0+M$		n			απ. στο 1
32.$Y=\Gamma S_0$	np^2	$np^2 - np$			απ. στο 8

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5 (συνέχεια)

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	ΤΡΙΖΕΣ	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ.Μνήμης)
33. $P_1=Y\Gamma^T$	$0.5(n^2p+np)$	$0.5(n^2p+np-n^2-n)$			απ. στο 5
34. $\hat{x}_1=P_1D_1$	n^2	n^2-n			απ. στο 13
35. $\Phi_1=\dot{\Phi}_0S$	n^3	n^3-n^2			απ. στο 8
36. $\hat{x}_2=\Phi_1M_0$	n^2	n^2-n			απ. στο 11
37. $\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_2$		n			απ. στο 1
38. $P_2=\Phi_1\Phi_0^T$	$0.5(n^3+n^2)$	$0.5(n^3-n)$			απ. στο 2
39. $P=P_1+P_2$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο 2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6 Εκτέλεση φίλτρου Kalman για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	ΤΡΙΖΕΣ	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ.Μνήμης)
1. $\hat{x}$					n
2. P					$0.5(n^2+n)$
3. Q					$\max(\frac{n^2+n}{2},\frac{m^2+m}{2})$
4. Γ					$\max(n^2, nm)$
5. $\Gamma_1=\Gamma Q$	np^2	$np^2 - np$			$\max(n^2, nm)$
6. $Q_1=\Gamma_1\Gamma^T$	$0.5(n^2p+np)$	$0.5(n^2p+np-n^2-n)$			απ. στο 3
7. Φ					απ. στο 4
8. $\Phi_1=\Phi\cdot P$	n^3	$n^3 - n^2$			απ. στο 5
9. $P_1=\Phi_1\Phi^T$	$0.5(n^3+n^2)$	$0.5(n^3-n)$			απ. στο 2
10. $P_2=P_1+Q_1$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο 2
11. $\hat{x}_1=\Phi\hat{x}$	n^2	$n^2 - n$			n
12. H					απ. στο 4
13. $z_1=H\hat{x}_1$	nm	nm - m			απ. στο 5
14. z					m
15. $z_2=z-z_1$		m			απ. στο 14
16. $P_3=HP_2$	n^2m	$n^2m - nm$			απ. στο 5

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6 (συνέχεια)

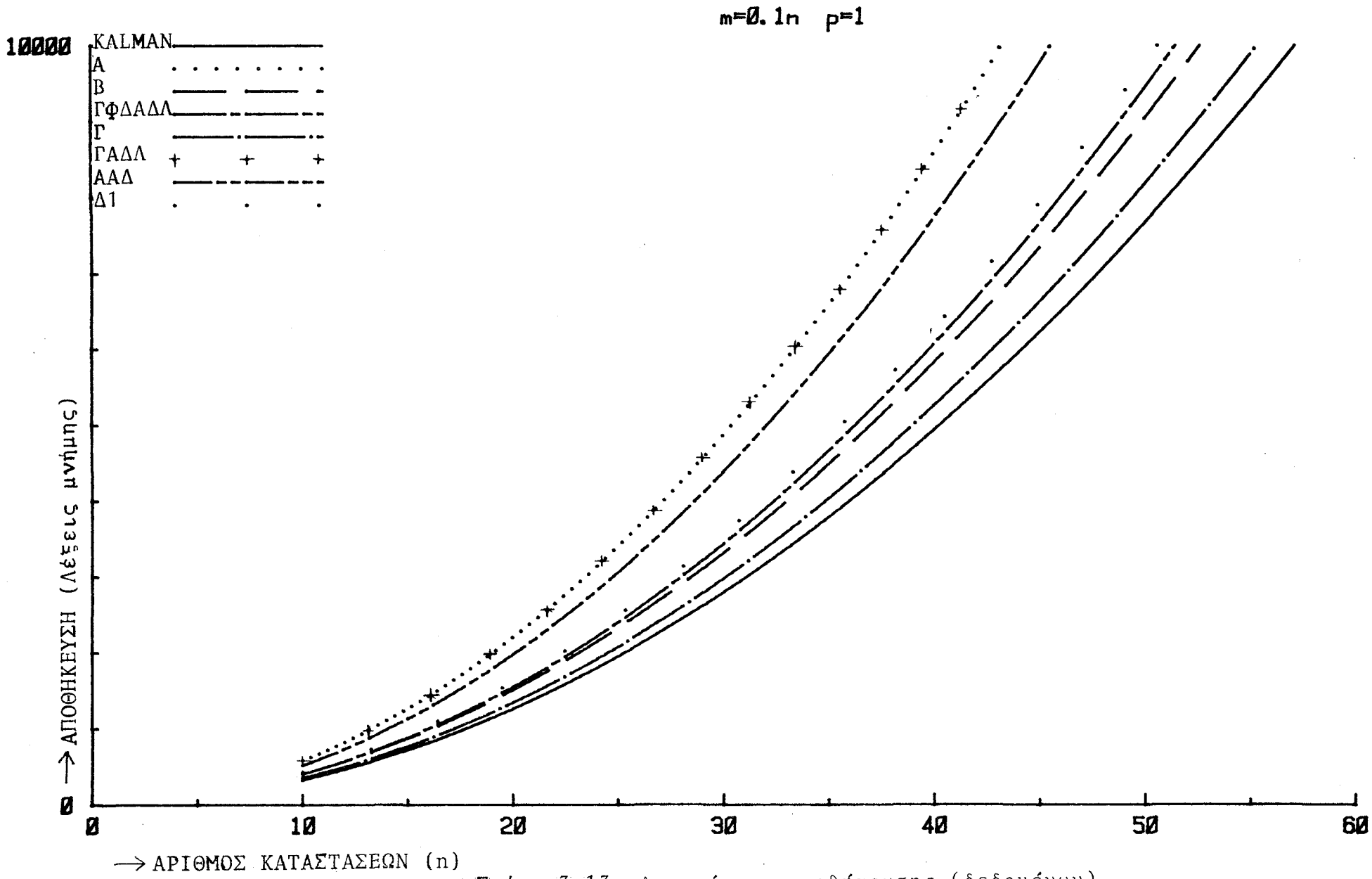
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	ΤΡΙΖΕΣ	ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λ.Μνήμης)
17. $P_4=P_3H^T$	$0.5(nm^2+nm)$	$0.5(nm^2+nm-m^2-m)$			απ. στο 3
18. R					$0.5(m^2+m)$
19. $P_z=P_4+R$		$0.5(m^2+m)$			απ. στο 3
20. $A=P_z^{-1}$	$0.5(m^3+3m^2-2m)$	$0.5(m^3-m)$	$2m-1$	m	απ. στο 3
21. $K=P_3^TA$	nm^2	$nm^2 - nm$			απ. στο 4
22. $\hat{x}_2=Kz_2$	nm	nm - n			απ. στο 1
23. $\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_2$		n			απ. στο 1
24. $P_6=KP_3$	$0.5(n^2m+nm)$	$0.5(n^2m+nm-n^2-n)$			απ. στο 3
25. $P=P_2-P_6$		$0.5(n^2+n)$			απ. στο 2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.7: Ποσά ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη) αλγορίθμων γραμμικής εκτίμησης γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

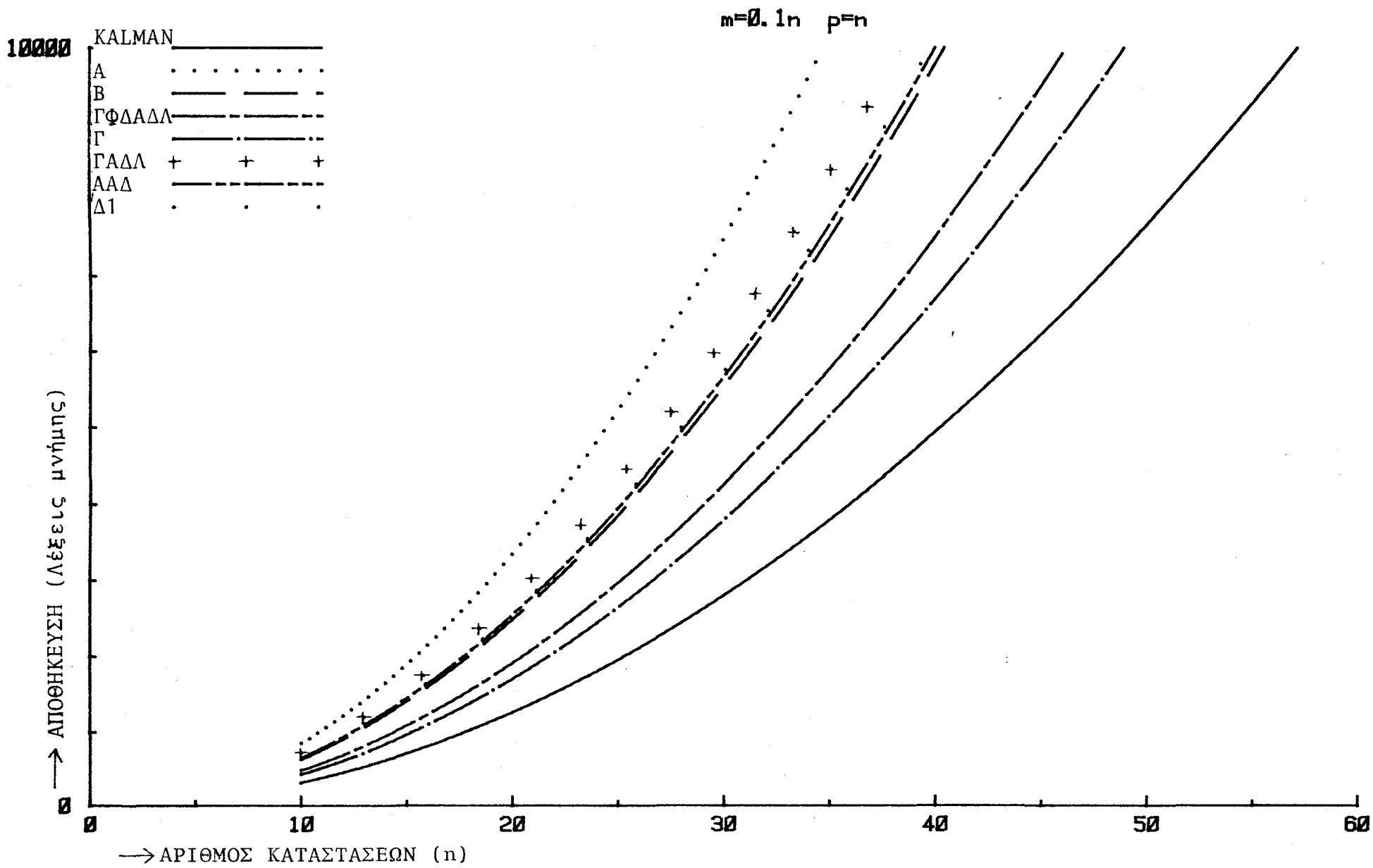
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ (Λέξεις μνήμης)
Α	$2n^2+2n+3np+2nm+m+2\max(n^2, nm)+2\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2})$
Β	$n^2+3n+0.5p^2+0.5p+2np+m+2\max(n^2, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2})$
Γ	$n^2+3n+0.5m^2+1.5m+nm+\max(np, nm)+\max(n^2, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}; n^2)$
Δ1	$n^2+3n+0.5m^2+1.5m+0.5p^2+0.5p+np+2nm+2\max(n^2, nm)+\max(nm, np)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2})$
ΚΑLΜΑΝ	$0.5n^2+2.5n+0.5m^2+1.5m+2\max(n^2, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{n^2+n}{2})$
ΓΦΔΑΔΛ	$1.5n^2+3.5n+m+\max(n^2, nm)+\max(np, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, n^2)+\max(\frac{m^2+m}{2}, nm)$
ΓΑΔΛ	$4n^2+6n+nm+0.5m^2+1.5m+\max(n^2, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{p^2+p}{2})+\max(np, nm)$
ΑΑΔ	$3.5n^2+4.5n+nm+0.5m^2+1.5m+\max(n^2, nm)+\max(np, nm)+\max(\frac{m^2+m}{2}, \frac{p^2+p}{2})$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.8: Υπολογιστικοί χρόνοι (ανά επανάληψη) αλγορίθμων γραμμικής εκτίμησης για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα

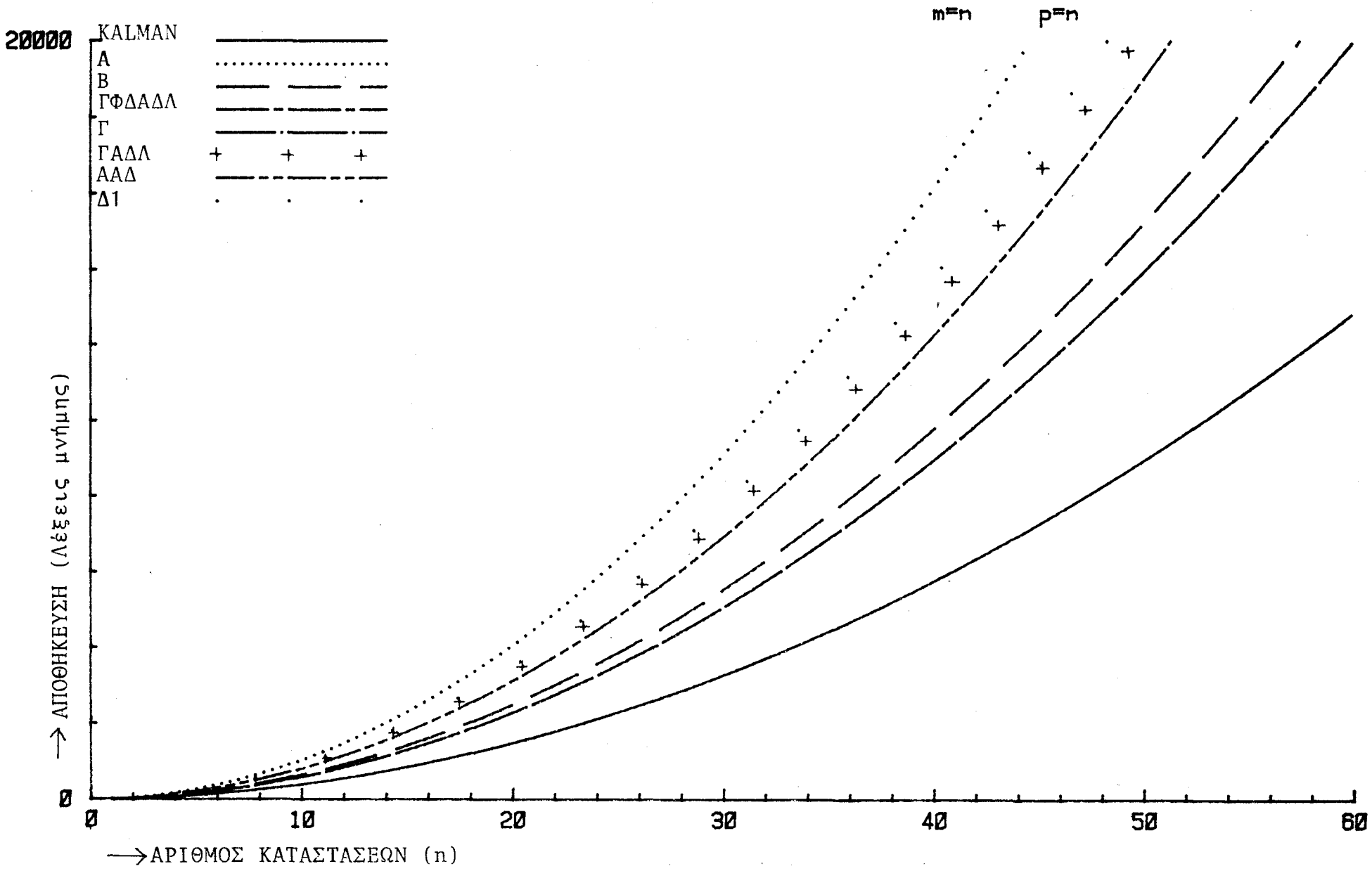
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	Τ.ΡΙΖΕΣ
Α	$5n^3+7n^2-2n+p^3+3p^2-2p+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+6.5n^2p+3.5np^2+2np+5n^2m+2.5nm^2+3.5nm$	$5n^3-0.5n^2-4.5n+p^3-p+0.5m^3-0.5m+$ $+6.5n^2p+3.5np^2-4np+5n^2m+2.5nm^2+0.5nm$	$2m+4n+$ $+4p-5$	$m+2n+$ $+2p$
Β	$4n^3+8n^2-2n+p^3+3p^2-2p+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+4n^2p+2.5np^2+1.5np+nm^2+0.5n^2m+1.5nm$	$4n^3+2n^2-5n+p^3-p+0.5m^3-0.5m+4n^2p+$ $+2.5np^2-2.5np+nm^2+0.5n^2m+0.5nm$	$2m+4n+$ $+4p-5$	$m+2n+$ $+2p$
Γ	$1.5n^3+1.5n^2+m^3+3m^2-2m+np^2+0.5n^2p+$ $+0.5np+5n^2m+3nm^2+5nm$	$1.5n^3-1.5n+m^3-m+np^2+0.5n^2p-0.5np+$ $+5n^2m+3nm^2$	$4m-2$	$2m$
Δ1	$1.5n^3+1.5n^2+m^3+3m^2-2m+3n^2p+2np^2+2np+$ $+5n^2m+3nm^2+5nm+3npm+1.5p^2m+1.5pm^2+$ $+2pm$	$1.5n^3+0.5n^2-n+m^3-m+0.5p^2+0.5p+$ $+3n^2p+2np^2-np+5n^2m+3nm^2+3nmp-pm+$ $+1.5p^2m+1.5pm^2$	$4m-2$	$2m$
KALMAN	$1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+1.5n^2m+$ $+1.5nm^2+3nm+np^2+0.5n^2p+0.5np$	$1.5n^3-1.5n+0.5m^3-0.5m+1.5n^2m+$ $+1.5nm^2+nm+np^2+0.5n^2p-0.5np$	$2m-1$	m
ΓΦΔΑΔΛ	$2.5n^3+5.5n^2-2n+0.5m^3+1.5m^2-m+0.5n^2p+$ $+np^2+0.5np+5n^2m+2.5nm^2+3.5nm$	$2.5n^3+n^2-3.5n+0.5m^3-0.5m+0.5n^2p+$ $+np^2-0.5np+5n^2m+2.5nm^2-1.5nm$	$2m+4n-3$	$m+2n$
ΓΑΔΛ	$4.5n^3+5.5n^2-n+0.5m^3+1.5m^2-m+5n^2m+$ $+2.5nm^2+4.5nm+np^2+0.5n^2p+0.5np$	$4.5n^3+0.5n+0.5m^3-0.5m+5n^2m+$ $+2.5nm^2-0.5nm+np^2+0.5n^2p-0.5np$	$2m+2n-2$	$n+m$
ΑΑΔ	$4n^3+3n^2+m^3+3m^2-2m+6n^2m+3nm^2+6nm+$ $+np^2+0.5n^2p+0.5np$	$4n^3-0.5n^2-0.5n+m^3-m+6n^2m+3nm^2+$ $+np^2+0.5n^2p-0.5np$	$4m-2$	$2m$



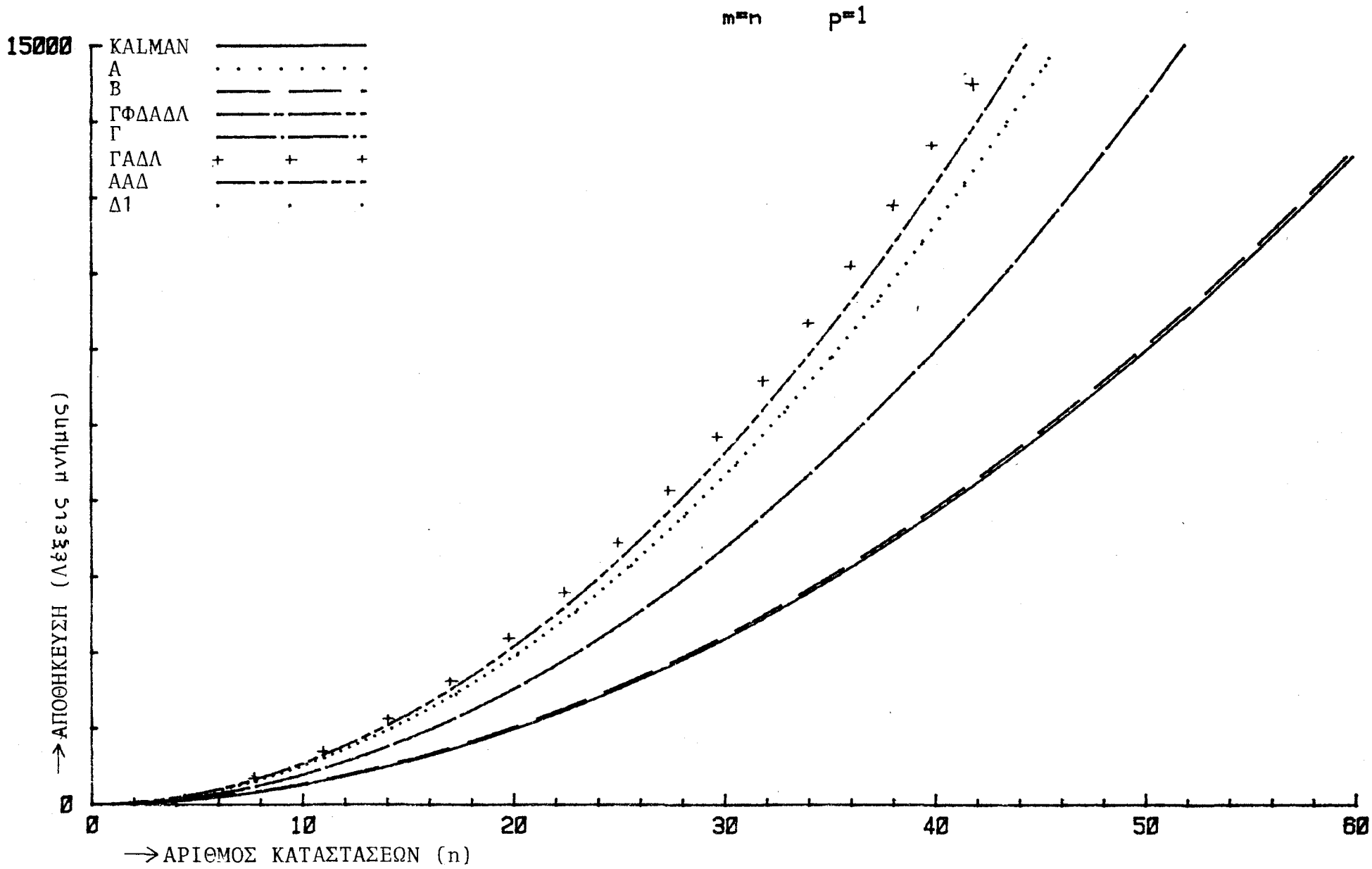
Σχήμα 3.13 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



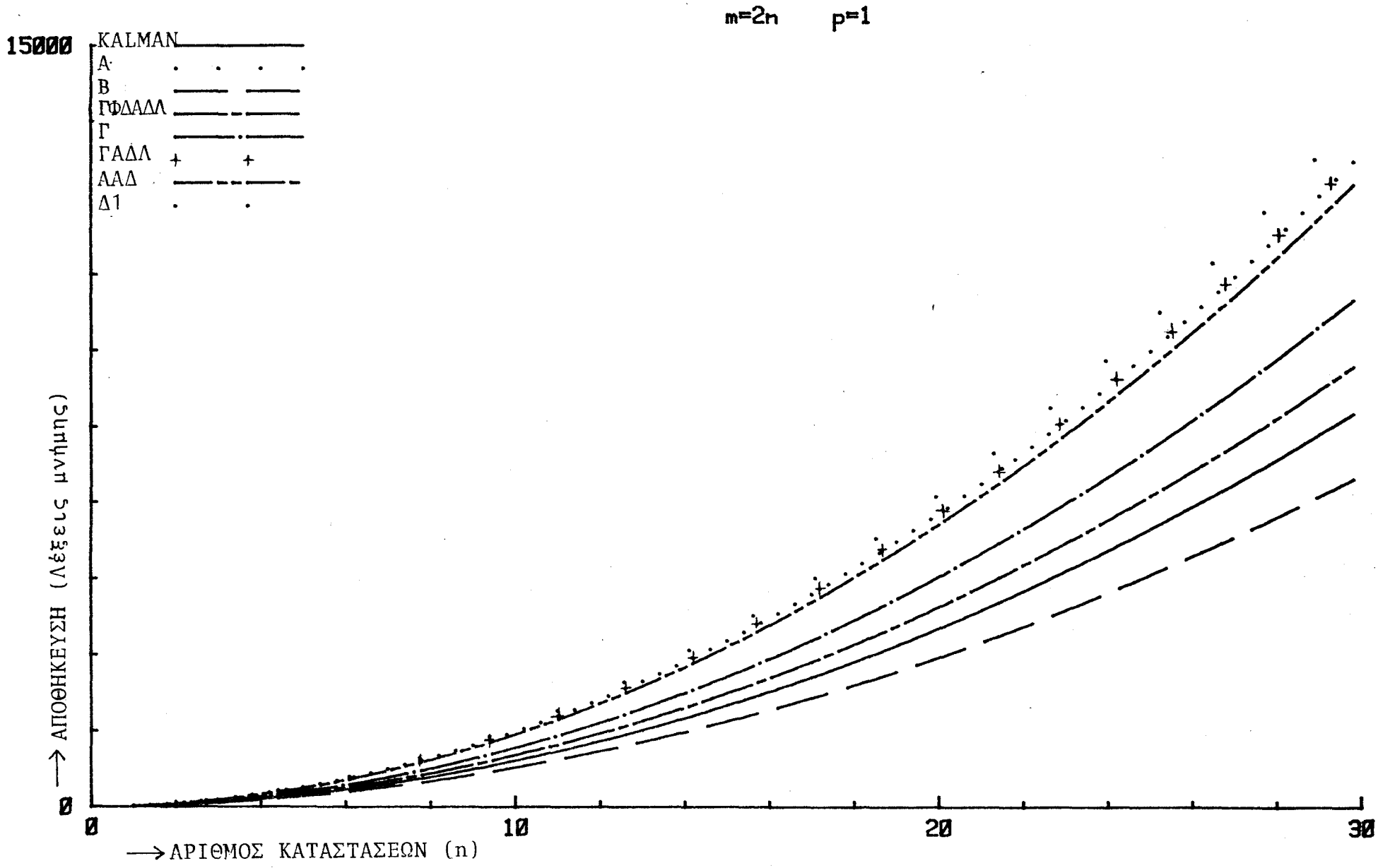
Σχήμα 3.14 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



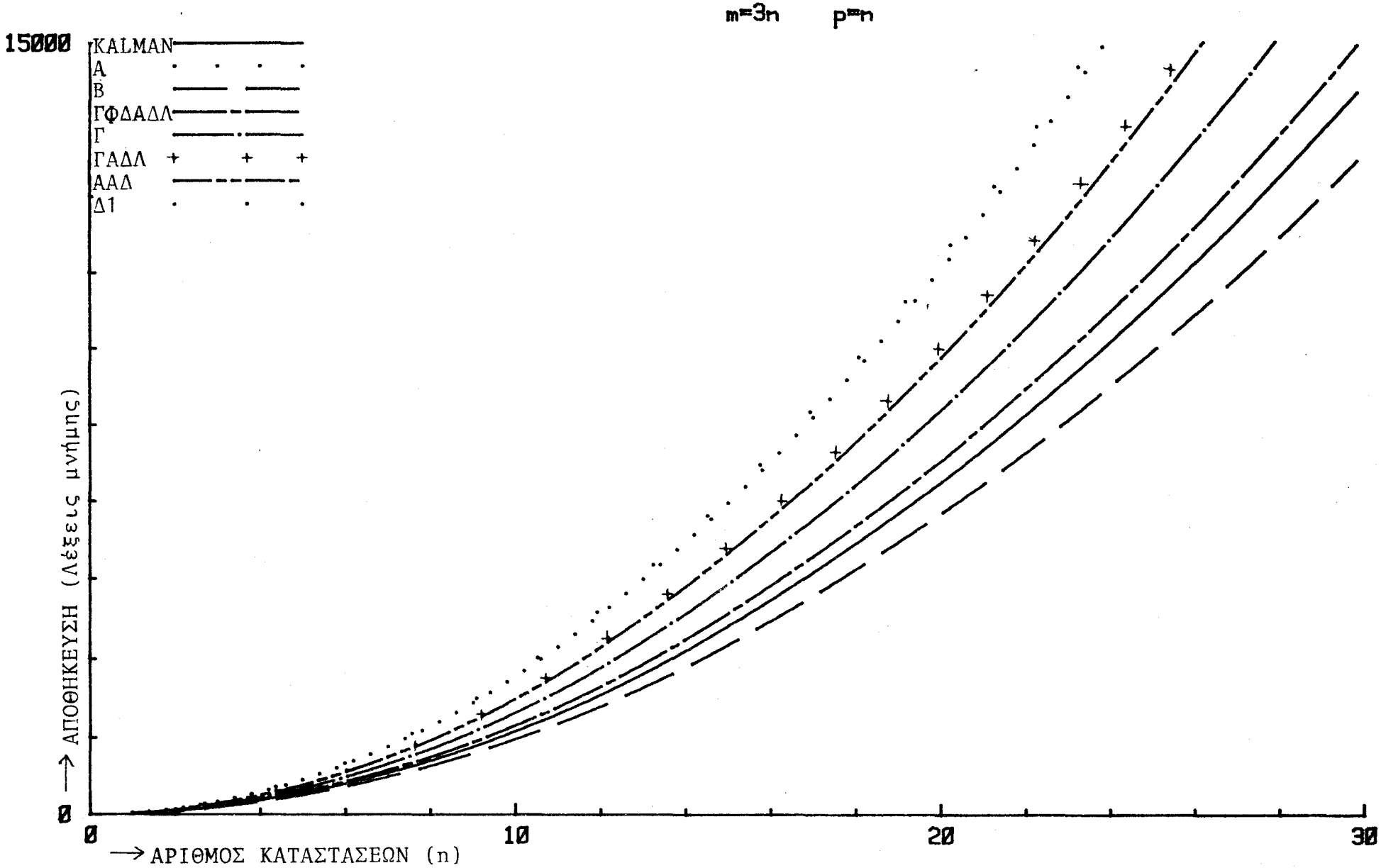
Σχήμα 3.15 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



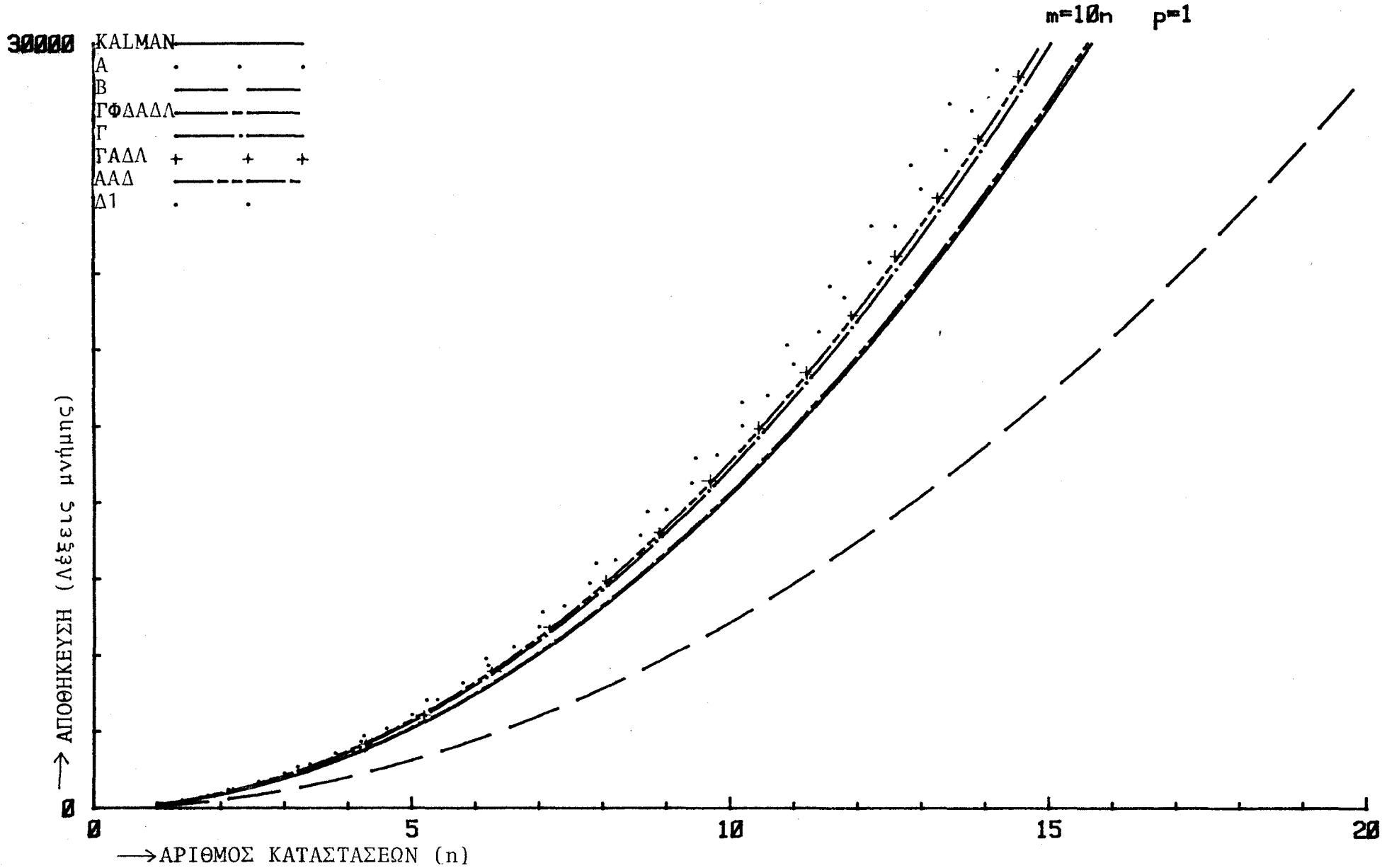
Σχήμα 3.16 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



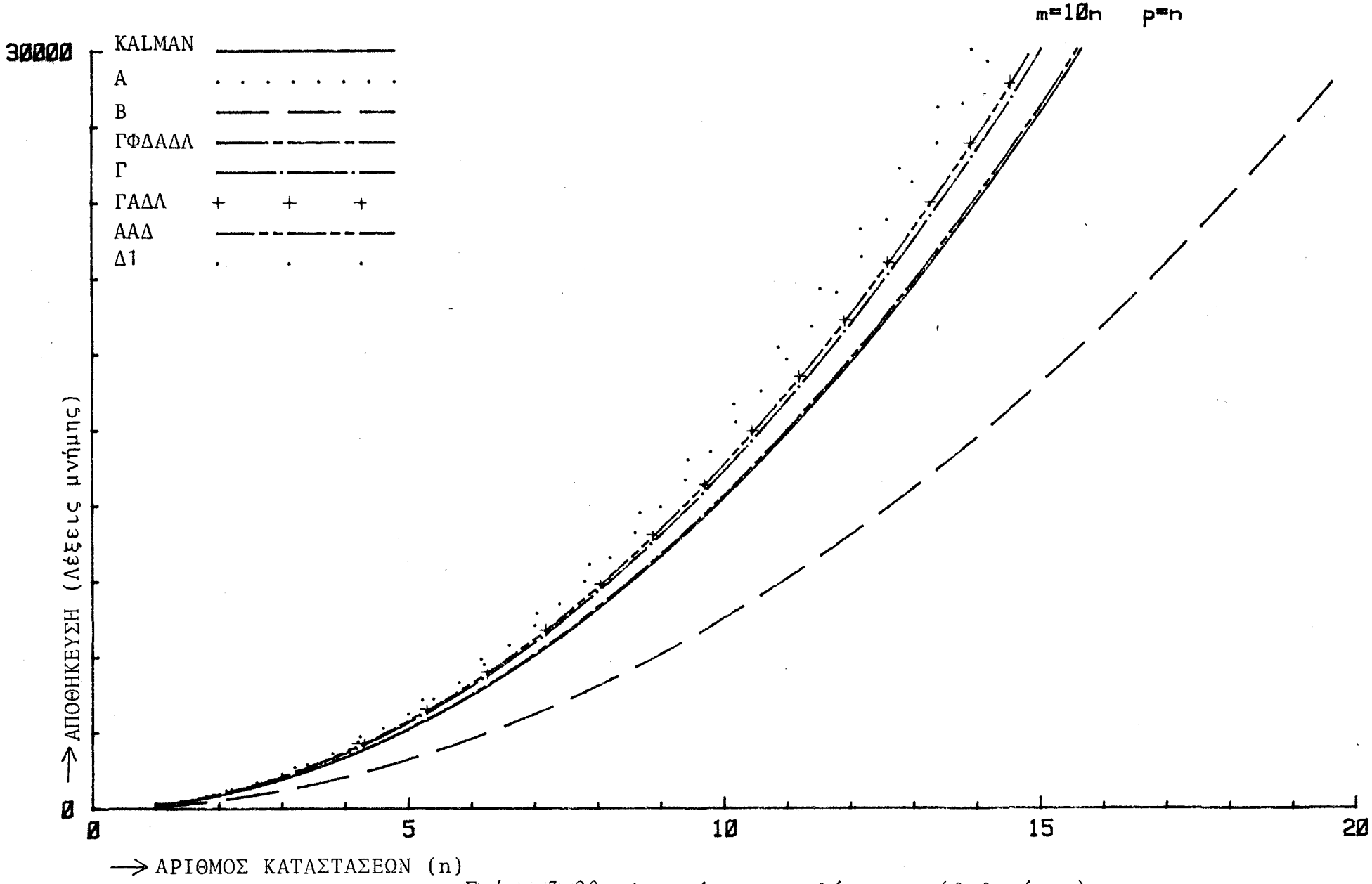
Σχήμα 3.17 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



