



第三讲 宏观电磁场理论基础

宏观电磁场理论基础 (第二章)



主要内容

- 电磁场的实验定律
 - 麦克斯韦方程组
 - 介质的电磁特性
 - 电磁场的边界条件
-



§ 1 电荷与电流

1. 电荷与电流

■ 电荷：自然界存在正、负两种电荷

点电荷： Q 或 q

面电荷： $\rho_s(M)$

体电荷： $\rho(x, y, z)$

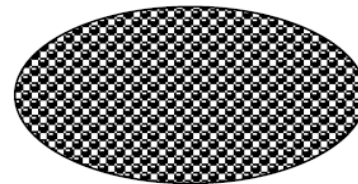
线电荷： $\rho_l(M)$



点电荷



面电荷



体电荷



线电荷



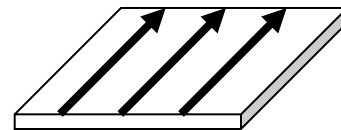
■ 电流：电荷运动形成电流

电荷运动 $q \bullet \xrightarrow{v}$

电流密度矢量 $J = q v$

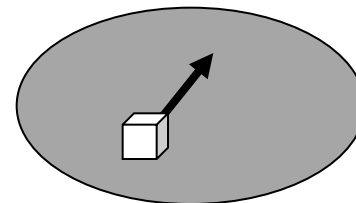
面电流密度： $J_s(M)$

面电流



体电流密度： $J(x, y, z)$

体电流



线电流密度： $J_l(M)$

线电流





2. 电荷守恒定律

大量实验表明：
孤立系统的电荷总量
保持不变。在任何时
刻，系统中正负电荷
的代数和保持不变，
称为电荷守恒定律。





电荷守恒定律意义:

- 孤立系统中产生或湮没某种符号的电荷，必有等量异号的电荷伴随产生或湮没.
- 孤立系统总电荷量增加或减小，必有等量电荷进入或离开该系统.



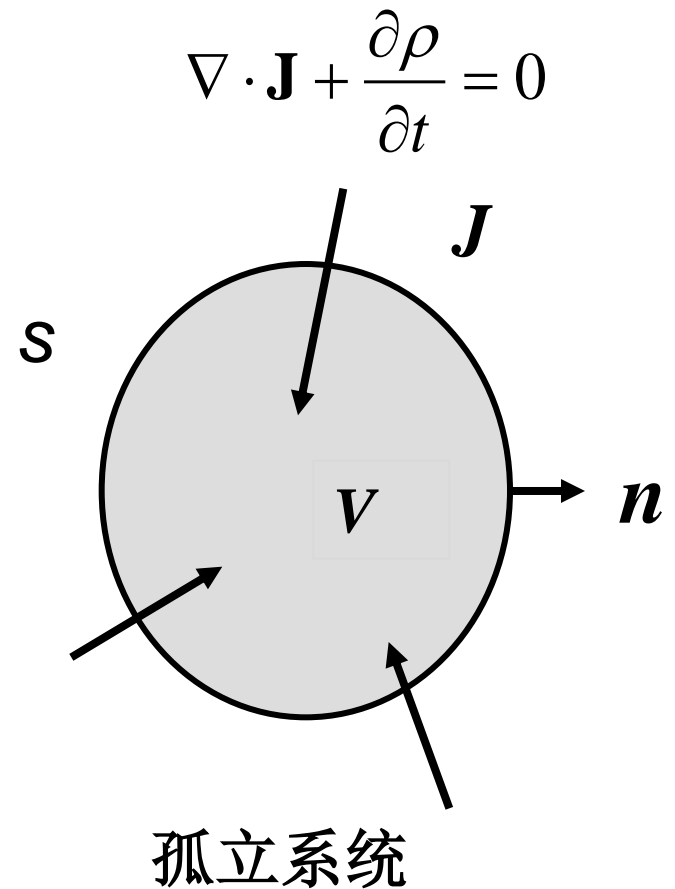
2. 电荷守恒定律

单位时间内通过孤立系统
边界流入的电荷量为：

$$\Delta q = -\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

该电荷量等于孤立系统内
单位时间内电荷的增量：

$$\Delta q = -\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

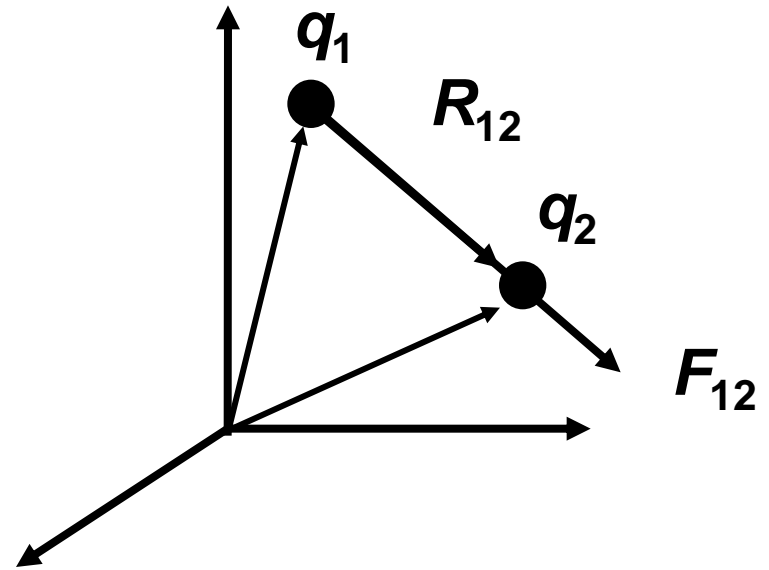




§ 2 库仑定律与电场

1. 库仑定律(1875)

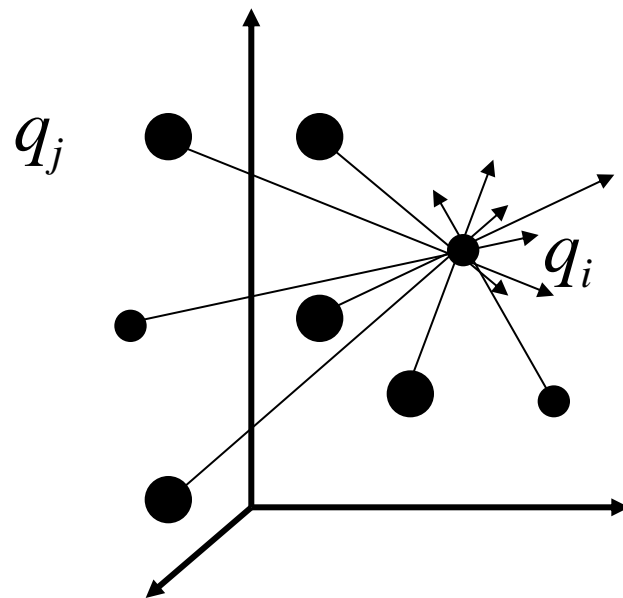
真空中两静止点电荷 q_1 和 q_2 之间作用力的大小与两电荷的电荷量成正比，与两电荷距离的平方成反比；方向沿 q_1 和 q_2 连线方向，同性电荷相排斥，异性电荷相吸引



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$$



实验证明：
真空中多个点电荷构成的电荷体系，两两间的作用力，不受其它电荷存在的影响。



$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j \mathbf{R}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}^3}$$



$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j \mathbf{R}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}^3} = \frac{q_i q_1 \mathbf{R}_{i1}}{4\pi\epsilon_0 R_{i1}^3} + \frac{q_i q_2 \mathbf{R}_{i2}}{4\pi\epsilon_0 R_{i2}^3} + \dots + \frac{q_i q_n \mathbf{R}_{in}}{4\pi\epsilon_0 R_{in}^3}$$

多个电荷体系中电荷 q_i 受到的作用力是系统中除 q_i 以外的电荷与该电荷单独存在时作用力之矢量代数和，满足线性叠加原理。

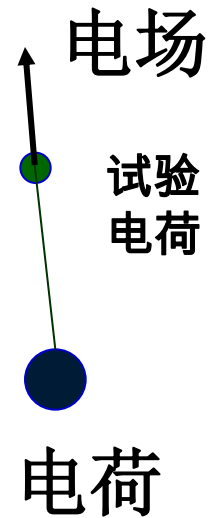


2. 电场与电场强度

■ 电场

实验证明：任何电荷在其所处的空间中激发出对置于其中的电荷有作用力的特殊物质，称为电场。

现代科学证明：电荷之间的作用力通过电场传递

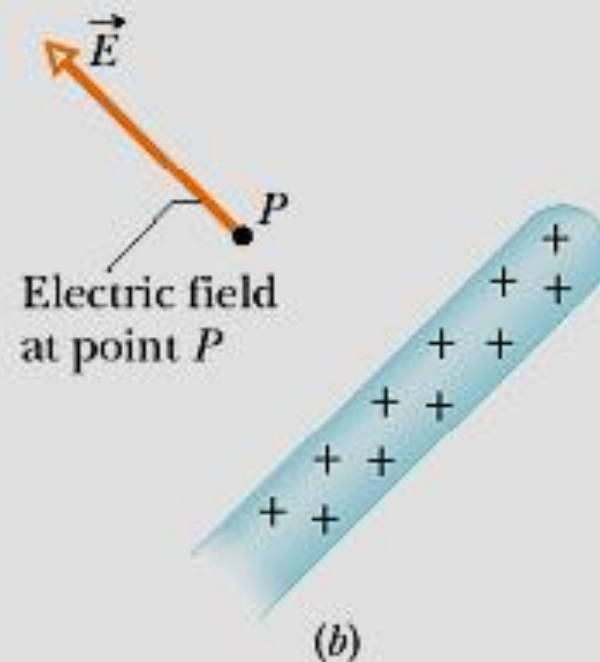
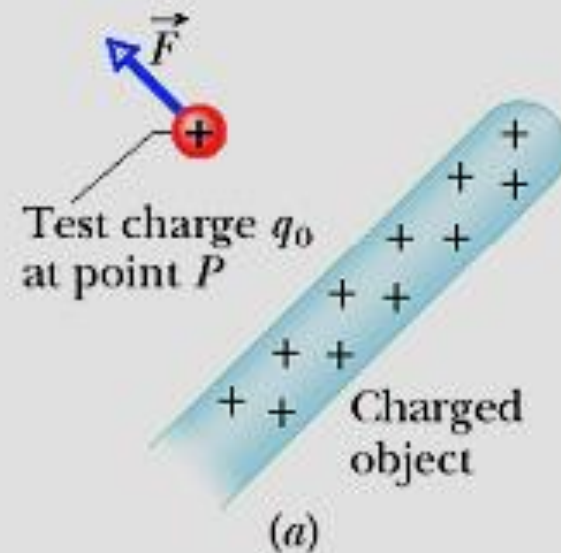




■ 电场强度

描述空间电场强弱（大小和方向）的物理量，定义为空间某点单位点电荷（称**试验电荷**）受到的作用力

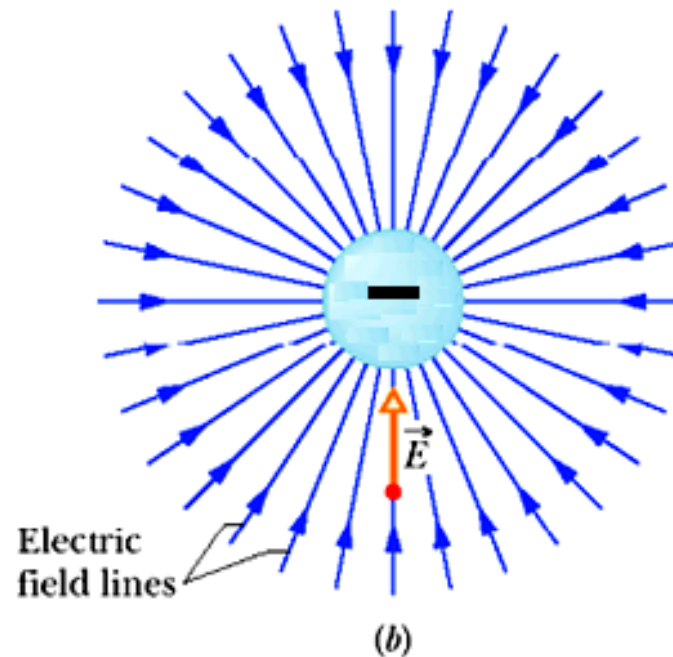
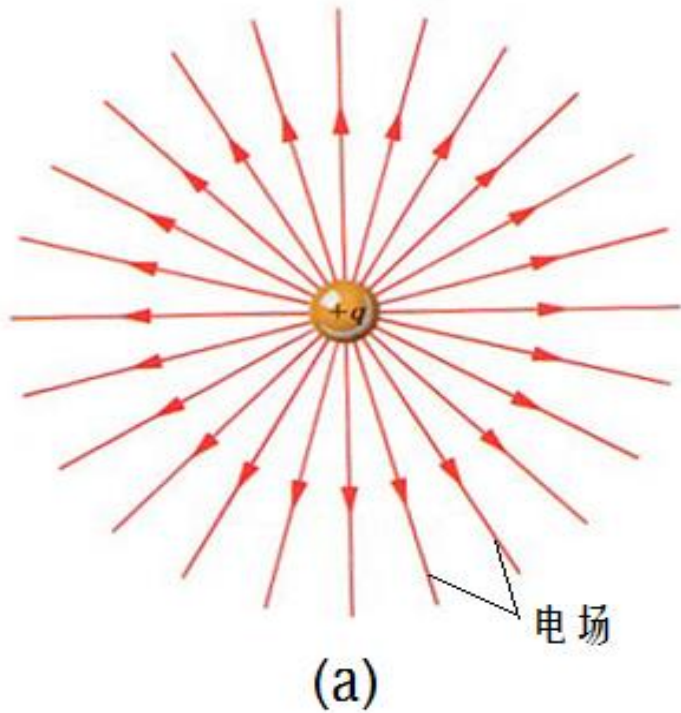
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{F}}{q_0} \right]_{\mathbf{r}}$$





