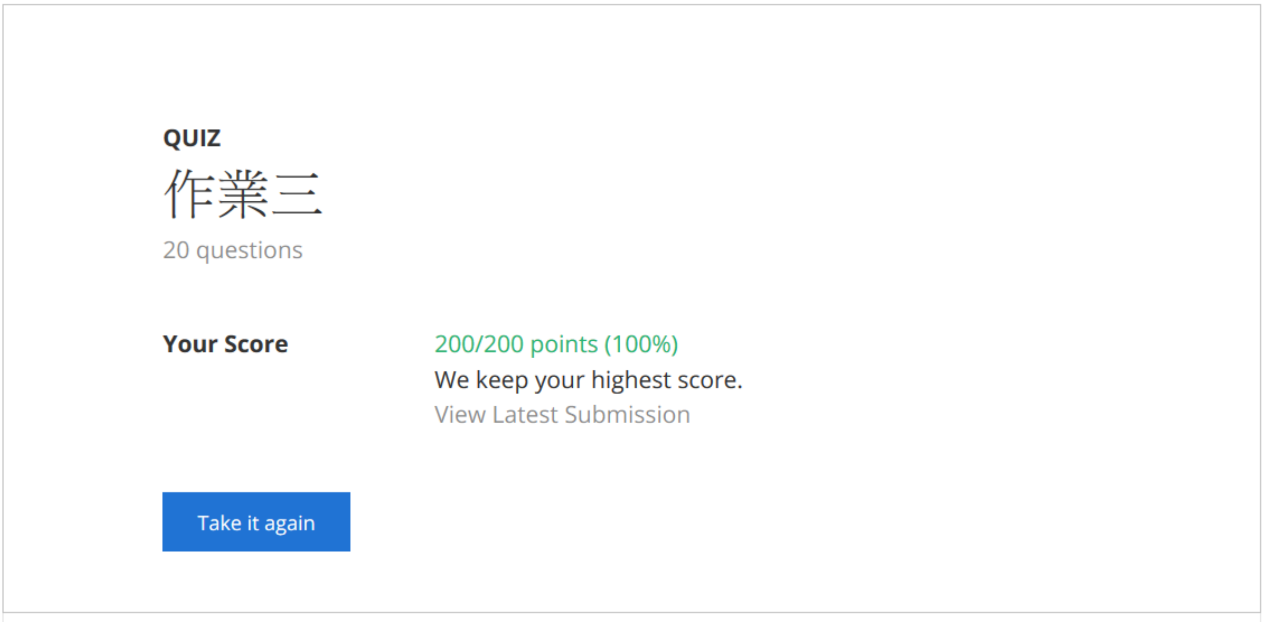
ML Foundation: HW3

b04902053 鄭淵仁

January 2, 2018

1



2

Claim 1. $H^2 = H$

Proof.

$$\begin{aligned} H^2 &= (X(X^TX)^{-1}X^T)^2 \\ &= (X(X^TX)^{-1}X^T)(X(X^TX)^{-1}X^T) \\ &= X(X^TX)^{-1}[(X^TX)(X^TX)^{-1}]X^T \\ &= X(X^TX)^{-1}X^T \\ &= H \end{aligned}$$

□

With the claim above, we can prove that:

Proof.

$$\begin{aligned}(I-H)^2 &= I^2 - 2IH + H^2\\ &= I - 2H + H\\ &= I - H\end{aligned}$$

□

3

Proof. SGD with the error function given in the question:

$$w_{t+1} \leftarrow w_t + \eta \cdot max(0, -yw_t^T x)(y_n x_n)$$

normal PLA:

$$w_{t+1} \leftarrow w_t + [\![y_n \neq sign(w_t^T x_n)]\!] (y_n x_n)$$

Case 1: $y = sign(w^T x)$

$$\begin{aligned}-yw^T x &< 0\\ max(0, -yw^T x) &= 0\\ w_{t+1} &\leftarrow w_t + 0\end{aligned}$$

w in SGD is not updated, which is the same as PLA.

Case 2: $y = -sign(w^T x)$

$$\begin{aligned}-yw^T x &> 0\\ max(0, -yw^T x) &= -yw^T x\\ w_{t+1} &\leftarrow w_t + \eta \cdot (-yw_t^T x)(y_n x_n)\end{aligned}$$

w in SGD is updated by $-yw^T x$. Therefore if $\eta = 1$ and $w_t^T x$ is large enough, this is also the same as PLA.