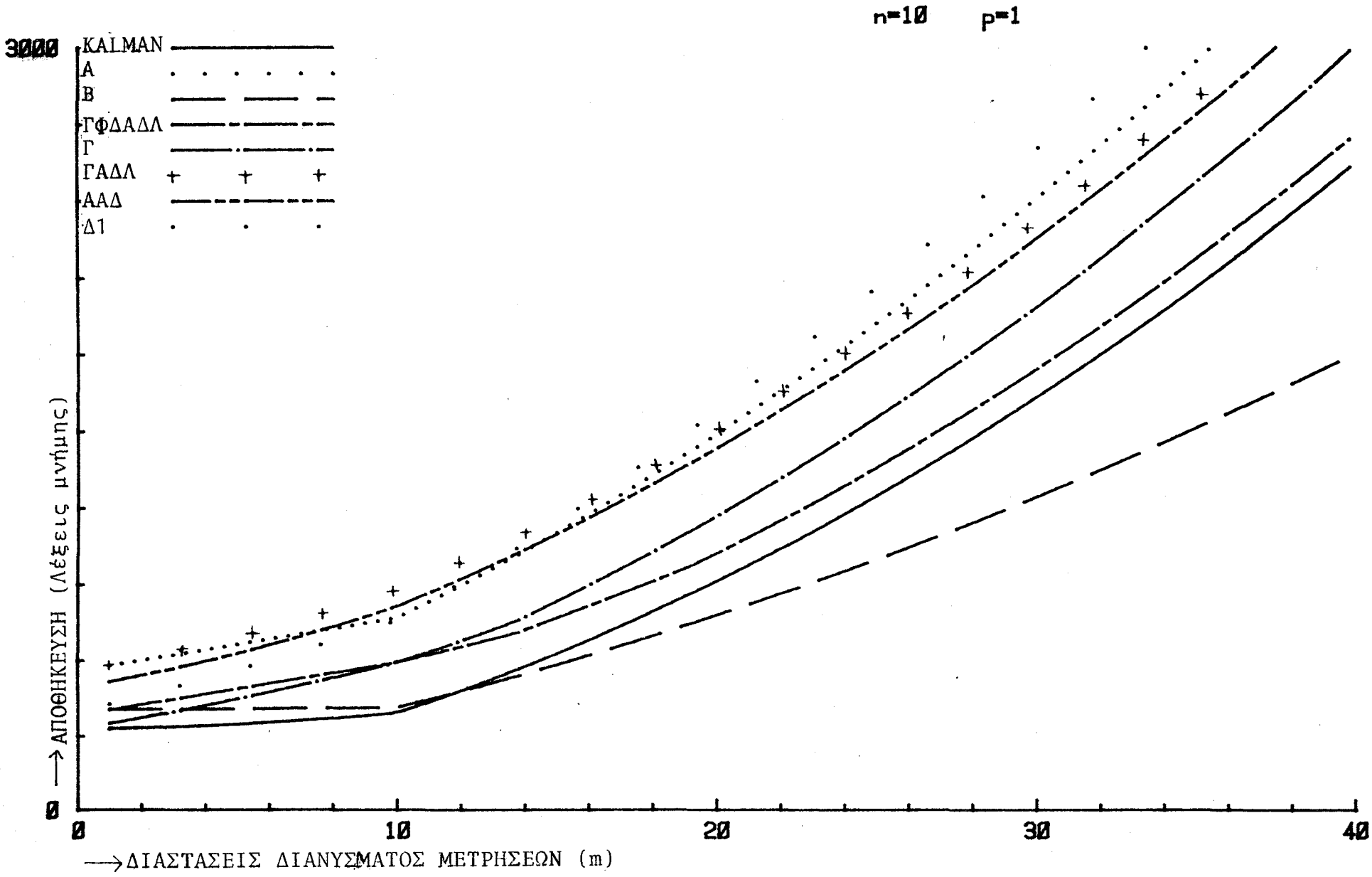
Σχήμα 3.18 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



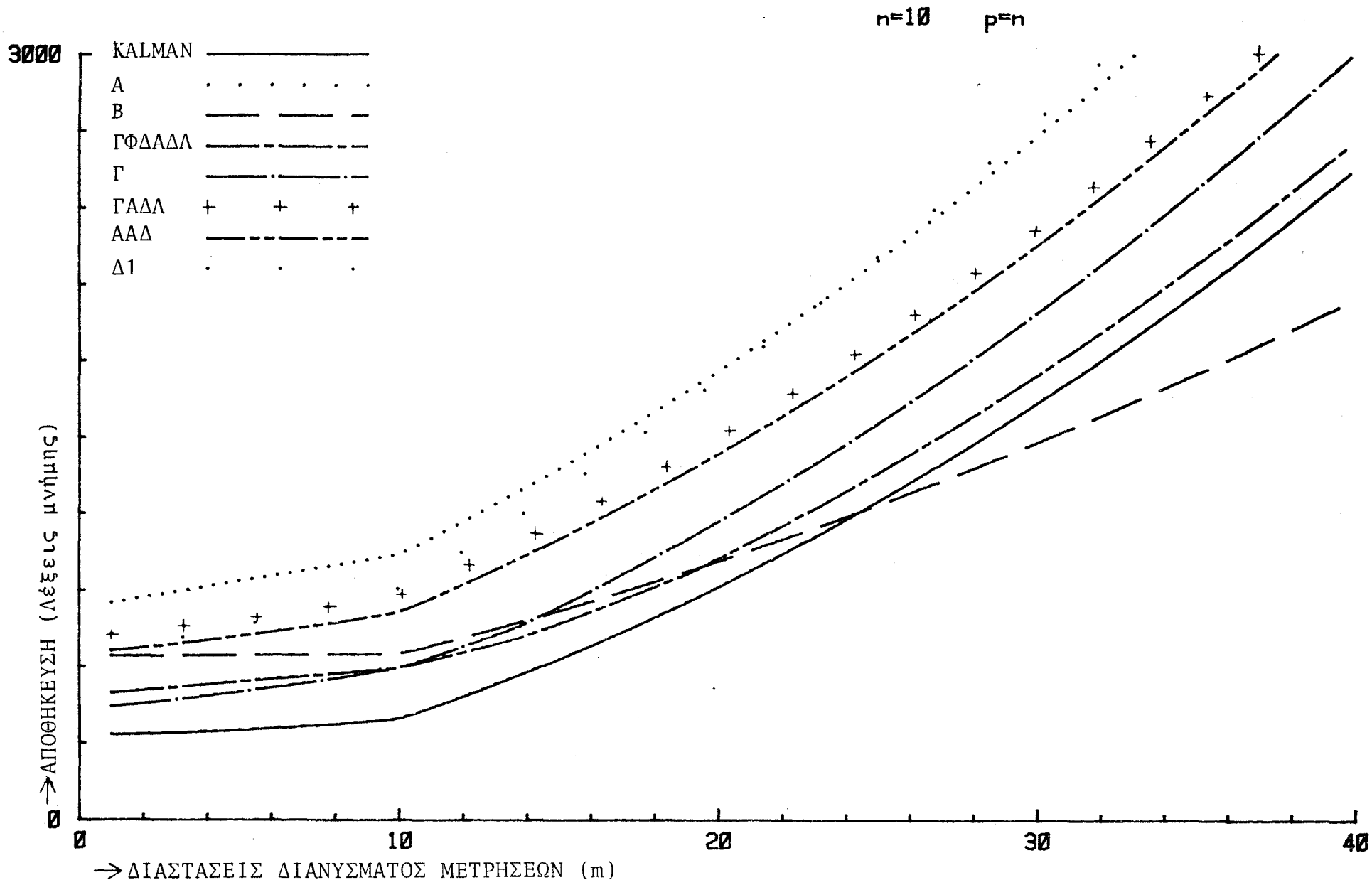
Σχήμα 3.19 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.20 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.21 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.22 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

νύσματος μετρήσεων m για n=10 (όταν p=1 και όταν p=n).

Οπότε από τα σχ. 3.13-3.22* προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης για m<2n όταν p=1 και m<3n όταν p=n έχει το φίλτρο Kalman, ενώ για m ≥2n όταν p=1 και m≥3n όταν p=n η κατάσταση αλλάζει και τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης έχει ο αλγόριθμος Β.

2) Τις περισσότερες απαιτήσεις αποθήκευσης όταν p=1 έχουν: ο αλγόριθμος Α για m=0.1n, ο ΓΑΔΛ για 0.1n≤m≤n και ο Δ1 για m>n. Ενώ όταν p=n τις περισσότερες απαιτήσεις αποθήκευσης έχουν, ο αλγόριθμος Α για m<3n και ο αλγόριθμος Δ1 για m≥3n.

3) Γιά m<10n (όταν p=1 και όταν p=n) ο ΑΔΔ αλγόριθμος είναι οικονομικότερος (όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης) από τον ΓΑΔΛ. Ενώ γιά m=10n (όταν p=1 και όταν p=n) οι δύο αυτοί αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης.

4) Γιά m<n ο αλγόριθμος Γ έχει λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από τον ΓΦΔΑΔΛ, ενώ γιά m>n η κατάσταση αντιστρέφεται. Όταν m=n οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης. Τα παραπάνω ισχύουν και γιά p=1 και γιά p=n.

5) Ο αλγόριθμος Β έχει λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από τον αλγόριθμο Γ όταν p=1 γιά m≥0.5n και όταν p=n γιά m>n.

6) Ο αλγόριθμος Β όταν p=1 είναι πάντα οικονομικότερος του ΓΦΔΑΔΛ, ενώ όταν p=n ο αλγόριθμος Β είναι οικονομικότερος του ΓΦΔΑΔΛ γιά m≥2n.

7) Ο αλγόριθμος Β έχει πάντα λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από τους αλγόριθμους Α,Δ1 (όταν p=1 και όταν p=n).

8) Ο αλγόριθμος Α έχει λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από τον αλγόριθμο Δ1 γιά m>n όταν p=1 και γιά m≥3n όταν p=n. Όταν m=n γιά p=1 οι δύο αυτοί αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης.

Στη συνέχεια εάν λάβουμε υπ'όψη τα ενδεικτικά ποσά αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης των αλγορίθμων στον υπολογιστή CROMENCO προκύπτει η εξής σημαντική διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη ανάλυση:

---

* Στα Σχ. 3.15,3.16 οι καμπύλες των απαιτήσεων αποθήκευσης των αλγορίθμων Γ και ΓΦΔΑΔΛ συμπίπτουν.

Από τα σχ. 3.23-3.26, στα οποία δίνονται ενδεικτικά οι μεταβολές των απαιτήσεων αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης και των δεδομένων των αλγορίθμων, συναρτήσει του n, για m=2n (όταν p=1), για m=3n (όταν p=n), για m=10n (όταν p=1 και όταν p=n), προκύπτει ότι ο αλγόριθμος B εξακολουθεί να έχει λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από το φίλτρο του Kalman για m>2n (όταν p=1) και για m≥3n (όταν p=n), αλλά όμως για n≥12. Στην περίπτωση δε που έχουμε m=10n (όταν p=1 και p=n) ο αλγόριθμος B είναι οικονομικότερος του φίλτρου Kalman για n≥2. Δηλαδή όταν το m είναι πολύ μεγαλύτερο του n δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά με την προηγούμενη ανάλυση (όσον αφορά τους αλγορίθμους B και Kalman), ενώ για μικρές τιμές του n, στις οριακές σχέσεις μεταξύ m και n, για τις οποίες ο αλγόριθμος B, γίνεται οικονομικότερος του φίλτρου Kalman, η κατάσταση σε σχέση με την προηγούμενη ανάλυση στην οποία δεν έχουν ληφθεί υπ'όψη τα ποσά αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης των αλγορίθμων, αντιστρέφεται.

Η συμπεριφορά των χρονικών απαιτήσεων των αλγορίθμων δίνεται στα σχ. 3.27-3.36, τα οποία αποτελούν την γραφική παράσταση των μεταβολών του ολικού κανονικοποιημένου αριθμού των λειτουργιών των αλγορίθμων του Πίνακα 3.8, αφ'ενός μεν συναρτήσει του αριθμού των καταστάσεων n (σχ. 3.27-3.34), αφ'ετέρου συναρτήσει των διαστάσεων του διανύσματος των μετρήσεων m (σχ. 3.35-3.36), για διάφορους συνδιασμούς των παραμέτρων.

Οπότε από τα σχ. 3.27-3.36* προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

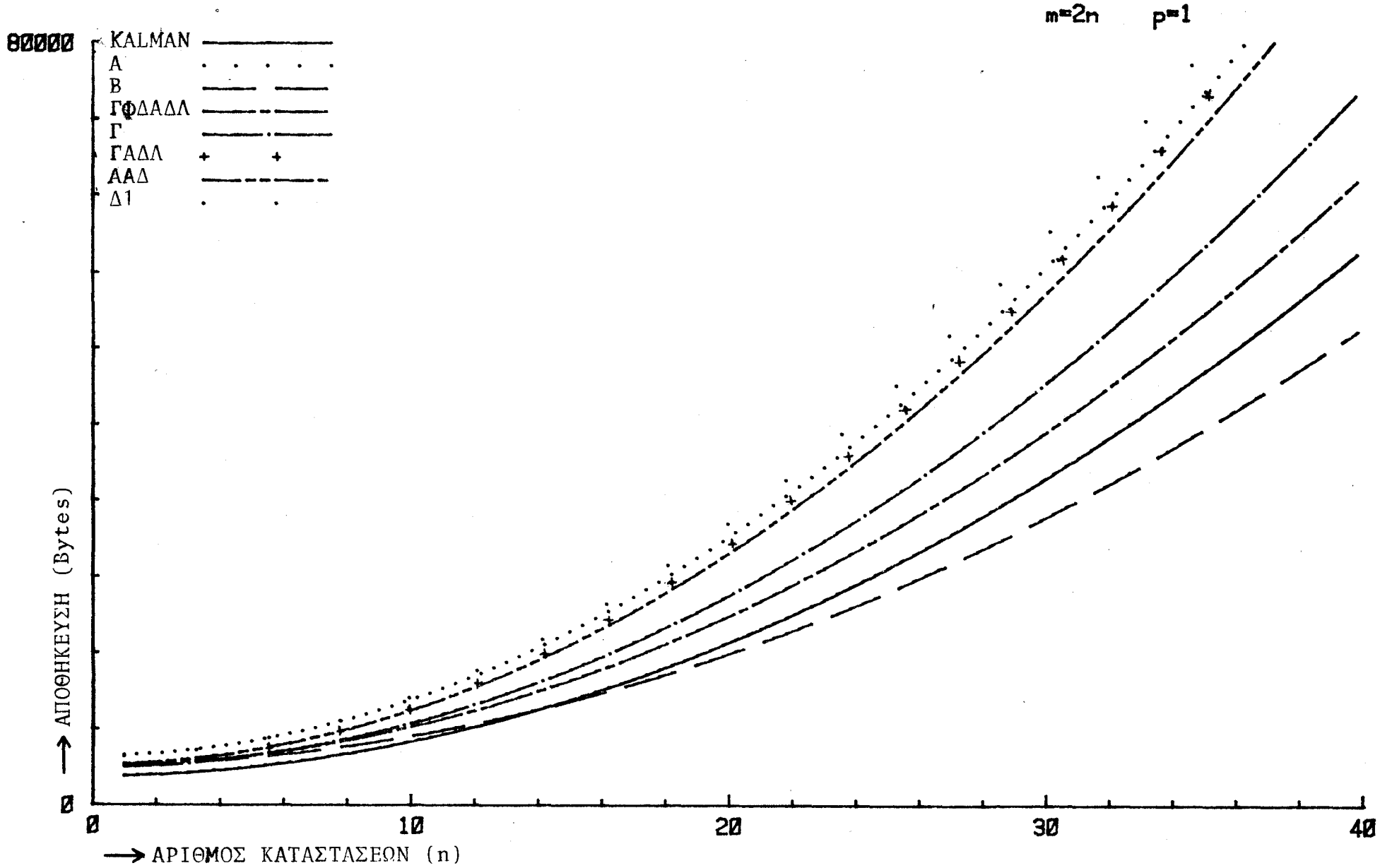
1) Ο ταχύτερος αλγόριθμος για m ≥ 2n όταν p=1 και m ≥ 4n όταν p=n είναι ο αλγόριθμος B, ενώ για m < 2n όταν p=1 και m < 4n όταν p=n είναι ο αλγόριθμος Kalman.

2) Οι πιό αργοί αλγόριθμοι όταν p=1 είναι ο αλγόριθμος A για m < n και ο ΑΑΔ για m ≥ n. Στη περίπτωση που έχουμε p=n οι πιό αργοί αλγόριθμοι είναι ο αλγόριθμος A για m ≤ n και ο αλγόριθμος Δ1 για m > n.

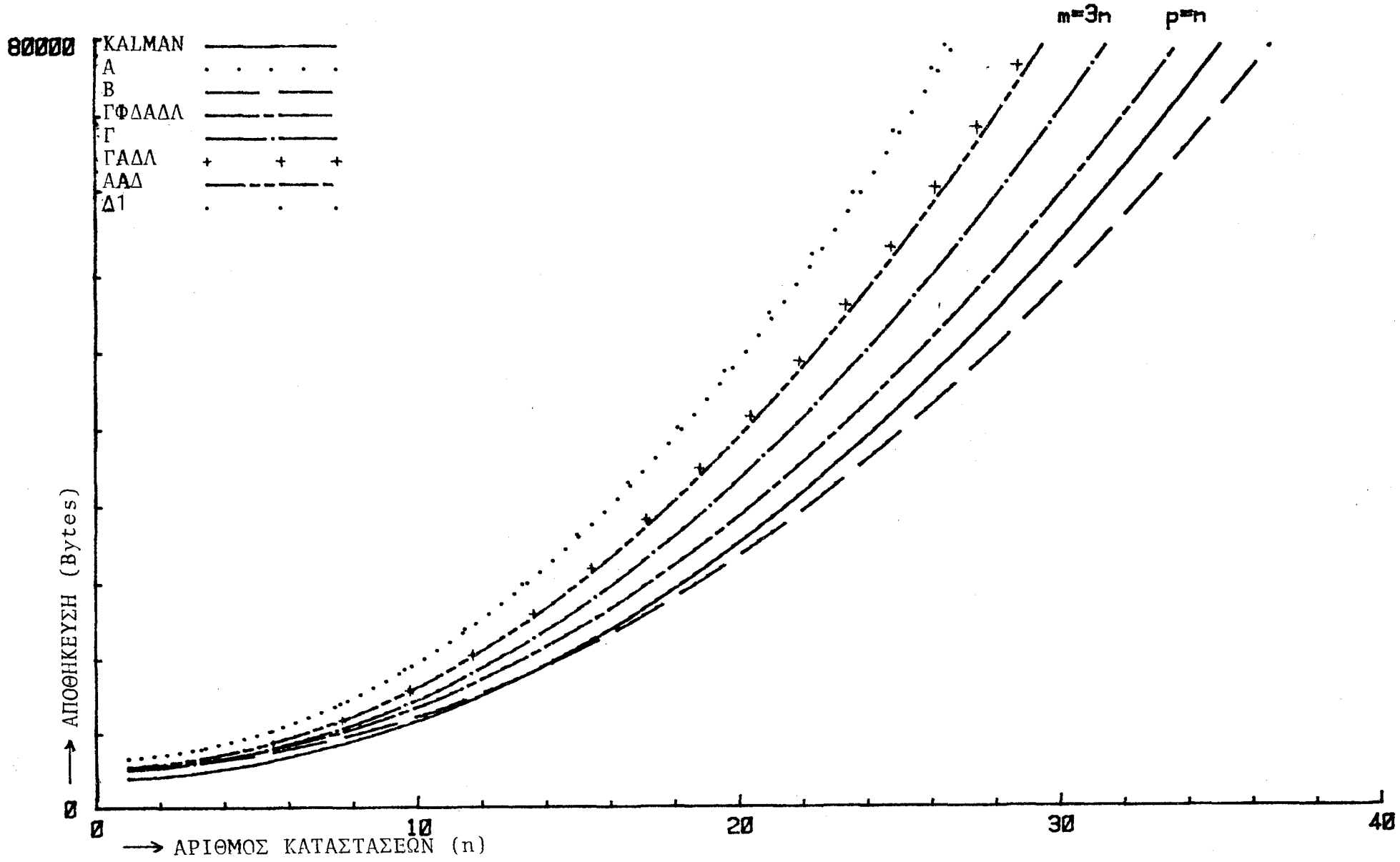
3) Ο αλγόριθμος ΑΑΔ για m < 0.5n (όταν p=1 και όταν p=n) είναι ταχύτερος του ΓΑΔΛ.

---

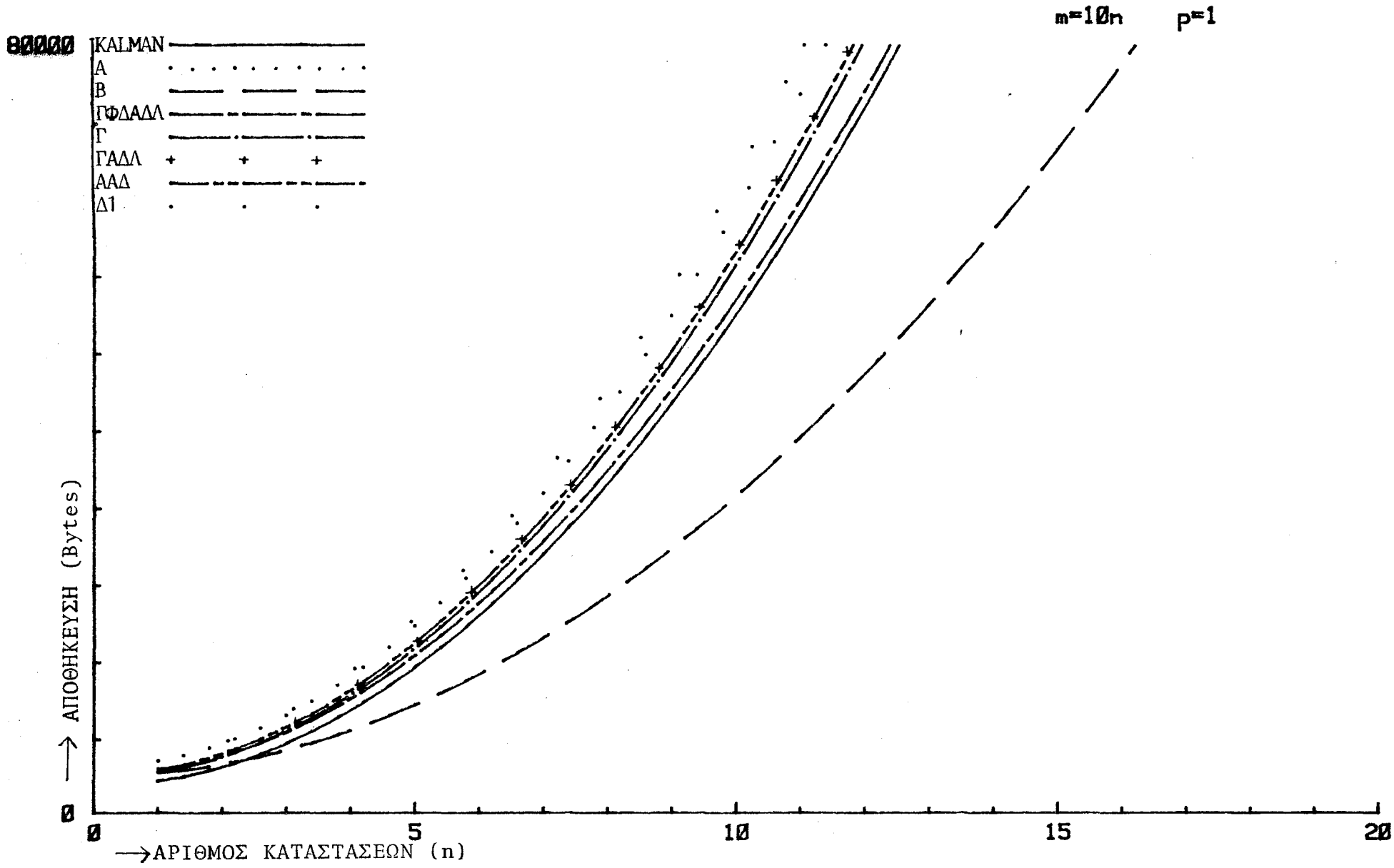
* Στα Σχ. 3.31,3.32 οι καμπύλες των χρονικών απαιτήσεων των αλγορίθμων Γ, ΓΦΔΑΔΛ συμπίπτουν.



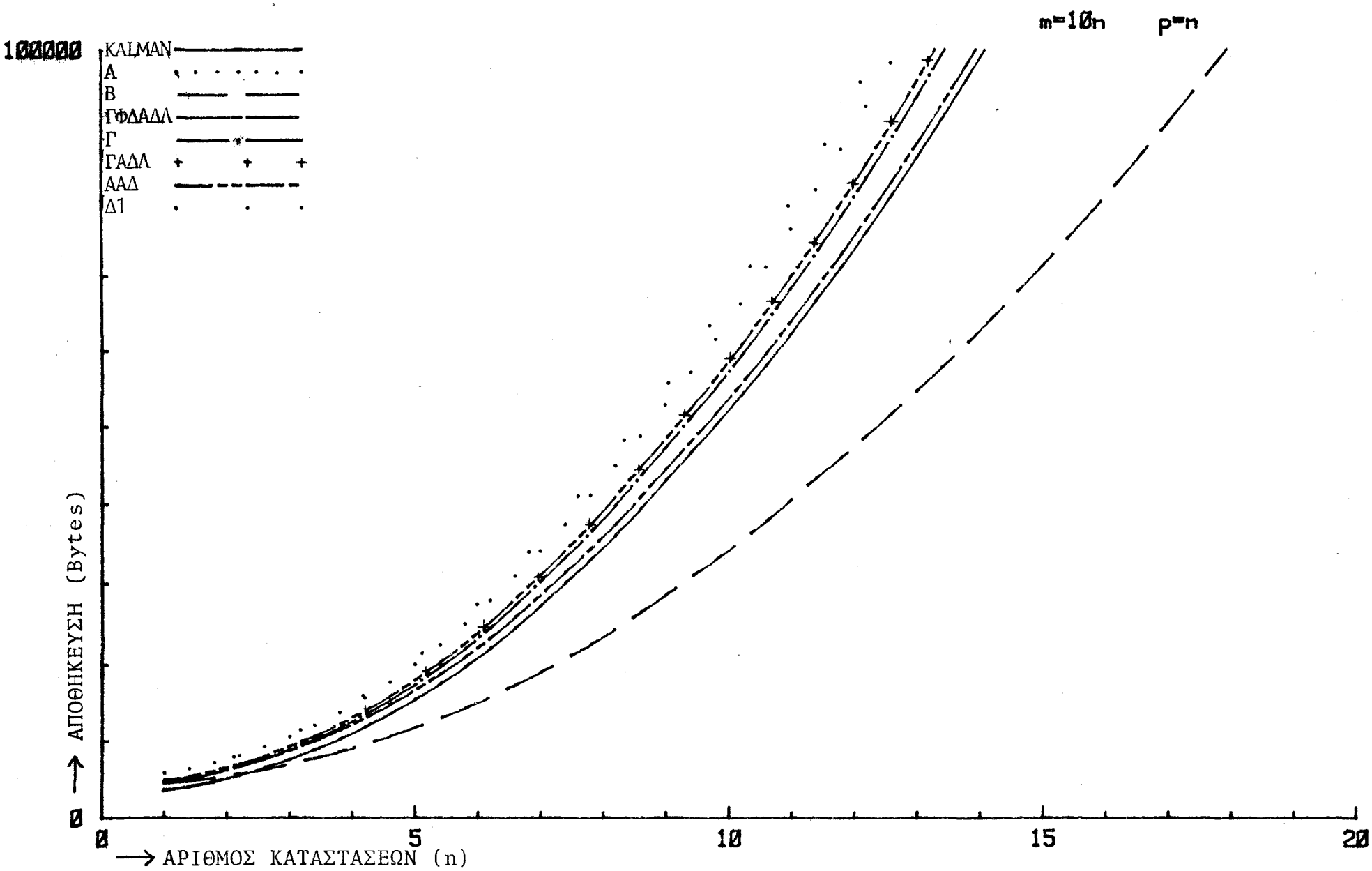
Σχήμα 3.23 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



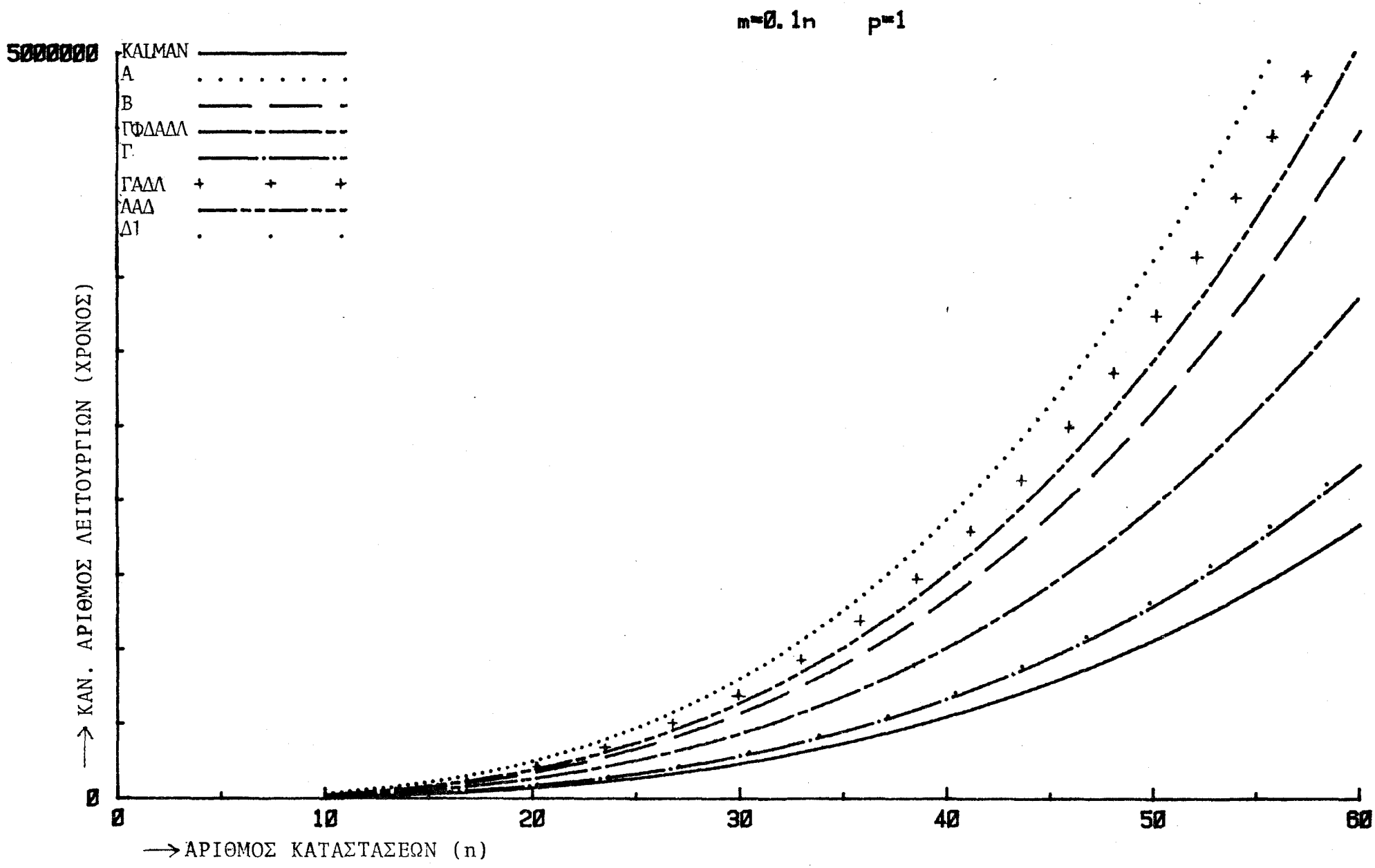
Σχήμα 3.24 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



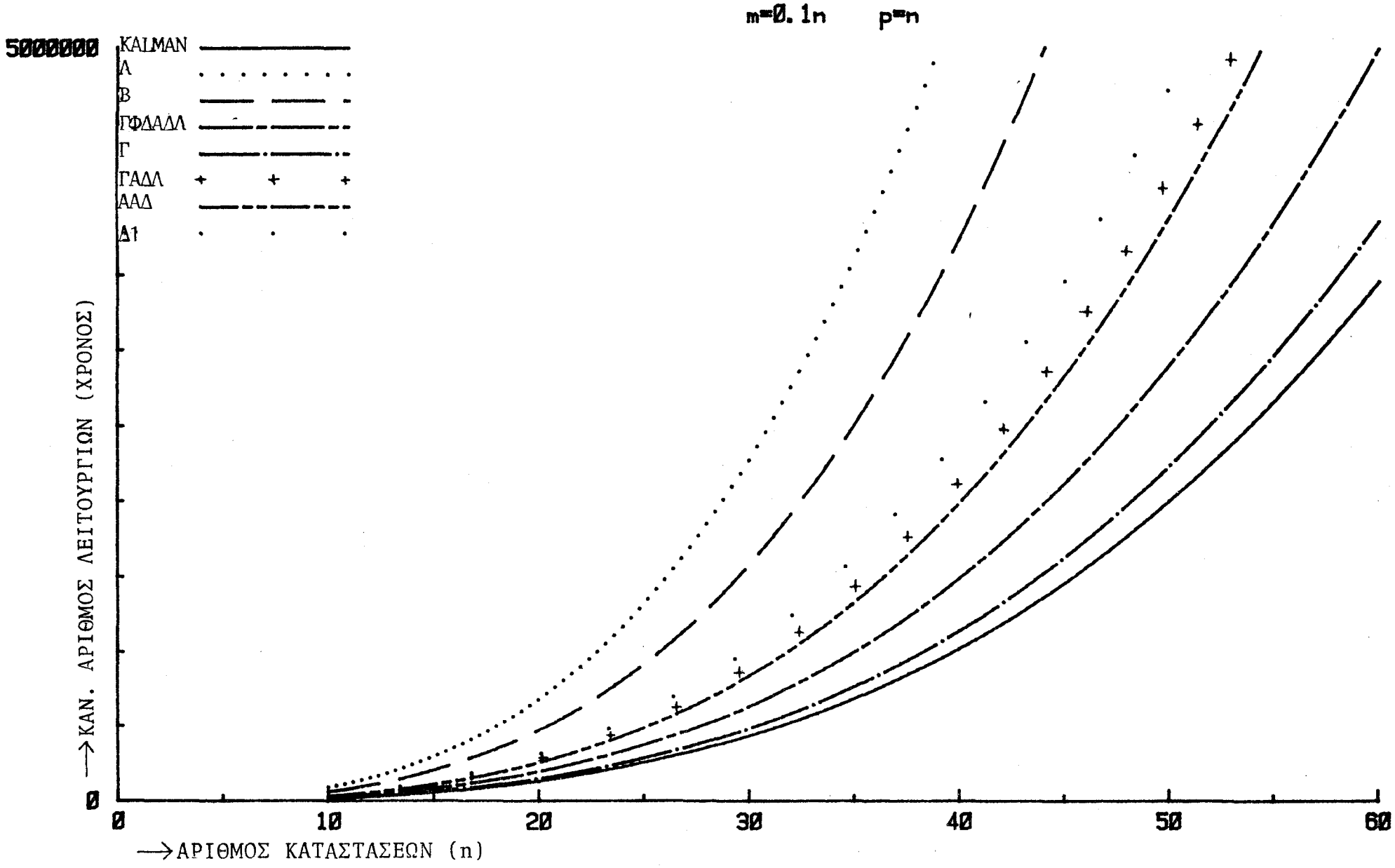
Σχήμα 3.25 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