$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q \left[\hat{e}_x (x - x') + \hat{e}_y (y - y') + \hat{e}_z (z - z') \right]}{4\pi\epsilon_0 \left[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right]^3}$$

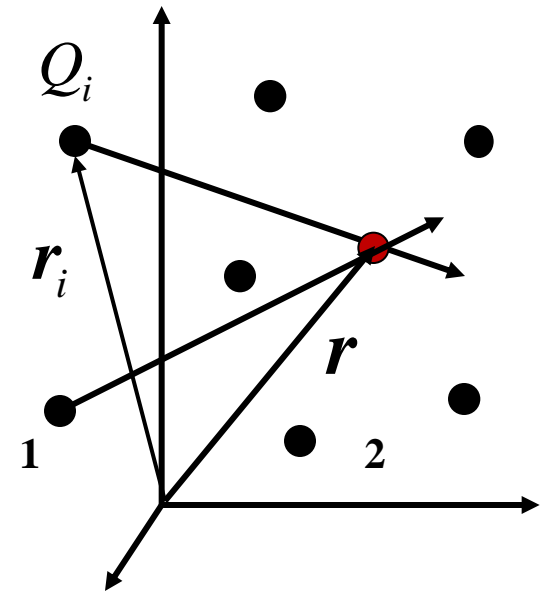
点电荷 q 激发的电场





多电荷体激发的电场为电荷体各电荷单独激发
电场的叠加，静电场满足线性叠加原理

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i [\hat{e}_x(x - x_i) + \hat{e}_y(y - y_i) + \hat{e}_z(z - z_i)]}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$





空间电荷连续分布，密度为 $\rho(\mathbf{r})$ 。
体电荷在空间 \mathbf{r} 点处产生电场为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}'_i) \Delta V_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \\ &= \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} dV \end{aligned}$$

The diagram shows a 3D coordinate system with a grid. A shaded sphere represents a volume of charge. A small black square within the sphere represents a volume element ΔV_i at position $\mathbf{r}'(x', y', z')$. A vector $\mathbf{r}(x, y, z)$ points from the origin to a point in space. A vector \mathbf{R} points from the volume element to the point in space. The relationship $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ is indicated. A blue oval highlights the term $\frac{\rho(\mathbf{r}'_i) \Delta V_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}$ in the equation, with an arrow pointing from this oval to the volume element in the diagram.

小体积元中的电荷产生的电场



3. 静电场的性质

性质1 静电场为有散矢量场，电荷为其通量源

$$\text{微分表达: } \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{积分表达: } \oiint_s \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

静电场的高斯定理



$$\text{【例】 } \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \iiint_V \frac{\rho(x', y', z') \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} dx' dy' dz'$$

$$\mathbf{R} = \hat{x}(x - x') + \hat{y}(y - y') + \hat{z}(z - z')$$

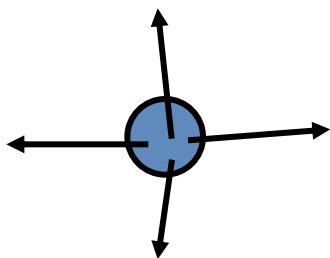
$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\hat{x}(x - x') + \hat{y}(y - y') + \hat{z}(z - z')}{\left[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right]^{3/2}} = - \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dx' dy' dz'$$

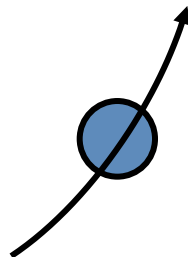
$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$



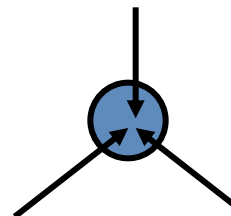
静电场高斯定理表明：



$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) > 0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) < 0$$

静电场力线发源于正电荷，终止于负电荷；
没有电荷的空间中电场力线是连续



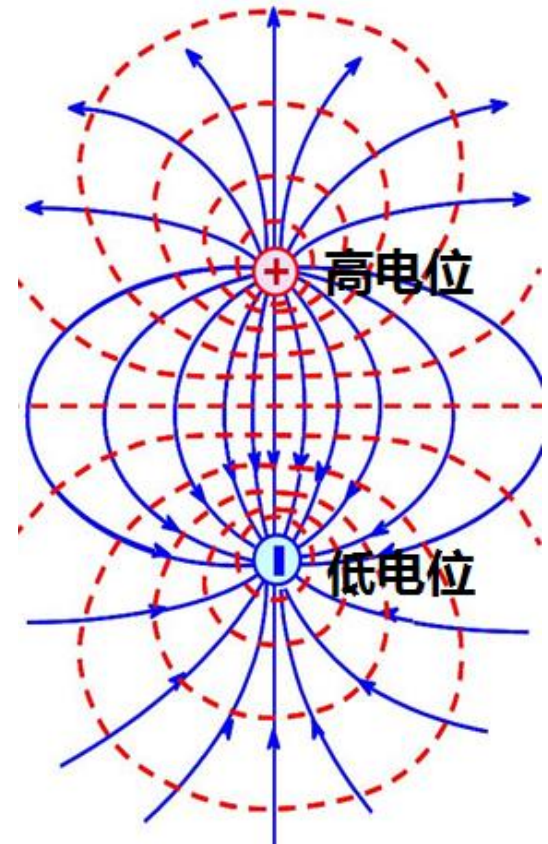
性质2 静电场为无旋矢量场

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV = 0$$

故可表示为标量场的梯度，即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad \text{电位或电势函数}$$

习惯上将电力线指向电位降低方向





性质3 静电场对电荷有作用力并具有能量

静电场对电荷有作用力，称为电场力

正电荷：电荷受力的方向为电场方向

负电荷：电荷受力的方向与电场反向

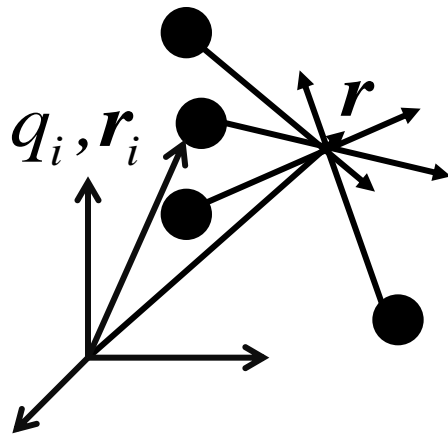


电场力作用：正电荷由高电位移向低电位；
负电荷由低电位移向高电位，电场力做正功



性质4 静电场满足线性叠加原理

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left[\frac{q_1 \mathbf{R}_1}{R_1^3} + \frac{q_2 \mathbf{R}_2}{R_2^3} + \cdots + \frac{q_i \mathbf{R}_i}{R_i^3} + \cdots \right]$$

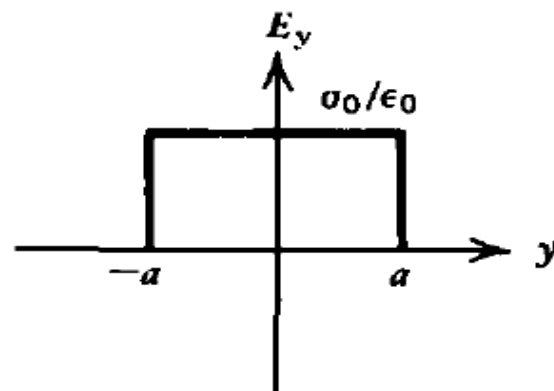
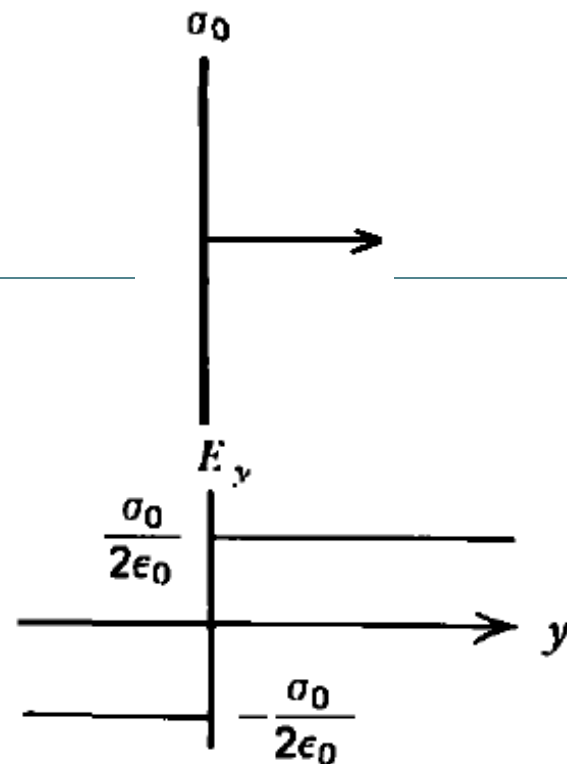
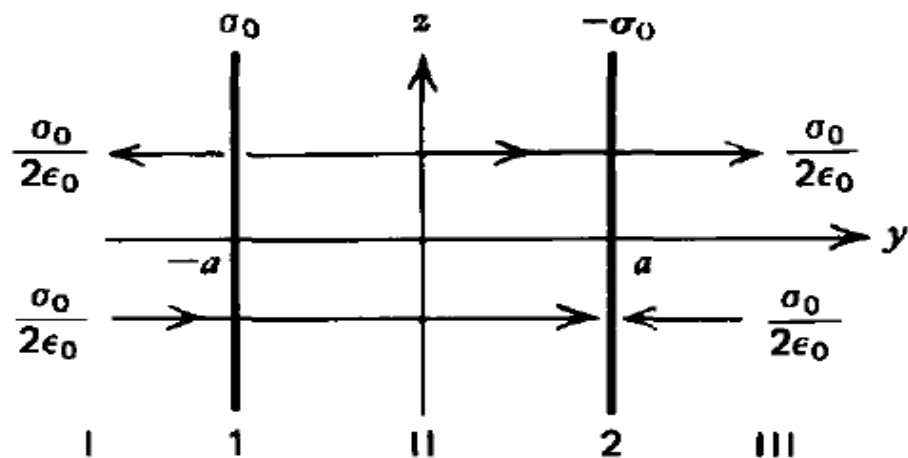


$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$$



【例】无穷大带电平版电场：

大电偶极层

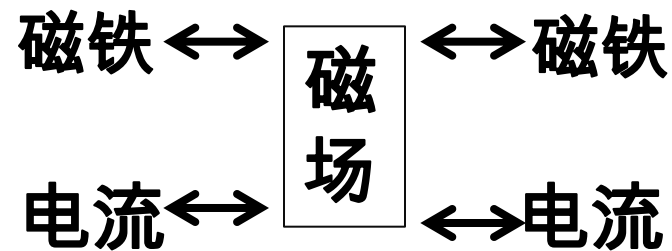
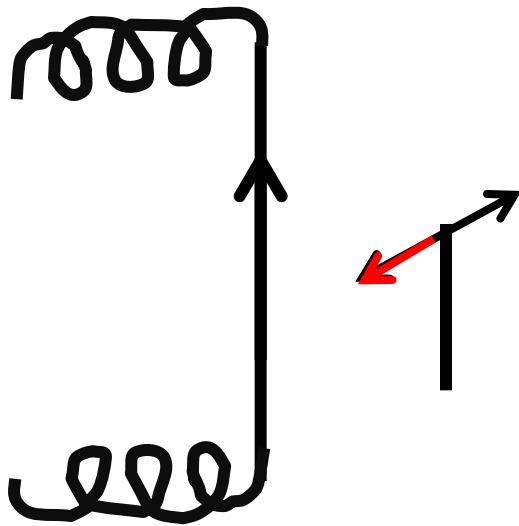