Therefore, SGD with the $err(w)$ given results in PLA. □

4

Proof.

$$\hat{E}_2(\Delta u, \Delta v) = E(u,v) + \nabla E(u,v) \cdot (\Delta u, \Delta v) + \frac{1}{2}(\Delta u, \Delta v)^T \nabla^2 E(u,v)(\Delta u, \Delta v)$$

Set the partial differences of $\hat{E}_2(\Delta u, \Delta v)$ be 0, we have :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \hat{E}_2(\Delta u, \Delta v)}{\partial \Delta u} = \dfrac{\partial E}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\left(2\dfrac{\partial^2 E}{\partial u^2}\Delta u + 2\dfrac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\Delta v\right) \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \dfrac{\partial E}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial u^2}\Delta u + \dfrac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\Delta v \\ 0 = \dfrac{\partial \hat{E}_2(\Delta u, \Delta v)}{\partial \Delta v} = \dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2}\Delta v + \dfrac{\partial^2 E}{\partial v \partial u}\Delta u \end{cases}$$

Simplify the equations :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial E}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial u^2}\Delta u + \dfrac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}\Delta v \\ 0 = \dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2}\Delta v + \dfrac{\partial^2 E}{\partial v \partial u}\Delta u \end{cases}$$

Now combine the two equations to one equation by vector (u, v) :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla E(u,v) + \nabla^2 E(u,v)\cdot(\Delta u, \Delta v) \\ -\nabla^2 E(u,v)\cdot(\Delta u,\Delta v) &= \nabla E(u,v) \\ (\Delta u, \Delta v) &= -\big(\nabla^2 E(u,v)\big)^{-1}\nabla E(u,v) \end{aligned}$$

□

5

$$\max_h \prod_{n=1}^{N} h_y(x_n) = \max_w \prod_{n=1}^{N} \frac{\exp\big(w_{y_n}^T x_n\big)}{\sum_{k=1}^{K}\exp(w_k^T x_n)}$$

Take natural log on it :

$$\begin{aligned} &\max_w \ln \prod_{n=1}^{N} \frac{\exp\big(w_{y_n}^T x_n\big)}{\sum_{k=1}^{K}\exp(w_k^T x_n)} \\ &= \max_w \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\exp\big(w_{y_n}^T x_n\big)}{\sum_{k=1}^{K}\exp(w_k^T x_n)} \\ &= \max_w \sum_{n=1}^{N}\left(\ln\big(\exp\big(w_{y_n}^T x_n\big)\big) - \ln\sum_{k=1}^{K}\exp\big(w_k^T x_n\big)\right) \\ &= \min_w \sum_{n=1}^{N}\left(\ln\sum_{k=1}^{K}\exp\big(w_k^T x_n\big) - w_{y_n}^T x_n\right) \end{aligned}$$

Therefore the E_{in} is :

$$E_{in} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\sum_{k=1}^{K}\exp\big(w_k^T x_n\big) - w_{y_n}^T x_n\right)$$

6

First compute :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\sum_{k=1}^{K}\exp\big(w_k^T x_n\big)\right)\right)}{\partial w_i} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\exp\big(w_i^T x_n\big)}{\sum_{k=1}^{K}\exp(w_k^T x_n)} x_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(h_i(x_n)x_n\right) \end{aligned}$$

Therefore the answer is :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{in}}{\partial w_i} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\sum_{k=1}^{K}\exp\big(w_k^T x_n\big) - w_{y_n}^T x_n\right)\right)}{\partial w_i} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left((h_i(x_n)x_n) - [[y_n = i]]x_n\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\left((h_i(x_n)) - [[y_n = i]]\right)x_n\right) \end{aligned}$$