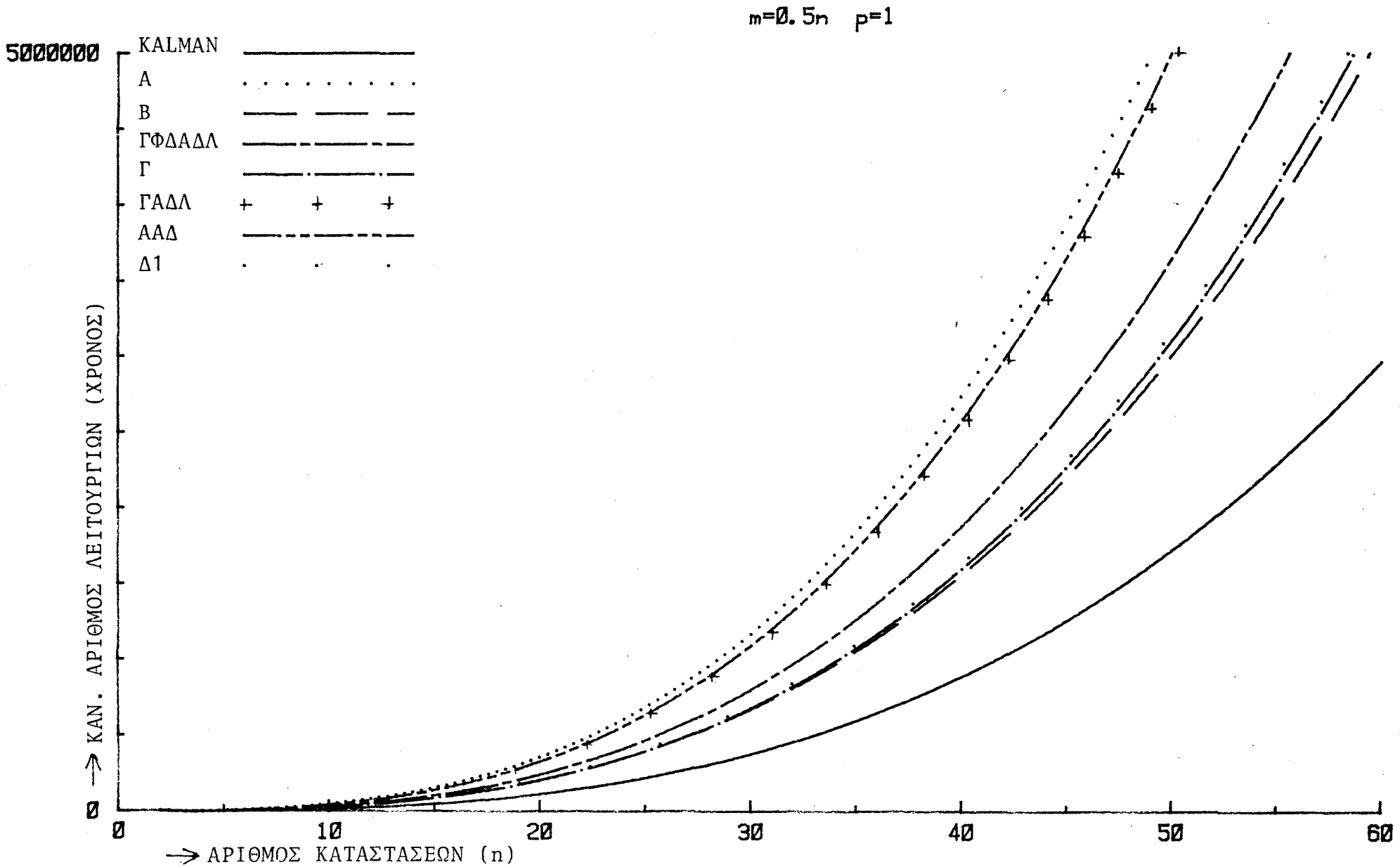
Σχήμα 3.26 Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



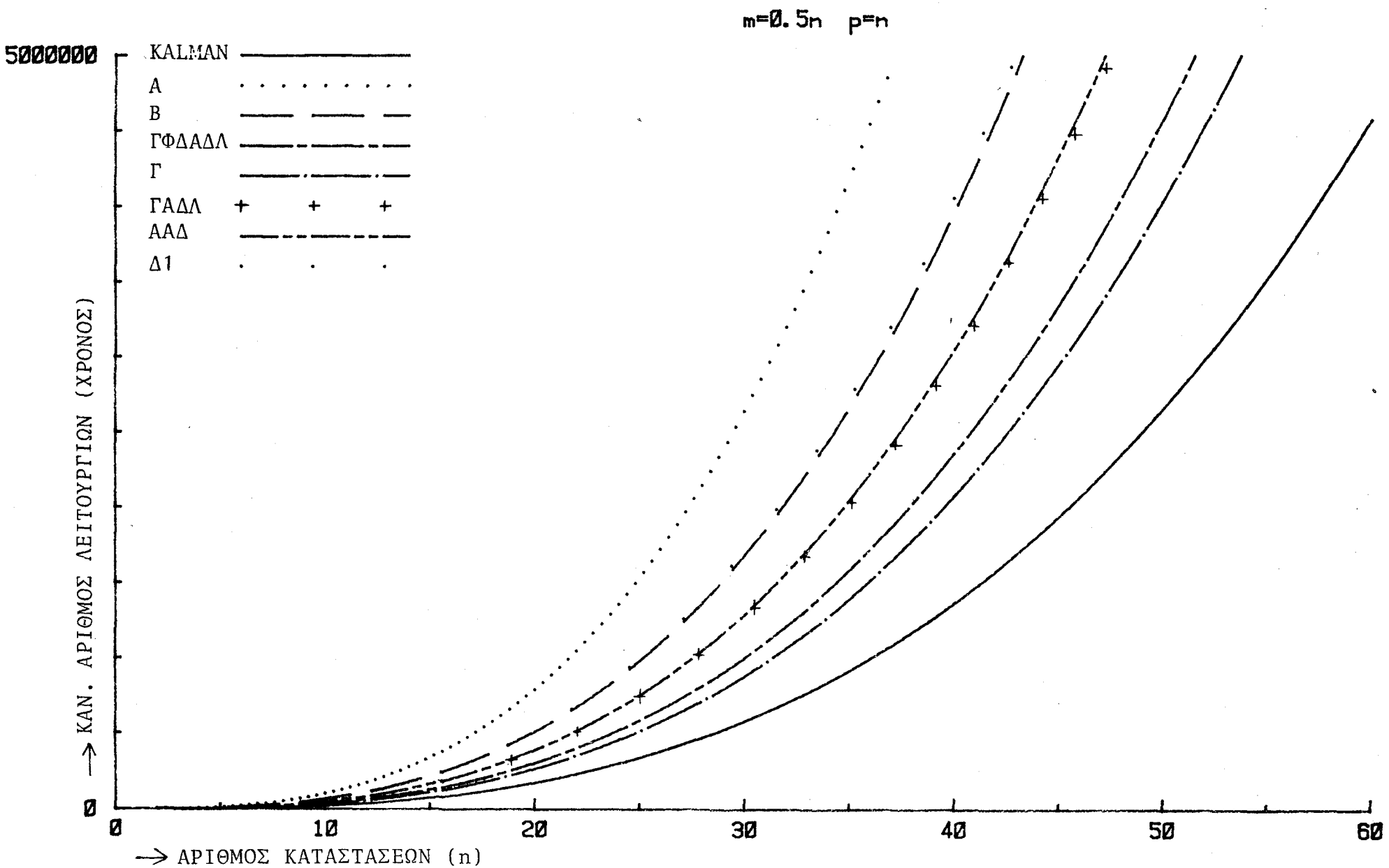
Σχήμα 3.27 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



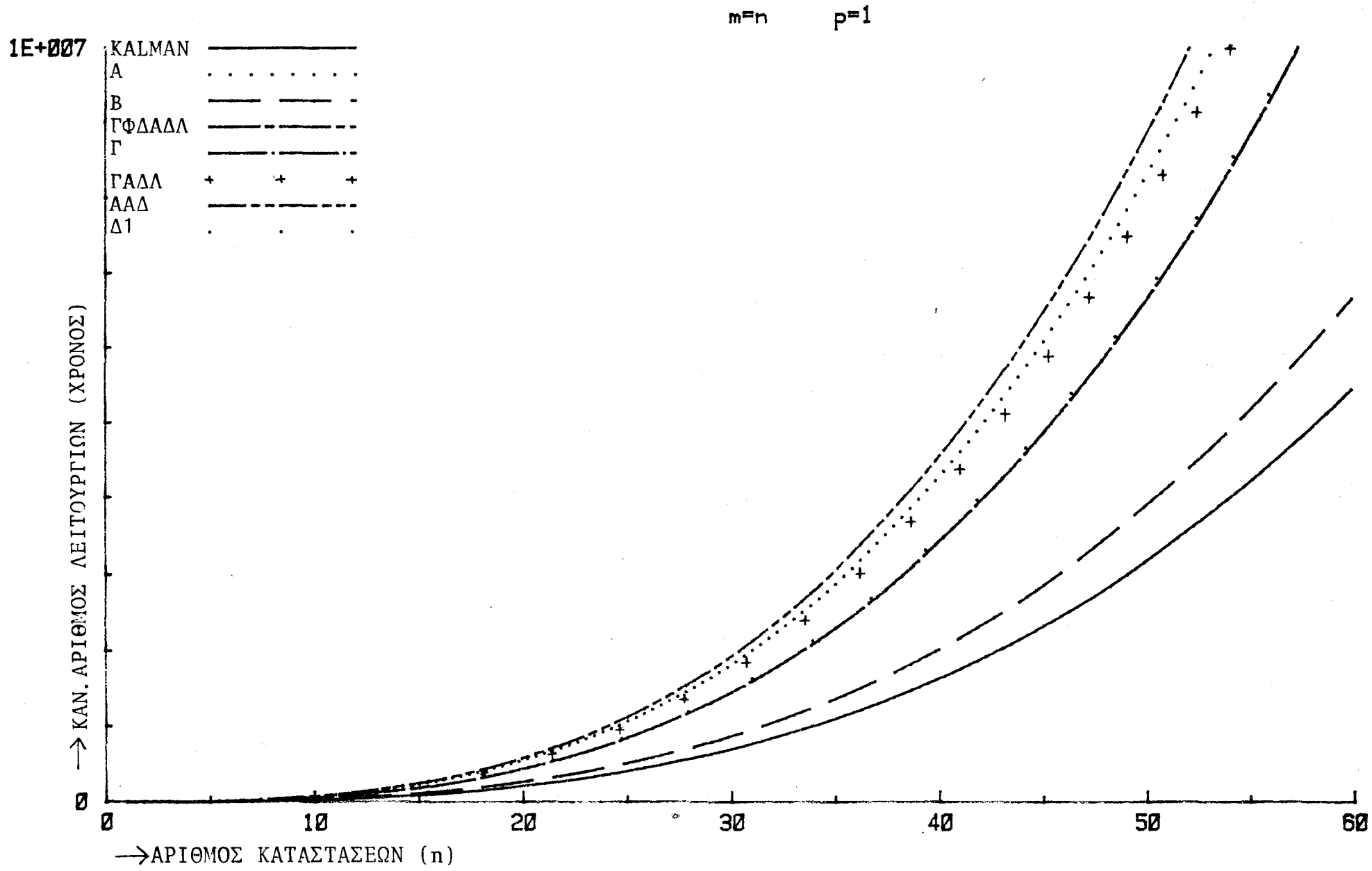
Σχήμα 3.28 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



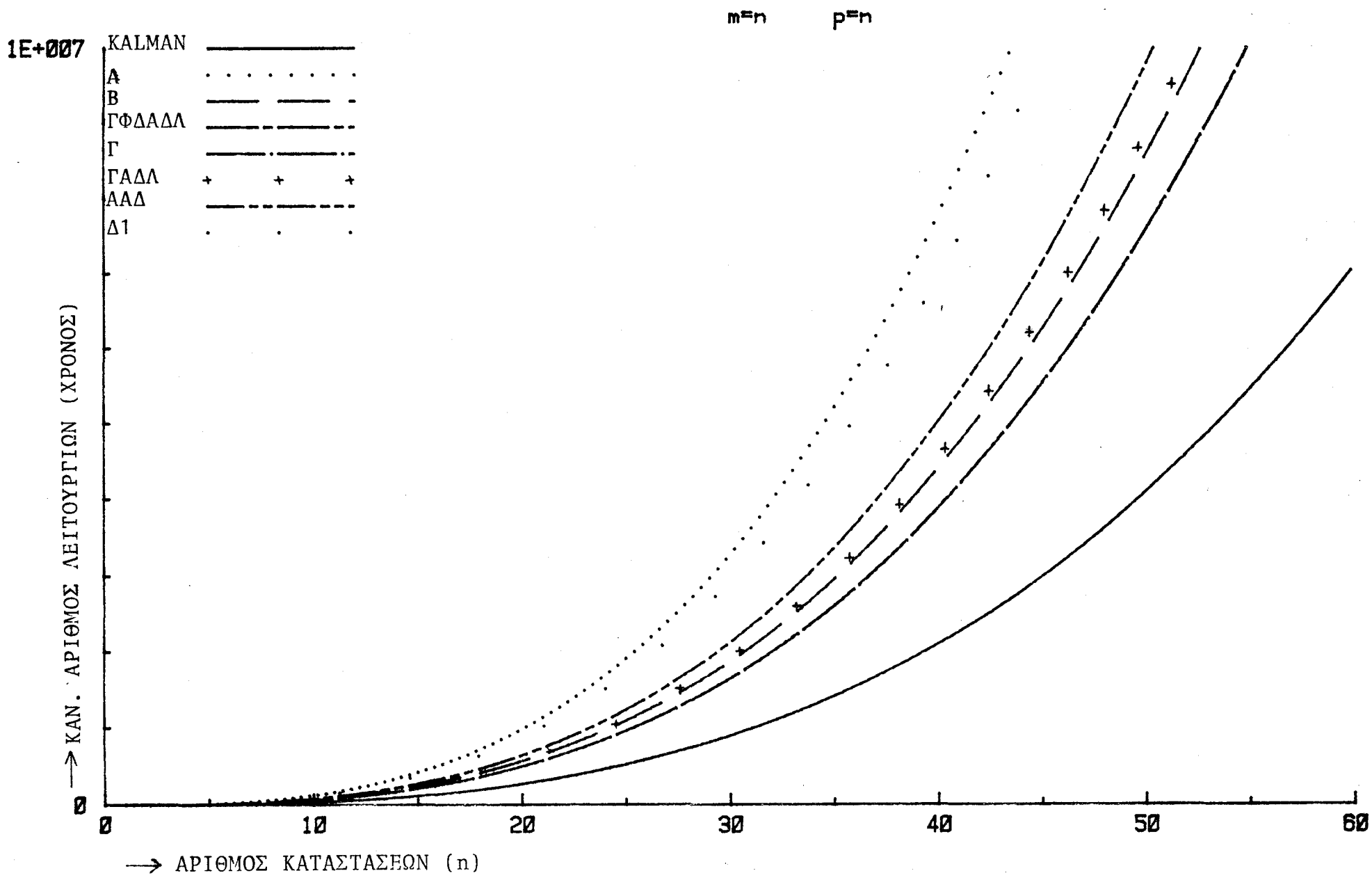
Σχήμα 3.29 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



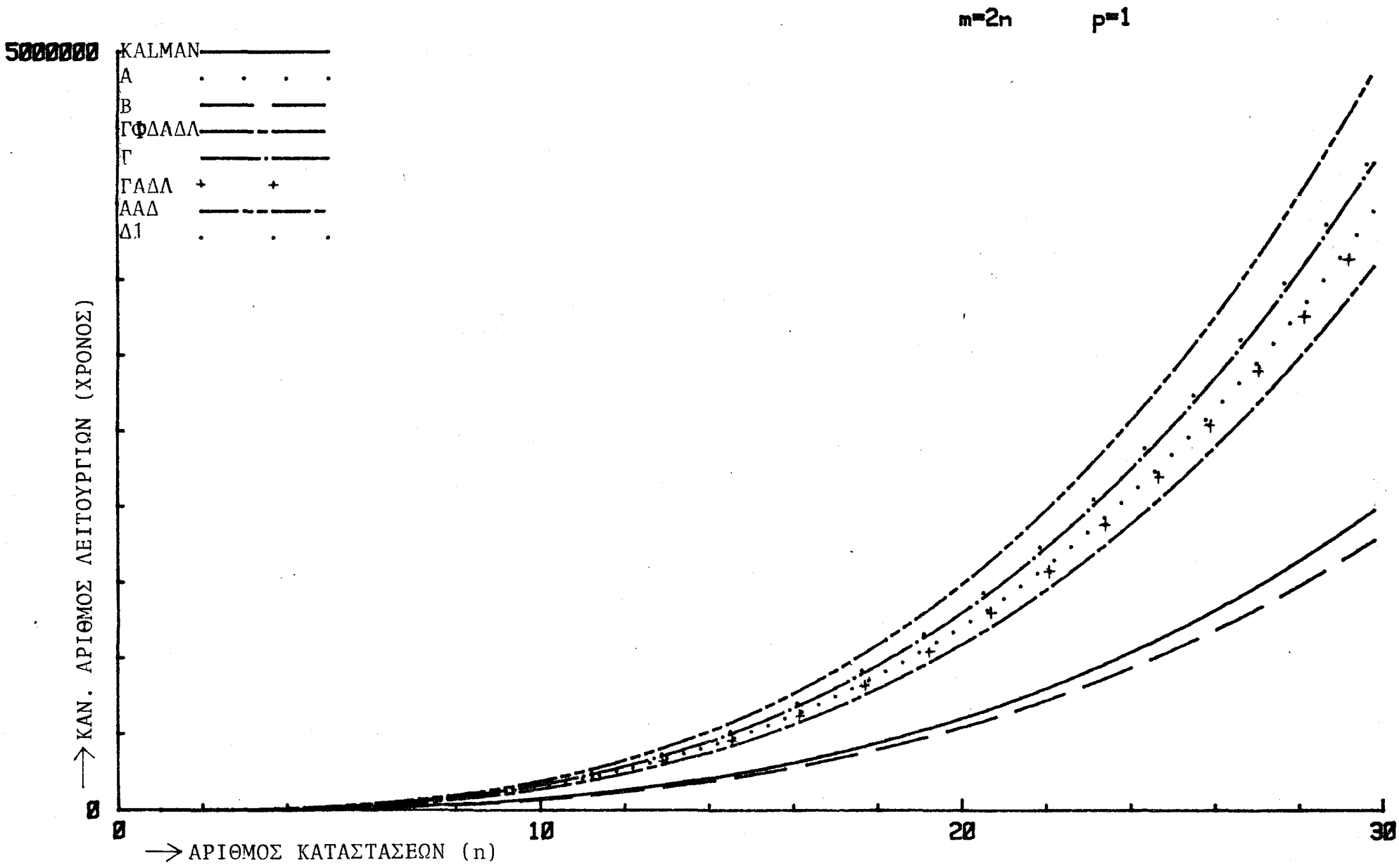
Σχήμα 3.30 Χρονικές απαιτήσεις γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



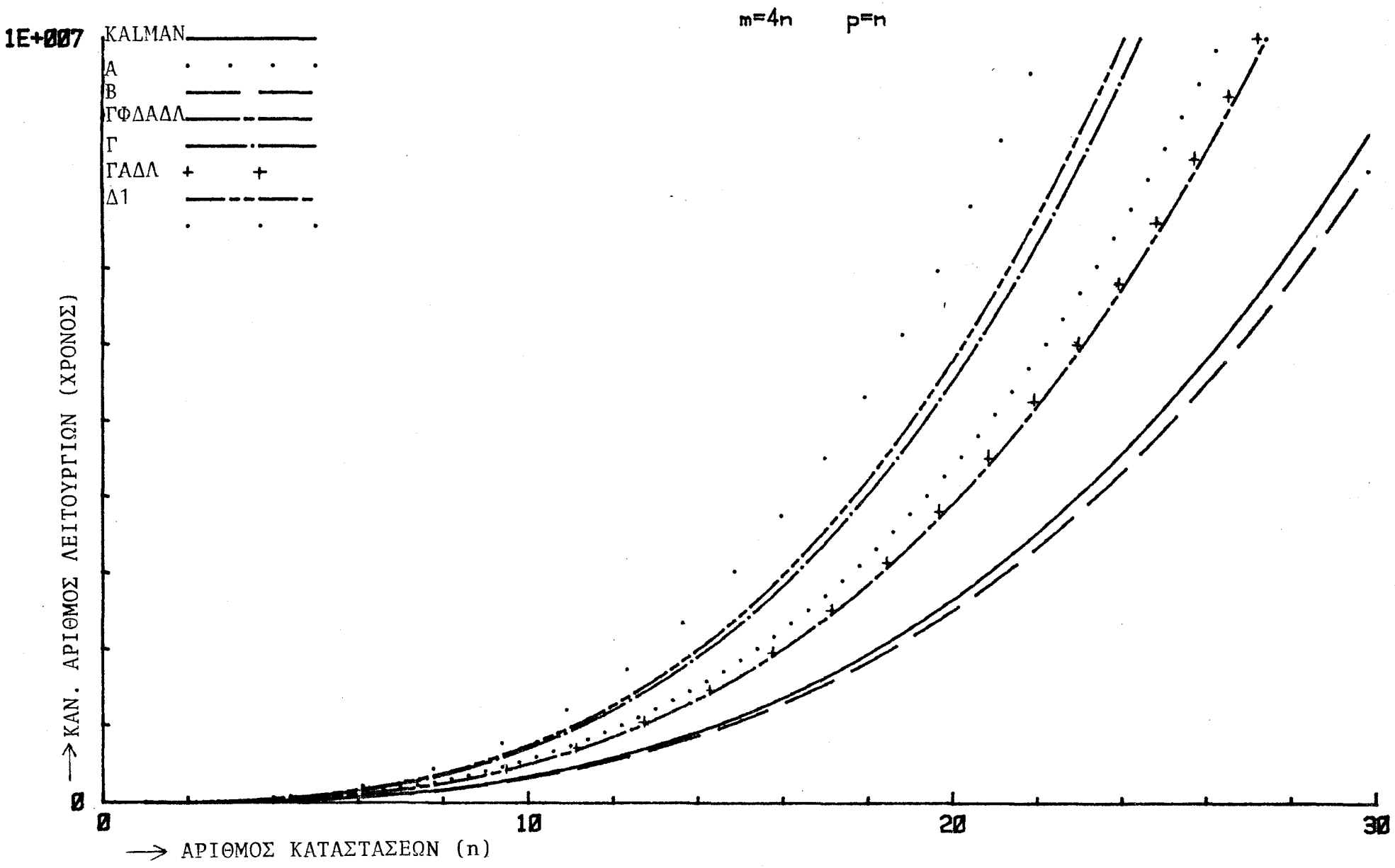
Σχήμα 3.31 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



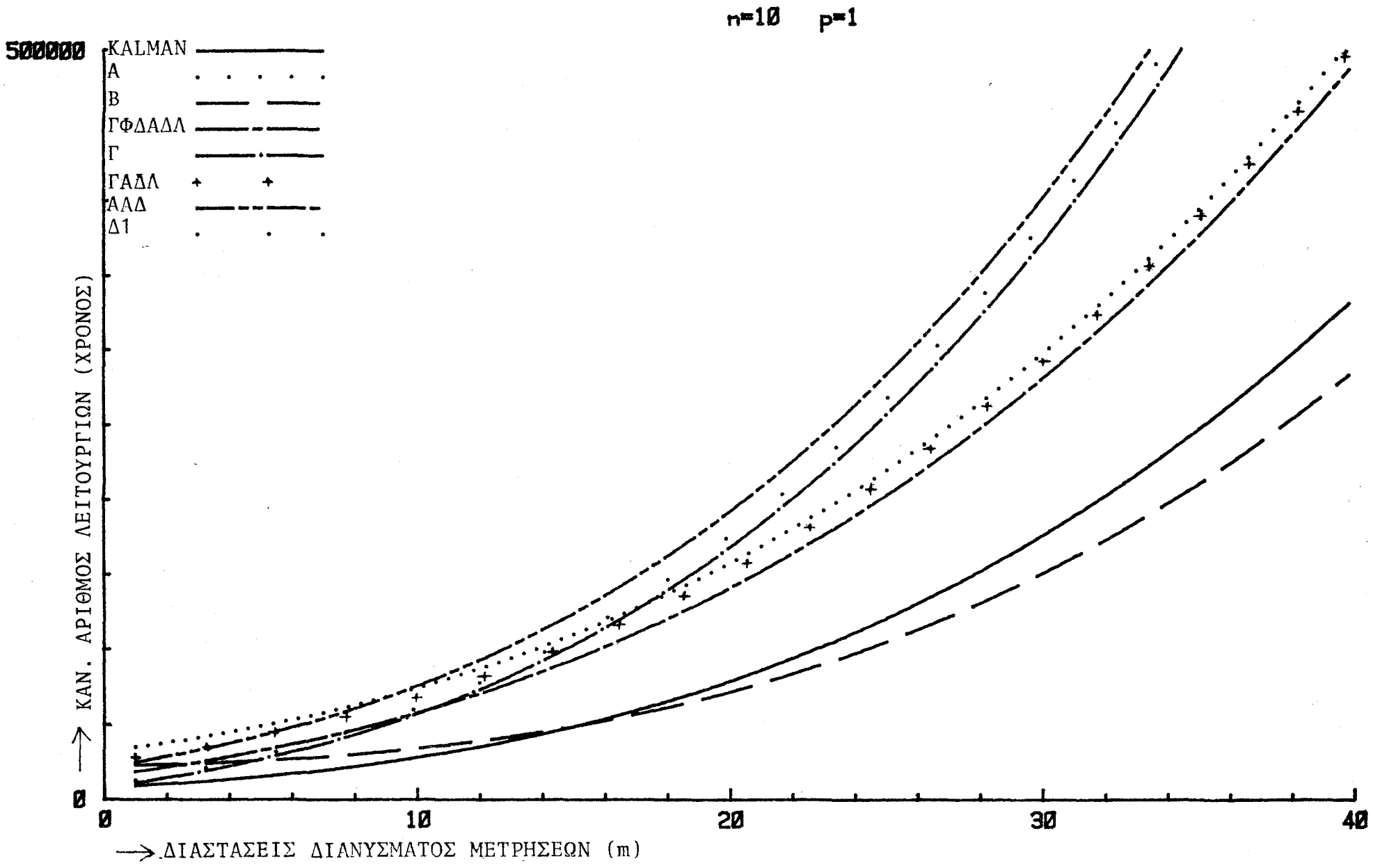
Σχήμα 3.32 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



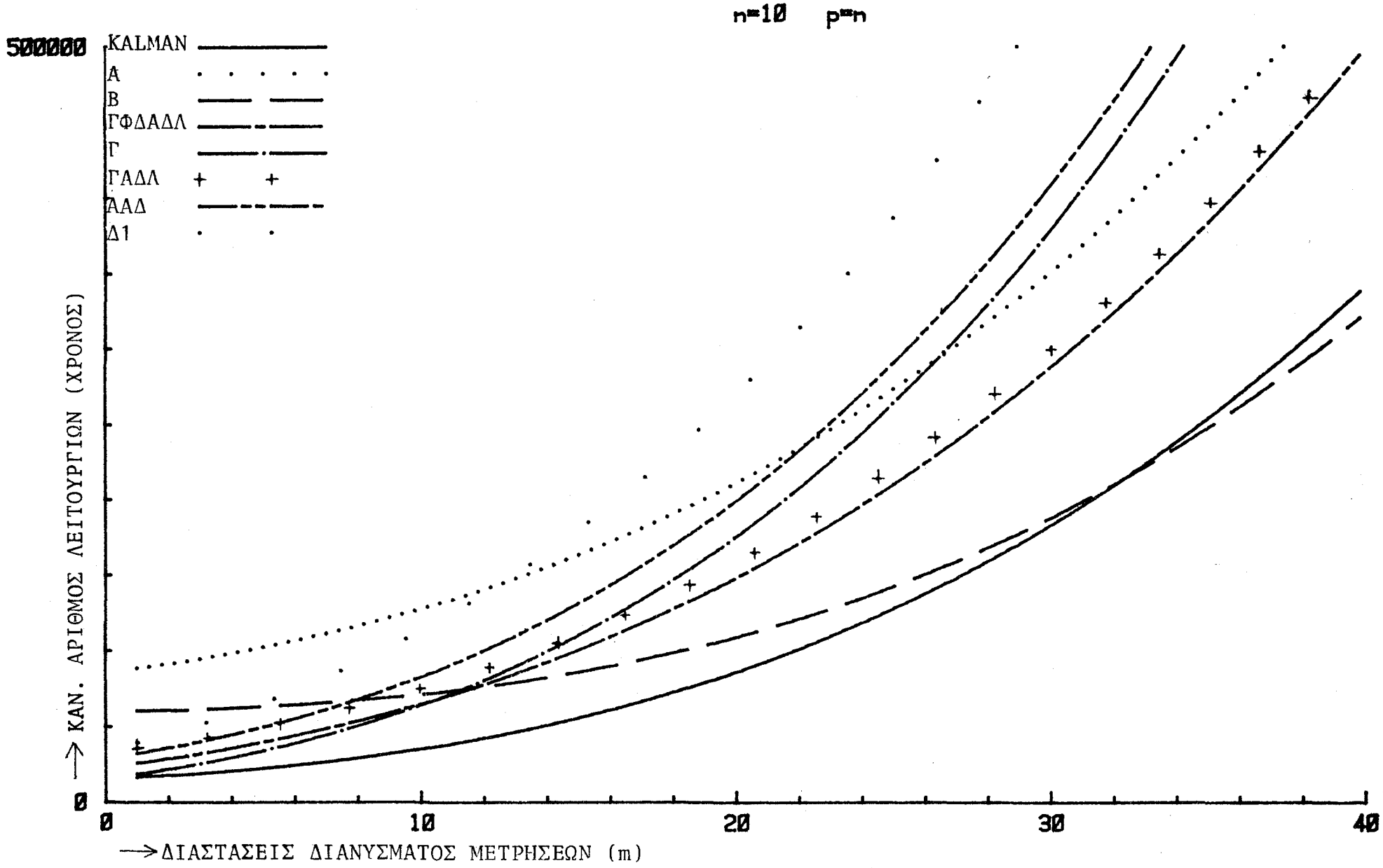
Σχήμα 3.33 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.34 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.35 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.36 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

4) Γιά $m < n$ ο αλγόριθμος Γ είναι ταχύτερος του ΓΦΔΑΔΛ, ενώ γιά $m > n$ η κατάσταση αντιστρέφεται. Γιά $m=n$ οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες χρονικές απαιτήσεις. Τα παραπάνω ισχύουν όταν $p=1$ και όταν $p=n$.

5) Όταν $p=n$ ο αλγόριθμος Β είναι ταχύτερος των αλγορίθμων Γ, ΓΦΔΑΔΛ γιά $m > n$, ενώ όταν $p=1$ ο αλγόριθμος Β είναι ταχύτερος των αλγορίθμων Γ και ΓΦΔΑΔΛ γιά $m > 0.5n$ και $m > 0.1n$, αντίστοιχα.

6) Ο αλγόριθμος Β είναι πάντα ταχύτερος του αλγόριθμου Α, ενώ γιά $m \geq 0.5n$ είναι ταχύτερος του αλγόριθμου Δ1.(Τα παραπάνω ισχύουν όταν $p=1$ και όταν $p=n$).

7) Ο αλγόριθμος Α είναι ταχύτερος του αλγορίθμου Δ1 γιά $m \geq 2n$ όταν $p=1$ και γιά $m > \bar{n}$ όταν $p=n$.

Όπως συμπεραίνετε από την παραπάνω ανάλυση την καλλίτερη υπολογιστική συμπεριφορά (όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου) παρουσιάζουν οι αλγόριθμοι Β και Kalman. Γι αυτό κλείνοντας την υπολογιστική ανάλυση γιά τα χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στις υπολογιστικές απαιτήσεις των δύο αυτών αλγορίθμων όταν τα μητρώα Q, R είναι διαγώνια μητρώα και συγκεκριμμένα:

α) Υποθέτουμε ότι το μητρώο $Q(k)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Q(k) = \begin{bmatrix} q_1(k) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & q_p(k) \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

όπου $q_i(k)(i=1,2,\ldots,p)$ θετικές βαθμωτές ποσότητες,οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες απλοποιήσεις:

1) Το φίλτρο Kalman παρουσιάζει μία ελάττωση στους αριθμούς των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων κατά το ποσό np^2-np.

2) Ο αλγόριθμος Β απρουσιάζει μία ελάττωση στις απαιτήσεις αποθήκευσης κατά $0.5(p^2-p)$ λέξεις μνήμης, καιτα ακόλουθα ποσά ελάττωσης στους αριθμούς των πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων και τετραγωνικών ριζών.

Λειτουργία	Ποσό ελάττωσης
ΠΟΛ.	$0.5(p^3+3p^2-2p)$
ΠΡ.	$0.5(p^3+p^2)-p$
ΔΙΑΙΡ.	$p-1$
Τ.Ρ.	p

β) Υποθέτουμε ότι το μητρώο R(k+1) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$R(k+1) = \begin{bmatrix} r_1(k+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_m(k+1) \end{bmatrix} \qquad (3.51)$$

όπου τα $r_i(k+1)(i=1,\ldots,m)$ είναι θετικές βαθμωτές ποσότητες οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες απλοποιήσεις:

1) Οι απαιτήσεις αποθήκευσης του φίλτρου Kalman γίνονται λιγότερες κατά $0.5(m^2-m)$ λέξεις μνήμης και ακόμη το φίλτρο αυτό απαιτεί $0.5(m^2-m)$ λιγότερες προσθέσεις.

2) Στον αλγόριθμο Β τα ποσά αποθήκευσης γίνονται:

$$n^2+3n+m+2np+0.5p^2+0.5p+2\max(n^2,nm)+\max(m,\frac{n^2+n}{2})$$

λέξεις μνήμης (3.52)

Επιπλέον ο αλγόριθμος Β παρουσιάζει τα ακόλουθα ποσά μείωσης στους αριθμούς των πολλαπλασιασμών, προσθέσεων, διαιρέσεων και τετραγωνικών ριζών.

Λειτουργία	Ποσό ελάττωσης
ΠΟΛ.	$0.5(m^3+3m^2-2m)+nm(m-1)$
ΠΡ.	$0.5(m^3-m)+nm^2-nm$
ΔΙΑΙΡ.	$m-1$
Τ.Ρ.	m

γ) Ανακεφαλαιόνοντας τις παρατηρήσεις των δύο παραπάνω περιπτώσεων, υποθέτουμε ότι τα μητρώα Q, R δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (3.50), (3.51), οπότε στην περίπτωση αυτή οι απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) και χρόνου των αλγορίθμων Kalman και B δίνονται στους Πίνακες 3.9 και 3.10, αντίστοιχα.

Στα σχ. 3.37†, 3.38 και 3.39, 3.40 δίνεται η γραφική παράσταση των απαιτήσεων αποθήκευσης (των δεδομένων) και του υπολογιστικού χρόνου, αντίστοιχα, των αλγορίθμων B και Kalman, συναρτήσει του αριθμού των καταστάσεων n γιά ορισμένους συνδιασμούς των παραμέτρων, όταν τα μητρώα Q, R έχουν πλήρη μορφή, και όταν τα μητρώα αυτά είναι διαγώνια (δηλαδή δίνονται από τις σχέσεις (3.51), (3.52)).

Από τα σχ. 3.37, 3.38 προκύπτει ότι, όταν τα μητρώα Q, R είναι διαγώνια μητρώα, ο αλγόριθμος B διατηρείται οικονομικότερος του φίλτρου Kalman γιά $m \geq 2n$ όταν $p=1$ και $m \geq 3n$ όταν $p=n$ και επί πλέον γιά $m=10n$ ο αλγόριθμος B έχει σημαντικά λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από το φίλτρο Kalman.

Τέλος από τα σχ. 3.39, 3.40* προκύπτει ότι όταν τα μητρώα Q, R είναι διαγώνια μητρώα, ο αλγόριθμος B γίνεται ταχύτερος από το φίλτρο Kalman γιά $m \geq n$ όταν $p=1$ και $m \geq 2n$ όταν $p=n$ και επιπλέον είναι προφανής η σημαντική αύξηση της ταχύτητας του αλγόριθμου B σε σχέση με την ταχύτητα του φίλτρου Kalman.