§ 3 电流的磁场

1. 安培定律

1820年，奥斯特实验发现载流导线扰动磁针
——发现 电流的磁效应



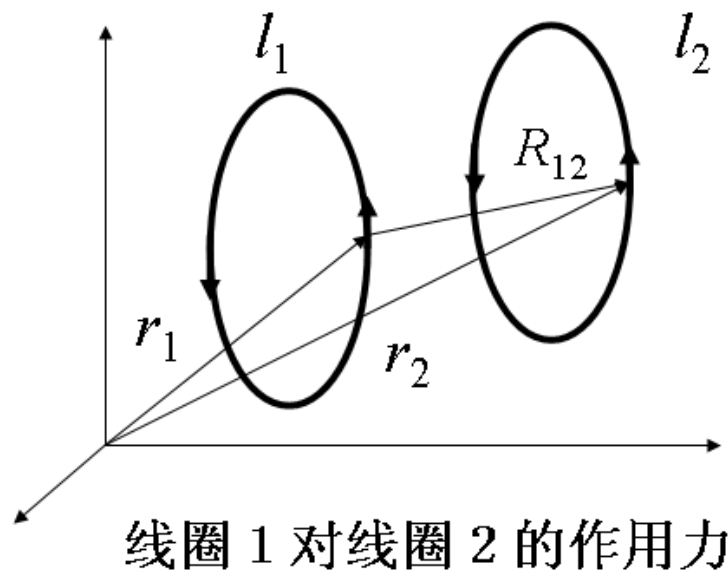


§ 3 电流的磁场

安培定律：

安培在1821—1825年间，设计了四个关于电流线圈之间相互作用力的精巧实验，得到电流相互作用力公式，即

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^3}$$





2. 毕奥—萨伐尔定律与磁感应强度

- 实验表明电流元在其周围空间激发出对另一电流元（或磁铁）有作用力的物质——磁场
电流元之间相互作用力通过磁场实现传递

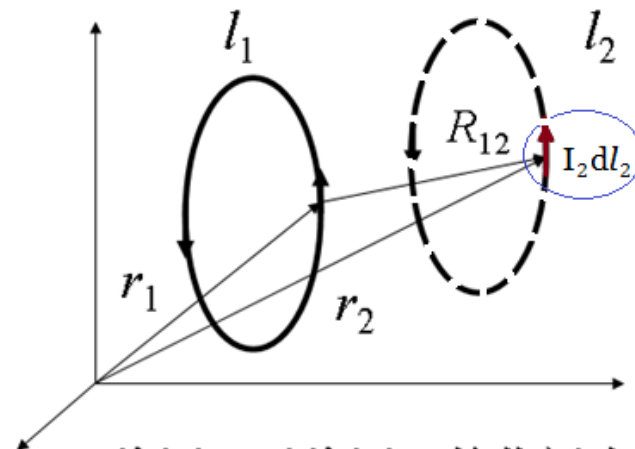
毕奥—萨伐尔研究了载流线圈中电流元间的相互作用力，并将线圈2中受到的作用力表示为组成线圈2各电流微元受到的作用力叠加



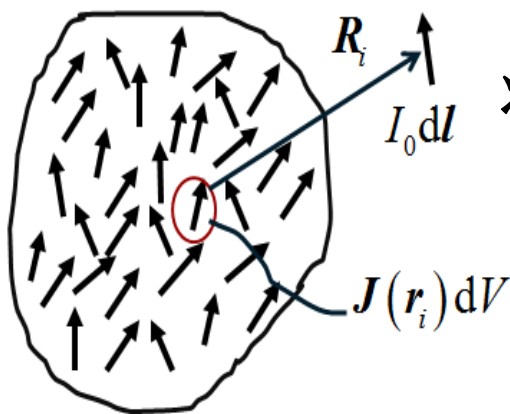
对电流元（或磁铁）有作用力的磁场

线圈2中电流微元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 受到载流线圈1的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$



线圈1对线圈2的作用力

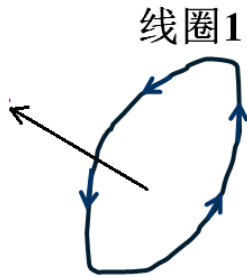


将其推广至体电流分布，有同样结果

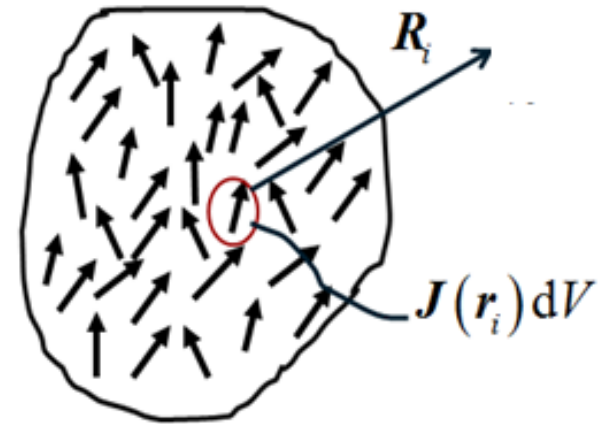
$$d\mathbf{F} = I_0 d\mathbf{l} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV$$



磁感应（磁场）强度表达式——毕奥—萨伐尔定律



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(x', y', z') \times [\hat{e}_x(x - x') + \hat{e}_y(y - y') + \hat{e}_z(z - z')]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dV$$



■ 磁感应强度 B — 空间磁场大小和方向

磁感应强度 B 的数值为检验电流元受到最大作用力与检验电流元之比的极限

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{[dF]_{\max}}{I_0 dl}$$

在认识磁场源于电流之前，类比电荷产生电场，认为磁场源于磁荷，并定义了磁场强度。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \lim_{q_{m0} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_{m0}}$$

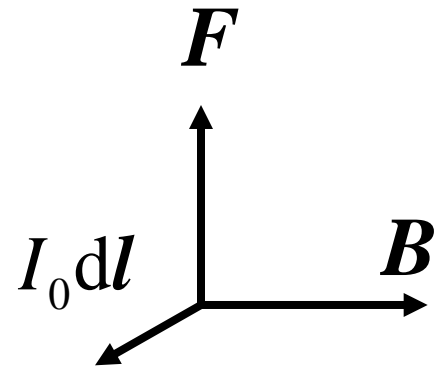
这一定义既没有实验支持，也不符合客观，辅助物理量。



毕奥—萨伐尔把磁感应强度表示为：

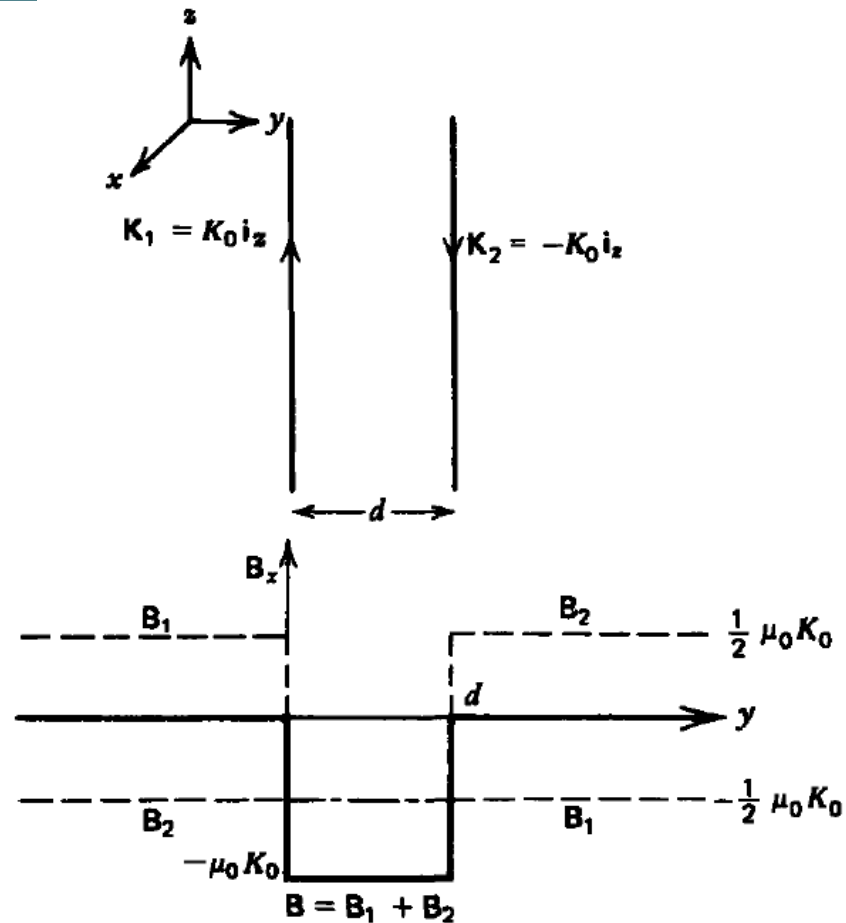
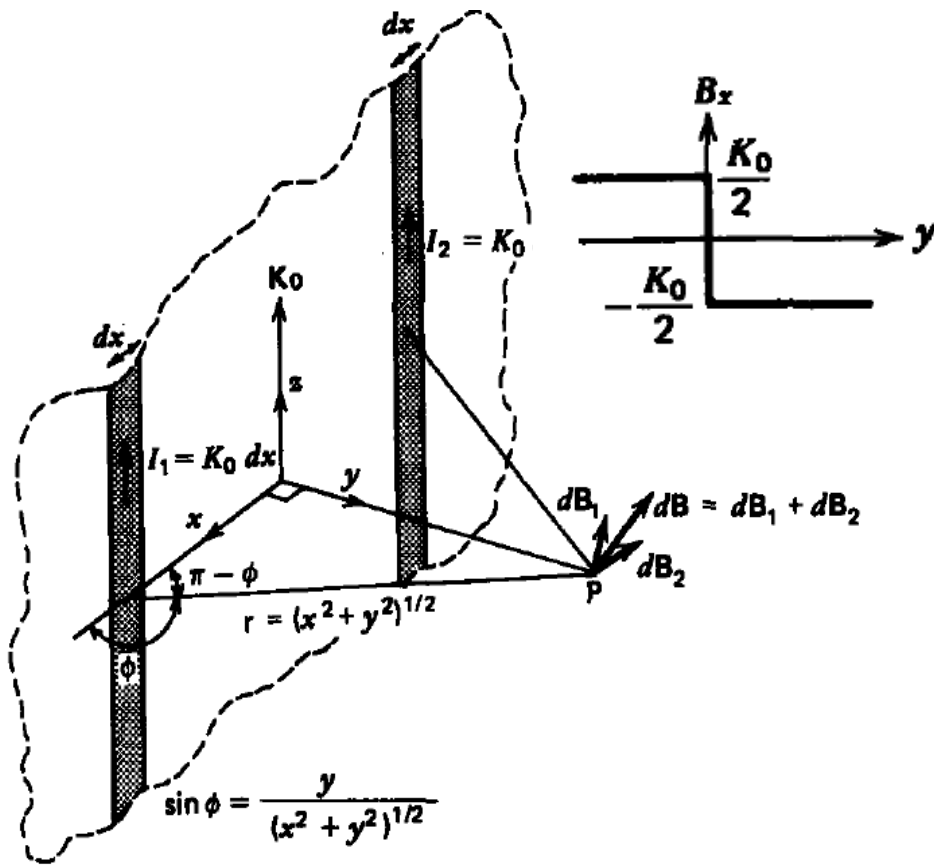
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV'$$

磁感应强度 \mathbf{B} 的方向为电流元与其受力方向所构成平面的法向—三者右手螺旋法则





无穷大电流片的磁感应强度



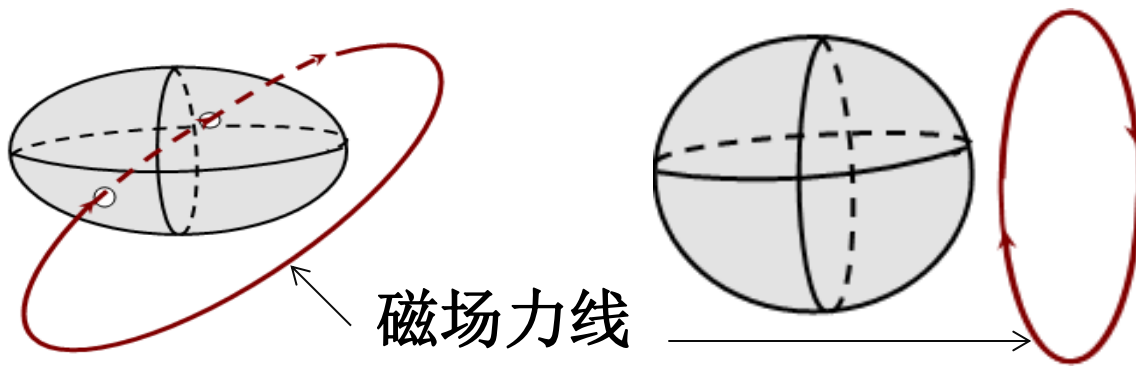


3. 磁场的基本性质

性质1 磁感应强度为无散矢量场，即**磁场高斯定理**

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = 0$$

磁感应强度力线为没有起点和终点的闭合曲线





$$\nabla \times [\mathbf{F}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})] = \phi \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \nabla \phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

引入矢势： $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$ 称为磁矢位

$$\rightarrow \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] \equiv 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv 0$$



性质2 恒定电流的磁感应强度是有旋场，电流是磁感应强度的涡旋源，即：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

$$\iint_s \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

磁场的安培环路定理



【例】证明： $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{e}_x \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + \hat{e}_y \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \hat{e}_z \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \rightarrow \hat{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x \right] \\ &+ \hat{e}_y \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \rightarrow \hat{e}_y \left[\frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_y \right] \\ &+ \hat{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \rightarrow \hat{e}_z \left[\frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_z \right] \end{aligned}$$