7

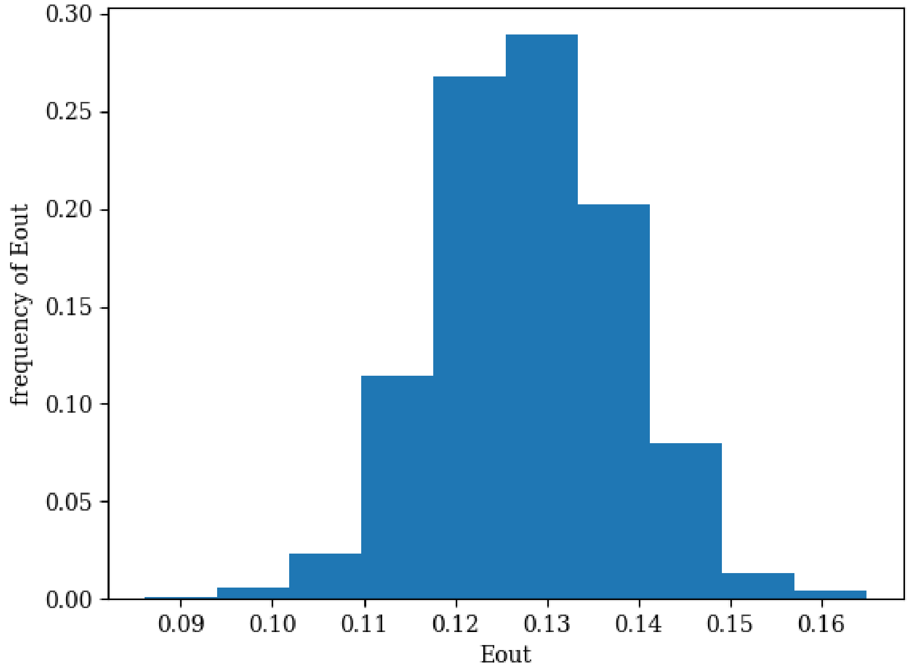
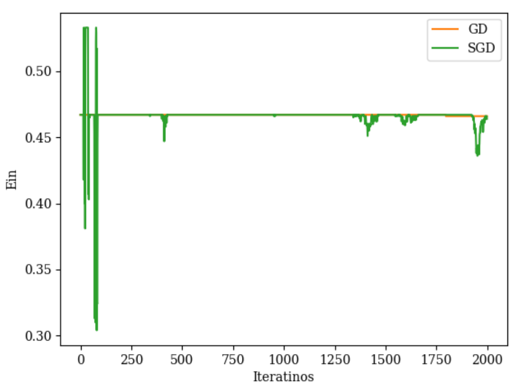


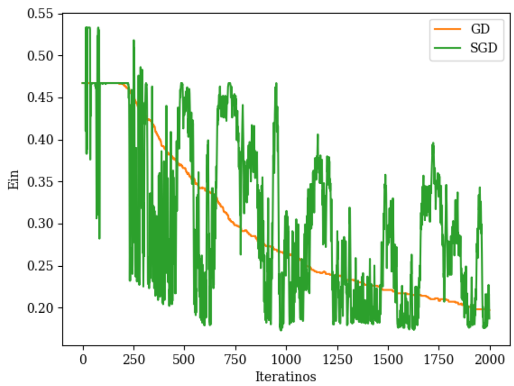
Figure 1: Histogram of E_{out}

Figure 1 shows the histogram of E_{out}.

8



(a) $lr = 0.001$



(b) $lr = 0.01$

Figure 2: Comparison between GD and SGD in E_{in}.

從上面兩張圖中，我發現有以下三點現象：

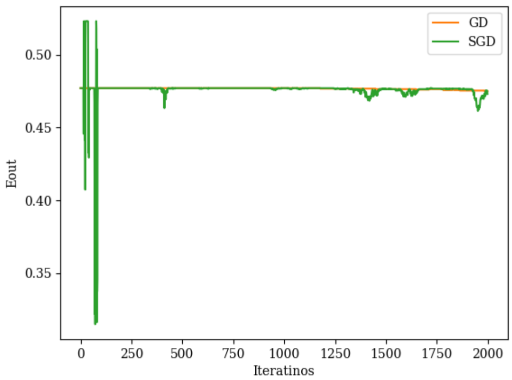
1. (GD 和 SGD 的差異) 我發現 GD 的 E_{in} 很快就會穩定不變，或是穩定下降，而不會上下亂跳；相較之下，SGD 的 E_{in} 則是很容易上下浮動。
   我想這是因為 SGD 一次只會取一筆資料來計算 gradient ，如果這一筆資料有 noise 的

話，算出來的 gradient 很容易會被這個 noise 影響；相較之下，GD 一次會用所有資料來計算 gradient ，所以算出來的結果一定會讓所有 training data 的 E_{in} 變小或幾乎不變。