---

† Όπου: ΜΗ ΔΙΑΓ.=Μη Διαγώνια και ΔΙΑΓ.= Διαγώνια

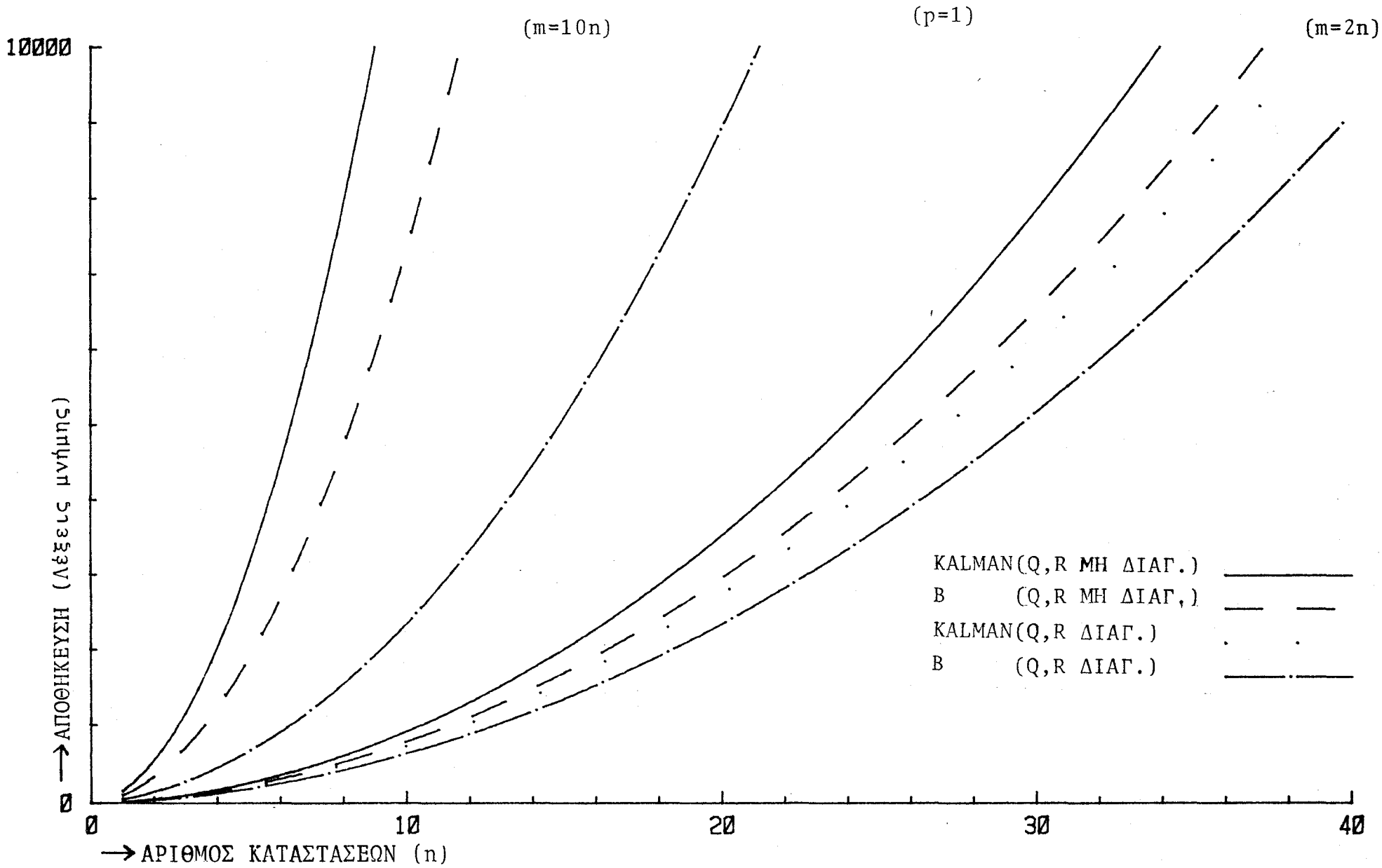
* Στο σχ. 3.39 οι καμπύλες των χρονικών απαιτήσεων του φίλτρου Kalman, όταν τα μητρώα Q, R είναι διαγώνια και όταν τα μητρώα αυτά έχουν πλήρη μορφή, συμπίπτουν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.9: Ποσά ολικής αποθήκευσης (ανά επανάληψη) αλγορίθμων Kalman και B γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα (όταν τα μητρώα Q(k),R(k+1) είναι διαγώνια μητρώα).

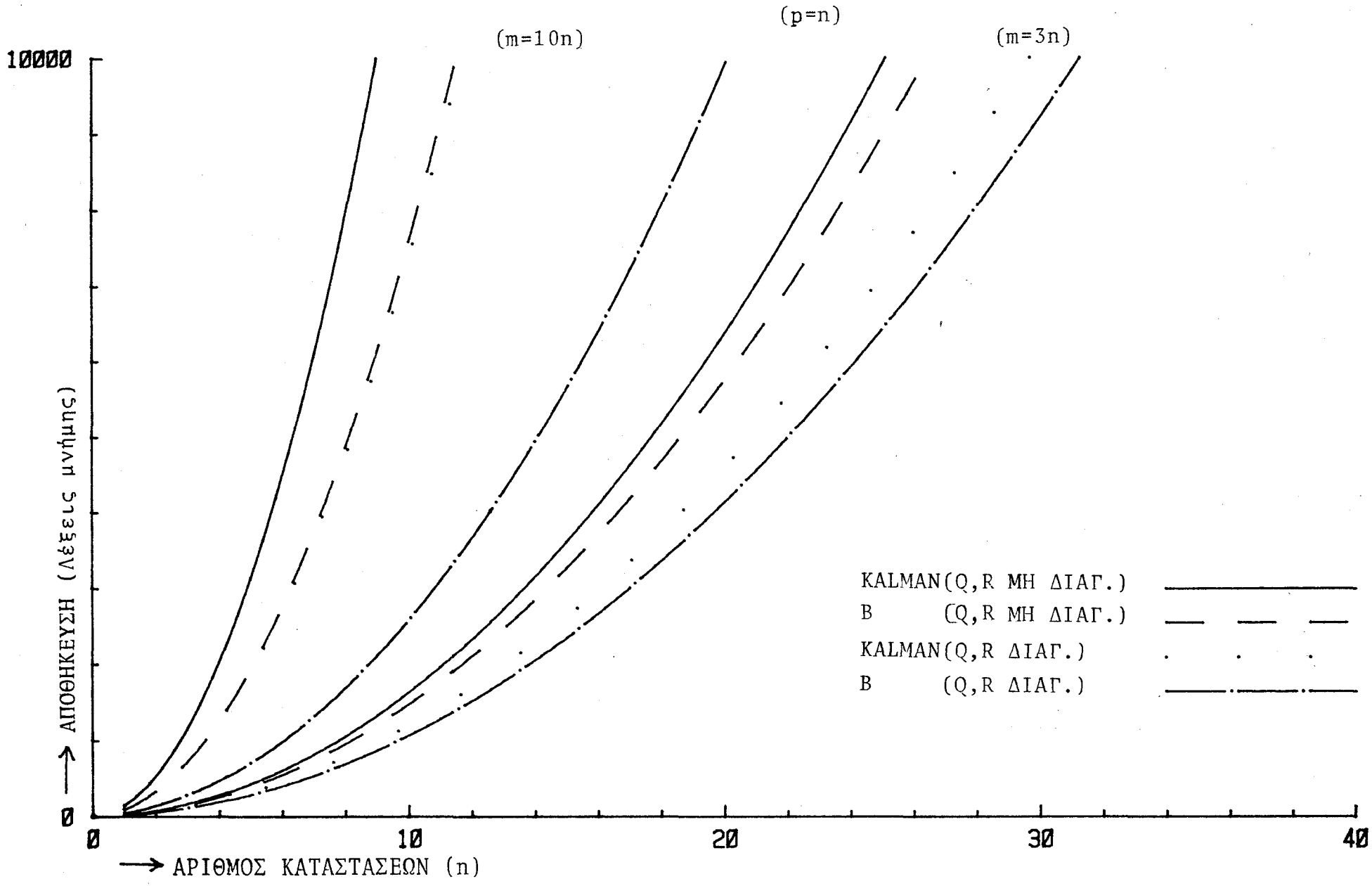
Αλγόριθμος	Ολικές απαιτήσεις αποθήκευσης (λέξεις μνήμης)
Kalman	$0.5n^2+2.5n+2m+2\max(n^2,nm)+\max(\frac{m^2+m}{2},\frac{n^2+n}{2})$
B	$n^2+3n+m+2np+0.5p^2+0.5p+2\max(n^2,nm)+$ $+\max(m,\frac{n^2+n}{2})$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.10: Υπολογιστικοί χρόνοι (ανά επανάληψη) αλγορίθμων Kalman και B γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα (όταν τα μητρώα Q(k),R(k+1) είναι διαγώνια μητρώα).

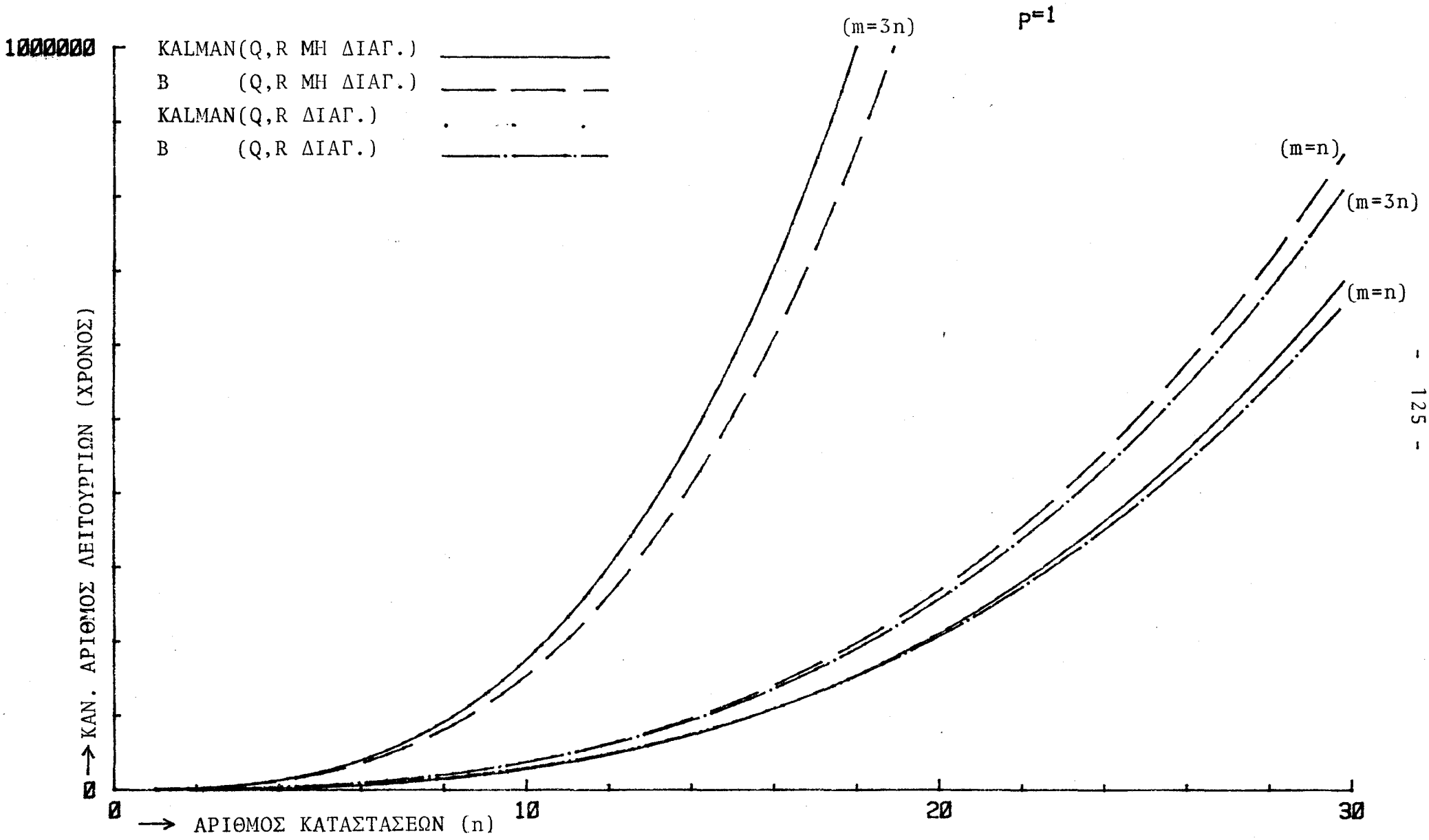
Αλγόριθμος	Λειτουργία	Αριθμός Λειτουργιών
Kalman	ΠΟΛ.	$1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+$ $+3nm+1.5n^2m+1.5nm^2+0.5n^2p+1.5np$
	ΠΡΟΣΘ.	$1.5n^3-1.5n+1.5n^2m+1.5nm^2+nm+$ $+0.5m^3-0.5m^2+0.5n^2p+0.5np$
	ΔΙΑΙΡ.	$2m-1$
	Τ.Ρ.	m
B	ΠΟΛ.	$4n^3+8n^2-2n+0.5p^3+1.5p^2-p+4n^2p+$ $+2.5np^2+1.5np+0.5n^2m+2.5nm$
	ΠΡΟΣΘ.	$4n^3+2n^2-4.5n+0.5p^3-0.5p-m+4n^2p+$ $+2.5np^2-2.5np+0.5n^2m+1.5nm$
	ΔΙΑΙΡ.	$3p+4n+m-3$
	Τ.Ρ.	$2n+p$



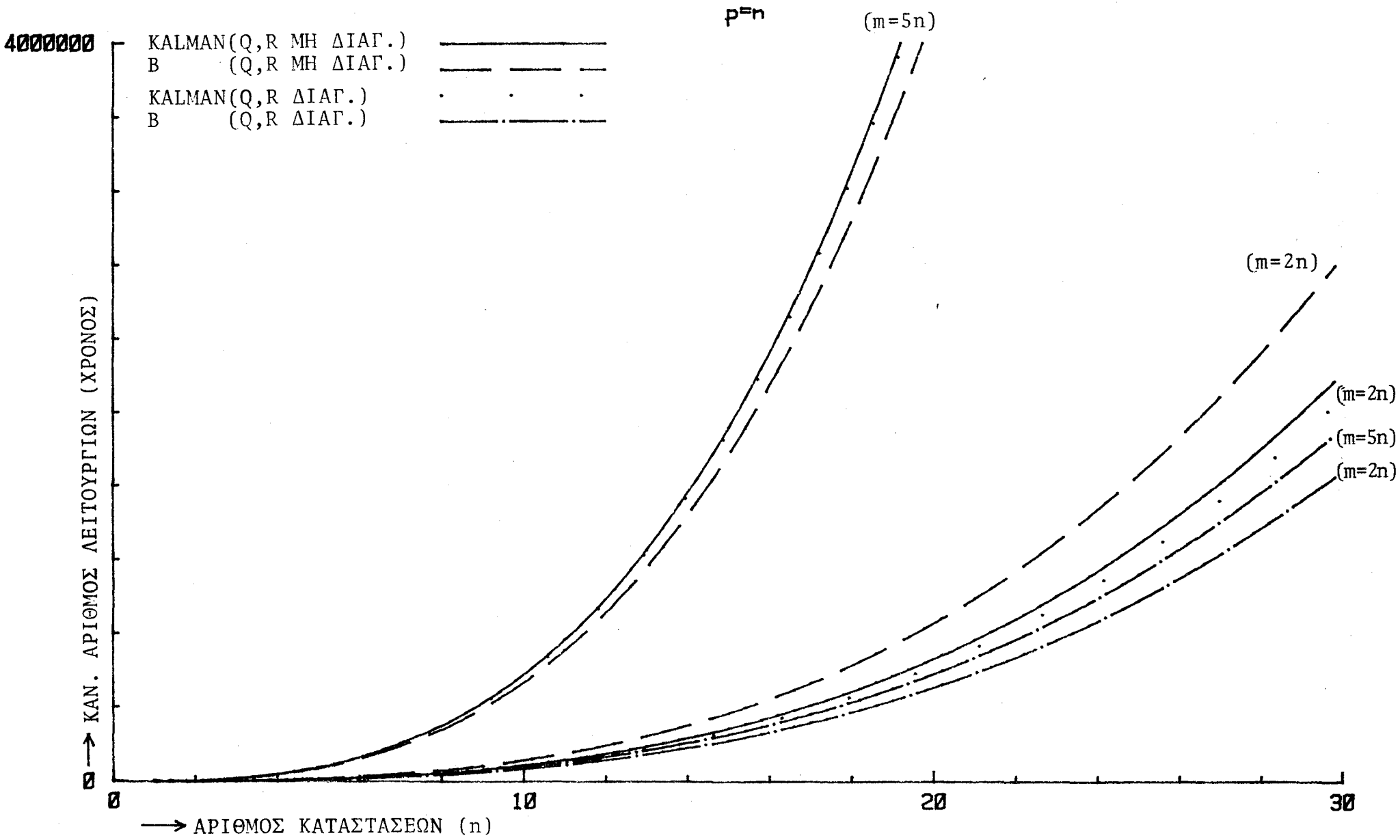
Σχήμα 3.37 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) κι ά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα



Σχήμα 3.38 Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα



Σχήμα 3.39 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 3.40 Χρονικές απαιτήσεις για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

3.5 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση μεταξύ των αλγορίθμων Α,Β,Γ,Δ1,ΓΑΔΛ,ΓΦΔΑΔΛ,ΑΑΔ,Kalman, όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου (με βάση μία επανάληψη), πρώτα γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα και στη συνέχεια γιά χρονικά μεταβαλλόμενα. Ανακεφαλαιόνοντας τα συμπεράσματα της εν λόγω ανάλυσης προκύπτουν τα εξής:

1) Γιά μεν την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων έχουμε ότι:

α) Οι αλγόριθμοι Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου, ενώ οι αλγόριθμοι Γ και Kalman έχουν (περίπου) τις ίδιες χρονικές απιατήσεις.

β) Γιά $m \geq 0.5n$, οι πιό οικονομικοί (από άποψη απαιτήσεων αποθήκευσης) και ταχύτεροι αλγόριθμοι είναι οι αλγόριθμοι Α,Β, ΓΦΔΑΔΛ.

γ) Γιά $m < 0.5n$, ο πιό οικονομικός αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος Kalman, ενώ οι ταχύτεροι αλγόριθμοι είναι οι αλγόριθμοι Kalman (κατά πρώτο λόγο), Γ και Δ1 (όταν $p=1$)

δ) Ο Αλγόριθμος ΑΑΔ γιά $m < n$ είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του ΓΑΔΛ. Γιά $m > n$ και γιά $m \geq n$ ο αλγόριθμος ΓΑΔΛ γίνεται οικονομικότερος και ταχύτερος αντίστοιχα, του ΑΑΔ. Γιά $m=n$ οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης.

ε) Γιά $m < 0.5n$ ο αλγόριθμος Γ είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του ΓΦΔΑΔΛ (Γιά $m \geq 0.5n$ η κατάσταση αντιστρέφεται).

στ) Ο αλγόριθμος Α, όταν $p=n$, είναι πάντα οικονομικότερος και ταχύτερος του αλγόριθμου Δ1, ενώ όταν $p=1$ είναι πάντα οικονομικότερος και γιά $m \geq 0.5n$ ταχύτερος του αλγόριθμου Δ1.

ζ) Ο αλγόριθμος Δ1 (όταν $p=1$) είναι πάντα οικονομικότερος και ταχύτερος των αλγορίθμων ΓΑΔΛ, ΑΑΔ.

η) Οι υπολογιστικές απαιτήσεις (αποθήκευσης και χρόνου) των αλγορίθμων Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ είναι οι λιγότερο ευαίσθητες (σε σχέση με τις αντίστοιχες υπολογιστικές απιατήσεις των άλλων αλγορίθμων)

στις μεταβολές των διαστάσεων του διανύσματος μετρήσεων (όταν ο αριθμός καταστάσεων είναι σταθερός).

2) Γιά την περίπτωση δε των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων έχουμε:

α) Όταν $p=1$, ο οικονομικότερος και ο ταχύτερος αλγόριθμος γιά $m \geq 2n$ είναι ο αλγόριθμος Β, ενώ γιά $m < 2n$ ο αλγόριθμος Kalman είναι ο οικονομικότερος και ο ταχύτερος αλγόριθμος.

β) Όταν $p=n$, ο αλγόριθμος Β γιά $m \geq 3n$ είναι ο οικονομικότερος αλγόριθμος και γιά $m \geq 4n$ είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος, ενώ ο αλγόριθμος Kalman, γιά $m<3n$ έχει τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης και γιά $m < 4n$ είναι ο ταχύτερος αλγόριθμος .

γ) Όταν τα μητρώα $Q(k)$, $R(k+1)$ είναι διαγώνια μητρώα, τότε ο αλγόριθμος Β γίνεται ταχύτερος του φίλτρου Kalman, γιά $m \geq n$ όταν $p=1$ και γιά $m \geq 2n$ οταν $p=n$, και επιπλέον έχουμε σημαντική αύξηση της ταχύτητας του αλγόριθμου Β σε σχέση με την ταχύτητα του φίλτρου Kalman. Επίσης όταν τα μητρώα $Q(k)$, $R(k+1)$, είναι διαγώνια μητρώα, γιά $m=10n$ (όταν $p=1$ και όταν $p=n$), ο αλγόριθμος Β έχει σημαντικά λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από το φίλτρο Kalman. (από ότι στην αντίστοιχη γενική περίπτωση (γιά $m=10n$ όταν $p=1$ και όταν $p=n$) όπου τα μητρώα $Q(k)$, $R(k+1)$, δεν είναι διαγώνια μητρώα αλλά έχουν πλήρη μορφή).

δ) Ο αλγόριθμος Β είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του αλγόριθμου Α (όταν $p=1$ και όταν $p=n$).

ε) Ο αλγόριθμος Β είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του αλγόριθμου Γ, γιά $m \geq 0.5n$ οταν $p=1$ και γιά $m > n$ οταν $p=n$.

στ) Όταν $p=1$, ο αλγόριθμος Β είναι ταχύτερος του ΓΦΔΑΔΛ γιά $m > 0.1n$, ενώ έχει πάντα λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης (από τον ΓΦΔΑΔΛ). Ενώ όταν $p=n$, ο αλγόριθμος Β γιά $m > n$ είναι ταχύτερος και γιά $m \geq 2n$ οικονομικότερος του ΓΦΔΑΔΛ.

ζ) Γιά $m < n$ ο αλγόριθμος Γ είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του ΓΦΔΑΔΛ. Γιά $m > n$ κατάσταση αντιστρέφεται, ενώ γιά $m=n$ οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες υπολογιστικές απαιτήσεις (αποθήκευσης και χρόνου). Τα παραπάνω ισχύουν και όταν $p=1$ και όταν $p=n$.

η) Γιά $m < 10n$, ο αλγόριθμος ΑΑΔ είναι οικονομικότερος του ΓΑΔΛ, ενώ γιά $m=10n$ οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης. Ο ΑΑΔ γιά $m < 0.5n$ είναι ταχύτερος του ΓΑΔΛ, (ενώ γιά $m \geq 0.5n$ η κατάσταση αντιστρέφεται). Τα παραπάνω ισχύουν και όταν $p=1$, και όταν $p=n$.

θ) Ο αλγόριθμος Α, γιά $m > n$ όταν $p=1$ και $m \geq 3n$ όταν $p=n$, έχει λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από τον αλγόριθμο Δ1. ('Οταν $p=1$ γιά $m=n$ οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης). Ενώ, γιά $m \geq 2n$ όταν $p=1$ και γιά $m > n$ όταν $p=n$, ο αλγόριθμος Α είναι ταχύτερος του αλγόριθμου Δ1.

ι) Ο αλγόριθμος Kalman είναι πάντα οικονομικότερος και ταχύτερος των αλγορίθμων Α, Γ, Δ1, ΓΦΔΑΔΛ, ΓΑΔΛ και ΑΑΔ (όταν $p=1$ και όταν $p=n$).

κ) Ο αλγόριθμος Β είναι πάντα οικονομικότερος του αλγόριθμου Δ1, ενώ γιά $m \geq 0.5n$ είναι και ταχύτερος του. Τα παραπάνω ισχύουν όταν $p=1$ και όταν $p=n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΑΙΣΘΗΤΗΡΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η πρακτικότητα και η χρησιμότητα των νέων φίλτρων διαμελισμού, καθώς και η χρησιμότητα της υπολογιστικής ανάλυσης που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούν να φανούν στο πρόβλημα της εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (sensors). Το πρόβλημα αυτό έχει μεγάλη πρακτική σημασία σε πολλές εφαρμογές τεχνικού ενδιαφέροντος.

Μία σύντομη περιγραφή του προβλήματος των πολλών αισθητήρων δίνεται από το ακόλουθο μοντέλο:

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + \Gamma(k)u(k) \ , \qquad x(0) = x_0 \tag{4.1α}$$

$$z_i(k+1) = H_i(k+1)x(k+1) + v_i(k+1) \ , \qquad i = 1,2,\ldots,r \tag{4.1β}$$

όπου

τα διανύσματα των μετρήσεων $z_i(k+1)$ έχουν διαστάσεις $m_i \times 1$

$$x(0) \sim \mathbf{N}\{x_0,P_0\}, \quad u(k) \sim \mathbf{N}\left\{0_{p\times 1},Q(k)\right\}, \quad v_i(k+1)^{\dagger} \sim \mathbf{N}\left\{0_{m_i\times 1}, R_i(k+1)\right\},$$
$$E\{v_j(k+1)v_\ell^T(k+1\} = R_{j\ell}^{*}(k+1) \quad (\text{γιά όλα τα } j,\ell, \ j \neq \ell) \tag{4.2}$$

ή σε συμπαγή μορφή

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k)+\Gamma(k)u(k), \qquad x(0) = x_0 \tag{4.3}$$

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1)+v(k+1) \tag{4.4}$$

όπου

---

† Τα $u(k)$, $v_i(j)$ είναι στατιστικά ανεξάρτητα γιά όλα τα k,j και $i = 1,2,\ldots,r$.

* Ισχύει $R_{j\ell}(k+1) = R_{\ell j}^T(k+1)$ (γιά όλα τα j,ℓ , $j\neq\ell$).

όπου

$$z^T(k+1) = \left[z_1^T(k+1) \mid z_2^T(k+1) \mid \ldots \mid z_r^T(k+1) \right]$$

(οι διαστάσεις του διανύσματος $z(k+1)$ είναι $m \times 1$ όπου

$$m = \sum_{i=1}^{r} m_i)$$

$$v^T(k+1) = \left[v_1^T(k+1) \mid v_2^T(k+1) \mid \ldots \mid v_r^T(k+1) \right]$$

$$v(k+1) \sim N(0, R(k+1)) \qquad (4.5)$$

$$H^T(k+1) = \left[H_1^T(k+1) \mid H_2^T(k+1) \mid \ldots \mid H_r^T(k+1) \right]$$

$$R(k+1) = \begin{bmatrix} R_1(k+1) & R_{12}(k+1) & \ldots & R_{1r}(k+1) \\ R_{12}^T(k+1) & R_2(k+1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{1r}^T(k+1) & \ldots & \ldots & R_r(k+1) \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές τώρα ότι η αύξηση των διαστάσεων του διανύσματος των μετρήσεων (και φυσικά του διανύσματος του θόρυβου των μετρήσεων επίσης) είναι ικανή να μεταθέσει το πρόβλημα από την πιθανή περίπτωση που έχουμε $m_i \leq n$ στην περίπτωση του $m > n$ στις ακόλουθες δύο υποπεριπτώσεις που θεωρούμε:

α) $R_{j\ell}(k+1) \neq \mathbf{0}_{m_j \times m_\ell}$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$

β) $R_{j\ell}^*(k+1) = \mathbf{0}_{m_j \times m_\ell}$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$

Όπως και στην περίπτωση της υπολογιστικής ανάλυσης του προηγουμένου κεφαλαίου έτσι και εδώ, θα χωρίσουμε την ανάλυση μας σε δύο τμήματα: το ένα θα αναφέρεται σε χρονικά αμετάβλητα μοντέλα (όπου οι ποσότητες Φ, Γ, H_i, R_i, Q είναι χρονικά σταθερές) και το άλλο σε χρονικά μεταβαλλόμενα.

---

* Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιείται ο απλοποιημένος συμβολισμός $R_{j\ell}(\cdot) = 0$ αντί του $R_{j\ell}(\cdot) = \mathbf{0}_{m_j \times m_\ell}$.

4.2 ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Εδώ η ανάλυση μας θα στηριχτεί στους αλγορίθμους Kalman, A, B και ΓΦΔΑΔΛ* που έδωσαν την καλλίτερη υπολογιστική συμπεριφορά (όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου) στην ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

$R_{j\ell} \neq 0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$

Τα αποτελέσματα της γενικής υπολογιστικής ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου ισχύουν ακόμη, αλλά με $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$

$R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$

Οι ανάγκες αποθήκευσης και ο αριθμός των προσθέσεων του φίλτρου Kalman αλλάζουν ως εξής:

ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ

$$2n^2+2n+3nm+\sum_{i=1}^{r} m_i^2+1.5m+\max(n^2, \frac{m^2+m}{2}) \text{ λέξεις μνήμης} \qquad (4.6)$$

ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ:

$$1.5n^3+0.5n^2-n+1.5n^2m+nm+0.5m^3+0.5\sum_{i=1}^{r} m_i^2 \qquad (4.7)$$

ενώ οι υπολογιστικές απαιτήσεις του αλγόριθμου A παραμένουν οι ίδιες, με αποτέλεσμα:

1) Η συμπεριφορά των αλγορίθμων, όσον αφορά τις απαιτήσεις χρόνου, να μην παρουσιάζει αξιόλογη μεταβολή και συνεπώς ισχύουν τα συμπεράσματα της ανάλυσης της προηγούμενης περίπτωσης, όπου $R_{j\ell}\neq 0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$.

2) Στην περίπτωση των αναγκών αποθήκευσης, αν και το φίλτρο Kalman παρουσιάζει μία αξιοσημείωτη βελτίωση (δηλαδή, λιγοστεύουν οι απαιτήσεις αποθήκευσης του), ο αλγόριθμος A διατηρείται οικονομικότερος αλλά γιά λίγο μεγαλίτερη τιμή του λόγου m/n.

---

* Ένεκα του ότι οι αλγόριθμοι A, B, ΓΦΔΑΔΛ έχουν τις ίδιες υπολογιστικές απαιτήσεις (αποθήκευσης και χρόνου) γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, γιαυτό στην συνέχεια θα αναφερόμαστε μόνο στον αλγόριθμο A, ισχύοντας φυσικά τα ίδια και γιά τους αλγόριθμους B, ΓΦΔΑΔΛ.

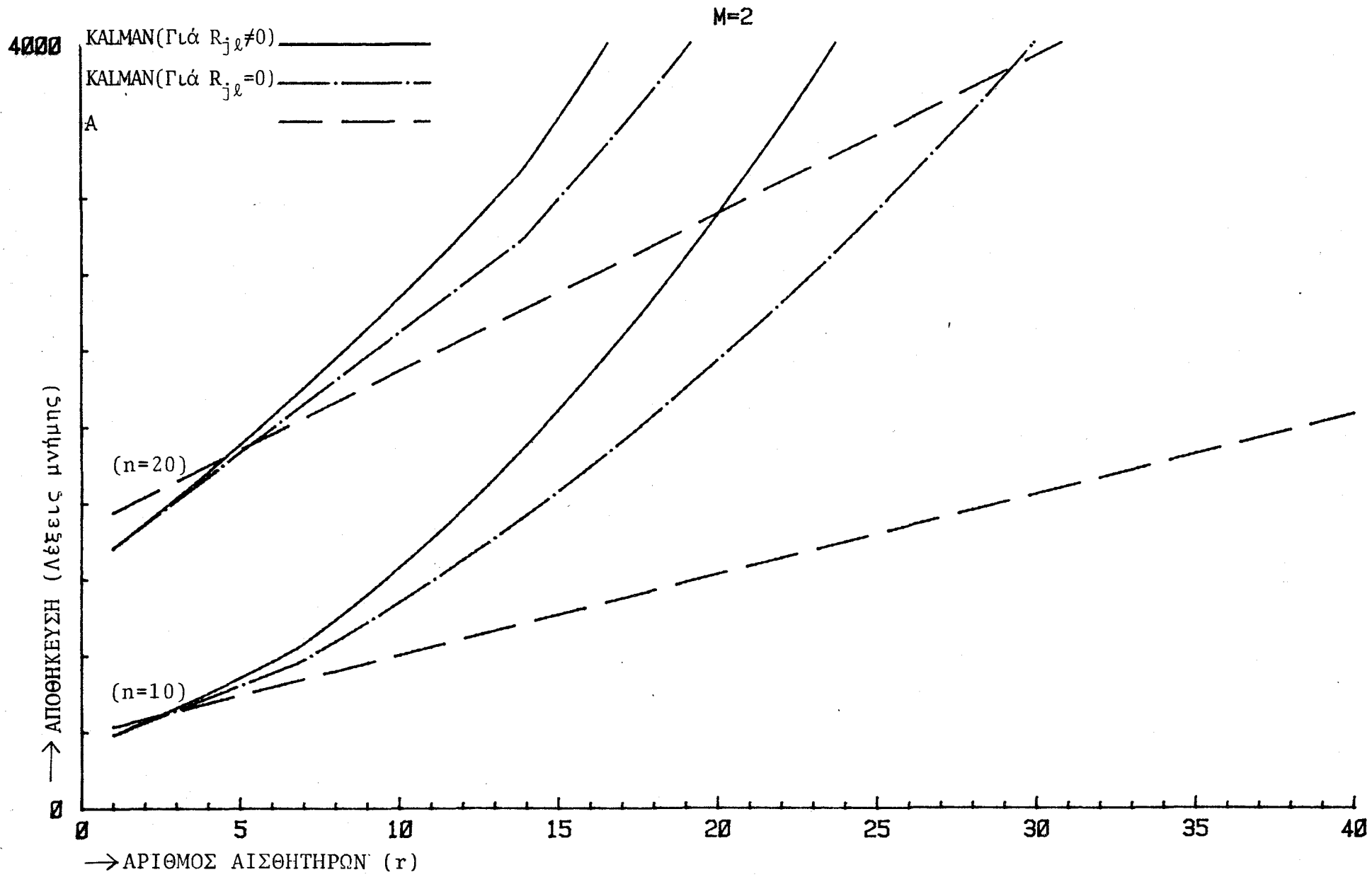
Το τελευταίο γίνεται πιό σαφές, εξετάζοντας το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα: Θεωρούμε ένα σύστημα (π.χ. ένα σύστημα από πολλά ραντάρ) στο οποίο $m = \sum_{i=1}^{r} m_i = rM$. Στο σχ. 4.1 δίνονται οι μεταβολές των απαιτήσεων αποθήκευσης (των δεδομένων) των αλγορίθμων A και Kalman (γιά $R_{j\ell} \neq 0$, $R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$) συναρτήσει του αριθμού των αισθητήρων r, γιά M=2 όταν n=10 και n=20. Παρατηρούμε ότι πράγματι υπάρχει μία αισθητή βελτίωση της συμπεριφοράς του φίλτρου Kalman, αλλά ο αλγόριθμος A παραμένει οικονομικότερος (ως προς τις απαιτήσεις αποθήκευσης) του φίλτρου Kalman γιά τιμή του λόγου m/n (όταν $R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα ℓ, j, $j \neq \ell$) λίγο μεγαλύτερη, από την αντίστοιχη της περίπτωσης που ισχύει $R_{j\ell} \neq 0$, γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$. Αν δε λάβουμε υπ'όψη και τα ενδεικτικά ποσά αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης των αλγορίθμων A και Kalman στον υπολογιστή CROMENCO, τότε στο σχ. 4.2 δίνονται οι μεταβολές των νέων απαιτήσεων αποθήκευσης των αλγορίθμων A και Kalman (γιά $R_{j\ell} \neq 0$, $R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$) συναρτήσει του αριθμού των αισθητήρων r, γιά M=2 όταν n=10 και n=20. Στη συνέχεια συγκρίνοντας τα σχ. 4.1 και 4.2 παρατηρούμε ότι δεν έχουμε ουσιαστική μεταβολή στα συμπεράσματα της μέχρι τώρα ανάλυσής μας. Επίσης στο σχ. 4.3* δίνονται οι μεταβολές των χρονικών απαιτήσεων των παραπάνω αλγορίθμων (γιά $R_{j\ell} \neq 0$, $R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$) συναρτήσει του r, γιά M=2 όταν n=10 και n=20. Από το σχ. 4.3 είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος A γίνεται πιό γρήγορος από το φίλτρο Kalman, όταν $R_{j\ell} = 0$, γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$, γιά τιμή του λόγου m/n ίδια με την ανίστοιχη της περίπτωσης που $R_{j\ell} \neq 0$, γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$.