【例】证明： $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla_a \times \nabla_b \times \mathbf{A}_c &= (\nabla_a \cdot \mathbf{A}_c) \nabla_b - (\nabla_a \cdot \nabla_b) \mathbf{A}_c \\ &= \nabla_b (\nabla_a \cdot \mathbf{A}_c) - (\nabla_a \cdot \nabla_b) \mathbf{A}_c \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{其中: } \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right\} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right\} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_s \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{s}' = 0\end{aligned}$$



另一项：
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

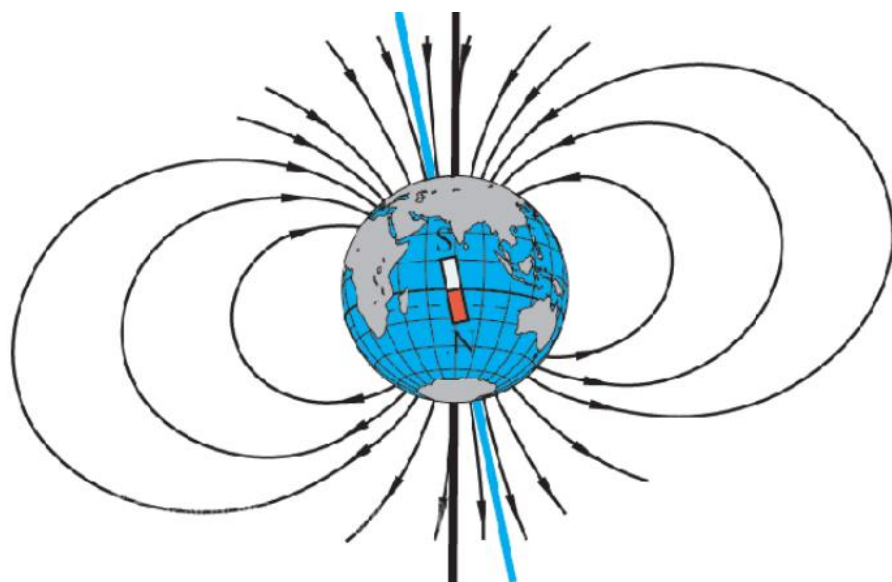
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

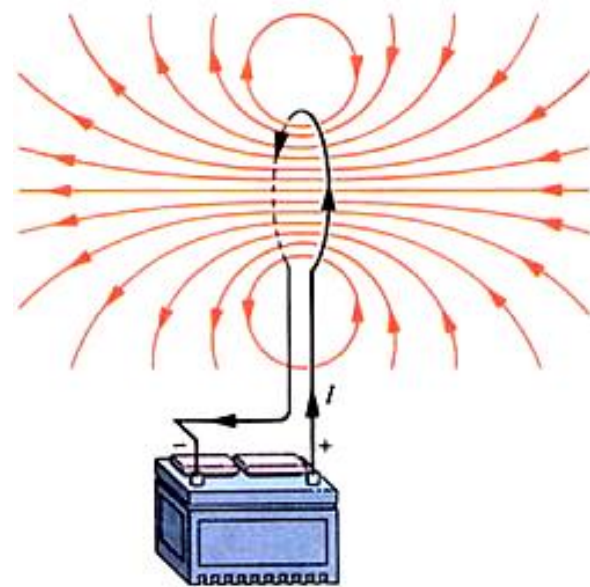
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \text{安培环路定理}$$

性质3 磁感应强度对电流元有力的作用并有能量

性质4 磁感应强度同样满足线性叠加原理



地球磁场



载流导线磁场



5. 电磁场对带电粒子的作用力

电场对带电粒子的作用力为 $F_e = E \mathrm{d}q$

磁场对电流元（运动带电粒子）的作用力，即

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathrm{d}q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

电磁场对带电粒子的作用力（Lorentz力）为

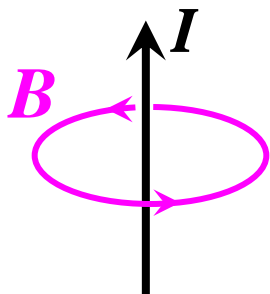
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \mathrm{d}q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$



§ 4 麦克斯韦方程组

1. 电磁感应定律

电—磁—光—热相互关联

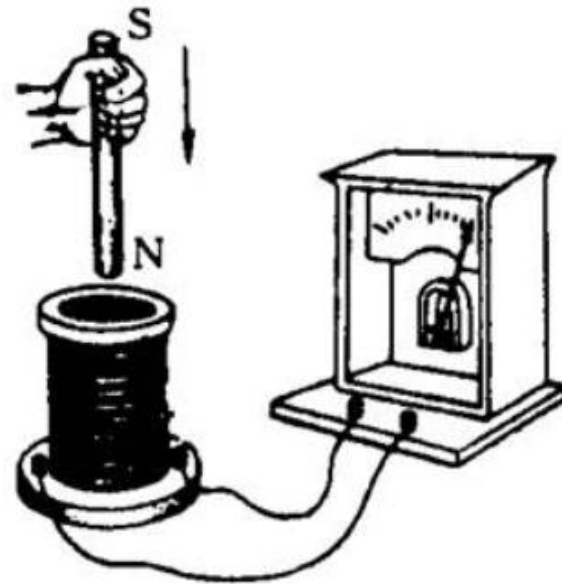
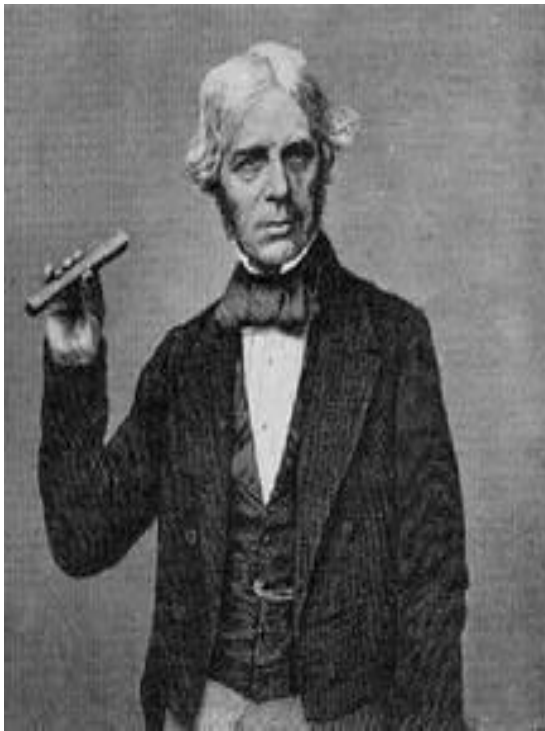


电（流） \rightarrow 磁（场）

电（流） \leftarrow 磁（场）？



1820-1831年探索磁生电的可能性

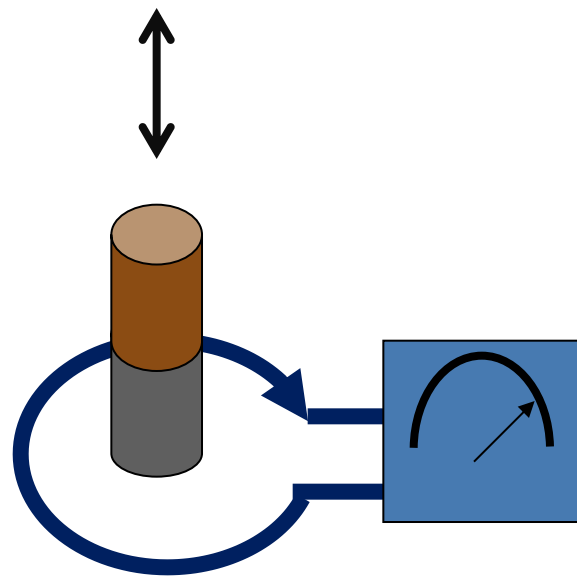


闭合线圈的磁通量发生变化
闭合导线中有感应电流产生



实验证明：当闭合曲线内
磁通量发生变化，感应电
场不仅存在于导体回路，
同样存在于无导体回路。
并满足：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$





法拉第电磁感应实验定律表明：

变化的磁场可以产生感应电场，该电场与静电场都对电荷有力的作用，所不同的是感应电场沿闭合回路的积分不为零，具有涡旋场的性质，变化的磁场是其旋涡源。

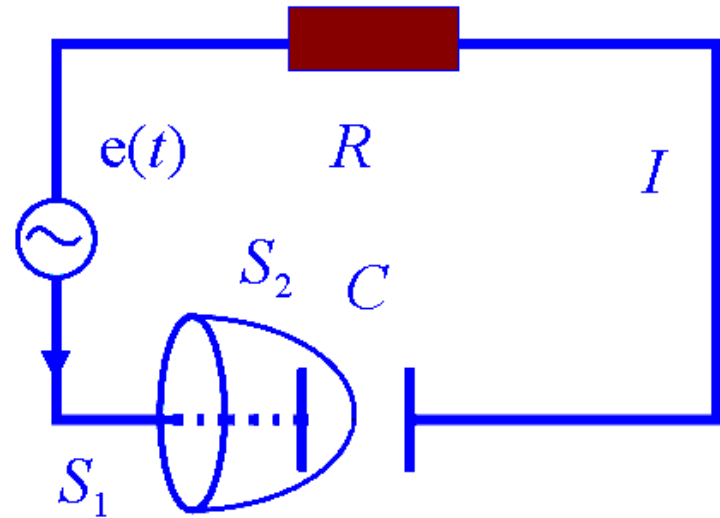
(变化) 磁场 \longrightarrow 电场



2 . 实验定律面临的问题

问题一： 毕奥—萨伐尔定律用于时变面临问题
将定律应用于 L 为边界的两曲面 S_1
和 S_2 ，其旋涡源的通量有不同的结果

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0 \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \\ \mu_0 \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \end{cases}$$





问题二：电荷守恒定律面临的问题

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \begin{cases} -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 & \text{电荷守恒定律} \\ \mu^{-1} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0 & \text{矢量场性质} \end{cases}$$

相互矛盾的结果！



3. 位移电流概念

电荷守恒定律是实验定律，并被实验所证实。

要使如下得两式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \equiv 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{电流内涵不同}$$

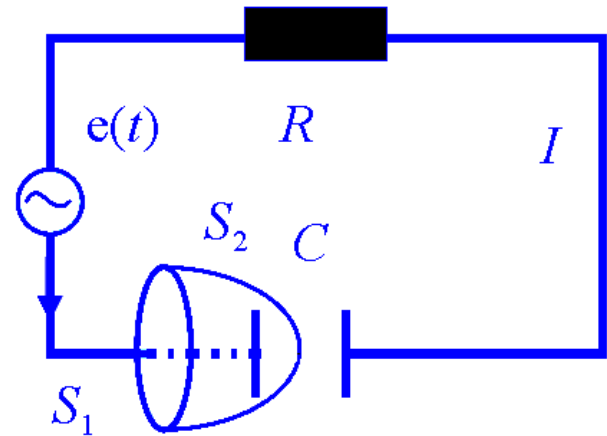
同时成立，则电流密度矢量只能具有不同物理内涵



麦克斯韦认为：电流由两个部分组成，一部分为传导电流，另一部分他称之为位移电流，即总电流密度：

$$\mathbf{J}_{\text{总}} = \mathbf{J}_{\text{传导}} + \mathbf{J}_{\text{位移}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D$$

问题1中：通过曲面 S_1 只有传导电流，没有位移电流，通过电容器内部曲面 S_2 只有位移电流，没有传导电流。





对于问题2

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} \equiv 0 \end{cases}$$

表现出的矛盾，可因两式中的电流密度内涵不同

将其理解为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{传导}} \neq 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{总}} \equiv 0 \end{cases}$$



麦克斯韦认为静电场的高斯定理和电荷守恒定律是实验总结，应予以保留。利用这两个定律，他对电流内含概念进行了如下推广：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \equiv \nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{总}} \equiv \nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \equiv 0 \quad \text{全电流定律}$$

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \rightarrow \nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \mathbf{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



Maxwell提出位移电流概念基于如下考虑：

电磁感应实验表明变化的磁场能够激发电场，
变化电场激发磁场是电磁相关联的合理假设。

以最简单形式解决了静态电磁场存在的矛盾，
保证了电荷守恒定律和电场高斯定理的成立。



4. 关于电磁场的再认识

■ 电场

➤ 定义：电荷及变化磁场激发的特殊物质

电荷直接激发电场 E 有散而无旋

变化磁场激发电场 E 有旋而无散

■ 磁场

➤ 定义：运动电荷及变化电场激发的特殊物质

运动电荷激发磁场 H 有旋而无散

变化电场激发磁场 H 有旋而无散



5. 麦克斯韦方程组

电场高斯定理：麦克斯韦认为静电场高斯定理可直接推广到一般情形，即：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \oiint_s \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

磁场高斯定理：麦克斯韦认为恒定电流磁场的高斯定理可以直接推广到一般情形，即：

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \oiint_s \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0$$



法拉第电磁感应定律：麦克斯韦认为法拉第电磁感应定律直接推广到一般情况，即：

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

广义安培环路定理：Maxwell引入位移电流，修正了恒定电流情况下安培环路定理，得到：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \quad \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_s (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{s}$$