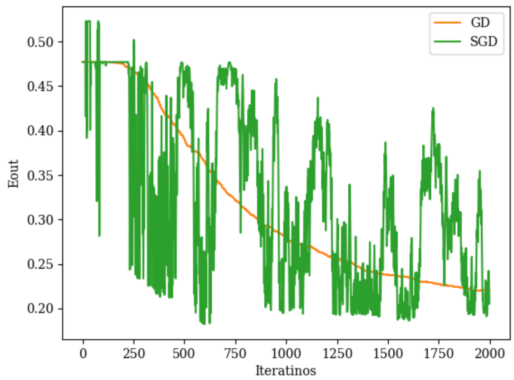
2. ($lr = 0.001$ 和 $lr = 0.01$ 的差異) 我發現無論是 GD 或 SGD ，$lr = 0.001$ 的時候，E_{in} 除了一開始上下亂跳以外，接下來就幾乎固定在 0.46 左右了；而 $lr = 0.01$ 的時候，E_{in} 會一直下降到 0.21 。
   我想這是因為 0.001 的 learning rate 太小了，下降的速度太慢，甚至很容易卡在局部極值出不去；而 0.01 的 learning rate 則是比較洽當的值，所以 E_{in} 才能一直下降。

3. 我發現到最後 GD 和 SGD 收斂到很接近的值。
   我想這是因為以期望值而言，SGD 算出來的 gradient 和 GD 的 gradient 會是一樣的，但是 SGD 會有 noise ，所以一開始 GD 和 SGD 的結果會差很多。但是夠多的 iteration 之後，SGD 的 E_{in} 會因為跑過所有的點很多次，而且有相同的 learning rate，所以有比較高的機率可以到相同的極值。

9



(a) $lr = 0.001$



(b) $lr = 0.01$

Figure 3: Comparison between GD and SGD in E_{out}.

從上面兩張圖中，我發現有以下 5 點現象：

1. E_{out} 的結果和 E_{in} 的結果很像。
   我想這是因為 E_{out} 和 E_{in} 的 noise 沒有太多，而且取的資料量又都相對夠多，所以 E_{out} 的結果才會和 E_{in} 很像。

2. (GD 和 SGD 的差異) 我發現 GD 的 E_{in} 很快就會穩定不變，或是穩定下降，而不會上下亂跳；相較之下，SGD 的 E_{in} 則是很容易上下浮動。
   我想這個原因跟 E_{in} 的這個現象的原因是有關係的：因為 SGD 一次只會取一筆資料來計算 gradient ，如果這一筆資料有 noise 的話，算出來的 gradient 很容易會被這個 noise 影響，所以 E_{out} 的值也會被影響；相較之下，GD 一次會用所有資料來計算 gradient ，所以算出來的結果比較穩定，不會只受單一資料的 noise 影響，所以 E_{out} 比較不會上下大幅變動。

3. ($lr = 0.001$ 和 $lr = 0.01$ 的差異) 我發現無論是 GD 或 SGD ，$lr = 0.001$ 的時候，E_{in} 除了一開始上下亂跳以外，接下來就幾乎固定在 0.47 左右了；而 $lr = 0.01$ 的時候，E_{in} 會一直下降到 0.22 。
   我想這個原因跟 E_{in} 的這個現象的原因是一樣的：因為 0.001 的 learning rate 太小了，下降的速度太慢，甚至很容易卡在局部極值出不去；而 0.01 的 learning rate 則是比較洽當的值，所以 E_{out} 才能一直下降。

4. 我發現到最後 GD 和 SGD 收斂到很接近的值。
   我想這個原因跟 E_{in} 的這個現象的原因是一樣的：因為以期望值而言，SGD 算出來的 gradient 和 GD 的 gradient 會是一樣的，但是 SGD 會有 noise ，所以一開始 GD 和 SGD 的結果會差很多。但是夠多的 iteration 之後，SGD 的 E_{in} 會因為跑過所有的點很多次，而且有相同的 learning rate，所以有比較高的機率可以到相同的極值。

5. 另外，從上一現象可以發現：在這次的 data 裡面，其實可以只使用速度較快、運算資源不用太多的 SGD 來做 training ，也可以得到和 GD 相近的效果。
   而如果給定相同的時間用 GD 和 SGD 來做的話，SGD 可能可以比 GD 更早下降到極值，或是 SGD 可能會有比 GD 更好的效果。