4.3 ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

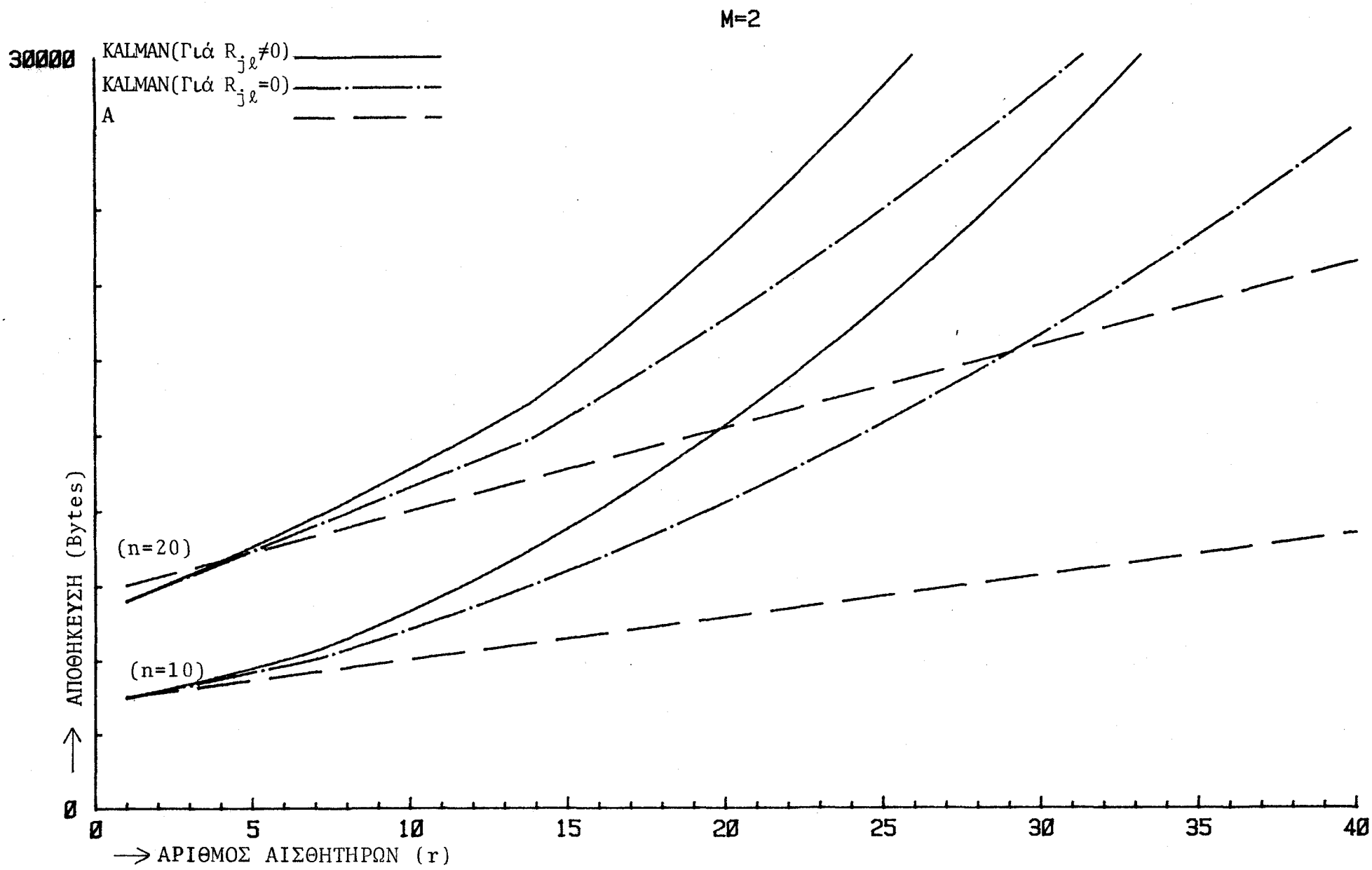
Όπως είδαμε στην υπολογιστική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου, οι αλγόριθμοι Kalman και B, μας δίνουν τα καλλίτερα αποτελέσματα, γιά την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων. Γιαυτό η ανάλυση μας εδώ θα στηριχτεί στους αλγόριθμους

---

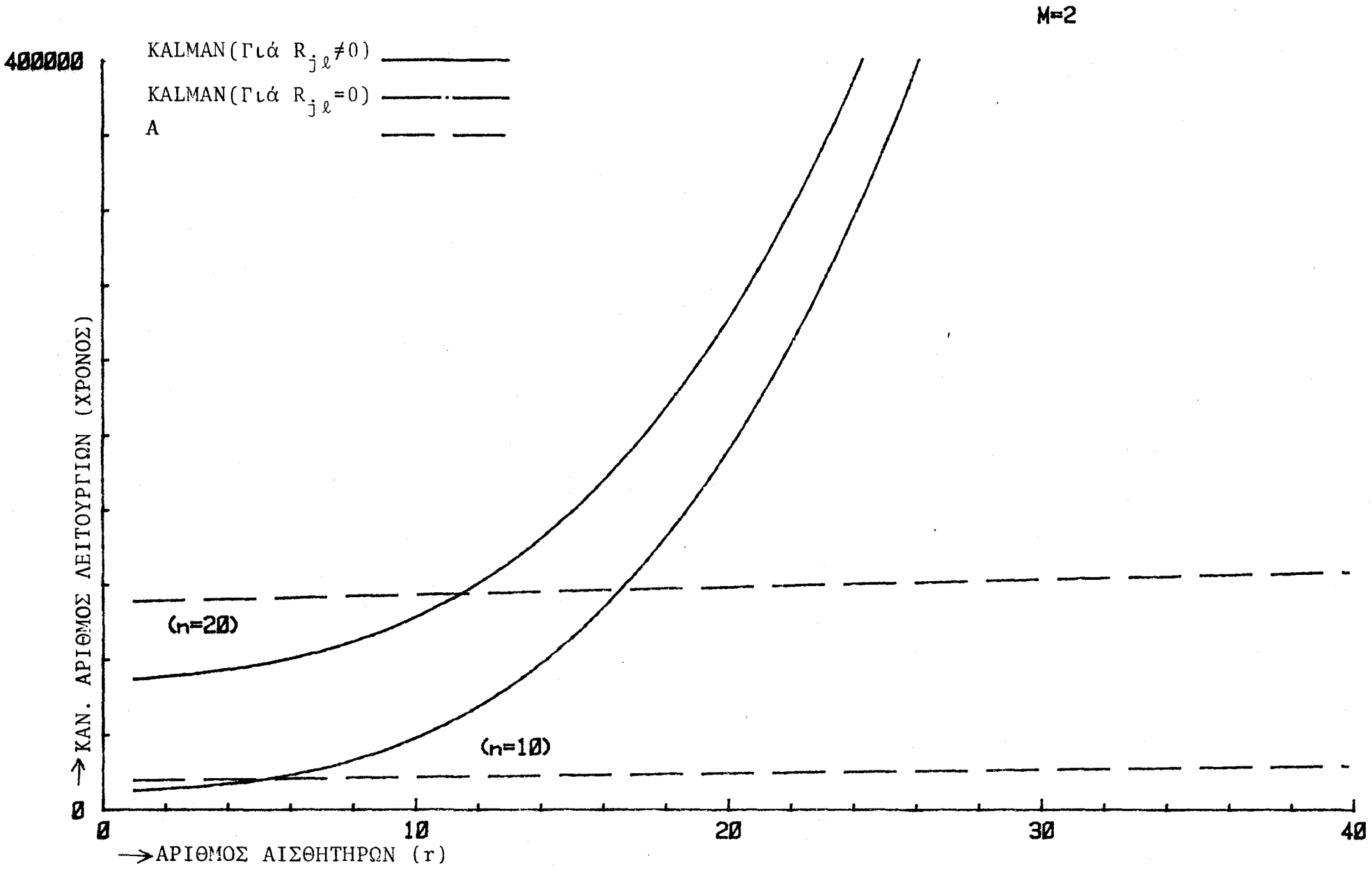
* Στο σχ. 4.3 οι καμπύλες των χρονικών απαιτήσεων του φίλτρου Kalman γιά $R_{j\ell} \neq 0$, $R_{j\ell} = 0$ γιά όλα τα j, ℓ, $j \neq \ell$ συμπίπτουν.



Σχήμα 4.1 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 4.2 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.



Σχήμα 4.3 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Χρονικές απαιτήσεις γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα.

Kalman και B.

$R_{j\ell}(k+1) \neq 0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j \neq \ell$

Ισχύουν τα αποτελέσματα της γενικής ανάλυσης του προηγουμένου κεφαλαίου γιά $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$.

$R_{j\ell}(k+1) = 0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j \neq \ell$

Όσον αφορά το φίλτρο Kalman έχουμε μία ελλάτωση των αναγκών αποθήκευσης κατά $0.5\{m^2 - \sum_{i=1}^{r} m_i^2\}$* λέξεις μνήμης και ακόμη $0.5\{m^2 - \sum_{i=1}^{r} m_i^2\}$ λιγότερες προσθέσεις και έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα ποσά αναγκών αποθήκευσης και αριθμού λειτουργιών (χρόνου):

ΑΝΑΓΚΕΣ ΟΛΙΚΗΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ:

$$0.5n^2+2.5n+0.5\sum_{i=1}^{r} m_i^2+1.5m+2\max(n^2,\ nm)+\max\left(\frac{m^2+m}{2},\ \frac{n^2+n}{2}\right)$$

λέξεις μνήμης (4.8)

ΧΡΟΝΟΣ:

ΠΟΛ. $1.5n^3+1.5n^2+0.5m^3+1.5m^2-m+1.5n^2m+1.5nm^2+3nm+np^2+$
$+0.5n^2p+0.5np$

ΠΡΟΣΘ. $1.5n^3-1.5n+0.5m^3-0.5m^2+0.5\sum_{i=1}^{r} m_i^2-0.5m+$ (4.9)
$1.5n^2m+1.5nm^2+nm+np^2+0.5n^2p-0.5np$

ΔΙΑΙΡ. $2m-1$

Τ.Ρ. m

Στην περίπτωση του αλγόριθμου B, εξ αιτίας των λειτουργιών

---

* όπου $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$

$$R^{-1}(k+1) = \begin{bmatrix} R_1^{-1}(k+1) & O_{m_1\times m_2} & \cdots & O_{m_1\times m_r} \\ O_{m_2\times m_1} & R_2^{-1}(k+1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O_{m_r\times m_1} & \cdots & \cdots & R_r^{-1}(k+1) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$H^T(k+1)R^{-1}(k+1) = \left[H_1^T(k+1)R_1^{-1}(k+1) \,\vdots\, H_2^T(k+1)R_2^{-1}(k+1) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, H_r^T(k+1)R_r^{-1}(k+1) \right] \tag{4.11}$$

οι ανάγκες αποθήκευσης και χρόνου του εν λόγω αλγορίθμου δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

ΑΝΑΓΚΕΣ ΟΛΙΚΗΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ

$$n^2+3n+m+2np+0.5p^2+0.5p+2\max(n^2,\ nm)+\max\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} m_i^2+m}{2},\ \frac{n^2+n}{2}\right)$$

λέξεις μνήμης (4.12)

ΧΡΟΝΟΣ

ΠΟΛ. $p^3+3p^2-2p+0.5\sum_{i=1}^{r} m_i^3+1.5\sum_{i=1}^{r} m_i^2-m+4n^3+8n^2-2n+4n^2p+$

$+2.5np^2+1.5np+n\sum_{i=1}^{r} m_i^2+0.5n^2m+1.5nm$

ΠΡΟΣΘ. $p^3-p+0.5\sum_{i=1}^{r} m_i^3-0.5m+4n^3+2n^2-4n+n\Sigma m_i^2+0.5n^2m+$ (4.13)

$+0.5nm+4n^2p+2.5np^2-2.5np$

ΔΙΑΙΡ. $4n+4p+2m-5$

Τ.Ρ. $2n+2p+m$

Από τις παραπάνω απλοποιήσεις προκύπτουν αξιοσημείωτες αλλαγές στα αποτελέσματα της γενικής ανάλυσης (όπου το μητρώο R έχει πλήρη μορφή), οι οποίες γίνονται εμφανείς εξετάζοντας το προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (που αναφέρθηκε στη περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων), όπου θεωρούμε ένα σύστημα

(π.χ. ένα σύνολο ραντάρ) με $m = \sum_{i=1}^{r} m_i = rM$, $M=2$ και συγκεκριμμένα θα έχουμε:

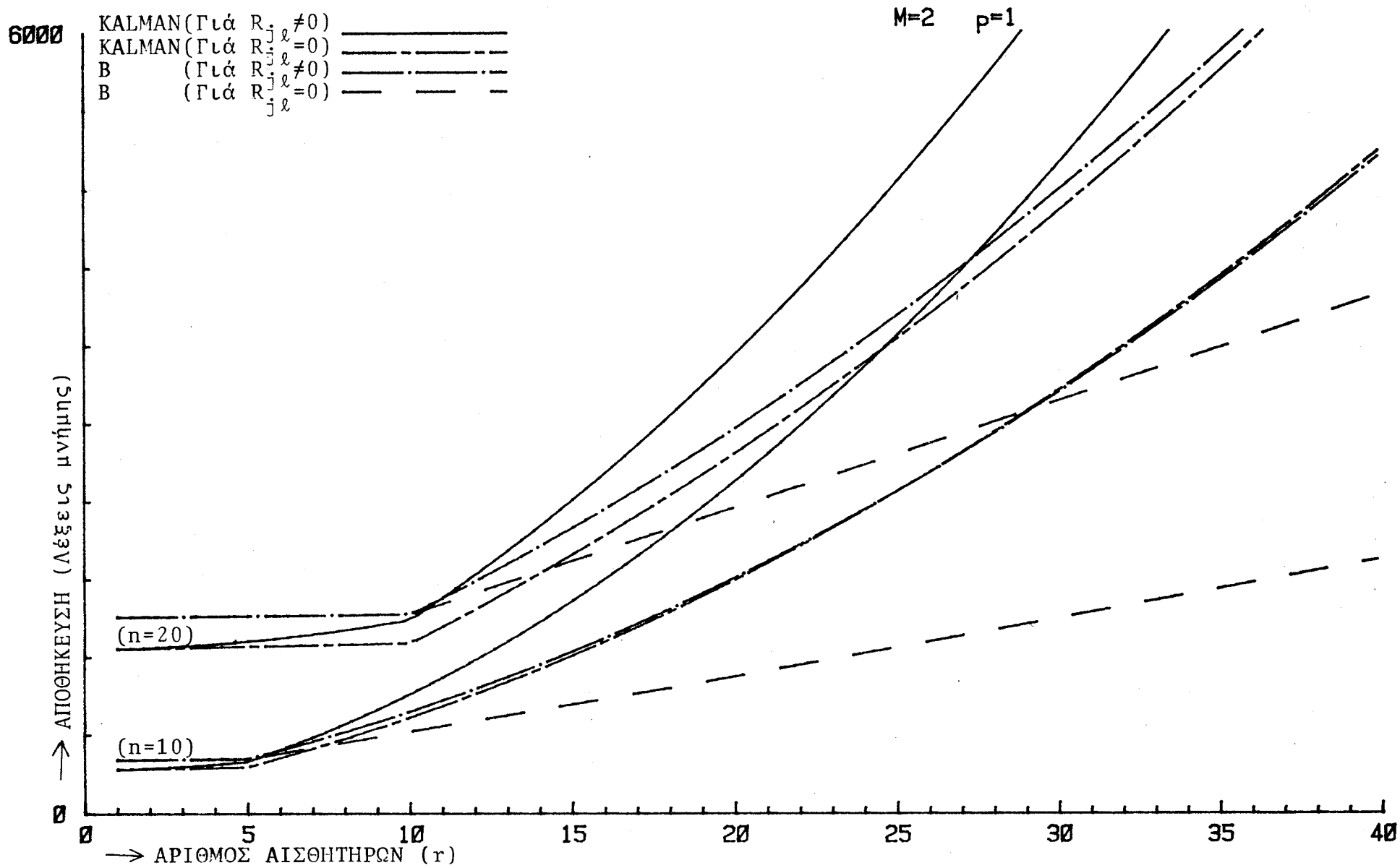
Στα σχ. 4.4, 4.5 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των απαιτήσεων αποθήκευσης (των δεδομένων) του φίλτρου Kalman και του αλγορίθμου B (γιά $R_{j\ell}\neq 0$, $R_{j\ell}=0$ γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$) συναρτήσει του πλήθους των αισθητήρων (r), όταν n=10, n=20, p=1, p=n γιά το συγκεκριμμένο παράδειγμα. Οπότε από τα σχ. 4.4, 4.5 παρατηρούμε ότι γιά $R_{j\ell}=0$, (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$), ο αλγόριθμος B διατηρείται οικονομικότερος (από άποψη απαιτήσεων αποθήκευσης) του φίλτρου Kalman αλλά γιά τιμές του λόγου m/n, μεγαλίτερες περίπου κατά 20% όταν p=1 και 5% όταν p=n,των αντίστοιχων, στην περίπτωση που $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$). Επίσης και οι δύο αλγόριθμοι έχουν σημαντικά λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης γιά $R_{j\ell}=0$ απ'ότι γιά $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$).

Εάν στη συνέχεια λάβουμε υπ'όψιν και τα ενδεικτικά ποσά αποθήκευσης των προγραμμάτων υλοποίησης των αλγορίθμων B και Kalman στον υπολογιστή CROMENCO, τότε από τα σχ. 4.6, 4.7, στα οποία δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των νέων απαιτήσεων αποθήκευσης (απαιτήσεις αποθήκευσης προγραμμάτων και δεδομένων), των δύο αυτών αλγορίθμων, συναρτήσει του r γιά τους συνδιασμούς των παραμέτρων του συγκεκριμμένου παραδείγματος, προκύπτει ότι ο αλγόριθμος B όταν $R_{j\ell}=0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$) διατηρείται οικονομικότερος του φίλτρου Kalman γιά τιμές του m μεγαλίτερες κατά 5% από τις αντίστοιχες της περίπτωσης που έχουμε $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$). Επίσης από τα σχ. 4.6, 4.7 προκύπτει ότι και οι δύο αλγόριθμοι έχουν σημαντικά λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης γιά $R_{j\ell}=0$ απ'ότι γιά $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$).

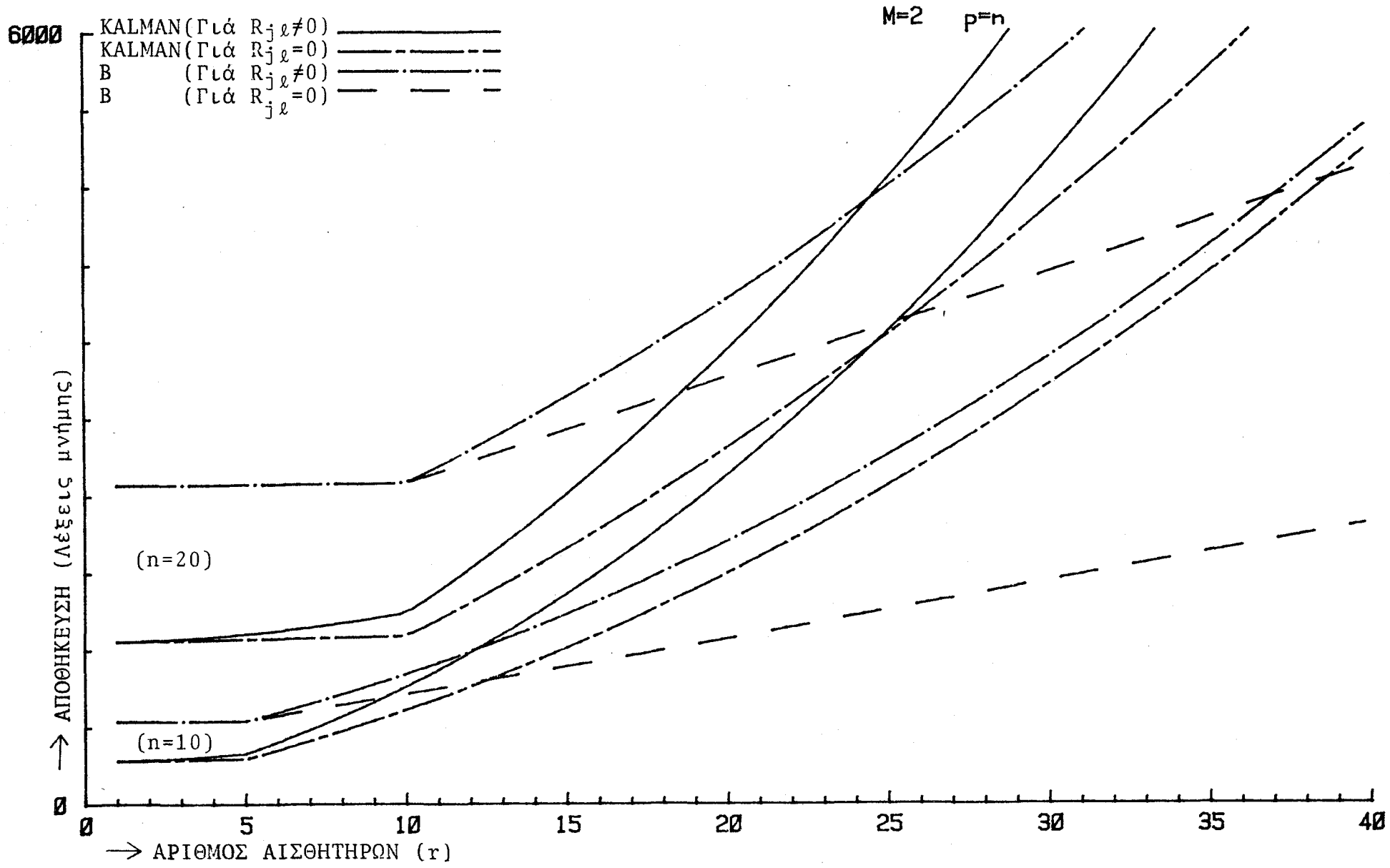
Τέλος η γραφική παράσταση των χρονικών απαιτήσεων των αλγορίθμων B και Kalman, όταν $R_{j\ell}=0$, $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$), συναρτήσει του r, γιά τους συνδιασμούς των παραμέτρων του συγκεκριμμένου παραδείγματος, δίνεται στα σχ. 4.8, 4.9*. Παρατηρούμε ότι όταν $R_{j\ell}=0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$) η ταχύτητα του αλγόριθμου B παρουσιάζει σημαντικά αξιόλογη αύξηση σε σχέση με την ταχύτητα του φίλτρου Kalman. Συγκεκριμμένα έχουμε ότι γιά $R_{j\ell}=0$

---

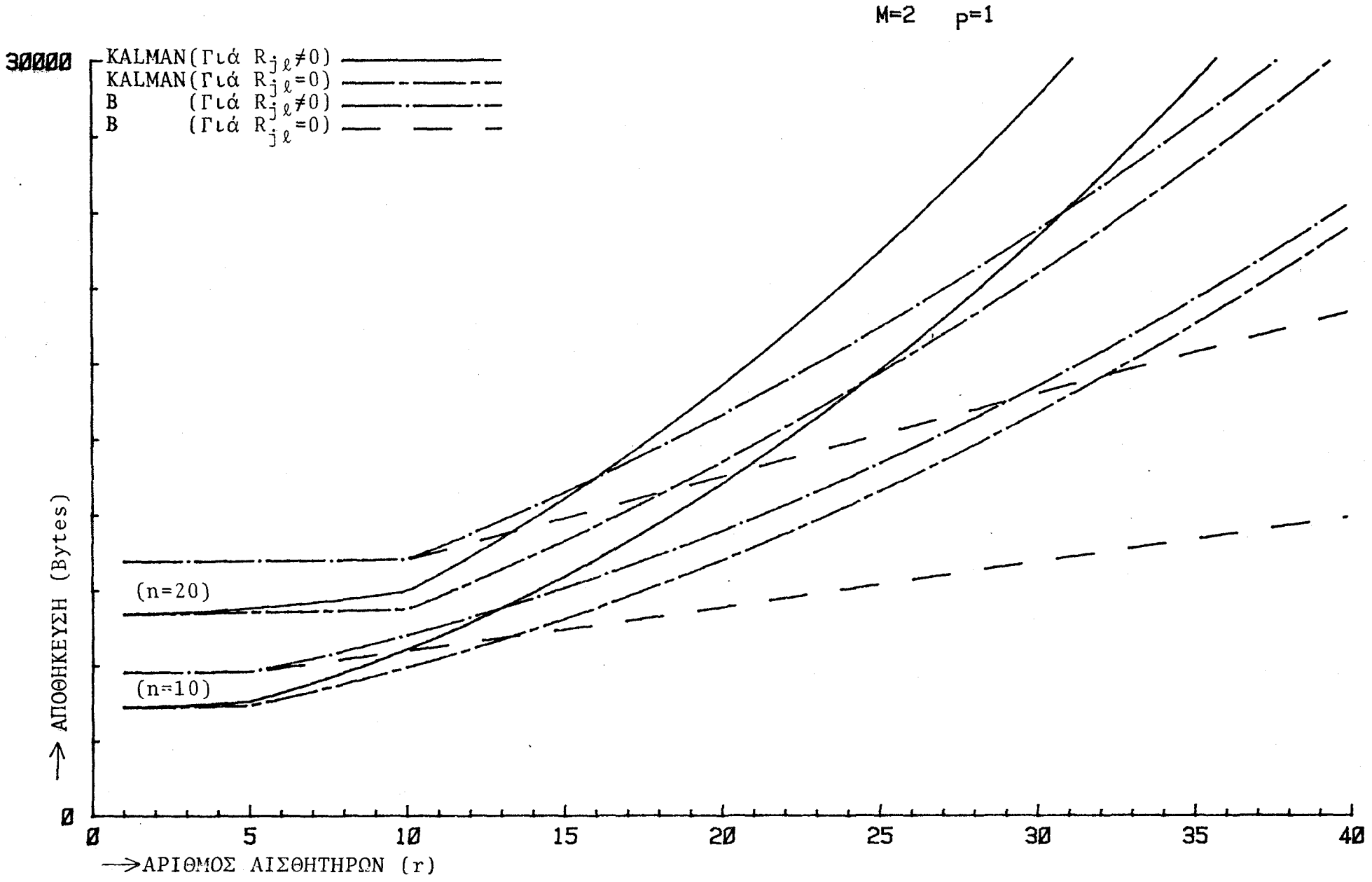
* Στα σχ. 4.8, 4.9 οι καμπύλες των χρονικών απαιτήσεων του φίλτρου Kalman όταν $R_{j\ell}=0$ και όταν $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$) συμπίπτουν.



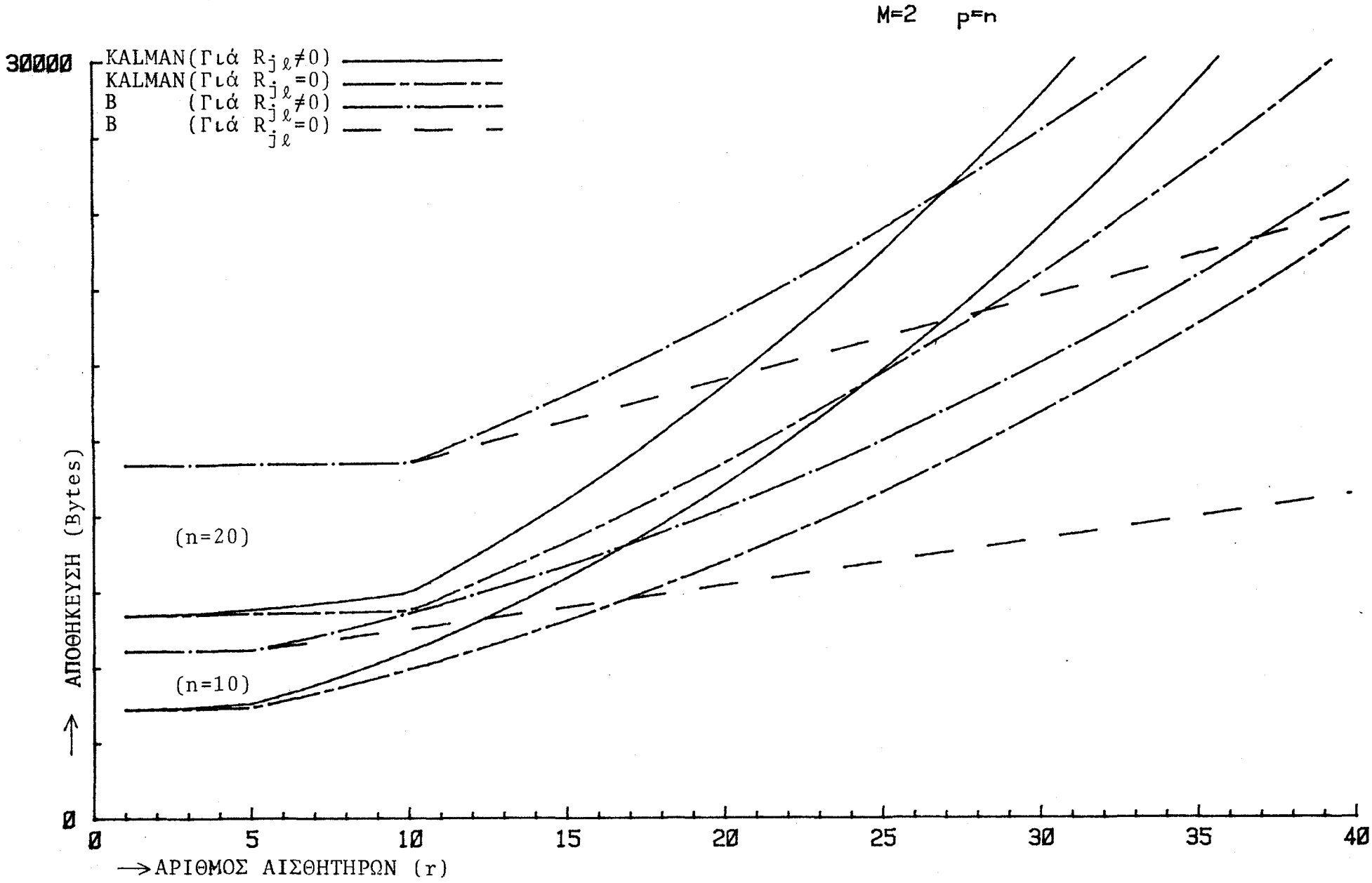
Σχήμα 4.4 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



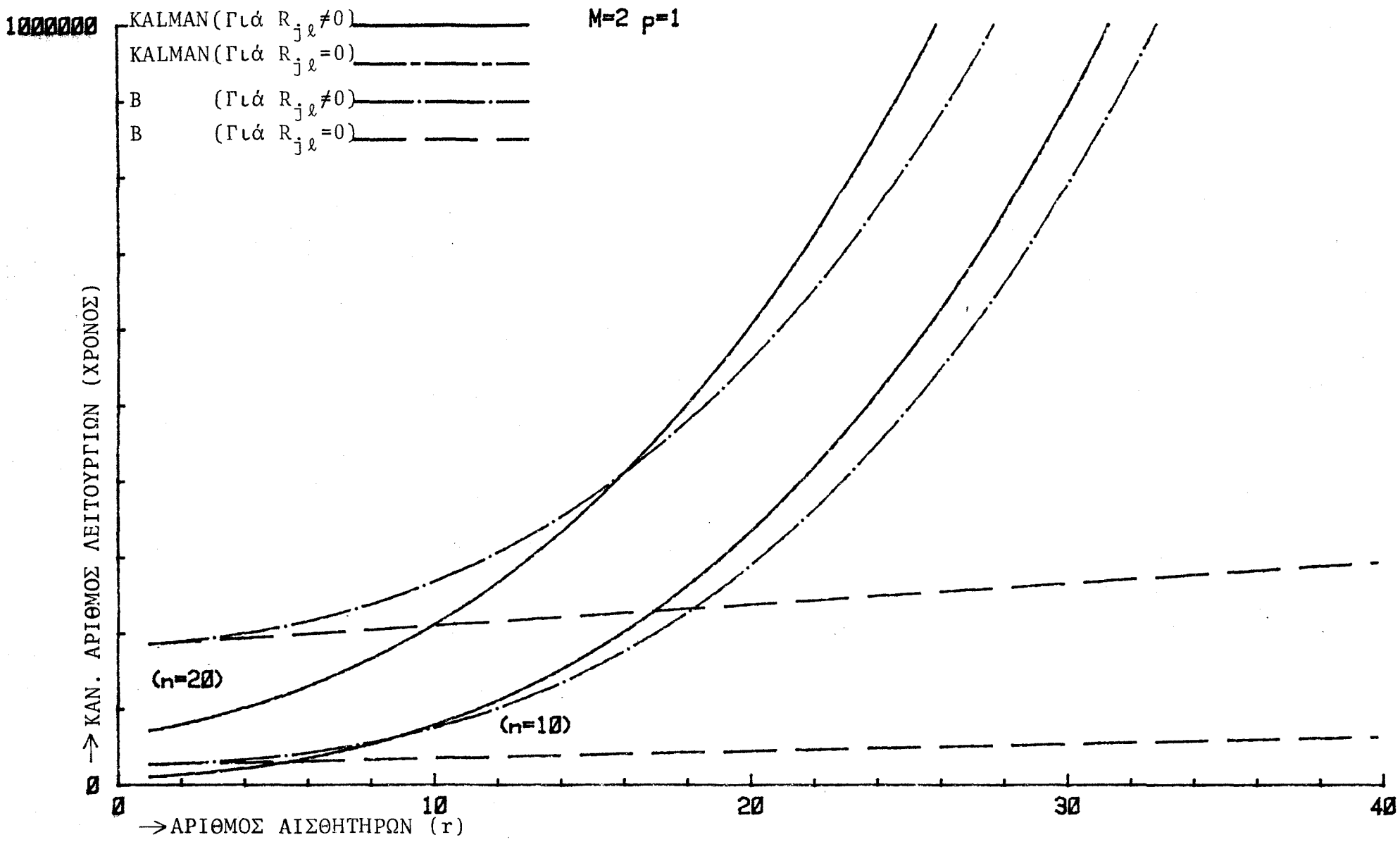
Σχήμα 4.5 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (δεδομένων) για χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



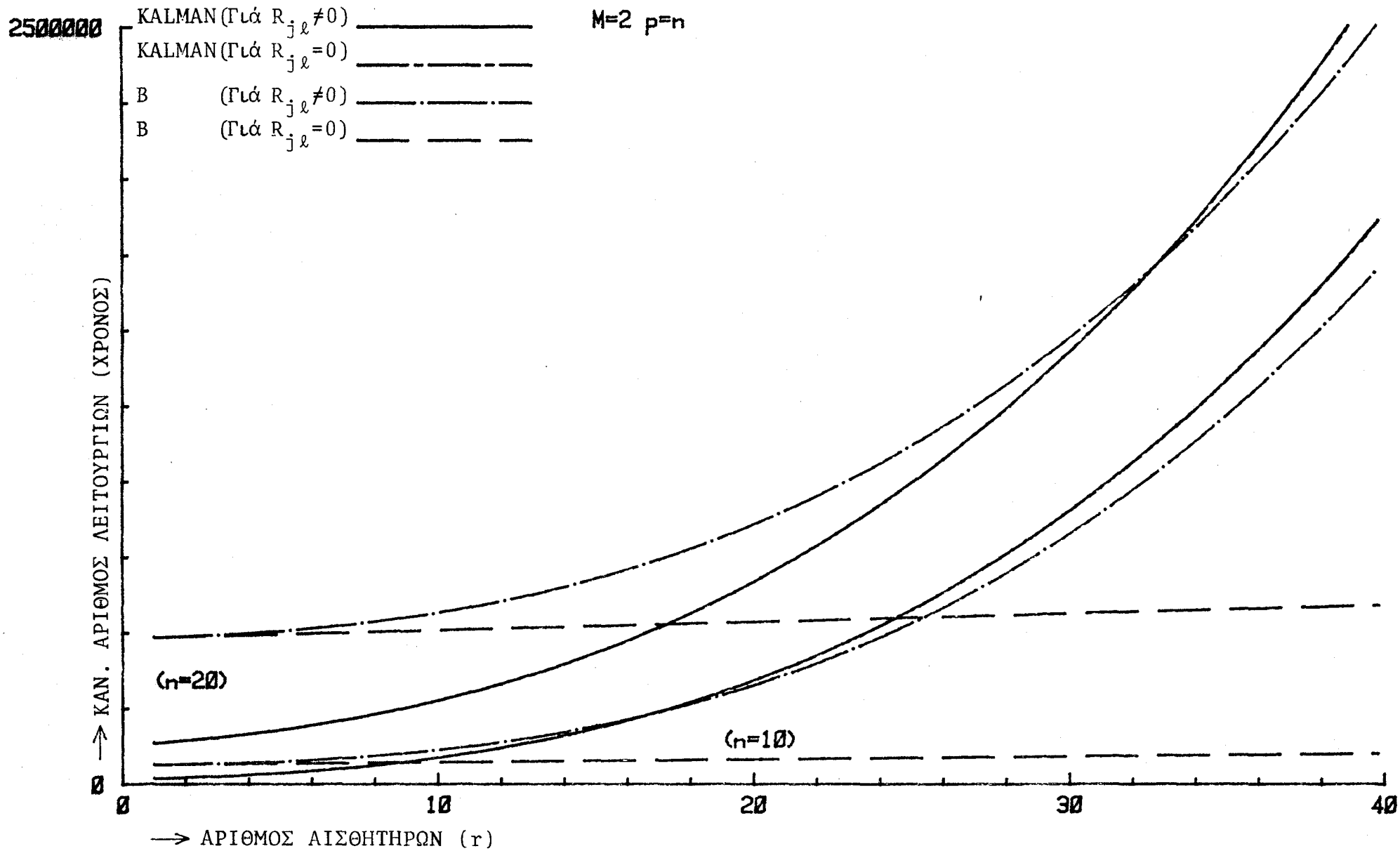
Σχήμα 4.6 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 4.7 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Απαιτήσεις αποθήκευσης (προγραμμάτων και δεδομένων) γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 4.8 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Χρονικές απαιτήσεις γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.