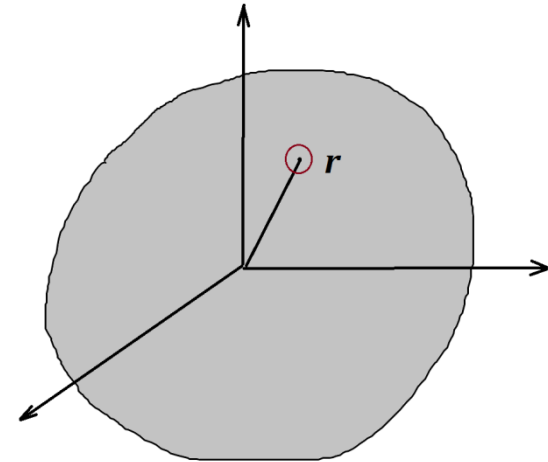


积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_s \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ \oiint_s \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_l \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_s \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{s} \end{array} \right.$$

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$





真空中Maxwell方程组描述了真空中电荷和电流源激发电磁场，以及电场与磁场之间的相互作用和联系。

四个方程是实验规律以及Maxwell推广的总结，并非都是独立的，只有两个是独立的。



Maxwell方程组表明：

变化的磁场激发旋涡电场

变化的电场激发涡旋磁场

电磁场相互激发可脱离电荷(流)而存在于空间

电磁场相互激发，时间上周而复始，

空间上交链重复，预示电磁波的存在

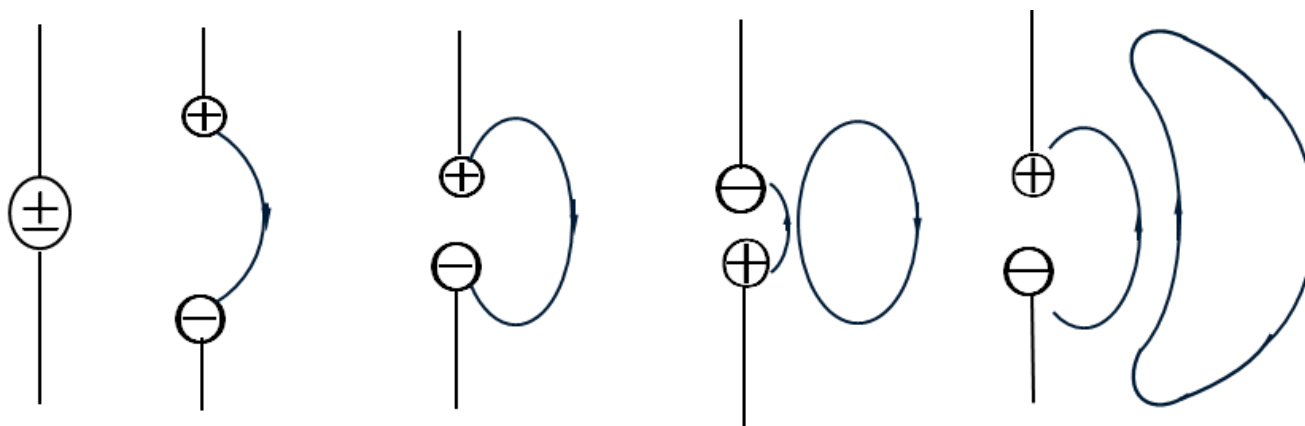
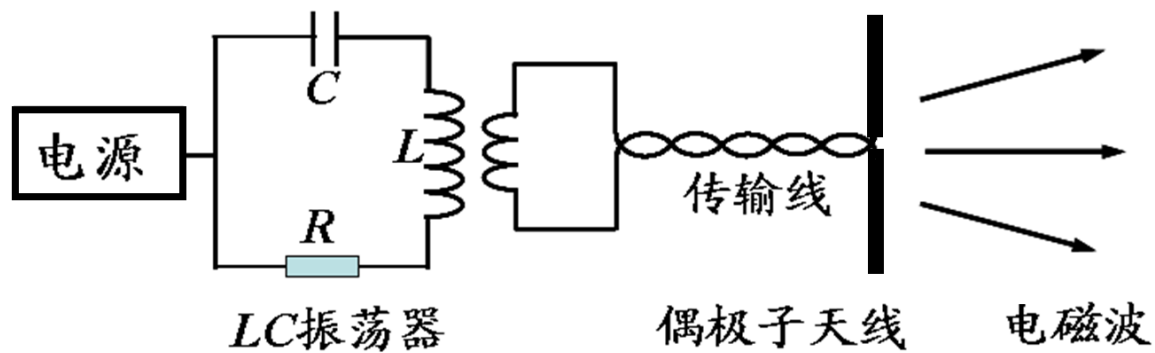


Maxwell贡献

- 推广法拉第场的概念，赋予了场的物理意义
- 推广了电流内涵，引入了位移电流概念
- 归纳提炼建立了宏观电磁场运动方程



电磁波产生电路示意图



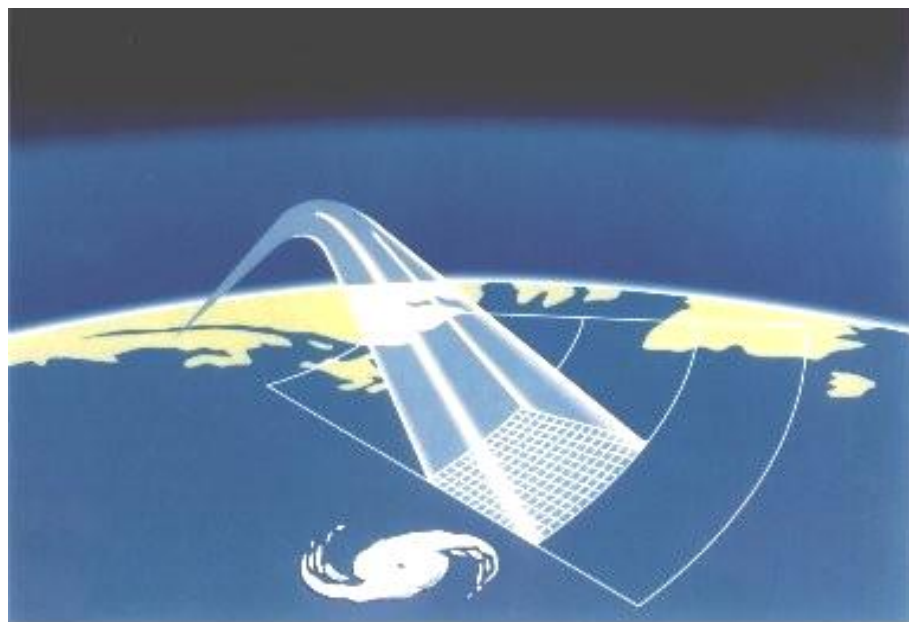


§ 5 媒质的电磁特性

1. 电磁场中的媒质概念

自然界是由各种不同物质组成的世界。电磁场或波的应用均在这一物质世界空间中实现

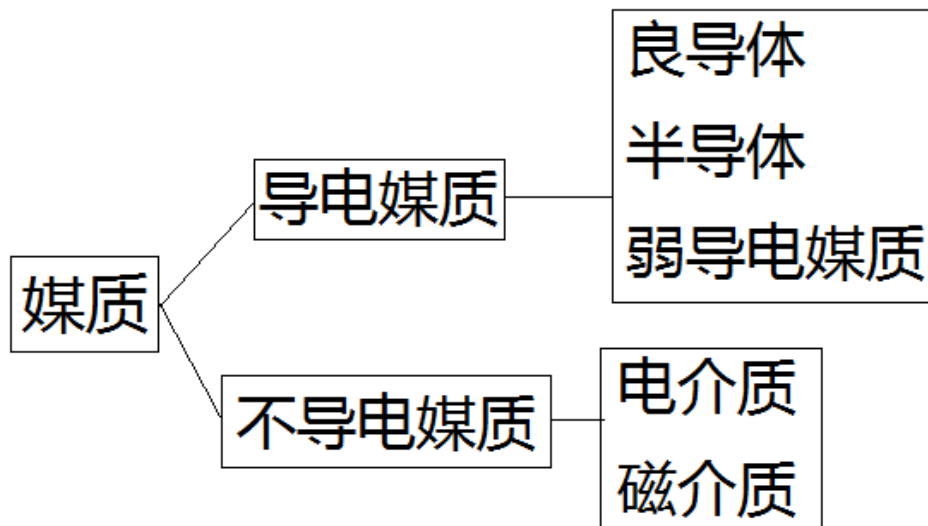
如：导体的导电特性



无线电波传播的信道特性



媒质是电磁理论中对物质的一种统称
由原子或原子团、分子或分子团组成





没有外加电磁场，媒质内部大量带电粒子的随机运动
产生随机的电磁场，宏观上相互抵消，媒质呈中性。

在外加电磁场中，媒质内带电粒子与外场相互作用
产生附加电磁场，直接影响媒质的物理特性



当媒质在外部宏观电磁场作用之下，媒质中带电粒子产生宏观的规则运动或排列，形成宏观上的电荷堆集或定向运动，主要表现出三种形态：

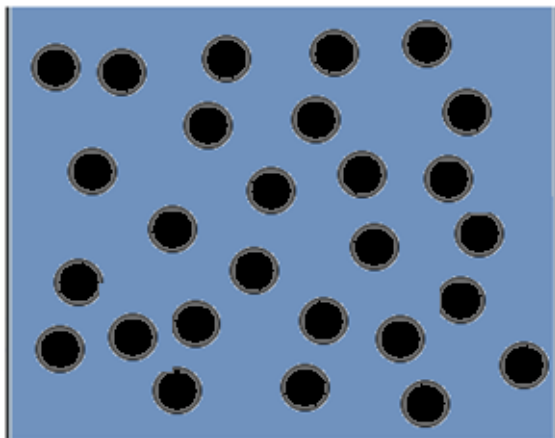
① 介质的极化 (Polarization)

在外加电场作用下, 介质中原子（或分子）的正负电荷中心发生位移（介质中固有电偶极矩）形成定向排列的电偶极矩



无外加电场作用

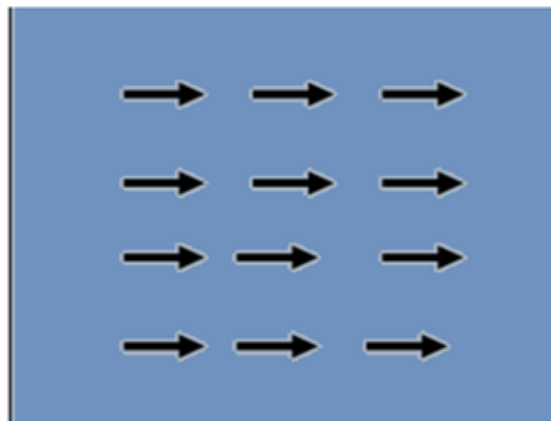
±



有外加电场作用



— → +

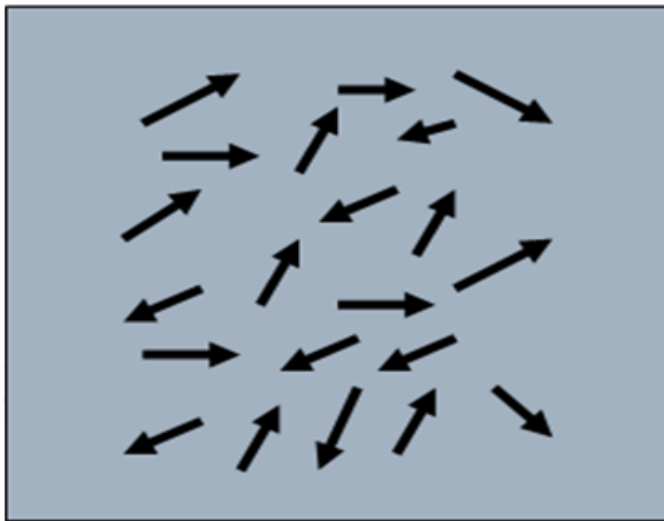


$$p_i = q_i L_i$$

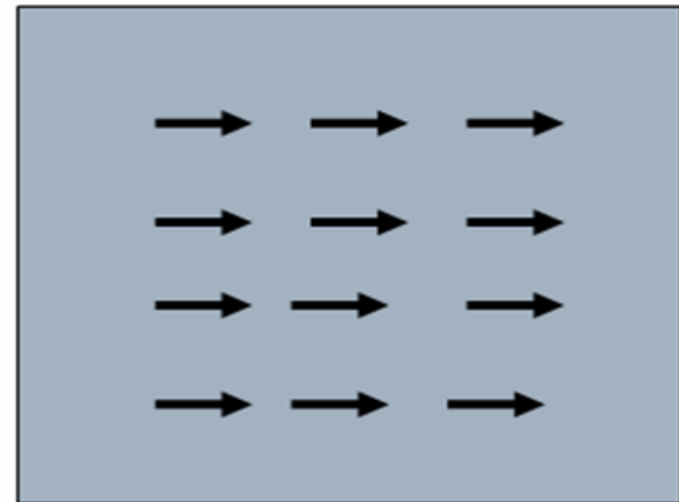
正负电荷中心在外加电场力的作用下发生位移，形成定向排列的电偶极矩



无外加电场作用



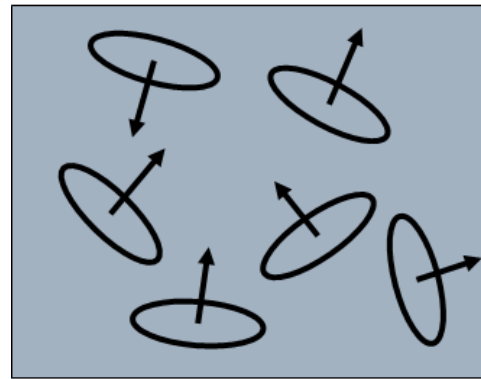
有外加电场作用



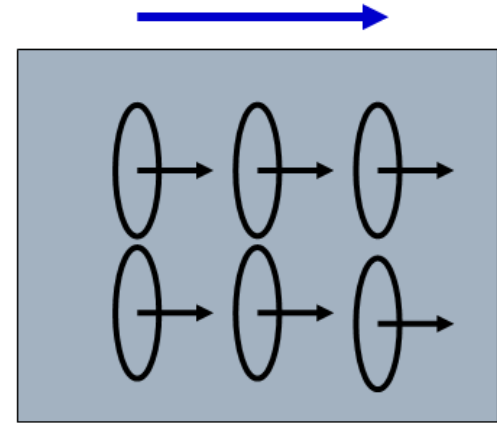
原子或分子固有电偶极矩在外场
作用下形成定向排列的电偶极矩



②介质的磁化 (Magnetization)