Σχήμα 4.9 Πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων (αριθμητικό παράδειγμα): Χρονικές απαιτήσεις γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

(γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$), ο αλγόριθμος Β γίνεται ταχίτερος του φίλτρου Kalman γιά μικρότερη τιμή του λόγου m/n, κατά 40% όταν p=1 και 50% όταν p=n, από τις αντίστοιχες της γενικής περίπτωσης που έχουμε $R_{j\ell}\neq 0$ (γιά όλα τα j,ℓ, $j\neq\ell$)

4.4. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόσαμε τα αποτελέσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου στο πρακτικό πρόβλημα εκτίμησης των πολλών αισθητήρων. Ειδικώτερα στο συγκεκριμμένο πρόβλημα έγινε μία σύγκριση των υπολογιστικών απαιτήσεων (αποθήκευσης και χρόνου) των αλγορίθμων Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ, Kalman γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, και των αλγορίθμων Β και Kalman, όσον αφορά την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων. Ανακεφαλαιόνοντας τα συμπεράσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης που έγινε γιά το συγκεκριμμένο πρόβλημα θα έχουμε ότι:

1) Στην περίπτωση που οι θόρυβοι των μετρήσεων $v_i(k+1)\{i=1,2,\ldots,r\}$ δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους, τότε ισχύουν τα συμπεράσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου

2) Όταν οι θόρυβοι των μετρήσεων $v_i(k+1)$ $\{i=1,2,\ldots,r\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους τότε:

α) Γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, οι απαιτήσεις χρόνου των αλγορίθμων Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ, Kalman καθώς και οι απαιτήσεις αποθήκευσης των αλγορίθμων Α,Β,ΓΦΔΑΔΛ παραμένουν οι ίδιες, με τις αντίστοιχες, που βρέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αν και προκύπτει μία ελάττωση στις απαιτήσεις αποθήκευσης του φίλτρου Kalman, εν τούτοις δεν έχουμε σημαντική μεταβολή στα συμπεράσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης του προηγουμένου κεφαλαίου.

β) Γιά την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων, αφ' ενός μεν έχουμε ελάττωση στις απαιτήσεις αποθήκευσης και των δύο αλγορίθμων (Β και Kalman), αφ'ετέρου έχουμε μία σημαντική ελάττωση στις χρονικές απαιτήσεις του αλγόριθμου Β, ενώ οι χρονικές απαιτήσεις του φίλτρου Kalman παραμένουν οι ίδιες (με

συνέπεια την σημαντική αύξηση της ταχύτητας του αλγόριθμου B ως προς την ταχύτητα του φίλτρου Kalman), σε σχέση με τις αντίστοιχες της περίπτωσης όπου οι θόρυβοι των μετρήσεων $v_i(k+1)$ $\{i=1,2,\ldots,r\}$ δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα διατριβή διαπραγματεύεται νέους αλγόριθμους διαμελισμού γραμμικής εκτίμησης (γιά συστήματα διάκριτου χρόνου). Συγκεκριμμένα παρουσιάζονται τέσσερεις νέοι αλγόριθμοι διαμελιμσού ανά δείγμα γραμμικής εκτίμησης και γίνεται μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση των αλγορίθμων αυτών, με τρείς άλλους αλγόριθμους διαμελισμού γραμμικής εκτίμησης και με το φίλτρο Kalman, σχετικά με τις υπολογιστικές των απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου. Τέλος οι αλγόριθμοι που προκύπτουν να έχουν τις λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου εφαρμόζονται στο πρόβλημα της εκτίμησης των πολλών αισθητήρων.

Οι τέσσερεις νέοι αλγόριθμοι διαμελισμού γραμμικής εκτίμησης, οι αλγόριθμοι Α, Β, Γ, Δ1, όπως ορίζονται στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζουν ανάλογα υπολογιστικά πλεονεκτήματα με το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, στις περιπτώσεις των χρονικά αμετάβλητων, περιοδικών και αργά χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων. Επίσης στο κεφάλαιο 2 προκύπτει ότι οι αλγόριθμοι Α, Β αποτελούν ανά δείγμα εκφράσεις του Αλγόριθμου Διαμελισμού των Lainiotis, Andrisani, ενώ ο αλγόριθμος Γ αποτελεί ανά δείγμα έκφραση του Αναδρομικού Αλγόριθμου Διαμελισμού των Andrisani, Gau. Στη συνέχεια αποδείχτηκε ότι ο μεν αλγόριθμος Α αποτελεί μία γενίκευση του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, ο δε αλγόριθμος Δ1 αποτελεί μία γενίκευση του αλγόριθμου Γ.

Από την συγκριτική υπολογιστική ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο 3 μεταξύ των αλγορίθμων Α, Β, Γ, Δ1, Γενικευμένο Αλγόριθμο Διαμελιμσού του Λαϊνιώτη (ΓΑΔΛ), Αναδρομικό Αλγόριθμο Διαμελισμού (ΑΑΔ), Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη (ΓΦΔΑΔΛ), Kalman, όσον αφορά τις υπολογιστικές των απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου, προκύπτει ότι γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, Kalman είναι οι οικονομικότεροι (από άποψη απαιτήσεων αποθήκευσης) αλγόριθμοι, ενώ οι ταχύτεροι αλγόριθμοι είναι οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, Kalman, Γ, Δ1 (όταν p=1). Γιά την περίπτωση δε των χρο-

νικά μεταβαλλόμενων μοντέλων οι οικονομικότεροι και ταχύτεροι αλγόριθμοι είναι οι αλγόριθμοι Β και Kalman (Οι περιοχές στις οποίες υπερέχουν οι παραπάνω αλγόριθμοι ως προς τους άλλους, όσον αφορά τις απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου καθορίζονται στο κεφάλαιο 3, από σχέσεις που ικανοποιούν οι διαστάσεις των διανυσμάτων κατάστασης, μετρήσεων και θορύβου διεργασίας). Από τους συγκρινόμενους δε αλγόριθμους ο αλγόριθμος Kalman είναι ο οικονομικότερος και ο ταχύτερος αλγόριθμος, μόνο όταν ο λόγος m/n (των διαστάσεων του διανύσματος μετρήσεων ως προς τις διαστάσεις του διανύσματος κατάστασης) γίνεται μικρότερος από ορισμένες τιμές (που καθορίζονται όπως προαναφέραμε στο κεφάλαιο 3).

Στην περίπτωση τῶν χρονικά αμετάβλητων μοντέλων οι αλγόριθμοι Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης και χρόνου, ενώ οι αλγόριθμοι Γ και Kalman έχουν (περίπου) τις ίδιες απαιτήσεις χρόνου.

Οι υπολογιστικές απαιτήσεις (αποθήκευσης και χρόνου) των αλγορίθμων Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, στην περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, έχουν την μικρότερη ευαισθησία (από τις αντίστοιχες υπολογιστικές απαιτήσεις των άλλων αλγορίθμων) στις μεταβολές των διαστάσεων του διανύσματος των μετρήσεων, όταν ο αριθμός των καταστάσεων είναι σταθερός.

Στη περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων, ο αλγόριθμος Kalman είναι πάντα οικονομικότερος και ταχύτερος των αλγορίθμων Α, Γ, Δ1, ΓΦΔΑΔΛ, ΓΑΔΛ, ΑΑΔ, ενώ ο αλγόριθμος Β είναι πάντα οικονομικότερος των αλγορίθμων Α, Δ1 και είναι πάντα ταχύτερος του αλγόριθμου Α. Επίσης ο αλγόριθμος Β είναι ταχύτερος του αλγόριθμου Δ1 ενώ είναι ακόμη οικονομικότερος και ταχύτερος των αλγορίθμων Γ και ΓΦΔΑΔΛ, όταν ο λόγος m/n αυξάνεται πάνω από ορισμένες τιμές (που καθορίζονται στο κεφάλαιο 3), που όμως είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές που πρέπει να είναι μεγαλίτερος ο λόγος m/n, γιά να είναι ο αλγόριθμος Β ο οικονομικότερος και ο ταχύτερος αλγόριθμος. Σημειώνεται ότι στη περίπτωση που ο θόρυβος διεργασίας είναι βαθμωτό μέγεθος τότε ο αλγόριθμος Β έχει πάντα λιγότερες απαιτήσεις αποθήκευσης από το ΓΦΔΑΔΛ

Ένα άλλο χρήσιμο συμπέρασμα που προκύπτει από το κεφάλαιο 3, γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα αναφέρεται στην ειδική πε-

ρίπτωση που τα μητρώα διασποράς του θόρυβου διεργασίας και των μετρήσεων (δηλαδή τα μητρώα Q(k), R(k+1) αντίστοιχα) είναι διαγώνια μητρώα. Συγκεκριμμένα έχουμε γιά την ειδική αυτή περίπτωση ότι ο αλγόριθμος Β έχει σημαντικά λιγότερες απαιτήσεις χρόνου (γιά τιμές του λόγου m/n μεγαλίτερες του 1) και αποθηκεύσεις (γιά τιμές του λόγου m/n πολύ μεγαλίτερες του 1) από τις αντίστοιχες υπολογιστικές απαιτήσεις του φίλτρου Kalman.

Οι βασικοί αλγόριθμοι διαμελισμού ΓΑΔΛ, ΑΑΔ είναι από τους αλγόριθμους που έχουν τις περισσότερες υπολογιστικές απαιτήσεις (στη συγκριτική υπολογιστική ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο 3). Συγκρινόμενοι οι δύο αυτοί αλγόριθμοι μεταξύ τους προκύπτει ότι γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα όταν m < n ο ΑΑΔ είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του ΓΑΔΛ (γιά m=n οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης). Ενώ γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα ο ΑΑΔ, αφ'ενός μεν γιά m < 0.5n είναι ταχύτερος του ΓΑΔΛ, αφ'ετέρου γιά m < 10n είναι και οικονομικότερος του ΓΑΔΛ (όταν m=10n οι δύο αλγόριθμοι έχουν περίπου τις ίδιες απαιτήσεις αποθήκευσης).

Επίσης χρήσιμα συμπεράσματα προκύπτουν από την σύγκριση των αλγορίθμων Γ, ΓΦΔΑΔΛ που αποτελούν ανά δείγμα εκφράσεις των αλγορίθμων ΑΑΔ και ΓΑΔΛ αντίστοιχα. Συγκεκριμμένα έχουμε ότι ο αλγόριθμος Γ είναι οικονομικότερος και ταχύτερος του ΓΦΔΑΔΛ όταν m < 0.5n γιά χρονικά αμετάβλητα μοντέλα και όταν m < n γιά χρονικά μεταβαλλόμενα. (Γιά m=n στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ίδιες υπολογιστικές απαιτήσεις).

Στο κεφάλαιο 4 εξετάζεται το πρόβλημα της εκτίμησης των πολλών αισθητήρων, όπου φαίνεται η πρακτικότητα και η χρησιμότητα των νέων αλγορίθμων διαμελισμού, καθώς και η χρησιμότητα της υπολογιστικής ανάλυσης που έγινε στο κεφάλαιο 3. Συγκεκριμμένα έγινε μία συγκριτική υπολογιστική ανάλυση των αλγορίθμων Α, Β, ΓΦΔΑΔΛ, Kalman γιά την περίπτωση των χρονικά αμετάβλητων μοντέλων, και των αλγορίθμων Β, Kalman γιά την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων, στο εν λόγω πρόβλημα. Στη κάθε περίπτωση του μοντέλου θεωρήσαμε πρώτα ότι οι θόρυβοι των μετρήσεων των αισθητήρων δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους, και στη συνέχεια ότι οι εν λόγω θόρυβοι των μετρήσεων είναι στατιστικά ανε-

ξάρτητοι μεταξύ τους. Οι μόνες αξιόλογες μεταβολές που προκύψαν στα συμπεράσματα της συγκριτικής υπολογιστικής ανάλυσης που έγινε στο κεφάλαιο 3 (όσον αφορά τους παραπάνω αλγόριθμους) αναφέρονται στην περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων μοντέλων όταν οι θόρυβοι των μετρήσεων των αισθητήρων είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Συγκεκριμμένα αφ'ενός μεν έχουμε ελάττωση στις απαιτήσεις αποθήκευσης και των δύο αλγόριθμων (B και Kalman), αφ'ετέρου έχουμε σημαντική ελάττωση στις χρονικές απαιτήσεις του αλγόριθμου B, ενώ οι χρονικές απαιτήσεις του φίλτρου Kalman παραμένουν οι ίδιες (με αποτέλεσμα να έχουμε σημαντική αύξηση της ταχύτητας του αλγόριθμου B ως προς την ταχύτητα του φίλτρου Kalman), σε σχέση με τις αντίστοιχες υπολογιστικές απαιτήσεις της περίπτωσης όπου οι θόρυβοι των μετρήσεων των αισθητήρων δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους γιά χρονικά μεταβαλλόμενα μοντέλα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΛΗΜΜΑΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΜΗΤΡΩΝ

Στο Παράρτημα αυτό δίνονται δύο λήμματα χρήσιμα γιά την παρούσα διατριβή, τα οποία αναφέρονται σε αντιστροφές μητρώων, αποδεικνύονται εύκολα και μπορούν να βρεθούν σε διάφορες πηγές.

ΛΗΜΜΑ Α1

Εάν γιά κάθε ομαλό (nonsingular) μητρώο A και γιά κάθε μητρώο B (και τα δύο διαστάσεων n×n), τα μητρώα $[A^{-1}+B]$ και $[I_n+AB]$ είναι ομαλά, τότε ισχύει η εξής ταυτότητα μητρώων:

$$\left[A^{-1}+B\right]^{-1}=\left[I_n+AB\right]^{-1}A \tag{A.1}$$

ΛΗΜΜΑ Α2 (Τύπος αντιστροφής τετραγωνικού διαμελισμένου μητρώου)

Γιά οποιοδήποτε τετραγωνικό, διαμελισμένο, ομαλό μητρώο ισχύει:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Y & S \\ \hline T & W \end{array}\right] \tag{A.2}$$

όπου

$$Y = \left[A-BD^{-1}C\right]^{-1} \tag{A.3}$$

$$S = -YBD^{-1} \tag{A.4}$$

$$T = -D^{-1}CY \tag{A.5}$$

$$W = D^{-1}+D^{-1}CYBD^{-1} \tag{A.6}$$

(με την προϋπόθεση φυσικά τα μητρώα D, $\left[A-BD^{-1}C\right]$ να είναι ομαλά)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ Α ΚΑΙ Β

Στο Παράρτημα αυτό δίνονται οι αποδείξεις του θεωρήματος 2.1, του Πορίσματος 2.1, καθώς και οι αποδείξεις ορισμένων παρατηρήσεων των.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.1

Η εξίσωση (1.1), εάν λάβουμε υπ'όψιν μας την εξίσωση (2.1) γράφεται ως εξής:

$$x(k+1)=\Phi(k+1,k)x(k)+\Gamma(k)u_n(k)+\Gamma(k)u_r(k) \tag{B.1}$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$u_r(k+1) = u(k+1) - u_n(k+1) \tag{B.2}$$

Και τελικά από τις εξισώσεις (B.1) και (B.2), (1.2) προκύπτει το ακόλουθο επαυξημένο μοντέλο:

$$x_a(k+1) = \Phi_a(k+1,k)x_a(k)+\Gamma_a(k)u_a(k), \quad x_a(0) = x_{a0} \tag{B.3}$$

$$z(k+1) = H_a(k+1)x_a(k)+v(k+1) \tag{B.4}$$

όπου

$$x_a^*(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hline u_r(k) \end{bmatrix} \quad , \quad \left[x_a(k) \in \mathbf{R}^{n+p}\right] \tag{B.5}$$

$$\Phi_a(k+1,k) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi(k+1,k) & \Gamma(k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \tag{B.6}$$

---

* Με τον δείκτη a συμβολίζουμε ποσότητες του επαυξημένου μοντέλου

$$\Gamma_a(k) = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma(k) & O_{n\times p} \\ \hline O_{p\times p} & I_p \end{array}\right] \tag{B.7}$$

$$u_a(k) = \left[\begin{array}{c} u_n(k) \\ \hline u(k+1) - u_n(k+1) \end{array}\right] \tag{B.8}$$

$$H_a(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} H(k+1) & O_{m\times p} \end{array}\right] \tag{B.9}$$

$$x_{a0}^T = \left[\begin{array}{c|c} x_0^T & u_r^T(0) \end{array}\right] \tag{B.10}$$

και γιά το οποίο προκύπτει, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.9)-(1.11) και (1.3)-(1.5), ότι:

$$x_a(0) \sim N \left\{\hat{x}_a(0) \ , \quad P_a(0)\right\} \tag{B.11}$$

με

$$\hat{x}_a(0) = \left[\begin{array}{c} \hat{x}(0) \\ \hline O_{p\times 1} \end{array}\right] \tag{B.12}$$

$$P_a(0) = \left[\begin{array}{c|c} P(0) & O_{n\times p} \\ \hline O_{p\times n} & Q_r(0) \end{array}\right] \tag{B.13}$$

και

$$u_a(k) \sim N \left\{\hat{u}_a(k) \ , \quad Q_a(k)\right\} \tag{B.14}$$

με $\hat{u}_a(k) = O_{2p\times 1}$ (B.15)

$$Q_a(k) = \left[\begin{array}{c|c} Q_n(k) & O_{p\times p} \\ \hline O_{p\times p} & Q(k+1) - Q_n(k+1) \end{array}\right] \tag{B.16}$$

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1 ο Λαϊνιώτης[(Lainiotis [29, 30, 40]) εφαρμόζοντας τον διαμελισμό στο διάνυσμα της αρχικής κατάστασης $x(0)$, που δίνεται από τις σχέσεις (2.1), (1.27a) - (1.30) σε κάθε δειγματοληπτική χρονική στιγμή t_k και με συμβατικές αρχικές συνθήκες $\hat{x}_n(k)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(k)=\mathbf{0}_{n\times n}$, για $k = 1,2,\ldots$ (από τον Γενικευμένο Αλγόριθμο Διαμελισμού του Λαϊνιώτη) κατέληξε στον αναδρομικό αλγόριθμο το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το επαυξημένο καταστατικό μοντέλο που βρήκαμε (και που δίνεται από τις σχέσεις (B.3)-(B.16)) στις εξισώσεις του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη, οπότε θα έχουμε:

α) Από την εξίσωση (1.53):

$$\begin{aligned} A_a(k+1) &= \left[H_a(k+1)\Gamma_a(k)Q_a(k)\Gamma_a^T(k)H_a^T(k+1)+R(k+1)\right]^{-1} \\ &= \left[H(k+1)\Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)+R(k+1)\right]^{-1} \\ &= A(k+1) \end{aligned} \tag{B.17}$$

δηλαδή προκύπτει η εξίσωση (2.20)

β) Από την εξίσωση (1.48):

$$\begin{aligned} K_{an}(k+1,k) &= \Gamma(k)Q_a(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)A\ (k+1) \\ &= \left[\begin{array}{c} K_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times m} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{B.18}$$

όπου η ποσότητα $K_n(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.11)

γ) Από την εξίσωση (1.52):

$$P_{an}(k+1,k) = \left[I_{n+p}-K_{an}(k+1,k)H_a(k+1)\right]\Gamma_a(k)Q_a(k)\Gamma_a^T(k) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_n-K_n(k+1,k)H(k+1) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & I_p \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q(k+1)-Q_n(k+1) \end{array}\right]$$

ή

$$P_{an}(k+1,k)=\left[\begin{array}{c|c} P_n(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q(k+1)-Q_n(k+1) \end{array}\right] \tag{B.19}$$

όπου η ποσότητα $P_n(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.13)
δ) Από την εξίσωση (1.49):

$$\Phi_{an}(k+1,k) = \left[I_{n+p}-K_{an}(k+1,k)H_a(k+1)\right]\Phi_a(k+1,k) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I_n-K_n(k+1,k)H(k+1) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & I_p \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Phi(k+1,k) & \Gamma(k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Phi_n(k+1,k) & C_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \tag{B.20}$$

όπου

$$\Phi_n(k+1,k) = \left[I_n-K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \tag{B.21}$$

και η ποσότητα $C_n(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.12).
ε) Από την εξίσωση (1.50):

$$O_{an}(k+1,k) = \Phi_a^T(k+1,k)H_a^T(k+1)A_a(k+1)H_a(k+1)\Phi_a(k+1,k) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Phi^T(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \Gamma^T(k) & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} H^T(k+1) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times m} \end{array}\right] A(k+1)\left[\begin{array}{c|c} H(k+1) & \mathbf{0}_{m\times p} \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|c} \Phi(k+1,k) & \Gamma(k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right]$$

ή

$$O_{an}(k+1,k) = D^T(k+1,k)A(k+1)D(k+1,k) = \tag{B.22α}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} O_{n1}(k+1,k) & O_{n3}(k+1,k) \\ \hline O_{n3}^T(k+1,k) & O_{n2}(k+1,k) \end{array}\right] \tag{B.22β}$$

όπου

$$D(k+1,k) = \left[H(k+1)\Phi(k+1,k) \;\vdots\; H(k+1)\Gamma(k)\right] \tag{B.23}$$

και οι ποσότητες $O_{n1}(k+1,k)$, $O_{n2}(k+1,k)$, $O_{n3}(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.17), (2.18), (2.19).

στ) Από της εξίσωση (1.51):

$$M_{an}(k+1,k) = \Phi_a^T(k+1)H_a^T(k+1)A_a(k+1)z(k+1) =$$

$$= D^T(k+1,k)A(k+1)z(k+1) \tag{B.24α}$$

$$= \begin{bmatrix} M_{n1}(k+1,k) \\ \hline M_{n2}(k+1,k) \end{bmatrix} \tag{B.24β}$$

όπου

$$M_{n1}(k+1,k) = \Phi^T(k+1,k)H^T(k+1)A(k+1)z(k+1) \tag{B.25}$$

$$M_{n2}(k+1,k) = \Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1)z(k+1) \tag{B.26}$$

ζ) Από την εξίσωση (1.47)

$$\hat{x}_{an}(k+1,k) = K_{an}(k+1,k)z(k+1)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{x}_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

όπου

$$\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1) \tag{B.28}$$

η) Σύμφωνα με τον ορισμό του βέλτιστου εκτιμητή μ.τ.λ. (δοθέντων των μετρήσεων: $\lambda(k,0) = \{z(1),\ldots,z(k)\}$) έχουμε:

$$\hat{x}_a(k,0) = E\left\{x_a(k)/\lambda(k,0)\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{x}(k,0) \\ \hline \hat{\theta}(k,0) \end{bmatrix} , \qquad \hat{x}_a(0,0) = \hat{x}_a(0) \tag{B.29}$$

και

$$P_a(k,0) = E\left\{\left[x_a(k)-\hat{x}_a(k,0)\right]\left[x_a(k)-x_a(k,0)\right]^T/\lambda(k,0)\right\} =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \Lambda(k,0) \\ \hline \Lambda^T(k,0) & \Theta(k,0) \end{array}\right] , \quad P_a(0,0) = P_a(0) \tag{B.30}$$

όπου

$$\hat{x}(k,0) = E\ \{x(k)/\lambda(k,0)\} \tag{B.31α}$$

$$\hat{\theta}(k,0) = E\ \{u_r(k)/\lambda(k,0)\} \tag{B.31β}$$

και

$$P(k,0) = E\ \{[x(k)-\hat{x}(k,0)]\ [x(k)-\hat{x}(k,0)]^T/\lambda(k,0)\} \tag{B.32α}$$

$$\Theta(k,0) = E\ \{[u_r(k)-\hat{\theta}(k,0)]\ [u_r(k)-\hat{\theta}(k,0)]^T/\lambda(k,0)\} \tag{B.32β}$$

$$\Lambda(k,0) = E\ \{[x(k)-\hat{x}(k,0)]\ [u_r(k)-\hat{\theta}(k,0)]^T/\lambda(k,0)\} \tag{B.32γ}$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες $\hat{x}_a(0)$, $P_a(0)$ δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (B.12), (B.13)

οπότε προκύπτουν τα εξής:

I) Από το Λήμμα A2 (Τύπος αντιστροφής τετραγωνικού διαμελισμένου μητρώου) ότι:

$$P_a^{-1}(k,0) = \left[\begin{array}{c|c} P_0(k,0) & J(k,0) \\ \hline J^T(k,0) & Q_0(k,0) \end{array}\right] \tag{B.33}$$

όπου

$$P_0(k,0) = \left[P(k,0) - \Lambda(k,0)\Theta^{-1}(k,0)\Lambda^T(k,0)\right]^{-1} \tag{B.34}$$

$$J(k,0) = -P_0(k,0)\Lambda(k,0)\Theta^{-1}(k,0) \tag{B.35}$$

$$Q_0(k,0) = \Theta^{-1}(k,0)\left[I_p \quad -\Lambda^T(k,0)J(k,0)\right] \tag{B.36}$$

II) Από την εξίσωση (1.45):

$$\hat{x}_a(k+1,0) = \hat{x}_{an}(k+1,k) + \Phi_{an}(k+1,k)\left[P_a^{-1}(k,0) + O_{an}(k+1,k)\right]^{-1}\left[M_{an}(k+1,k) + P_a^{-1}(k,0)\hat{x}_a(k,0)\right] \tag{B.37}$$

Η ποσότητα $\left[P_a^{-1}(k,0) + O_{an}(k+1,k)\right]^{-1}$ σύμφωνα με το Λήμμα A2 γράφεται στη μορφή:

$$\left[P_a^{-1}(k,0) + O_{an}(k+1,k)\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} S_1^o(k+1,0) & S_3^o(k+1,0) \\ \hline S_3^{oT}(k+1,0) & S_2^o(k+1,0) \end{array}\right] \tag{B.38}$$

όπου

$$S_1^o(k+1,0) = \left[P_0(k,0) + N_0(k+1,0)\right]^{-1} \tag{B.39}$$

$$S_2^o(k+1,0) = S_0^o(k+1,0) - L_0(k+1,0)S_3^o(k+1,0) \tag{B.40}$$

$$S_3^o(k+1,0) = -S_1^o(k+1,0)L_0^T(k+1,0) \tag{B.41}$$

$$N_0(k+1,0) = O_{n1}(k+1,k) - \left[J(k,0) + O_{n3}(k+1,k)\right]L_0(k+1,k) \tag{B.42}$$

$$S_0^o(k+1,0) = \left[Q_0(k,0) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} \tag{B.43}$$

$$L_0(k+1,0) = S_0^o(k+1,0)\left[J^T(k,0) + O_{n3}^T(k+1,k)\right] \tag{B.44}$$

Επίσης η ποσότητα $\left[M_{an}(k+1,k) + P_a^{-1}(k,0)\hat{x}_a(k,0)\right]$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left[M_{an}(k+1,k)+P_a^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} M_{n1}(k+1,k)+P_0(k,0)\hat{x}(k,0)+J(k,0)\hat{\theta}(k,0) \\ \hline M_{n2}(k+1,k)+J^T(k,0)\hat{x}(k,0)+Q_0(k,0)\hat{\theta}(k,0) \end{bmatrix} \qquad (B.45)$$

οπότε από τις εξισώσεις (B.37)-(B.45) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1,0) \\ \hline \hat{\theta}(k+1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^o(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k)+P_0(k,0)\hat{x}(k,0) + J(k,0)\hat{\theta}(k,0)\right] + T_2^o(k+1,0)\left[M_{n2}(k+1,k)+J(k,0)\hat{x}(k,0)+Q_0(k,0)\hat{\theta}(k,0)\right] \\ \hline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} \qquad (B.46)$$

όπου:

$$T_1^o(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)S_1^o(k+1,0)+C_n(k+1,k)S_3^{o^T}(k+1,0) \qquad (B.47)$$

$$T_2^o(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)S_3^o(k+1,0)+C_n(k+1,k)S_2^o(k+1,0) \qquad (B.48)$$

οπότε τελικά από την εξίσωση (B.16) έχουμε ότι:

$$\hat{\theta}(k+1,0) = \mathbf{0}_{p\times 1} \quad \text{γιά όλα τα } k \qquad (B.49)$$

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+T_1^o(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k)+P_0(k,0)\hat{x}(k,0)\right]+ T_2^o(k+1,0)\left[M_{n2}(k+1,k)+J(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \qquad (B.50)$$

III) Από την εξίσωση (1.46)

$$P_a(k+1,0) = P_{an}(k+1,0)+\Phi_{an}(k+1,k)\left[P_a^{-1}(k,0)+O_{an}(k+1,k)\right]^{-1} \Phi_{an}^T(k+1,k) \qquad (B.51)$$

και λαμβάνοντας υπ όψιν τις εξισώσεις (B.19), (B.20), (B.33),

(B.38), (B.47), (B.48) η εξίσωση (B.51) γράφεται:

$$\left[\begin{array}{c|c} P(k+1,0 & \Lambda(k+1,0) \\ \hline \Lambda^T(k+1,0) & \Theta(k+1,0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P_n(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q(k+1)-Q_n(k+1) \end{array}\right] +$$

$$\left[\begin{array}{c|c} T_1^o(k+1,0)\Phi_n^T(k+1,k)+T_2^o(k+1,0)C_n^T(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \qquad (B.52)$$

και προκύπτει:

$$P(k+1,k) = P_n(k+1,k)+T_1^o(k+1,0)\Phi_n^T(k+1,k)+T_2^o(k+1,0)C_n^T(k+1,k) \qquad (B.53)$$

$$\Theta(k+1,0) = Q(k+1)-Q_n(k+1)$$

$$= Q_r(k+1) \quad \text{γιά όλα τα } k \qquad (B.54)$$

$$\Lambda(k+1,0) = \mathbf{0}_{n\times p} \quad \text{γιά όλα τα } k \qquad (B.55)$$

Οπότε από τις εξισώσεις (B.34)-(B.36) και σύμφωνα με τις σχέσεις (B.54), (B.55) θα έχουμε:

$$P_0(k,0) = P^{-1}(k,0) \qquad (B.56)$$

$$J(k,0) = \mathbf{0}_{n\times p} \qquad (B.57)$$

$$Q_0(k,0) = Q_r^{-1}(k) \qquad (B.58)$$

Τελικά από τις εξισώσεις (B.39)-(B.44), (B.47), (B.48), (B.50), (B.53) και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις σχέσεις (B.56) - (B.58) προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+T_1(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]+$$
$$+ T_2(k+1,0)M_{n2}(k+1,k) \qquad (B.59)$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+T_1(k+1,0)\Phi_n^T(k+1,k)+T_2(k+1,0)C_n^T(k+1,k) \tag{B.60}$$

με

$$T_1(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)S_1(k+1,0)+C_n(k+1,k)S_3^T(k+1,0) \tag{B.61}$$

$$T_2(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)S_3(k+1,0)+C_n(k+1,k)S_2(k+1,0) \tag{B.62}$$

όπου

$$S_1(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} \tag{B.63}$$

$$S_2(k+1,0) = S_0(k+1,k)-L(k+1,k)S_3(k+1,0) \tag{B.64}$$

$$S_3(k+1,0) = -S_1(k+1,0)L^T(k+1,k) \tag{B.65}$$

$$S_0(k+1,k) = \left[Q_r^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} \tag{B.66}$$

οι ποσότητες $N(k+1,k)$, $L(k+1,k)$ δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις (2.15),(2.14).

Στη συνέχεια η εξίσωση (B.60), σύμφωνα με την εξίσωση (B.65) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} T_1(k+1,0) &= \Phi_n(k+1,k)S_1(k+1,0)-C_n(k+1,k)L(k+1,k)S_1(k+1,0) = \\ &= \left[\Phi_n(k+1,k)-C_n(k+1,k)L(k+1,k)\right]S_1(k+1,0) = \\ &= \Phi_1(k+1,k)S_1(k+1,0) \end{aligned} \tag{B.67}$$

όπου

$$\Phi_1(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)-C_n(k+1,k)L(k+1,k) \tag{B.68α}$$

$$\begin{aligned} &= \Phi(k+1,k) - \Big\{K_n(k+1,k)+C_n(k+1,k) \\ &\quad \left[Q_r^{-1}(k)+O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}\Gamma^T(k)H^T(k+1)A(k+1)\Big\}H(k+1)\Phi(k+1,k) \\ &= \left[I_n-K_1(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) \end{aligned} \tag{B.68β}$$

και η ποσότητα $K_1(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.10), ενώ είναι προφανές ότι η εξίσωση (B.68β) είναι η εξίσωση (2.9)

Επίσης η εξίσωση (B.62), σύμφωνα με τις εξισώσεις (B.64), (B.65), (B.68α) γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$T_2(k+1,0) = C_n(k+1,k)S_0(k+1,k) - \left[\Phi_n(k+1,k) - C_n(k+1,k)L(k+1,k)\right] S_3(k+1,0)$$
$$= C_n(k+1,k)S_0(k+1,k) - \Phi_1(k+1,k)S_1(k+1,0)L^T(k+1,k) \tag{B.69}$$

Από την εξίσωση (B.60) εάν λάβουμε υπ'όψιν μας τις εξισώσεις (B.63), (B.66), (B.67), (B.68α), (B.69) προκύπτει η εξίσωση (2.7), ενώ από την εξίσωση (B.59), εάν λάβουμε υπ'όψιν μας τις εξισώσεις (B.63), (B.66), (B.67), (B.68α), (B.69) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1,0) &= \hat{x}_n(k+1,k) + \Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1} \\ &\quad \left[M_{n1}(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] + C_n(k+1,k)\cdot \\ &\quad \left[Q_r^{-1}(k)+O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} M_{n2}(k+1,k) - \Phi_1(k+1,k)\cdot \\ &\quad \left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1} L^T(k+1,k)M_{n2}(k+1,k) = \\ &= \left\{\hat{x}_n(k+1,k)+C_n(k+1,k)\left[Q_r^{-1}(k)+O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}\cdot\right. \\ &\quad \left. M_{n2}(k+1,k)\right\} + \Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1} \\ &\quad \left\{\left[M_{n1}(k+1,k)-L^T(k+1,k)M_{n2}(k+1,k)\right]+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right\}\end{aligned} \tag{B.70}$$

Οπότε η εξίσωση (B.70), εάν λάβουμε υπ'όψιν μας τις εξισώσεις (B.28), (B.25), (B.26), (2.10) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1,0) &= \left\{K_1(k+1,k)z(k+1)\right\} + \Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1} \\ &\quad \left\{\left[(\Phi(k+1,k)-\Gamma(k)L(k+1,k))^T H^T(k+1)A(k+1)z(k+1)\right] + \right. \\ &\quad \left. +P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right\}\end{aligned} \tag{B.72}$$

Είναι προφανές πλέον ότι από την εξίσωση (B.72) προκύπτει η

εξίσωση (2.6) και επί πλέον οι εξισώσεις (2.8), (2.16).

Απόδειξη της παρατήρησης 2 του θεωρήματος 2.1

Η απόδειξη της παρατήρησης 2 του θεωρήματος 2.1 αποτελεί ταυτόχρονα και ένα δέυτερο τρόπο απόδειξης του εν λόγω θεωρήματος, και γίνεται με ανάλογο τρόπο με αυτόν που το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη προκύπτει από τον Γενικευμένο Αλγόριθμο Διαμελισμού του Λαϊνιώτη (Lainiotis [29,30,40]).

Διαμελίζοντας το διάστημα των δεδομένων $\{t_0, t_n\}$ [όπου το διάστημα των δεδομένων αποτελείται από τις μετρήσεις $\lambda(n,0) = \{z(0), z(1),\ldots,z(n)\}$, με $z(k) \equiv z(t_k)$ και $t_0 \le t_k \le t_n$] σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα $\{t_i, t_j\}$, τότε έχουμε από τον Αλγόριθμο Διαμελισμού των Lainiotis-Andrisani (που δίνεται στο θεώρημα 1.4). ότι:

$$\hat{x}(j,0) = \hat{x}_n(j,i) + C_\vartheta(j)\hat{U}_\vartheta(j,i) \tag{B.73}$$

$$P(j,0) = P_n(j,i) + C_\vartheta(j)P_\vartheta(j,i)C_\vartheta^T(j) \tag{B.74}$$

όπου

$$\hat{x}(j,0) \equiv \hat{x}(t_j/t_j,t_0),\ P(j,0) \equiv P(t_j/t_j,t_0),$$

$$\hat{x}_n(j,i) \equiv \hat{x}_n(t_j/t_j,\ t_i),\ P_n(j,i) \equiv P_n(t_j/t_j,t_i),$$

$$C_\vartheta(j) \equiv C_\vartheta(t_j),\ P_\vartheta(j,i) \equiv P_\vartheta(t_j/t_j,t_i),\ P_\vartheta(i,0) \equiv P_\vartheta(t_i),$$

$$\hat{U}_\vartheta(j,i) \equiv \hat{U}_\vartheta(t_j/t_j,t_i),\ \hat{U}_\vartheta(i,0) \equiv \hat{U}_\vartheta(t_i)$$

και οι συμβατικές αρχικές συνθήκες στην χρονική στιγμή t_i δίνονται από τις σχέσεις.

$$\hat{x}_n(i,i) \equiv \hat{x}_n(t_i),\ P_n(i,i) \equiv P_n(t_i),\ Q_n(i) \equiv Q_n(t_i)$$

Οι αρχικές συνθήκες των "υπολοίπων" $\hat{x}_r(i,0)$, $P_r(i,0)$, $Q_r(i)$ δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\hat{x}_r(i,0) \equiv \hat{x}(i,0) - \hat{x}_n(i,i) \tag{B.75}$$

$$P_r(i,0) \equiv P(i,0) - P_n(i,i) \tag{B.76}$$

$$Q_r(i) \equiv Q(i) - Q_n(i) \tag{B.77}$$

Επιπλέον οι ποσότητες $\hat{x}_n(j,i)$, $C_\vartheta(j)$, $\hat{U}_\vartheta(j,i)$, $P_\vartheta(j,i)$, $P_n(j,i)$ δίνονται από τις εξισώσεις (1.81), (1.74), (1.70), (1.71), (1.86) όπου τώρα $t_k \equiv t_j$, $t_0 \equiv t_i$, $\hat{x}_r(0) \equiv \hat{x}_r(i,0)$, $P_r(0) \equiv P_r(i,0)$

$$\hat{x}_n(j,i) = \Phi(j,i)\hat{x}_n(i,i)+K_n(j,i)\tilde{z}_n(j,i) \tag{B.78}$$

$$C_\vartheta(j) = \left[\Phi_n(j,i) \;\vdots\; \{I_n-K_n(j,i)H(j)\}\;\Gamma(i)\right] \tag{B.79}$$

$$\hat{U}_\vartheta(j,i) = P_\vartheta(j,i)\left[M_\vartheta(j,i)+P_\vartheta^{-1}(i,0)\hat{U}_\vartheta(i,0)\right] \tag{B.80}$$

$$P_\vartheta(j,i) = \left[O_\vartheta(j,i) + P_\vartheta^{-1}(i,0)\right]^{-1} \tag{B.81}$$

$$P_n(j,i) = \left[I_n-K_n(j,i)H(j)\right]P_n(j/i) \tag{B.82}$$

όπου

$$\tilde{z}_n(j,i) = z(j) - H(j)\Phi(j,i)\hat{x}_n(i,i) \tag{B.83a}$$

$$K_n(j,i) = P_n(j/i)H^T(j)P_{z_n}^{-1}(j/i) \tag{B.83b}$$

$$P_{z_n}(j,i) = H(j)P_n(j/i)H^T(j) + R(j) \tag{B.84}$$

$$P_n(j/i) = \Phi(j,i)P_n(i,i)\Phi^T(j,i)+\Gamma(i)Q_n(i)\Gamma^T(i) \tag{B.85}$$

$$\Phi_n(j,i) = \left[I_n-K_n(j,i)H(j)\right]\Phi(j,i) \tag{B.86}$$

$$\hat{U}_\vartheta(i,0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_r(i,0) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} \tag{B.87}$$

$$P_\vartheta(i,0) = \left[\begin{array}{c|c} P_r(i,0) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q_r(i) \end{array}\right] \tag{B.88}$$

$$M_\vartheta(j,i) = D_\vartheta^T(j)P_{z_n}^{-1}(j/i)\tilde{z}_n(j,i) \tag{B.89}$$

$$O_\vartheta(j,i) = D_\vartheta^T(j)P_{z_n}^{-1}(j/i)D_\vartheta(j) \tag{B.90}$$

$$D_\vartheta(j,i) = \left[H(j)\Phi(j,i) \;\vdots\; H(j)\Gamma(i)\right] \tag{B.91}$$

Οι παραπάνω λειτουργίες επαναλαμβάνονται γιά κάθε υποδιάστημα έως ότου $t_j=t_n$. Στη συνέχεια εάν πάρουμε $\hat{x}_n(i,i)=0_{n\times 1}$ και $P_n(i,i)=0_{n\times n}$ σε κάθε χρονική στιγμή t_i, προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος.

$$\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+C_\vartheta(k+1)\left[P_\vartheta^{-1}(k,0)+O_\vartheta(k+1,k)\right]^{-1} \cdot \left[M_\vartheta(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{U}_\vartheta(k,0)\right] \tag{B.92}$$

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+C_\vartheta(k+1)\left[P_\vartheta^{-1}(k,0)+O_\vartheta(k+1,k)\right]^{-1} C_\vartheta^T(k+1) \tag{B.93}$$

όπου

$$\hat{U}_\vartheta(k,0) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k,0) \\ \hline 0_{p\times 1} \end{bmatrix} \tag{B.94}$$

$$P_\vartheta(k,0) = \left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & 0_{n\times p} \\ \hline 0_{p\times n} & Q_r(k) \end{array}\right] \tag{B.95}$$

$$M_\vartheta(k+1,k) = D_\vartheta^T(k+1,k)A(k+1)z(k+1) \tag{B.96}$$

$$D_\vartheta(k+1,k) = \left[H(k+1)\Phi(k+1,k) \;\vdots\; H(k+1)\Gamma(k)\right] \tag{B.97}$$

$$C_\vartheta(k+1) = \left[\Phi_n(k+1,k) \;\vdots\; C_n(k+1,k)\right] \tag{B.98}$$

$$O_\vartheta(k+1,k) = D_\vartheta^T(k+1,k)A(k+1)D_\vartheta(k+1,k) \tag{B.99}$$

και οι ποσότητες $\hat{x}_n(k+1,k)$, $P_n(k+1,k)$, $A(k+1)$, $\Phi_n(k+1,k)$, $C_n(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (B.28), (2.13), (2.20), (B.21), (2.12).

Από την εξίσωση (B.96) εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (B.97) και (B.23), (B.24α,β) προκύπτει

$$M_\vartheta(k+1,k) = \begin{bmatrix} M_{n1}(k+1,k) \\ \hline M_{n2}(k+1,k) \end{bmatrix} \tag{B.100}$$

όπου οι ποσότητες $M_{n1}(k+1,k)$, $M_{n2}(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (B.25), (B.26).

Επίσης από την εξίσωση (B.99) εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (B.97) και (B.23), (B.22α,β) προκύπτει:

$$O_\vartheta(k+1,k) = \left[\begin{array}{c|c} O_{n1}(k+1,k) & O_{n3}(k+1,k) \\ \hline O_{n3}^T(k+1,k) & O_{n2}(k+1,k) \end{array}\right] \tag{B.101}$$

όπου οι ποσότητες $O_{n1}(k+1,k)$, $O_{n2}(k+1,k)$, $O_{n3}(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.17), (2.18), (2.19).

Οπότε από τις εξισώσεις (B.95) και (B.101) θα έχουμε:

$$\left[P_\vartheta^{-1}(k,0)+O_\vartheta(k+1,k)\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} S_1(k+1,0) & S_3(k+1,0) \\ \hline S_3^T(k+1,0) & S_2(k+1,0) \end{array}\right] \tag{B.102}$$

όπου οι ποσότητες $S_1(k+1,0)$, $S_2(k+1,0)$, $S_3(k+1,0)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (B.63), (B.64), (B.65).

Είναι προφανές πλέον ότι από τις εξισώσεις (B.92), (B.93), και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις εξισώσεις (B.94), (β.95), (B.98), (B.100), (B.102) καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (B.59), (B.60), οπότε η απόδειξη στην συνέχεια γίνεται με τον ίδιο τρόπο που αποδείχτηκε προηγουμένως το θεώρημα 2.1

Απόδειξη της παρατήρησης 7 του θεωρήματος 2.1

Θα αποδείξουμε ότι το Γραμμικό Φίλτρο Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη προκύπτει από τον Αλγόριθμο Α γιά $Q_r(k)=0_{p\times p}$.

Οπότε θα έχουμε γιά $Q_r(k)=0_{p\times p}, Q_n(k)=Q(k)$ και αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.20), (2.23), (2.24), (2.25) προκύπτει:

$$A(k+1) = \left[H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) + R(k+1)\right]^{-1} \tag{B.103}$$

$$S_0(k+1,k) = 0_{p\times p} \tag{B.104}$$

$$L(k+1,k) = 0_{p\times n} \tag{B.105}$$

$$K_1(k+1,k) = K_n(k+1,k) \tag{B.106}$$

όπου η ποσότητα $K_n(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (1.48).

Στη συνέχεια, εάν λάβουμε υπ'όψιν μας ότι $Q_n(k)=Q(k)$ και τις εξισώσεις (B.103)-(B.106), από τις εξισώσεις (2.8), (2.9), (2.13), (2.15), (2.16) θα έχουμε

$$\hat{x}_1(k+1,k) = \hat{x}_n(k+1,k) \tag{B.107}$$

$$\Phi_1(k+1,k) = \Phi_n(k+1,k) \tag{B.108}$$

$$P_n(k+1,k) = \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \tag{B.109}$$

$$N(k+1,k) = 0_n(k+1,k) \tag{B.110}$$

$$M(k+1,k) = M_n(k+1,k) \tag{B.111}$$

όπου οι ποσότητες $\hat{x}_n(k+1,k)$, $\Phi_n(k+1,k)$, $K_n(k+1,k)$, $0_n(k+1,k)$, $M_n(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (1.47), (1.49), (1.48), (1.50), (1.51).

Οπότε τελικά από τις εξισώσεις (2.21) και (2.22) λαμβάνοντας υπ'όψιν τις εξισώσεις (B.107)-(B.108) και το Λήμμα Α1 καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (1.45) και (1.46).

Συνεπώς καταλήξαμε στον αλγόριθμο του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη.

Απόδειξη της παρατήρησης 8 του θεωρήματος 2.1

Η εξίσωση (2.26α) είναι προφανής από την εξίσωση (Β.68α), ενώ η εξίσωση (2.26β) προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}\Phi_1(k+1,k) &= \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi(k+1,k) - \\ &\quad \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Gamma(k)L(k+1,k) = \\ &= \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\left[\Phi(k+1,k) - \Gamma(k)L(k+1,k)\right] \\ &= \left[I_n - K_n(k+1,k)H(k+1)\right]\Phi_0(k+1,k) \qquad (B.112)\end{aligned}$$

όπου η ποσότητα $\Phi_0(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.34).

Αν στη συνέχεια αντικαταστήσουμε την εξίσωση (2.10) στην εξίσωση (2.8) προκύπτει η εξίσωση (2.27), ενώ από την εξίσωση (2.16) έχουμε:

$$\begin{aligned}M(k+1,k) &= \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)z(k+1) - L^T(k+1,k)\{H(k+1)\Gamma(k)\}^T \\ &\quad A(k+1)z(k+1) \qquad (B.113)\end{aligned}$$

Οπότε εάν λάβουμε υπ'όψιν μας τις εξισώσεις (2.32), (2.33), από την εξίσωση (Β.113) καταλήγουμε στην εξίσωση (2.28)

Απόδειξη της παρατήρησης 11 του θεωρήματος 2.1

Η εξίσωση (1.17) του φίλτρου Kalman, εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (2.50), (2.51) γράφεται ως εξής:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \Phi_k(k+1,k)\hat{x}(k/k) + K_k(k+1,0)z(k+1) \qquad (B.113)$$

Επίσης από την εξίσωση (2.6) του αλγόριθμου Α και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις εξισώσεις (2.8), (2.16), (2.34) προκύπτει:

$$\hat{x}(k+1,0) = \left\{\Phi_1(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0)+N(k+1,k)\right]^{-1}P^{-1}(k,0)\right\}\hat{x}(k,0)$$
$$+\left\{K_1(k+1,k)+\Phi_0(k+1,k)H^T(k+1)A(k+1)\right\}z(k+1) \qquad (B.114)$$

όπου οι ποσότητες $\Phi_1(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $K_1(k+1,k)$, $\Phi_0(k+1,k)$, $A(k+1)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.9), (2.15), (2.10), (2.34), (2.20).

Οπότε από τις εξισώσεις (B.113), (B.114) προκύπτουν οι εξισώσεις (2.57) και (2.58).

Στη συνέχεια η εξίσωση (2.55) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$A_k^{-1}(k+1) = D(k+1,k)P_a(k,0)D^T(k+1,k)+A^{-1}(k+1) \qquad (B.115)$$

όπου η ποσότητα $D(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (B.23) και

$$P_a(k,0) = \left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q_r(k) \end{array}\right] \qquad (B.116)$$

και με κατάλληλους χειρισμούς μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A_k^{-1}(k+1)A(k+1)D(k+1,k) = D(k+1,k)\left[P_a(k,0)O_{an}(k+1,k)+I_{n+p}\right] \qquad (B.117)$$

(όπου η ποσότητα $O_{an}(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (B.22α)

ή

$$A_k(k+1)D(k+1,k) = A(k+1)D(k+1,k)\left[P_a(k,0)O_{an}(k+1,k)+I_{n+p}\right]^{-1} \qquad (B.118)$$

(οπότε σύμφωνα και με το Λήμμα A1 προκύπτει)

ή

$$D^T(k+1,k)A(k+1)D(k+1,k) = O_{an}(k+1,k)\left[P_a^{-1}(k,0)+O_{an}(k+1,k)\right]^{-1}P_a^{-1}(k,0)$$

(B.119)

ή

$$\left[\begin{array}{c|c} O_k(k+1,k) & \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_k(k+1)\{H(k+1)\Gamma(k)\} \\ \hline \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_k(k+1)\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} & \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_k(k+1)\{H(k+1)\Gamma(k)\} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} O_{n1}(k+1,k) & O_{n3}(k+1,k) \\ \hline O_{n3}^T(k+1,k) & O_{n2}(k+1,k) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} S_1(k+1,0) & S_3(k+1,0) \\ \hline S_3^T(k+1,0) & S_2(k+1,0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P^{-1}(k,0) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q_r^{-1}(k) \end{array}\right] \tag{B.120}$$

όπου οι ποσότητες $O_k(k+1,k)$, $O_{n1}(k+1,k)$, $O_{n2}(k+1,k)$, $O_{n3}(k+1,k)$, $S_1(k+1,0)$, $S_2(k+1,0)$, $S_3(k+1,0)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.52), (2.17), (2.18), (2.19), (B.63), (B.64), (B.65).

Οπότε τελικά από την εξίσωση (B.120) προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$O_k(k+1,k) = \left[O_{n1}(k+1,k)S_1(k+1,0)+O_{n3}(k+1,k)S_3^T(k+1,0)\right]P^{-1}(k,0), \tag{B.121}$$

$$\left[\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_k(k+1)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}\right] =$$

$$= \left[O_{n1}(k+1,k)S_3(k+1,0)+O_{n3}(k+1,k)S_2(k+1,0)\right] Q_r^{-1}(k) \tag{B.122}$$

και

$$\left[\{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_k(k+1)\{H(k+1)\Gamma(k)\}\right] = \left[O_{n3}^T(k+1,k)S_3(k+1,0) + O_{n2}(k+1,k)S_2(k+1,0)\right] Q_r^{-1}(k) \tag{B.123}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$O_{n1}(k+1,k)S_1(k+1,0) + O_{n3}(k+1,k)S_3^T(k+1,0) = N(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} \tag{B.124}$$

και επομένως από τις εξισώσεις (B.121) και (B.124) προκύπτει η εξίσωση (2.59).

Με παρόμοιο τρόπο που προκύπτει η εξίσωση (B.119) έχουμε ότι:

$$D^T(k+1,k)A_k(k+1) = P_a^{-1}(k,0)\left[O_{an}(k+1,k)+P_a^{-1}(k,0)\right]^{-1}D^T(k+1,k)A(k+1) \tag{B.125}$$

ή

$$D^T(k+1,k)A_k(k+1)z_k(k+1) = P_a^{-1}(k,0)\left[O_{an}(k+1,k)+P_a^{-1}(k,0)\right]^{-1} D^T(k+1,k)A(k+1)z_k(k+1) \tag{B.126}$$

όπου η ποσότητα $z_k(k+1)$ δίνεται από την εξίσωση (2.56). Όμως η εξίσωση (B.126) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left[\begin{array}{c} M_k(k+1,k) \\ \hline \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_k(k+1)z(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1}(k,0) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q_r^{-1}(k) \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} S_1(k+1,0) & S_3(k+1,0) \\ \hline S_3^T(k+1,0) & S_2(k+1,0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)z_k(k+1) \\ \hline \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A(k+1)z_k(k+1) \end{array}\right] \tag{B.127}$$

όπου η ποσότητα $M_k(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.53).

Τελικά από την εξίσωση (B.127) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$M_k(k+1,k) = P^{-1}(k,0)\left\{S_1(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k)-O_{n1}(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right] + S_3(k+1,0)\left[M_{n2}(k+1,k)-O_{n3}^T(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right]\right\} \tag{B.128}$$

και

$$\left[\{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_k(k+1)z_k(k+1)\right] = Q_r^{-1}(k)\left\{S_3^T(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k) - O_{n1}(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right] + S_2(k+1,0)\left[M_{n2}(k+1,k)-O_{n3}^T(k+1,k)\hat{x}(k,0)\right]\right\} \tag{B.129}$$

όπου οι ποσότητες $M_{n1}(k+1,k)$, $M_{n2}(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα

από τις εξισώσεις (2.32), (2.33).
Επίσης έχουμε ότι:

$$S_1(k+1,0)M_{n1}(k+1,k)+S_3(k+1,0)M_{n2}(k+1,k) =$$
$$= \left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} M(k+1,k) \qquad (B.130)$$

οπότε από τις εξισώσεις (B.128), (B.130), (B.124) προκύπτει η εξίσωση (2.60).

Απόδειξη του πορίσματος 2.1

Ο Αλγόριθμος Β προκύπτει από τον Αλγόριθμο Α, εάν θεωρήσουμε $Q_n(k) = \mathbf{0}_{p\times p}$.

Πράγματι γιά $Q_n(k)=0_{p\times p}, Q_r(k)=Q(k)$ από τις εξισώσεις (2.11), (2.12), (2.13), (2.20), θα έχουμε:

$$K_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times m} \qquad (B.131)$$

$$C_n(k+1,k) = \Gamma(k) \qquad (B.132)$$

$$P_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times n} \qquad (B.133)$$

$$A(k+1) = R^{-1}(k+1) \qquad (B.134)$$

Από τις εξισώσεις (2.17), (2.18), (2.19), (2.14), (2.15), (2.16) και λαμβάνοντας υπ'όψιν την εξίσωση (B.134) και ότι $Q_r(k)=Q(k)$ καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (2.69), (2.70), (2.71), (2.66), (2.67), (2.68). Επίσης εάν λάβουμε υπ'όψιν ότι $Q_r(k)=Q(k)$ και τις εξισώσεις (B.131), (B.134), από μεν τις εξισώσεις (2.10), (2.8) καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (2.64), (2.63), ενώ από την εξίσωση (2.9) προκύπτει:

$$\Phi_1(k+1,k) = \Phi_0(k+1,k) \qquad (B.135)$$

όπου η ποσότητα $\Phi_0(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.65).

Τέλος από τα παραπάνω είναι προφανές ότι από τις εξισώσεις (2.6), (2.7) καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (2.61), (2.62) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη των εξισώσεων του Αλγόριθμου Β.

Απόδειξη της παρατήρησης 2 του πορίσματος 2.1

Η απόδειξη εδώ γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και η απόδειξη της παρατήρησης 2 του θεωρήματος 2.1 μόνο που στον αλγόριθμο που δίνεται από τις εξισώσεις (B.73)-(B.91), παίρνουμε σε κάθε χρονική στιγμή t_i $\hat{x}_n(i,i)=\mathbf{0}_{n\times 1}$, $P_n(i,i)=\mathbf{0}_{n\times n}$, $Q_n(i)=\mathbf{0}_{p\times p}$, οπότε καταλήγουμε στον παρακάτω αλγόριθμο:

$$\hat{x}(k+1,0) = C_\vartheta(k+1)\left[P_\vartheta^{-1}(k,0)+O_\vartheta(k+1,k)\right]^{-1}\left[M_\vartheta(k+1,k)+P_\vartheta^{-1}(k,0)\hat{U}_\vartheta(k,0)\right] \tag{B.136}$$

$$P(k+1,0) = C_\vartheta(k+1)-\left[P_\vartheta^{-1}(k,0)+O_\vartheta(k+1,k)\right]^{-1}C_\vartheta^T(k+1) \tag{B.137}$$

όπου

$$C_\vartheta(k+1) = \left[\Phi(k+1,k) \;\vdots\; \Gamma(k)\right] \tag{B.138}$$

$$P_\vartheta(k,0) = \left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q(k) \end{array}\right] \tag{B.139}$$

και οι ποσότητες $\hat{U}_\vartheta(k,0)$, $O_\vartheta(k+1,k)$, $M_\vartheta(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (B.94), (B.101), (B.100) μόνο που τώρα έχουμε:

$$A(k+1) = R^{-1}(k+1) \tag{B.140}$$

και στη συνέχεια εάν λάβουμε υπ'όψη και την εξίσωση (B.102) καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\hat{x}(k+1,0) = T_1(k+1,0)\left[M_{n1}(k+1,k)+P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]+T_2(k+1,0)M_{n2}(k+1,k) \tag{B.141}$$

$$P(k+1,0) = T_1(k+1,0)\Phi^T(k+1,k) + T_2(k+1,0)\Gamma^T(k) \tag{B.142}$$

με

$$T_1(k+1,0) = \Phi(k+1,k)S_1(k+1,0)+\Gamma(k)S_3^T(k+1,0) \tag{B.143}$$

$$T_2(k+1,0) = \Phi(k+1,k)S_3(k+1,0) + \Gamma(k)S_2(k+1,0) \qquad (B.144)$$

όπου οι ποσότητες $M_{n1}(k+1,k)$, $M_{n2}(k+1,k)$ και $S_1(k+1,0)$, $S_2(k+1,0)$, $S_3(k+1,0)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (B.25), (B.26) (με $A(k+1)=R^{-1}(k+1)$) και (B.63), (B.64), (B.65) αλλά με $A(k+1) = R^{-1}(k+1)$

$$S_0(k+1,k) = \left[Q^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1} \qquad (B.145)$$

και οι ποσότητες $L(k+1,k)$, $N(k+1,k)$, $O_{n1}(k+1,k)$, $O_{n2}(k+1,k)$, $O_{n3}(k+1,k)$ να δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.66), (2.67), (2.69)-(2.71).

Επίσης οι εξισώσεις (B.143), (B.144) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$T_1(k+1,0) = \Phi_0(k+1,k)S_1(k+1,0) \qquad (B.146)$$

$$T_2(k+1,0) = \Gamma(k)S_0(k+1,k) - \Phi_0(k+1,k)S_1(k+1,0)L^T(k+1,k) \qquad (B.147)$$

όπου η ποσότητα $\Phi_0(k+1,k)$ δίνεται αντίστοιχα από την εξίσωση (2.65).

Στη συνέχεια συνδιάζοντας την εξίσωση (B.141) με τις εξισώσεις (B.146), (B.147) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1,0) &= \Gamma(k)S_0(k+1,k)M_{n2}(k+1,k) + \Phi_0(k+1,k)S_1(k+1,0) \\ &\quad \left[\left\{M_{n1}(k+1,k) - L^T(k+1,k)M_{n2}(k+1,k)\right\} + \right. \\ &\quad \left. + P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] = \\ &= \left\{\Gamma(k)\left[Q^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}\Gamma^T(k)H^T(k+1)R^{-1}(k+1)\right\} z(k+1) \\ &\quad + \Phi_0(k+1,k)\left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1} \left[\left(\Phi^T(k+1,k) - L^T(k+1,k)\cdot\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\cdot\ \Gamma^T(k)\right)H^T(k+1)R^{-1}(k+1)z(k+1) + P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right] \qquad (B.148)\end{aligned}$$

Οπότε είναι προφανές ότι από την εξίσωση (B.148) προκύπτει η εξίσωση (2.61) και επιπλέον οι εξισώσεις (2.63), (2.64), (2.68).

Τέλος συνδιάζοντας την εξίσωση (Β.142) με τις εξισώσεις (Β.146), (Β.147), (Β.145) προκύπτει η εξίσωση (2.62).

Απόδειξη της παρατήρησης 7 του πορίσματος 2.1

Για $Q(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$ από τις εξισώσεις (2.74), (2.75), (2.63), (2.65), (2.67), (2.68) του Αλγόριθμου Β, καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξής εξισώσεις:

$$S_0(k+1,k) = \mathbf{0}_{p\times p} \tag{B.149}$$

$$L(k+1,k) = \mathbf{0}_{p\times n} \tag{B.150}$$

$$\hat{x}_1(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times 1}{}^{*} \tag{B.151}$$

$$\Phi_0(k+1,k) = \Phi(k+1,k) \tag{B.152}$$

$$N(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) \tag{B.153}$$

$$M(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T R^{-1}(k+1)z(k+1) \tag{B.154}$$

όπου η ποσότητα $O_{n1}(k+1,k)$ δίνεται από την εξίσωση (2.70).

Οπότε από τις εξισώσεις (2.61), (2.62) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε αντίσοτιχα στις εξισώσεις (2.77), (2.78).

Στη συνέχεια από τις εξισώσεις (1.53), (1.48), (1.47), (1.52), (1.49), (1.50), (1.51) του Γραμμικού Φίλτρου Διαμελισμού ανά δείγμα του Λαϊνιώτη γιά $Q(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$ θα έχουμε:

$$A(k+1) = R^{-1}(k+1) \tag{B.155}$$

$$K_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times m} \tag{B.156}$$

$$\hat{x}_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times 1} \tag{B.157}$$

$$P_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times n} \tag{B.158}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k) \tag{B.159}$$

$$O_n(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) \tag{B.160}$$

---

* Στις εξισώσεις (Β.151),(Β.152) καταλήγουμε αφού λάβουμε υπ'όψη μας την εξίσωση (2.76) γιά $Q(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$

$$M_n(k+1,k) = M(k+1,k) \tag{B.161}$$

όπου οι ποσότητες $O_{n1}(k+1,k)$, $M(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.70), (B.154).

Είναι προφανές ότι από τις εξισώσεις (1.45), (1.46) και σύμφωνα με τις εξισώσεις (B.155)-(B.161) καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (2.77), (2.78).

Απόδειξη της παρατήρησης 10 του πορίσματος 2.1

Από τις αποδείξεις του πορίσματος 2.1 και της παρατήρησης 11 του θεωρήματος 2.1, είναι προφανές ότι από τις εξισώσεις (2.57), (2.58), (2.59), (2.60), γιά $Q_n(k)=O_{p\times p}$, $Q_r(k)=Q(k)$, προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις (2.89), (2.90), (2.91), (2.92).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Γ

Σε αυτό το Παράρτημα δίνονται, η απόδειξη του θεωρήματος 2.2 και οι αποδείξεις ορισμένων παρατηρήσεων του.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.2

Η απόδειξη εδώ γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και η απόδειξη της παρατήρησης 2 του θεωρήματος 2.1. Οπότε διαμελίζοντας το διάστημα των δεδομένων $\{t_0, t_n\}$ σε μη επικαλιπτόμενα υποδιαστήματα $\{t_i, t_j\}$ θα έχουμε από τον Αναδρομικό Αλγόριθμο Διαμελισμού (που δίνεται στο θεώρημα 1.5) ότι:

$$\hat{x}(j,0) = \hat{x}_n(j,i) + \Phi_n(j,i)\hat{x}_r(i/j) \qquad (\Gamma.1)$$

$$P(j,0) = P_n(j,i) + \Phi_n(j,i)P_r(i/j)\Phi_n^T(j,i) \qquad (\Gamma.2)$$

όπου

$$\hat{x}(j,0) \equiv \hat{x}(t_j/t_j,t_o), \qquad P(j,0) \equiv P(t_j/t_j,t_o)$$

$$\hat{x}_n(j,i) \equiv \hat{x}_n(t_j/t_j,t_i), \qquad P_n(j,i) \equiv P_n(t_j/t_j,t_i)$$

$$\hat{x}_r(i/j) \equiv \hat{x}_r(t_i/t_j,t_i), \qquad P_r(i/j) \equiv P_r(t_i/t_j,t_i)$$

$$\Phi_n(j,i) \equiv \Phi_n(t_j,t_i)$$

και οι ποσότητες $\hat{x}_n(j,i)$, $P_n(j,i)$, $\Phi_n(j,i)$ του συμβατικού φίλτρου δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (1.91), (1.96), (1.97) με συμβατικές αρχικές συνθήκες στο t_i που δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{x}_n(i,i) \equiv \hat{x}_n(t_i), \qquad P_n(i,i) \equiv P_n(t_i)$$

οπότε θα έχουμε

$$\hat{x}_n(j,i) = \Phi(j,i)\hat{x}_n(i,i) + K_n(j,i)\tilde{z}_n(j,i) \qquad (\Gamma.3)$$

$$P_n(j,i) = \left[I_n - K_n(j,i)H(j)\right] P_n(j/i) \qquad (\Gamma.4)$$

$$\Phi_n(j,i) = \left[I_n - K_n(j,i)H(j)\right] \Phi(j,i) \qquad (\Gamma.5)$$

όπου

$$K_n(j,i) = P_n(j/i)H^T(j)P_{z_n}^{-1}(j/i) \qquad (\Gamma.6)$$

$$P_n(j/i) = \Phi(j,i)P_n(i,i)\Phi^T(j,i) + \Gamma(i)Q(i)\Gamma^T(i) \qquad (\Gamma.7)$$

$$P_{z_n}(j/i) = H(j)P_n(j/i)H^T(j) + R(j) \qquad (\Gamma.8)$$

$$\tilde{z}_n(j,i) = z(j) - H(j)\Phi(j,i)\hat{x}_n(i,i) \qquad (\Gamma.9)$$

ενώ οι ποσότητες $\hat{x}_r(i/j)$, $P_r(i/j)$ της "υπολοίπου" συνιστώσας δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (1.99), (1.100) με $t_k = t_j$, $t_o \equiv t_i$, $x_r(i/i) \equiv x_r(t_i/t_i)$, $P_r(i/i) \equiv P_r(t_i/t_i)$.

$$\hat{x}_r(i/j) = \hat{x}_r(i/i) + K_r(j,0)z_r(j,0) \qquad (\Gamma.10)$$

$$P_r(i/j) = I_n - K_r(j,0)H(j)\Phi(j,i) \quad P_r(i/i) \qquad (\Gamma.11)$$

όπου

$$K_r(j,0) = P_r(i/i)\Phi^T(j,i)H^T(j)P_z^{-1}(j/i) \qquad (\Gamma.12)$$

$$z_r(j,0) = \tilde{z}_n(j,i) - H(j)\Phi(j,i)\hat{x}_r(i/i) \qquad (\Gamma.13)$$

$$P_z(j/i) = P_{z_n}(j/i) + H(j)\Phi(j,i)P_r(i/i)\Phi^T(j,i)H^T(j) \qquad (\Gamma.14)$$

και με αρχικές συνθήκες που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$x_r(i/i) \equiv \hat{x}(i,0) - \hat{x}_n(i,i) \qquad (\Gamma.15)$$

$$P_r(i/i) \equiv P(i,0) - P_n(i,i) \qquad (\Gamma.16)$$

Οι παραπάνω λειτουργίες επαναλαμβάνονται γιά κάθε υποδιάστημα, έως ότου $t_j=t_n$. Στη συνέχεια εάν πάρουμε $\hat{x}_n(i,i)=0_{n\times 1}$, $P_n(i,i)=0_{n\times n}$ σε κάθε χρονική στιγμή t_i προκύπτει ο ζητούμενος αλγόριθμος.

Απόδειξη της παρατήρησης 5 του θεωρήματος 2.2

Η εξίσωση (1.22) σύμφωνα με την εξίσωση (1.21) γράφεται ως εξής:

$$P_z(k+1/k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\, P(k/k)\, \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T + H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1) + R(k+1) \qquad (\Gamma.17)$$

από τις εξισώσεις (Γ.17), (2.102) προκύπτει το ζητούμενο.

Απόδειξη της παρατήρησης 8 του θεωρήματος 2.2

Η εξίσωση (2.93) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.95), (2.100), (2.103) γράφεται ως εξής:

$$\hat{x}(k+1,0) = \left\{K_n(k+1,k) + \Phi_n(k+1,k)K_r(k+1,0)\right\} z(k+1) + \left\{\Phi_n(k+1,k) - \Phi_n(k+1,k)\, K_r(k+1,0)H(k+1)\Phi(k+1,k)\right\} \hat{x}(k,0) \qquad (\Gamma.18)$$

Τελικά από τις εξισώσεις (Β.113), (Γ.18) προκύπτουν οι εξισώσεις (2.117), (2.118).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ Δ1

Στο Παράρτημα αυτό δίνονται η απόδειξη του θεωρήματος 2.3 καθώς και οι αποδείξεις ορισμένων παρατηρήσεων του.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.3

Αντικαθιστόντας το επαυξημένο καταστατικό μοντέλο, που περιγράφεται από τις εξισώσεις (B.3)-(B.16), στις εξισώσεις του αλγόριθμου Γ, προκύπτει ότι από μεν τις εξισώσεις (2.97), (2.96), (2.99), (2.98), (2.95) καταλήγουμε, αντίστοιχα, στις εξισώσεις (B.17), (β.18), (B.19), (B.20), (B.27) στις οποίες οι ποσότητες $A(k+1)$, $K_n(k+1,k)$, $P_n(k+1,k)$, $\Phi_n(k+1,k)$, $C_n(k+1,k)$, $\hat{x}_n(k+1,k)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.123), (2.122), (2.126), (2.124), (2.125), (2.121), ενώ γιά τις υπόλοιπες εξισώσεις του Αλγόριθμου Γ εάν λάβουμε υπ'όψιν και τις εξισώσεις (B.29), (B.30) θα έχουμε:

α) Από την εξίσωση (2.102)

$$B_a(k+1,0) = \Big[A_a^{-1}(k+1) + \Big\{ H_a(k+1)\Phi_a(k+1,k)\Big\} P_a(k,0) \Big\{H_a(k+1)\Phi_a(k+1,k)\Big\}^T \Big]^{-1} =$$

$$= \Big\{A^{-1}(k+1) + \Big[H(k+1)\Phi(k+1,k) \quad H(k+1)\Gamma(k)\Big] \cdot \left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \Lambda(k,0) \\ \hline \Lambda^T(k,0) & \Theta(k,0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T \\ \hline \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T \end{array}\right]\Big\}^{-1}$$

$$= \Big[A^{-1}(k+1) + \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\, P(k,0)\, \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T + \{H(k+1)\Gamma(k)\}\, \Theta(k,0)\, \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T + \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\Lambda(k,0) \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T + \{H(k+1)\Gamma(k)\}\, \Lambda^T(k,0)\, \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T\Big]^{-1} \tag{Δ.1}$$

β) Από την εξίσωση (2.101)

$$K_{ar}(k+1,0) = P_a(k,0)\left\{H_a(k+1)\Phi_a(k+1,k)\right\}^T B_a(k+1,0)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \Lambda(k,0) \\ \hline \Lambda^T(k,0) & \Theta(k,0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T \\ \hline \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T \end{array}\right] B_a(k+1,0)$$

$$= \left[\begin{array}{c} K_{r1}(k+1,0) \\ \hline K_{r2}(k+1,0) \end{array}\right] \qquad (\Delta.2)$$

όπου

$$K_{r1}(k+1,0) = \Big[P(k,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T + \Lambda(k,0)\ \cdot \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T\Big]\ B_a(k+1,0) \qquad (\Delta.3)$$

$$K_{r2}(k+1,0) = \Big[\Lambda^T(k,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T + \Theta(k,0)\ \cdot \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T\Big]\ B_a(k+1,0) \qquad (\Delta.4)$$

γ) Από την εξίσωση (2.104).

$$P_{ar}(k/k+1) = \Big[I_{n+p} - K_{ar}(k+1,0)H_a(k+1,k)\Phi_a(k+1,k)\Big]\ P_a(k,0)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Big[I_n - K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\Big] & -K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\} \\ \hline -K_{r2}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\} & \Big[I_p - K_{r2}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}\Big] \end{array}\right] \cdot$$

$$\left[\begin{array}{c|c} P(k,0) & \Lambda(k,0) \\ \hline \Lambda^T(k,0) & \Theta(k,0) \end{array}\right] \qquad (\Delta.5)$$

ή

$$P_{ar}(k/k+1) = \left[\begin{array}{c|c} P_{r1}(k/k+1) & P_{r3}(k/k+1) \\ \hline P_{r3}^{T}(k/k+1) & P_{r2}(k/k+1) \end{array}\right] \qquad (\Delta.6)$$

όπου

$$P_{r1}(k/k+1) = \left[I_n - K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\right]\ P(k,0)$$
$$-K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}\ \Lambda^{T}(k,0) \qquad (\Delta.7)$$

$$P_{r3}(k/k+1) = \left[I_n - K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\right]\ \Lambda(k,0)$$
$$-K_{r1}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}\ \Theta(k,0) \qquad (\Delta.8)$$

$$P_{r2}(k/k+1) = -K_{r2}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ \Lambda(k,0) \ +$$
$$\left[I_p - K_{r2}(k+1,0)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}\right]\ \Theta(k,0) \qquad (\Delta.9)$$

δ) Από την εξίσωση (2.94)

$$P_a(k+1,0) = P_{an}(k+1,k) + \Phi_{an}(k+1,k)P_{ar}(k/k+1)\Phi_{an}^{T}(k+1,k) \qquad (\Delta.10)$$

ή

$$\left[\begin{array}{c|c} P(k+1,0) & \Lambda(k+1,0) \\ \hline \Lambda^{T}(k+1,0) & \Theta(k,0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P_n(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & Q(k+1)-Q_n(k+1) \end{array}\right] +$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \Phi_n(k+1,k) & C_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P_{r1}(k/k+1) & P_{r3}(k/k+1) \\ \hline P_{r3}^{T}(k/k+1) & P_{r2}(k/k+1) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \Phi_n^{T}(k+1,k) & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \hline C_n^{T}(k+1,k) & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \qquad (\Delta.11)$$

Οπότε από την εξίσωση (Δ.11) προκύπτουν οι εξισώσεις (B.54), (B.55) και η εξίσωση

$$P(k+1,0) = P_n(k+1,k) + \left[\Phi_n(k+1,k)P_{r1}(k/k+1)+C_n(k+1,k)P_{r3}^T(k/k+1)\right] \cdot$$
$$\Phi_n^T(k+1,k) + \left[\Phi_n(k+1,k)P_{r3}(k/k+1)+C_n(k+1,k)P_{r2}(k/k+1)\right] \cdot$$
$$\cdot C_n^T(k+1,k) \qquad (\Delta.12)$$

Στη συνέχεια εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (B.54), (B.55) έχουμε ότι από τις εξισώσεις (Δ.1), (Δ.3), (Δ.4), (Δ.7), (Δ.8), (Δ.9), (Δ.12) προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις (2.129), (2.128), (2.132), (2.133), (2.134), (2.135), (2.120).