没有外加磁场



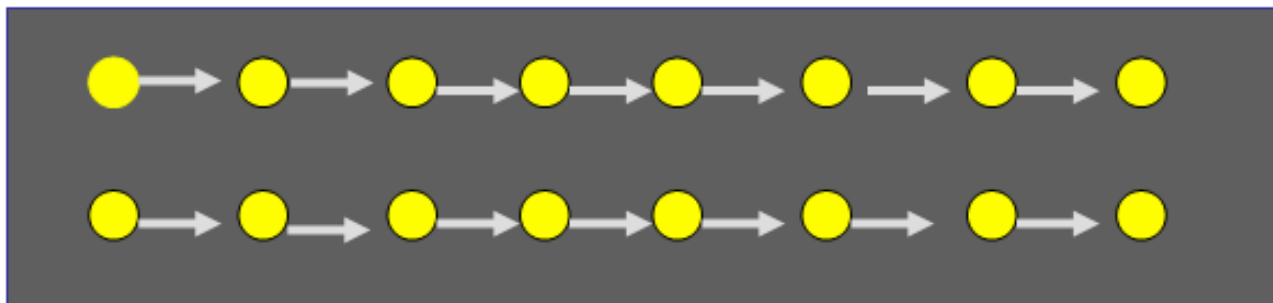
有外加磁场

在外磁场力作用下，介质中原子或分子的磁偶极矩定向排列，形成宏观上的磁偶极矩



③ 传导电流(Conduction current)

导电媒质中自由移动的带电粒子，在外场力作用下，导致带电粒子的定向运动，形成电流





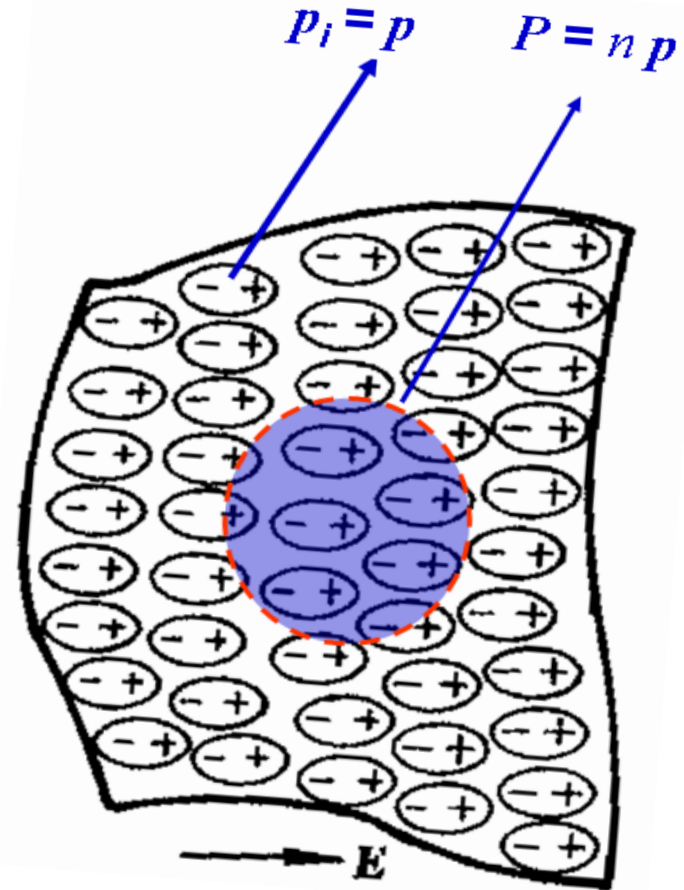
2. 介质的极化效应

■ 极化描述—极化强度

极化强度矢量 P ，定义为单位体积中分子或原子团的电偶极矩的叠加

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum p_i}{\Delta V}$$

表征电偶极矩整齐排列程度





极化强度的特点：

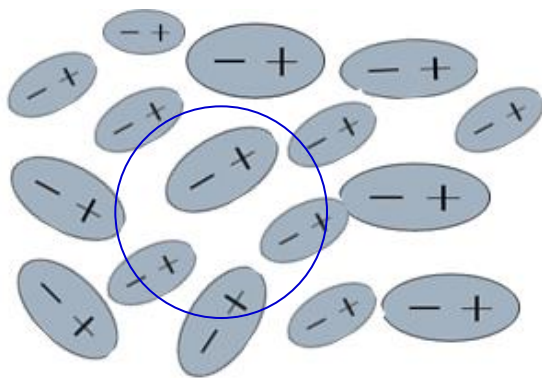
- ① 极化强度 P 是外加电场强度的函数
- ② 极化强度 P 可以是空间位置的函数
- ③ 极化强度 P 可能是时间的函数

极化强度 P 是电磁场强度、时间和空间的函数
对于线性均匀介质， P 与外加电场强度成正比

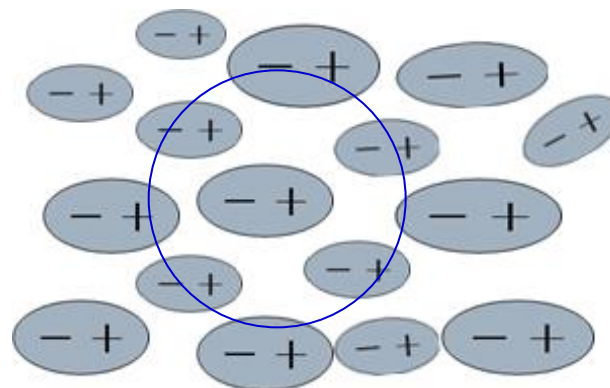


■ 极化效应—束缚电荷

极化使得介质的原子或分子电偶极矩定向排列，介质内某一体积元因极化既有电荷迁入，同时也有电荷迁出。故该体积元内可能出现净余电荷，称束缚电荷。



$$\rho_p = 0$$

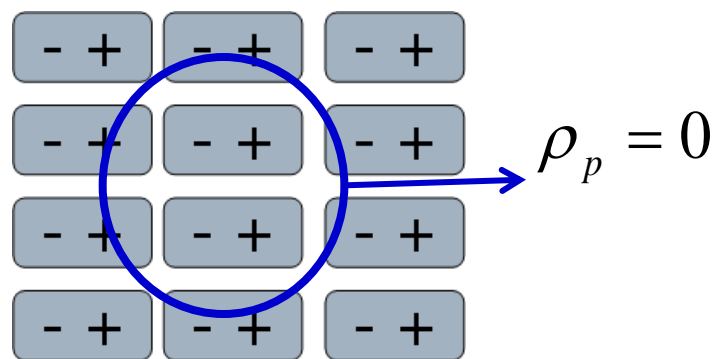


$$\rho_p \neq 0$$



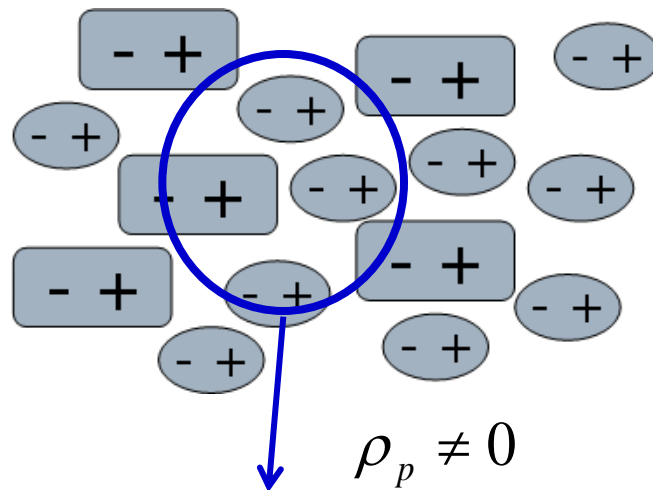
1) 均匀介质

极化迁出与迁入电荷相等
体元内不出现极化电荷分布



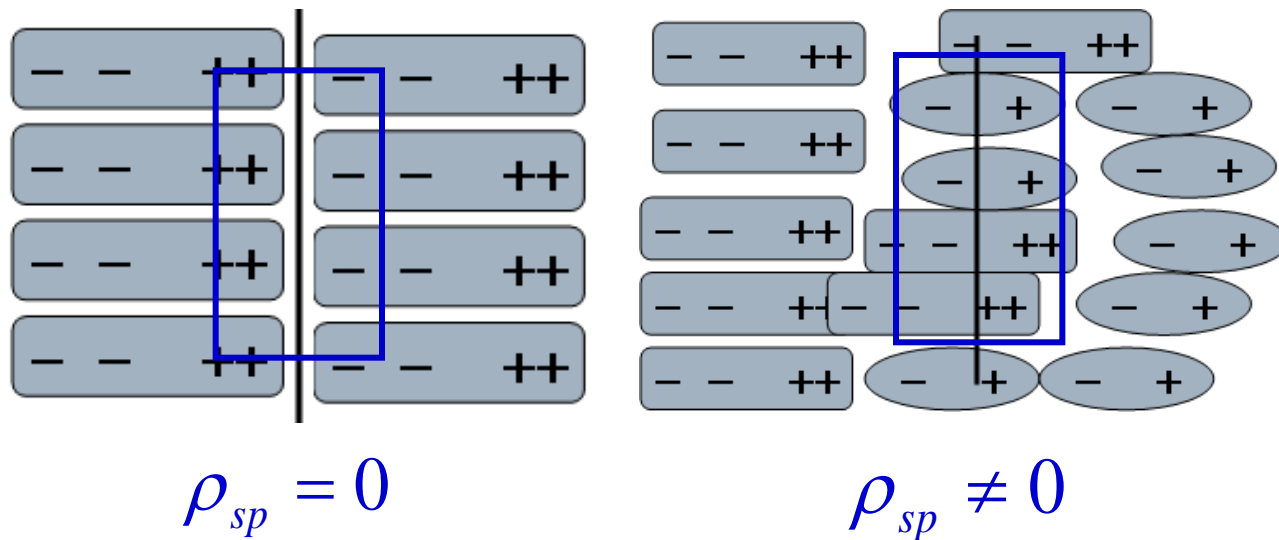
2) 不均匀介质或由多种不同结构混合形成的介质

极化迁出与迁入电荷可不相等
体元内可能出现极化电荷分布





3) 不同介质交界面上的一个很薄的层内，由于介质的极化强度不同出现极化面电荷分布。



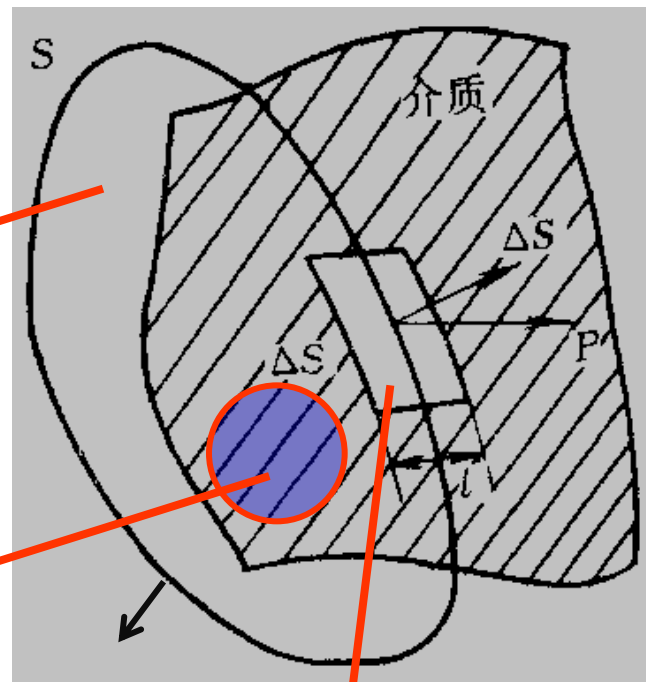


4) 束缚电荷的计算

$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint_V \rho_p dV$$

束缚电荷体密度为:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$



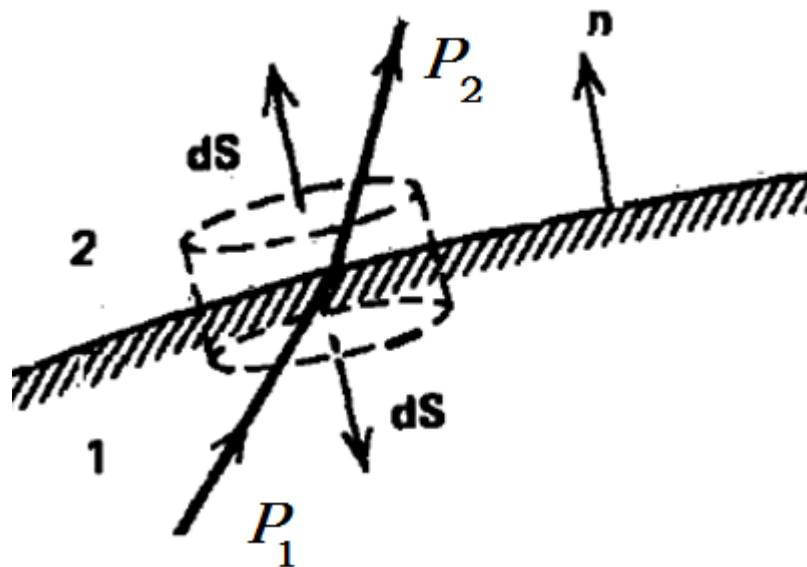
$$n\mathbf{q}\mathbf{l} \cdot d\mathbf{s} = n\mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$$