ε) Από την εξίσωση (2.103)

$$z_{ar}(k+1,0) = z(k+1) - \left\{H_a(k+1)\Phi_a(k+1,k)\right\} \hat{x}_a(k,0) =$$
$$= z(k+1) - \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\hat{x}(k,0) - \{H(k+1)\Gamma(k)\}\hat{\theta}(k,0) \qquad (\Delta.13)$$

στ) Από την εξίσωση (2.100)

$$\hat{x}_{ar}(0/k+1) = \hat{x}_a(k,0) + K_{ar}(k+1,0)z_{ar}(k+1,0)$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{x}(k,0) \\ \hline \hat{\theta}(k,0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{r1}(k+1,0) \\ \hline K_{r2}(k+1,0) \end{bmatrix} z_{ar}(k+1,0) =$$
$$= \begin{bmatrix} \hat{x}_{r1}(k/k+1) \\ \hline \hat{x}_{r2}(k/k+1) \end{bmatrix} \qquad (\Delta.14)$$

όπου

$$\hat{x}_{r1}(k/k+1) = \hat{x}(k,0) + K_{r1}(k+1,0)z_{ar}(k+1,0) \qquad (\Delta.15)$$

$$\hat{x}_{r2}(k/k+1) = \hat{\theta}(k,0) + K_{r2}(k+1,0)z_{ar}(k+1,0) \qquad (\Delta.16)$$

ζ) Από την εξίσωση (2.93)

$$\hat{x}_a(k+1,0) = \hat{x}_{an}(k+1,k) + \Phi_{an}(k+1,k)\hat{x}_{ar}(k/k+1) \qquad (\Delta.17)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1,0) \\ \hline \hat{\theta}(k+1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times 1} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} \Phi_n(k+1,k) & C_n(k+1,k) \\ \hline \mathbf{0}_{p\times n} & \mathbf{0}_{p\times p} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{r1}(k/k+1) \\ \hline \hat{x}_{r2}(k/k+1) \end{bmatrix} \tag{Δ.18}$$

Τελικά από την εξίσωση (Δ.18) προκύπτουν οι εξισώσεις (Β.49), (2.119) και επιπλέον οι εξισώσεις (2.130), (2.127), (2.131).

<u>Απόδειξη της παρατήρησης 4 του θεωρήματος 2.3</u>

Από την εξίσωση (2.129), εάν λάβουμε υπ'όψιν μας την εξίσωση (2.123) προκύπτει:

$$\begin{aligned} B(k+1,0) &= \Big[H(k+1)\Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1) + R(k+1) + \\ &\quad +H(k+1)\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k)H^T(k+1) + \\ &\quad H(k+1)\Gamma(k)Q_r(k)\Gamma^T(k)H^T(k+1)\Big]^{-1} = \\ &= \Big[H(k+1)\Big(\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \\ &\quad \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)\Big) + R(k+1)\Big]^{-1} \end{aligned} \tag{Δ.19}$$

Οπότε συγκρίνοντας τις εξισώσεις (Γ.13) και (Δ.19) προκύπτει το ζητούμενο.

<u>Απόδειξη της παρατήρησης 5 του θεωρήματος 2.3</u>

Γιά $Q_r(k)=0_{p\times p}$, $Q_n(k)=Q(k)$ ο Αλγόριθμος Γ προκύπτει από τον αλγόριθμο Δ1. Πράγματι θα έχουμε:

Εάν λάβουμε υπ'όψιν την παρατήρηση 4 του θεωρήματος 2.3, την παρατήρηση 5 του θεωρήματος 2.2 και ότι $Q_r(k)=0_{p\times p}$, ($Q_n(k) = Q(k)$) από τις εξισώσεις (2.132), (2.131), (2.134), (2.135), (2.128), (2.127), (2.133) προκύπτουν τα εξής:

$$K_{r2}(k+1,0) = \mathbf{0}_{p\times m} \tag{Δ.20}$$

$$\hat{x}_{r2}(k/k+1) = \mathbf{0}_{n\times 1} \tag{Δ.21}$$

$$P_{r3}(k/1+1) = \mathbf{0}_{n\times p} \tag{Δ.22}$$

$$P_{r2}(k/k+1) = \mathbf{0}_{p\times p} \tag{Δ.23}$$

$$K_{r1}(k+1,0) = K_r(k+1,0) \tag{Δ.24}$$

$$\hat{x}_{r1}(k/k+1) = \hat{x}_r(k/k+1) \tag{Δ.25}$$

$$P_{r1}(k/k+1) = P_r(k/k+1) \tag{Δ.26}$$

όπου οι ποσότητες $K_r(k+1,0)$, $\hat{x}_r(k/k+1)$, $P_r(k/k+1)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (2.101), (2.100), (2.104).

Επίσης για $Q_r(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$, $Q_n(k)=Q(k)$, από τις εξισώσεις (2.123), (2.122), (2.121), (2.124), (2.126), του Αλγόριθμου Δ1 καταλήγουμε στις εξισώσεις (2.97), (2.96), (2.95), (2.98), (2.99) του αλγόριθμου Γ.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι από τις εξισώσεις (2.119), (2.120) καταλήγουμε αντίστοιχα στις εξισώσεις (2.93), (2.94).

<u>Απόδειξη της παρατήρησης 6 του θεωρήματος 2.3</u>

Για $Q_n(k)=\mathbf{0}_{p\times p}$, $Q_r(k)=Q(k)$ από τις εξισώσεις (2.123), (2.122), (2.124), (2.125), (2.126), (2.121), (2.132), (2.134), (2.135) προκύπτουν τα εξής:

$$A(k+1) = R^{-1}(k+1) \tag{Δ.27}$$

$$K_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times m} \tag{Δ.28}$$

$$\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k) \tag{Δ.29}$$

$$C_n(k+1,k) = \Gamma(k) \tag{Δ.30}$$

$$P_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times n} \tag{Δ.31}$$

$$x_n(k+1,k) = \mathbf{0}_{n\times 1} \tag{Δ.32}$$

$$K_{r2}(k+1,0) = Q(k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T B(k+1,0) \tag{Δ.33}$$

$$P_{r3}(k/k+1) = -K_{r1}(k+1,0)H(k+1)\Gamma(k)Q(k) \tag{Δ.34}$$

$$P_{r2}(k/k+1) = \left[I_p - K_{r2}(k+1,0)H(k+1)\Gamma(k) \right] Q(k) \qquad (\Delta.35)$$

Στη συνέχεια εάν λάβουμε υπ'όψιν την παρατήρηση 4 του θεωρήματος 2.3, και τις εξισώσεις (Δ.29), (Δ.30), (Δ.32), (2.127), (2.128), (2.130), (Δ.33),(2.132) η εξίσωση (2.119) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1,0) &= \Phi(k+1,k)\hat{x}(k,0) + \Big\{ \Big[\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \\
&\quad + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \Big] H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) \Big\} \Big[z(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1,k) \\
&\quad \hat{x}(k,0) \Big] \\
&= \Phi(k+1,k)\hat{x}(k,0) + \Big\{ P(k+1/k)H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) \Big\} \tilde{z}(k+1,k) \\
&= \Phi(k+1,k)\hat{x}(k,0) + K(k+1)\tilde{z}(k+1/k) \qquad (\Delta.36)
\end{aligned}$$

όπου οι ποσότητες $P_{\tilde{z}}$ $(k+1/k,)$,$P(k+1/k)$,$\tilde{z}(k+1/k)$,$K(k+1)$ δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις (1.22), (1.21), (1.20), (1.19), οπότε είναι προφανές ότι καταλήξαμε στην εξίσωση (1.17).

Τέλος από την εξίσωση (2.120), εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (Δ.29), (Δ.30), (Δ.31), (Δ.33), (Δ.34), (Δ.35),(2.128), (2.133) και την παρατήρηση 4 του θεωρήματος 2.4 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
P(k+1,0) &= \Big[\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \Big] - \\
&\quad - \Big[\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \Big] \\
&\quad H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k)H(k+1)\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) \\
&\quad - \Big[\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \Big] \\
&\quad H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k)H(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) = \\
&= P(k+1/k) - \Big[P(k+1/k)H^T(k+1)P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) \Big] H(k+1) . \\
&\quad \Big[\Phi(k+1,k)P(k,0)\Phi^T(k+1,k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \Big] = \\
&= P(k+1/k) - K(k+1)H(k+1)P(k+1/k) \qquad (\Delta.37)
\end{aligned}$$

δηλαδή προκύπτει η εξίσωση (1.18).

Απόδειξη της παρατήρησης 9 του θεωρήματος 2.3

Η εξίσωση (2.119), εάν λάβουμε υπ'όψιν τις εξισώσεις (2.121), (2.127), (2.131), γράφεται ως εξής:

$$\hat{x}(k+1,0) = \Big\{\Phi_n(k+1,k) - \Big[\Phi_n(k+1,k)K_{r1}(k+1,0) + C_n(k+1,k) K_{r2}(k+1,0)\Big] H(k+1)\Phi(k+1,k)\Big\} \hat{x}(k,0) + \Big\{K_n(k+1,k) + \Big[\Phi_n(k+1,k)K_{r1}(k+1,0) + C_n(k+1,k) K_{r2}(k+1,0)\Big]\Big\} z(k+1) \qquad (\Delta.38)$$

οπότε από τις εξισώσεις (Β.113) και (Δ.38) προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ

Εάν συμβολίσουμε με: A, B, C γενικά μητρώα
S, T, U συμμετρικά μητρώα
w, y, z διανύσματα
(a, b) τις διαστάσεις των μητρώων a γραμμών b στηλών (στο διάνυσμα έχουμε b=1)

τότε θα έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ Ε.1 Απαιτούμενα ποσά αποθήκευσης (σε λέξεις μνήμης) ενός γενικού, ενός συμμετρικού μητρώου και ενός διανύσματος.

Ποσότητα	Ποσό αποθήκευσης (σε λέξεις μνήμης)
A(n,m)	nm
S(n,n)	$0.5n^2+0.5n$
w(n,1)	n

ΠΙΝΑΚΑΣ Ε.2 Ποσά βασικών λειτουργιών σε πράξεις μητρώων και διανυσμάτων.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ (Operation)	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ	ΠΟΛ/ΣΜΟΙ	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΔΙΑΙΡ.	Τ.ΡΙΖΕΣ
A(n,m)+B(n,m)	C(n,m)	—	nm	—	—
S(n,n)+T(n,n)	U(n,n)	—	$0.5(n^2+n)$	—	—
w(n,1)+y(n,1)	z(n,1)	—	n	—	—
A(n,m)×B(m,p)	C(n,p)	nmp	n(m-1)p	—	—
A(n,m)×B(m,n)	S(n,n)	0.5nm(n+1)	$0.5(n^2m+nm-n^2-n)$	—	—
A(n,m)×w(m,1)	z(n,1)	nm	nm-n	—	—
$S^{-1}(n,n)$	T(n,n)	$0.5(n^3+3n^2-2n)$	$0.5(n^3-n)$	2n-1	n

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α ΣΤ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

1. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Α

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

1.3 $Q_n(0)$

1.4 $Q_r(0)$

με $Q_n(0)+Q_r(0)=Q(0)$ (και σε κάθε επανάληψη k, $Q_n(k)$, $Q_r(k)$ με $Q_n(k)+Q_r(k)=Q(k)$)

2 Υπολογισμοί ανά επανάληψη

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $A(k+1) = \left[\{H(k+1)Q_1(k)\}^* H^T(k+1)+R(k+1)\right]^{-1}$

2.3 $K_n(k+1,k) = \{H(k+1)Q_1(k)\}^T A(k+1)$

2.4 $P_n(k+1,k) = Q_1(k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)Q_1(k)\}$

2.5 $C_n(k+1,k) = \Gamma(k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.6 $O_{n1}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.7 $O_{n2}(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A(k+1)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.8 $O_{n3}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.9 $S_0(k+1,k) = \left[Q_r^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}$

2.10 $K_1(k+1,k) = K_n(k+1,k)+ C_n(k+1,k)S_0(k+1,k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A(k+1)$

2.11 $L(k+1,k) = S_0(k+1,k)O_{n3}^T(k+1,k)$

2.12 $N(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) - O_{n3}(k+1,k)L(k+1,k)$

2.13 $\Phi_1(k+1,k) = \Phi(k+1,k) - K_1(k+1,k)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.14 $P_1(k+1,k) = P_n(k+1,k) + C_n(k+1,k)S_0(k+1,k)C_n^T(k+1,k)$

2.15 $D(k+1,k) = \left[\ \Phi(k+1,k) - \Gamma(k)L(k+1,k)\right]^T H^T(k+1)A(k+1)$

2.16 $M(k+1,k) = D(k+1,k)z(k+1)$

2.17 $\hat{x}_1(k+1,k) = K_1(k+1,k)z(k+1)$

2.18 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1}$

2.19 $x(k+1,0) = x\ (k+1,k) + \left(\Phi_1(k+1,k)S(k+1,0)\right)$
$\left[M(k+1,k) + P^{-1}(k,0)x(k,0)\right]$

2.20 $P(k+1,0) = P_1(k+1,k) + \left(\Phi_1(k+1,k)S(k+1,0)\right)\ \Phi_1^T(k+1,k)$

2. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Β

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

2. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

2.1 $A_0(k+1) = R^{-1}(k+1)$

2.2 $O_{n1}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_0(k+1)\{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.3 $O_{n2}(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T A_0(k+1)\{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.4 $O_{n3}(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A_0(k+1)\{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.5 $S_0(k+1,k) = \left[Q^{-1}(k) + O_{n2}(k+1,k)\right]^{-1}$

2.6 $L(k+1,k) = S_0(k+1,k)O_{n3}^T(k+1,k)$

2.7 $N(k+1,k) = O_{n1}(k+1,k) - O_{n3}(k+1,k)L(k+1,k)$

2.8 $\Phi_0(k+1,k) = \Phi(k+1,k) - \Gamma(k)L(k+1,k)$

2.9 $P_1(k+1,k) = \Gamma(k)S_0(k+1,k)\Gamma^T(k)$

2.10 $K_1(k+1,k) = P_1(k+1,k)\left(H^T(k+1)A(k+1)\right)$

2.11 $D(k+1,k) = \Phi_0^T(k+1,k)\left(H^T(k+1)A(k+1)\right)$

2.12 $M(k+1,k) = D(k+1,k)z(k+1)$

2.13 $\hat{x}_1(k+1,k) = K_1(k+1,k)z(k+1)$

2.14 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + N(k+1,k)\right]^{-1}$

2.15 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_1(k+1,k) + \left(\Phi_0(k+1,k)S(k+1,0)\right)$
$\left[M(k+1,k) + P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]$

2.16 $P(k+1,0) = P_1(k+1,k) + \left(\Phi_0(k+1,k)S(k+1,0)\right)\Phi_0^T(k+1,k)$

3. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

2. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $A_1(k+1) = \{H(k+1)Q_1(k)\}\, H^T(k+1)+R(k+1)$

2.3 $A(k+1) = A_1^{-1}(k+1)$

2.4 $K_n(k+1,k) = \{H(k+1)Q_1(k)\}^T A(k+1)$

2.5 $P_n(k+1,k) = Q_1(k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)Q_1(k)\}$

2.6 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.7 $C_0(k+1,0) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ P(k,0)$

2.8 $B(k+1,0) = \left[A_1(k+1)+C_0(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T\right]^{-1}$

2.9 $K_r(k+1,0) = C_0^T(k+1,0)B(k+1,0)$

2.10 $P_r(k/k+1) = P(k,0)-K_r(k+1,0)C_0(k+1,0)$

2.11 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1)$

2.12 $z_r(k+1,0) = z(k+1)-\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ \hat{x}(k,0)$

2.13 $\hat{x}_r(k/k+1) = \hat{x}(k,0)+K_r(k+1,0)z_r(k+1,0)$

2.14 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)\hat{x}_r(k/k+1)$

2.15 $P(k+1,0) = P_n(k+1,k)+\Phi_n(k+1,k)P_r(k/k+1)\Phi_n^T(k+1,k)$

4. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Δ1

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

1.3 $Q_n(0)$

1.4 $Q_r(0)$
με $Q_n(0)+Q_r(0) = Q(0)$ (και σε κάθε επανάληψη k, $Q_n(k)$, $Q_r(k)$, με $Q_n(k)+Q_r(k)=Q(k)$).

2. Υπολογισμοί ανά επανάληψη.

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q_n(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $A_1(k+1) = \{H(k+1)Q_1(k)\}\ H^T(k+1)+R(k+1)$

2.3 $A(k+1) = A_1^{-1}(k+1)$

2.4 $K_n(k+1,k) = \{H(k+1)Q_1(k)\}^T A(k+1)$

2.5 $P_n(k+1,k) = \Phi_1(k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)Q_1(k)\}$

2.6 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.7 $C_n(k+1,k) = \Gamma(k)-K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}$

2.8 $C_0(k+1,0) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ P(k,0)$

2.9 $D_0(k+1,k) = \{H(k+1)\Gamma(k)\}\ Q_r(k)$

2.10 $B(k+1,0) = \Big[A_1(k+1)+C_0(k+1,0)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T + D_0(k+1,k)\ \{H(k+1)\Gamma(k)\}^T\Big]^{-1}$

2.11 $K_{r1}(k+1,0) = C_0^T(k+1,0)B(k+1,0)$

2.12 $K_{r2}(k+1,0) = D_0^T(k+1,k)B(k+1,0)$

2.13 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1)$

2.14 $z_r(k+1,0) = z(k+1) - \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}\ \hat{x}(k,0)$

2.15 $\hat{x}_{r1}(k/k+1) = \hat{x}(k,0) + K_{r1}(k+1,0)\, z_r(k+1,0)$

2.16 $\hat{x}_{r2}(k/k+1) = K_{r2}(k+1,0)\, z_r(k+1,0)$

2.17 $\hat{x}(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k) + \Phi_n(k+1,k)\hat{x}_{r1}(k/k+1) +$

$C_n(k+1,k)\hat{x}_{r2}(k/k+1)$

2.18 $P_{r1}(k/k+1) = P(k,0) - K_{r1}(k+1,0)C_0(k+1,0)$

2.19 $P_{r2}(k/k+1) = Q_r^-(k) - K_{r2}(k+1,0)D_0(k+1,k)$

2.20 $P_{r3}(k/k+1) = -K_{r1}(k+1,0)D_0(k+1,k)$

2.21 $P(k+1,0) = P_n(k+1,k) + \Phi_n(k+1,k)P_{r1}(k/k+1)\Phi_n^T(k+1,k)$

$+ C_n(k+1,k)P_{r2}(k/k+1)C_n^T(k+1,k) +$

$\left\{\Phi_n(k+1,k)P_{r3}(k/k+1)C_n^T(k+1,k)\right\} +$

$\left\{\Phi_n(k+1,k)P_{r3}(k/k+1)C_n^T(k+1,k)\right\}^T$

5. ΦΙΛΤΡΟ KALMAN

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0/0) = P(0)$

2. Υπολογισμοί ανά επανάληψη

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $P(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P(k/k)\Phi^T(k+1,k) + Q_1(k)$

2.3 $P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k) = \left[\{H(k+1)P(k+1/k)\}H^T(k+1) + R(k+1)\right]^{-1}$

2.4 $K(k+1) = \{H(k+1)P(k+1/k)\}^T P_{\tilde{z}}^{-1}(k+1/k)$

2.5 $P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1)\ \{H(k+1)P(k+1/k)\}$

2.6 $\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1,k)\hat{x}(k/k)$

2.7 $\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1)\ [z(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1/k)]$

6. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΛΑΙΝΙΩΤΗ (ΓΑΔΛ).

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}_n(0/0) = \hat{x}_n(0)$

1.2 $\hat{x}_r(0/0) = \hat{x}_r(0)$

$\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

με $\hat{x}_n(0) + \hat{x}_r(0) = \hat{x}(0)$

1.3 $P_n(0/0) = P_n(0)$

1.4 $P_r(0/0) = P_r(0)$

$P(0/0) = P(0)$

$P_n(0) + P_r(0) = P(0)$

1.5 $\Phi_n(0,0) = I_n$

1.6 $M_n(0,0) = \mathbf{0}_{n\times 1}$

1.7 $O_n(0,0) = \mathbf{0}_{n\times n}$

2. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί.

2.1 $P_1 = P_r^{-1}(0)$

2.2 $\hat{x}_1 = P_1\hat{x}_r(0)$

3. Υπολογισμοί ανά επανάληψη.

3.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$

3.2 $P_n(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P_n(k/k)\Phi^T(k+1,k)+Q_1(k)$

3.3 $P_{z_n}^{-1}(k+1/k) = \left[\{H(k+1)P_n(k+1/k)\}\ H^T(k+1)+R(k+1)\right]^{-1}$

3.4 $K_n(k+1) = \{H(k+1)P_n(k+1/k)\}^T P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$

3.5 $P_n(k+1/k+1) = P_n(k+1/k)-K_n(k+1)\ \{H(k+1)P_n(k+1/k)\}$

3.6 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k)-K_n(k+1)\ (H(k+1)\Phi(k+1,k))$

3.7 $\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0)$

3.8 $\tilde{z}_n(k+1) = z(k+1) - (H(k+1)\Phi(k+1,k))\ \hat{x}_n(k/k)$

3.9 $\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_n(k/k) + K_n(k+1,k)\tilde{z}_n(k+1)$

3.10 $E_n(k+1,0) = \left\{(H(k+1)\Phi(k+1,k))\ \Phi_n(k+1,0)\right\}^T P_{z_n}^{-1}\ (k+1/k)$

3.11 $E_0(k+1,0) = E_n(k+1,0)\ \left\{(H(k+1)\Phi(k+1,k))\Phi_n(k+1,0)\right\}$

3.12 $O_n(k+1,0) = O_n(k,0) + E_0(k+1,0)$

3.13 $M_n(k+1,0) = M_n(k,0) + E_n(k+1,0)\tilde{z}_n(k+1)$

3.14 $P_r(0/k+1) = \left[O_n(k+1,0) + P_1\right]^{-1}$

3.15 $P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0)$

3.16 $\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\ \left[M_n(k+1,0) + \hat{x}_1\right]$

7. ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ ΑΝΑ ΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΛΑΙΝΙΩΤΗ (ΓΦΔΑΔΛ)

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}(0,0) = \hat{x}(0)$

1.2 $P(0,0) = P(0)$

1.2 Υπολογισμοί ανά επανάληψη

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $A(k+1) = \left[\{H(k+1)Q_1(k)\}^T H(k+1) + R(k+1)\right]^{-1}$

2.3 $K_n(k+1,k) = \{H(k+1)Q_1(k)\}^T A(k+1)$

2.4 $P_n(k+1,k) = Q_1(k) - K_n(k+1)\ \{H(k+1)Q_1(k)\}$

2.5 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k) - K_n(k+1,k)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.6 $D(k+1,k) = \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}^T A(k+1)$

2.7 $O_n(k+1,k) = D(k+1,k)\ \{H(k+1)\Phi(k+1,k)\}$

2.8 $M_n(k+1,k) = D(k+1,k)z(k+1)$

2.9 $\hat{x}_n(k+1,k) = K_n(k+1,k)z(k+1)$

2.10 $S(k+1,0) = \left[P^{-1}(k,0) + O_n(k+1,k)\right]^{-1}$

2.11 $x(k+1,0) = \hat{x}_n(k+1,k) + \left(\Phi_n(k+1,k)S(k+1,0)\right)\left[M(k+1,k) + P^{-1}(k,0)\hat{x}(k,0)\right]$

2.12 $P(k+1,0) = P_n(k+1,k) + \left(\Phi_n(k+1,k)S(k+1,0)\right)\Phi_n^T(k+1,k)$

8. ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΜΕΛΙΣΜΟΥ (ΑΑΔ)

1. Αρχικές συνθήκες

1.1 $\hat{x}_n(0/0) = \hat{x}_n(0)$

1.2 $\hat{x}_r(0/0) = \hat{x}_r(0)$

$\hat{x}(0/0) = \hat{x}(0)$

με $\hat{x}_n(0) + \hat{x}_r(0) = \hat{x}(0)$

1.3 $P_n(0/0) = P_n(0)$

1.4 $P_r(0/0) = P_r(0)$

$P(0/0) = P(0)$

με $P_n(0) + P_r(0) = P(0)$

1.5 $\Phi_n(0,0) = I_n$

2. Υπολογισμοί ανά επανάληψη.

2.1 $Q_1(k) = \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$

2.2 $P_n(k+1/k) = \Phi(k+1,k)P_n(k/k)\Phi^T(k+1,k)+Q_1(k)$

2.3 $P_{z_n}(k+1/k) = \{H(k+1)P_n(k+1/k)\}\, H^T(k+1)+R(k+1)$

2.4 $A_n(k+1/k) = P_{z_n}^{-1}(k+1/k)$

2.5 $K_n(k+1) = \{H(k+1)P_n(k+1/k)\}^T\, A_n(k+1/k)$

2.6 $P_n(k+1/k+1) = P_n(k+1/k)-K_n(k+1)\,\{H(k+1)P_n(k+1/k)\}$

2.7 $\Phi_n(k+1,k) = \Phi(k+1,k)-K_n(k+1)\,(H(k+1)\Phi(k+1,k))$

2.8 $\Phi_n(k+1,0) = \Phi_n(k+1,k)\Phi_n(k,0)$

2.9 $\tilde{z}_n(k+1) = z(k+1)-(H(k+1)\Phi(k+1,k))\,\hat{x}_n(k/k)$

2.10 $\hat{x}_n(k+1/k+1) = \Phi_n(k+1,k)\hat{x}_n(k/k)+K_n(k+1)\tilde{z}_n(k+1)$

2.11 $C(k+1) = (H(k+1)\Phi(k+1,k))\,\Phi_n(k+1,0)$

2.12 $P_z^{-1}(k+1/k) = \left[\{C(k+1)P_r(0/k)\}\, C^T(k+1,k)+P_{z_n}(k+1/k)\right]^{-1}$

2.13 $K_r(k+1) = \{C(k+1)P_r(0/k)\}^T P_z^{-1} (k+1/k)$

2.14 $P_r(0/k+1) = P_r(0/k) - K_r(k+1) \{C(k+1)P_r(0/k)\}$

2.15 $P(k+1/k+1) = P_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)P_r(0/k+1)\Phi_n^T(k+1,0)$

2.16 $z_r(k+1) = \tilde{z}_n(k+1) - C(k+1)\hat{x}_r(0/k)$

2.17 $\hat{x}_r(0/k+1) = \hat{x}_r(0/k) + K_r(k+1)z_r(k+1)$

2.18 $\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}_n(k+1/k+1) + \Phi_n(k+1,0)\hat{x}_r(0/k+1)$

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., Optimal Filtering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.

2. Andrisani, D., Ph.D. Thesis, "Multipartitioned Estimation Algorithms", State University of New York at Buffalo, December 1978.

3. Andrisani, D. and Gau, G.F., "Recursive Partitioning Estimation", Proc. of Melecon '83 (Athens, IEEE Press), 2, C4.04, 1984.

4. Burden, R.L., Faires, J.D. and Reynolds, A.C., Numerical Analysis (Prindle, Weber and Schmidt eds), Boston, Mass., 1978.

5. Cosmidis, E.T., Ph.D. Thesis, "Analysis of Algorithms for Discrete Stochastic Estimation", State University of New York at Buffalo 1980.

6. Cosmidis, E.T., "Comparison Study of the Kalman and the Lainiotis Filters", Proc. of Melecon '83 (Athens: IEEE Press), 2, C4.06, 1984.

7. Cromenco 68000 (system one), Fortran 77, Instruction manual, Cromenco Inc., Mountain View, CA, February 1983.

8. Dalquist, G. and Bjork, A. Numerical Methods (Translated by N.Anderson), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

9. Deutsch, R., Estimation Theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

10. Fortman, T. and Hitz. K., An Introduction to Linear Control Systems, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1977.

11. Gauss, K.G., Theory of Motion of Heavenly Bodies, Dover, New York, 1963.

12. Gelb, A., Editor, Applied Optimal Estimation, MIT press, Cambridge, Mass., 1974.

13. Gonvidaraj, K.S., and Lainiotis, D.G., "A Unifying Framework for Discrete Linear Estimation:Generalized Partitioned Algorithms", Int. J.Control, Vol.28, No.4, pp. 571-588, 1978.

14. Gura, J.A. and Bierman, A.B., "On Computational Efficieny of Linear Filtering Algorithms", Automatica 7, pp. 299-314, 1971.

15. Ho, Y.C., "On the Stochastic Approximation Method and Optimal Filtering Theory", J. of Math. Anal. Appl., Vol.6, pp. 152-154, 1963.

16. Ho, Y.C. and Leè, R.C.K.,"A Bayessian Approach to problems in Stochastic Estimation and Control", IEEE Trans. on Automatic Control Vol.9, pp. 333-339, 1964.

17. Kailath, T., "An Innovation Approach to Least Squares Estimation, Part I; Linear Filtering with Additive White Noise" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.13, pp. 646-655, December 1968.

18. Kailath, T., Lectures on Linear Least-Squares Estimation, Springer-Verlag, Wien-New York, CISM, Udine, 1976.

19. Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", J.Basic. Eng., Vol.82, pp. 34-45, March 1960.

20. Kalman, R.E., and Bucy, R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., Vol.83, pp. 95-107, December 1961.

21. Kaminski, P.G., Bryson, A.E. and Schmidt, S.F., "Discrete Square Root Filtering: A Survey of Current Techniques" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 727-735, December 1971.

22. Lainiotis, D.G., "Optimal Adaptive Estimation: Structure and Parameter Adaptation", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No.2, pp. 160-170, April 1971.

23. Lainiotis, D.G., "Optimal Nonlinear Estimation" Int. J. Control, Vol.14, No.6, pp. 1137-1148, December 1971.

24. Lainiotis, D.G., "Optimal Linear Smoothing: Countinous Data Case", Int. J. Control, Vol.17, No.5, pp. 921-930, May 1973.

25. Lainiotis, D.G., "Partitioned Estimation Algorithms I: Nonlinear Estimation", J. Information Sci., 7, No.3, pp. 203-255. November 1974.

26. Lainiotis, D.G., "Partitioned Estimation Algorithms, II: Linear Estimation", J. Information Sci., 7, No.3, pp. 317-340, July 1974.

27. Lainiotis, D.G., (Editor) Estimation Theory, American Elsevier, New York, 1974.

28. Lainiotis, D.G., "Estimation: A Brief Survey", J. Information Sci., 7, pp. 191-202, 1974.

29. Lainiotis, D.G., "Partitioned Linear Estimation Algorithms: Discrete Case", IEEE. Trans. on Automatic Control, Vol. AC-20, No.3, pp. 255-257, April 1975.

30. Lainiotis, D.G., "Discrete Riccati Equation Solutions: Partitioned Algorithms", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-20, No.4, pp. 555-556, August 1975.

31. Lainiotis, D.G., "Fast Riccati Equation Solutions:Partitioned Algorithms", J. Computer and Electrical Eng. 2, No.6, November 1975.

32. Lainiotis, D.G., "Partitioned Riccati Algorithms" Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, New York, December 1975.

33. Lainiotis, D.G.,"Generalized Chandrasekhar Algorithms: Time Varying Models" Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, New York, December 1975.

34. Lainiotis, D.G., "A Unifying Framework for Linear Estimation:Generalized Partitioned Algorithms" J. Information Sci., No.10, pp. 243-278, June 1976.

35. Lainiotis, D.G., "Partitioning: A Unifying Framework for Adaptive Systems, I: Estimation" Proc. IEEE 64, No.8,

pp. 1126-1143, August 1976.

36. Lainiotis, D.G., "Partitioning: A Unifying Framework for Adaptive Systems II: Control", Proc. IEEE 64, No.8, pp. 1182-1198, August 1976.

37. Lainiotis, D.G., "Partitioned Riccati Solutions and Integration-Free Doubling Algorithms", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No.5, pp. 677-688, October 1976.

38. Lainiotis, D.G., "Generalized Chandrasekhar Algorithms: Time Varying Models", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-21, No.5, pp. 728-732 October 1976.

39. Lainiotis, D.G., "Partitioning: The Multi-model Framework for Estimation and Control I: Estimation", In Proc. of International Symposium on Systems Optimization and Analysis, Rocquencourt, France, Dec. 11-13, 1978 (A. Bensoussan and J.L. Lions, Editors), Springer-Verlag, Berlin (Publishers), pp. 252-289, 1979.

40. Lainiotis, D.G, "Partitioning Filters", J. Information Sci., 17, pp. 177-193, 1979.

41. Lainiotis, D.G., and Andrisani, D., "Multipartitioning Linear Estimation Algorithms: Countinous Systems" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, No.6, pp. 937-944, December 1979.

42. Lainiotis, D.G., and Andrisani, D., "Multipartitioning Linear Estimation Algorithms: Discrete Time Systems" Identification and Parameter Estimation, G. Bekey and S. Saridis, Editors, New York, Pergamon Press., 1983.

43. Lainiotis, D.G., and Govindaraj, K.S., "A Unifying Approach to Linear Estimation via the Partitioned Algorithms, I: Continous Models" Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, New York, December 1975.

44. Lainiotis, D.G., and Govindaraj, K.S., "A Unifying Approach to Linear Estimation via the Partitioned Algorithms, II: Disctere Models", Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, New York, December 1975.

45. Lainiotis, D.G., and Gonvidaraj, K.S., "Discrete Riccati-Equation Solutions: Generalized Partitioned Algorithms", J. Information Sci., Vo.15, No.3, pp. 169-185, November 1978.

46. Lewis, T.O., and Odell, P.L., Estimation in Linear Models, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

47. Mendel, J.M., "Computational Requirements for a Discrete Kalman Filter" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol AC-16, No.6, pp. 748-758, December 1971.

48. Meditch, J., Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, Mc Graw Hill, New York, 1969.

49. Rauch, H.E., Tung, F. and Striebel, C.T., "Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems" AIAA. J., Vol.3, No.8, pp. 1445-1450, August 1965.

50. Sage, A. and Melsa, J. Estimation Theory with Applications to Communications and Control, Mc Graw Hill, New York, 1971.

51. Schmidt, S.F., "Computational Techniques in Kalman Filtering" in Theory and Applications of Kalman Filtering, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDograph 139, pp. 65-87, February 1970.

52. Sorenson, H.W., Parameter Estimation, Principles and Problems, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1980.

53. Sorenson, H.W., and Stubberud, A.R., "Linear Estimation Theory" in Theory and Applications of Kalman Filtering, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDograph 139, pp. 3-42, February 1970.

SUMMARY

This thesis is dealing with linear estimation partitioning algorithms, for discrete time systems.

Four new recursive per-sample partitioning estimation algorithms are initialy presented, and the relative merits, with respect to their computational requirements are examined against three other partitioning algorithms (Lainiotis Generalized Partitioning Algorithm, Recursive Partitioning Algorithm of Andrisani, Gau and the Lainiotis Per-Sample Partitioning Filter) and the Kalman Filter. This comparative study is considered for both time invariant and time varying systems.

Finally the best of these algorithms with respect to computer time and storage requirements are applied to the multisensor estimation problem.