$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint_V \rho_p dV$$

束缚电荷面密度为:

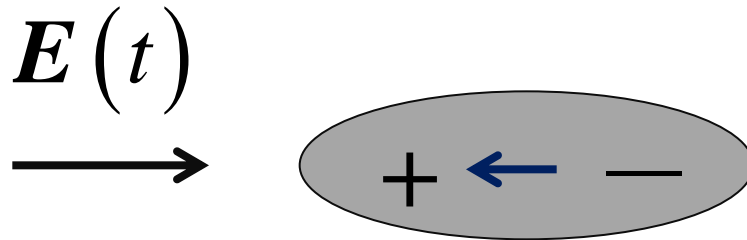
$$\rho_{sp} = -\hat{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$





■ 介质极化效应—极化电流

当外加电磁场随时间变化，极化强度矢量和束缚电荷随时间变化，且在一定范围内运动（正负电荷位移量随时间变化），形成极化电流。



$$p_i(t) = q_i L_i(t) \rightarrow P(t)$$



应用电荷守恒定律以及束缚电荷表达式

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

极化电流密度矢量为：

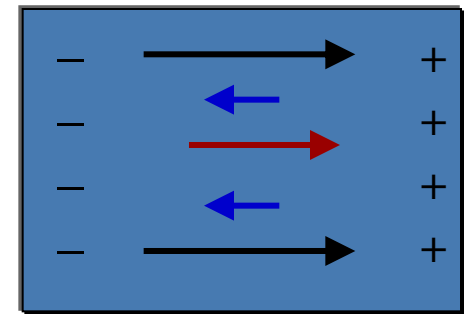
$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

问题：极化电流与传导电流的异同点？



3. 介质中电场与电位移矢量

极化产生束缚电荷；束缚电荷产生电场，外加场与束缚电荷产生电场相互制约达到平衡。
介质中的场是外加场与束缚电荷产生附加场的叠加



→ $E_{\text{外加电场}}$

$E_{\text{束缚电荷产生的电场}}$ ←

→ E

$$E = E_{\text{外加电场}} + E_{\text{束缚电荷产生的电场}}$$



将 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 代入电场高斯定理

$$\oiint_s \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V [\rho(\mathbf{r}, t) + \rho_p(\mathbf{r}, t)] dV$$

引入电位移矢量:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

介质中电场高斯定理为

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dV \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

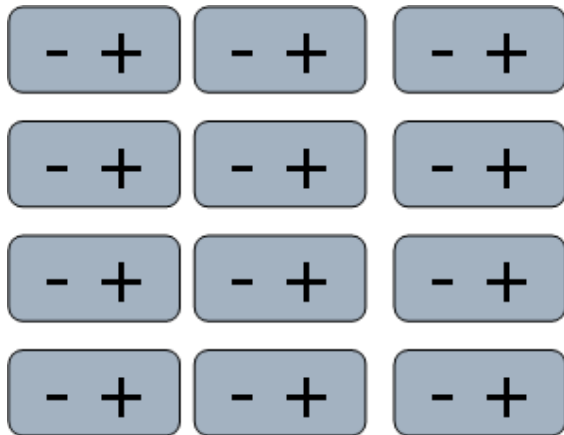


介质中的电场的最终求解必须知道电场 E 和电位移矢量 D 之间的关系。这种关系与介质极化特性有关，称为物质本构关系。通常有两种途径可以获得：

- 1) 直接测量出 P 和 E 之间的关系
- 2) 用理论方法计算 P 和 E 之间的关系



对于线性均匀各向同性介质，极化强度 P 和
电场强度 E 有简单的线性关系：



$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \text{ (介电常数)}$$



4. 介质磁化与磁化效应

1) 介质磁化—磁化强度

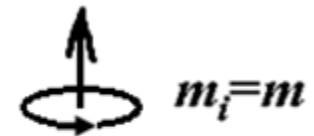
引入磁化强度描述介质磁化程度 M ，定义为单位体积中的磁偶极矩的矢量和：

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum m_i}{\Delta V}$$

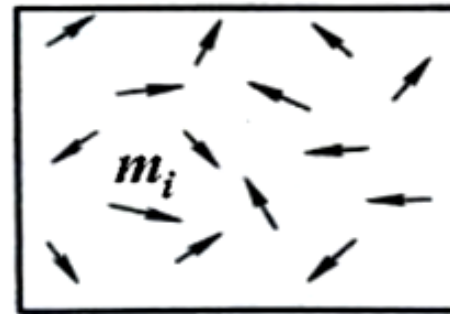
表征磁偶极矩整齐排列程度

均匀介质

$$m_i = \hat{n} I_i \Delta S_i$$



$$M = nm = 0$$

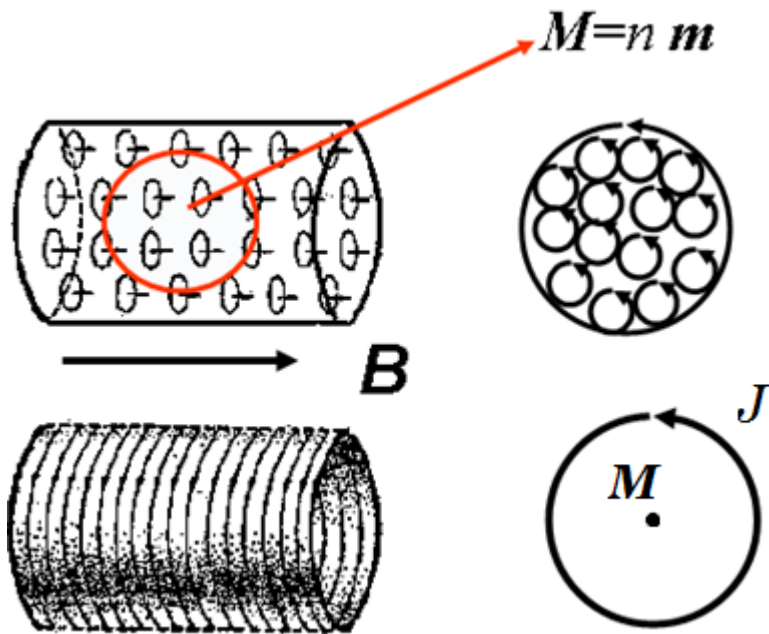


$$M = 0$$

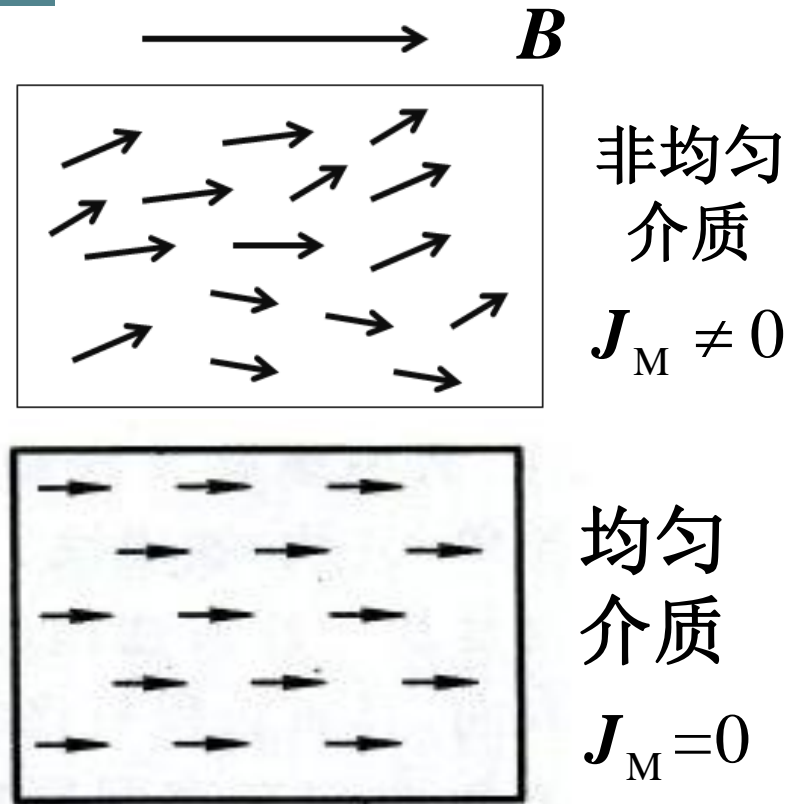
无外加磁场



$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V} \neq 0$$



不同介质的交界面出现磁化电流



介质体内可出现磁化电流



磁化强度的特点：

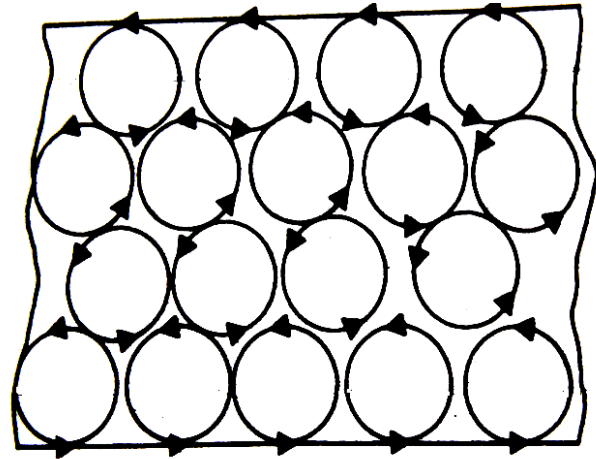
- ① 磁化强度 M 是外加电场强度的函数
- ② 磁化强度 M 可以是空间位置的函数
- ③ 磁化强度 M 可能是时间的函数

磁化强度 M 是电磁场强度、时间和空间的函数
对于线性均匀介质， M 与外加磁场强度成正比



2) 磁化效应—磁化电流

均匀介质的内部
不出现磁化电流

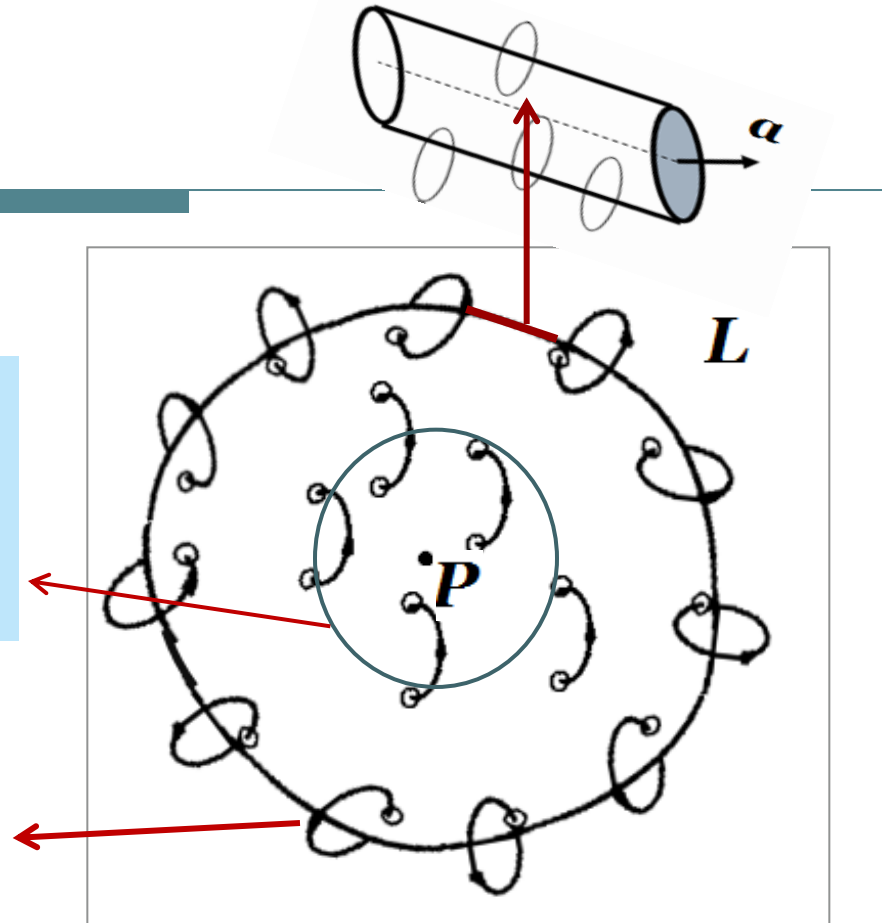


不均匀介质的内部出现磁化电流
不同介质界面上薄层存在对磁化电流



在区域的非边缘处闭合的分子电流流入和流出同时出现对电流通量无贡献。

对电流通量有贡献仅来源于曲面边缘处的分子电流



$$I_M = \iint_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} = \oint_L n l a \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

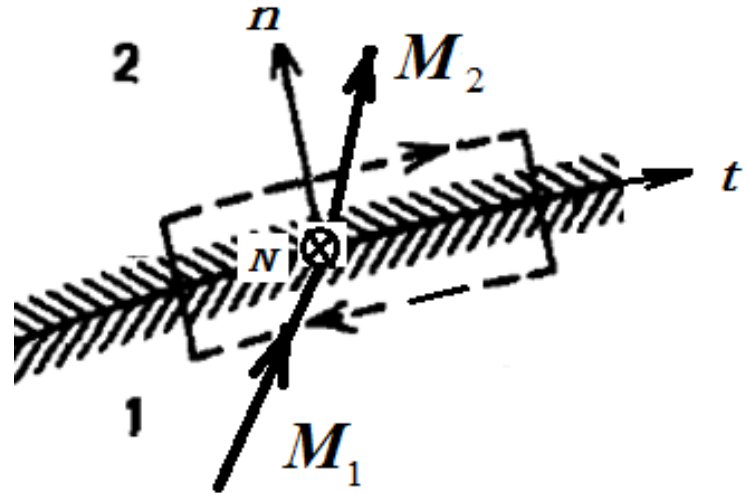


问题： $\nabla \cdot \mathbf{J}_M = ?$

在两种不同介质的交界面的薄的层内，磁化导致两介质交界面出现磁化电流

\mathbf{M}_2 ：介质2磁化强度

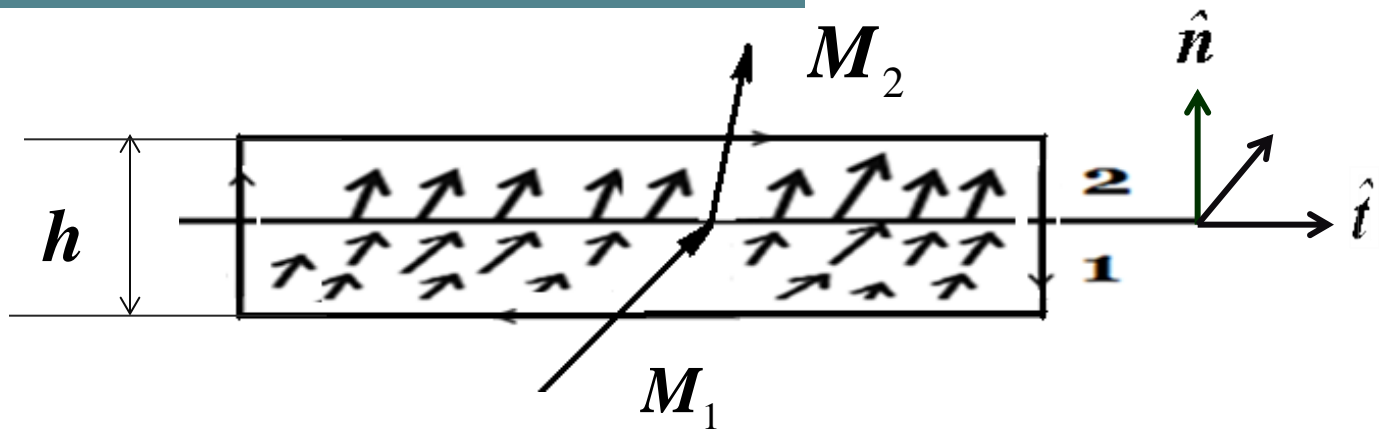
\mathbf{M}_1 ：介质1磁化强度



$$\hat{N} = \hat{n} \times \hat{t}$$

$$\hat{n} = \hat{t} \times \hat{N}$$

$$\hat{t} = \hat{N} \times \hat{n}$$



$$\iint_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \mathbf{J}_M) \cdot \hat{\mathbf{N}} \Delta L = \mathbf{J}_{sM} \cdot \hat{\mathbf{N}} \Delta L$$

$$= \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta L \quad ; \quad \mathbf{J}_{sM} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \mathbf{J}_M)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{J}_{sM} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$$



5. 介质中 安培环路定理

传导、位移、磁化和极化电流均激发磁场，均满足 Biot-Savart 定律，故介质中安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M) \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M)$$

\mathbf{J} 、 \mathbf{J}_D 分别是传导和位移电流密度

\mathbf{J}_P 、 \mathbf{J}_M 分别是极化和磁化电流密度



$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M) \\ &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ &\rightarrow \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} + \frac{\partial (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

引入辅助函数： $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ (称磁场强度)



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s}$$

其中： $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$

线性各向同性均匀介质： $\mathbf{M} = \mu_0 \chi_M \mathbf{H}$

$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$, μ : 介质磁导率



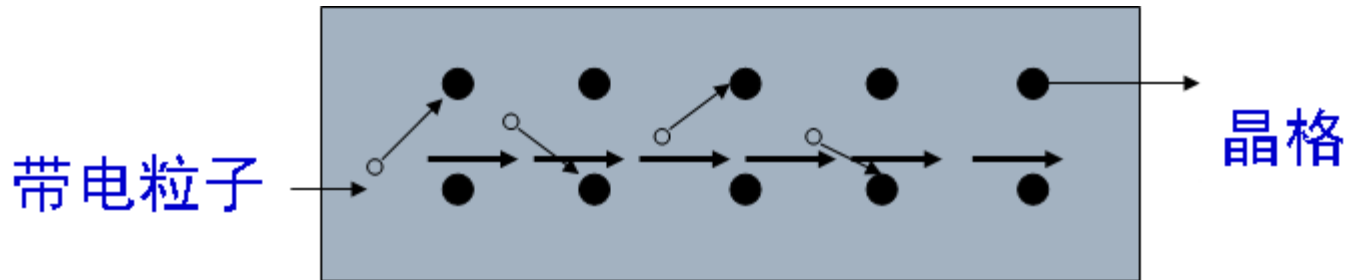
6. 传导电流

存在可移动带电粒子的介质称为导电媒质。在外场作用下，导电媒质中原子核或晶格在空间形成固定点阵，核外自由电子除无规则运动外，外场作用力将使电子产生定向运动，形成传导电流。

问题：分析传导电流与极化和磁化电流异同点



运动的电子经常与原子核或晶格点阵发生碰撞。碰撞过程使电子改变运动方向，并将部分能量转嫁给原子核或晶格，转变为热效应，使外场作用下的电子定向运动速度与外加电场强度成正比，即ohm 定律，其表达式为： $J = \sigma E$ σ : 媒质电导率

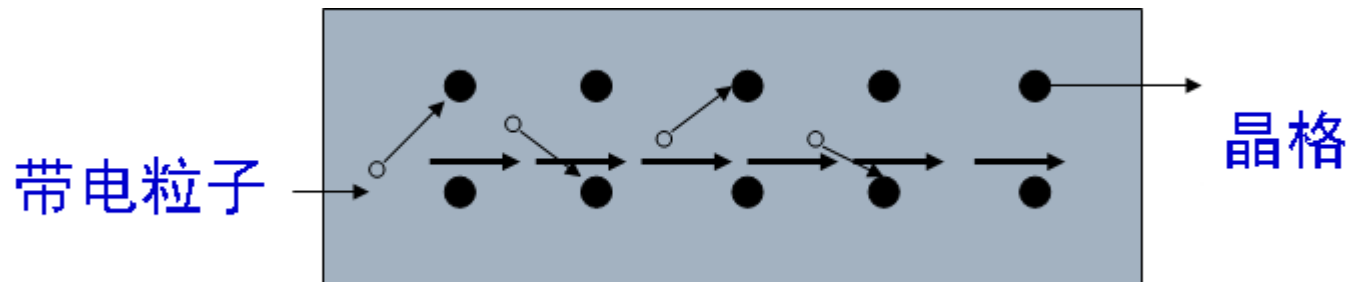




理想导体模型： $\sigma \rightarrow \infty$

忽略自由电子与晶格点阵发生碰撞

某些元素为理想导体的很好近似模型





7. 介质中Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dV \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \end{array} \right.$$



介质中的Maxwell方程组是不完备, 须附加其它条件才能对方程求解。

介质中电场和电位移矢量、磁场和磁感应强度不是完全独立。通过介质的电磁特性建立起联系。联系电磁场量与介质间关系的方程为介质的本构方程。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$



8. 介质的分类

根据介质的特性，有多种不同的分类方法，如：

均匀与非均匀介质 线性与非线性介质

确定与随机介质 时变与时不变介质

各向同性与各向异性介质

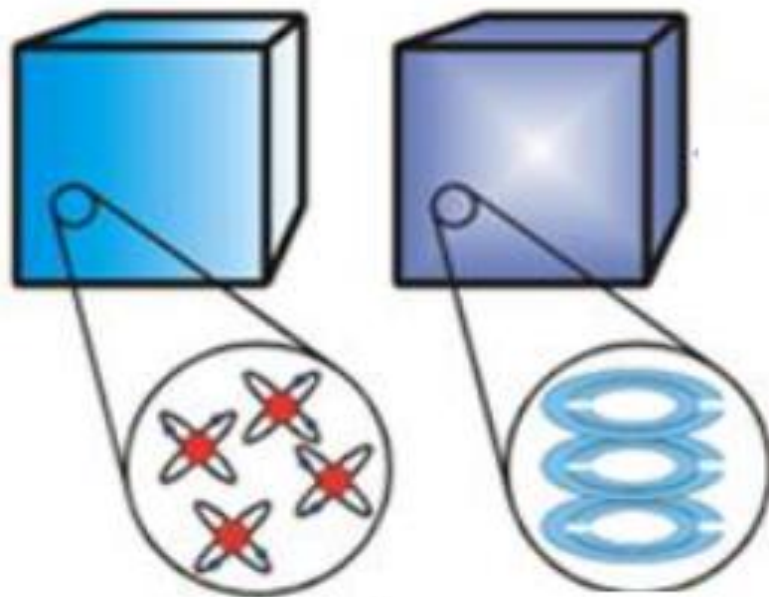
最简单的线性均匀各向同性介质，分二种情况：

线性均匀各向同性时不变介质

线性均匀各向同性时变介质（色散介质）



超介质—电磁场理论新领域

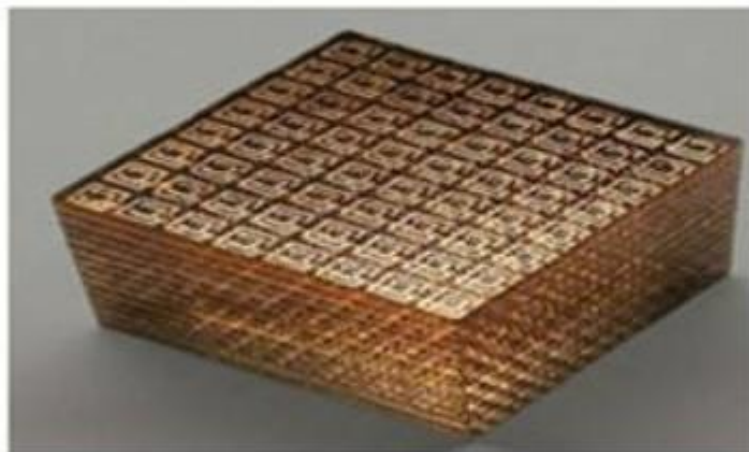


自然电磁材料
由原子分子构成
特性参数为正的有限值

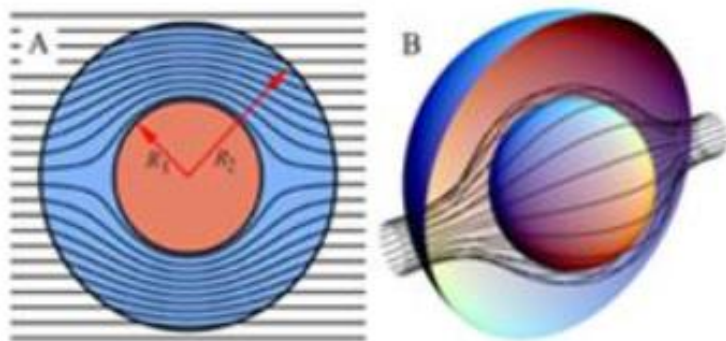
超材料：
通过设计不同结构单元
理论上能够实现任意特性参数
(如负电磁特性参数)



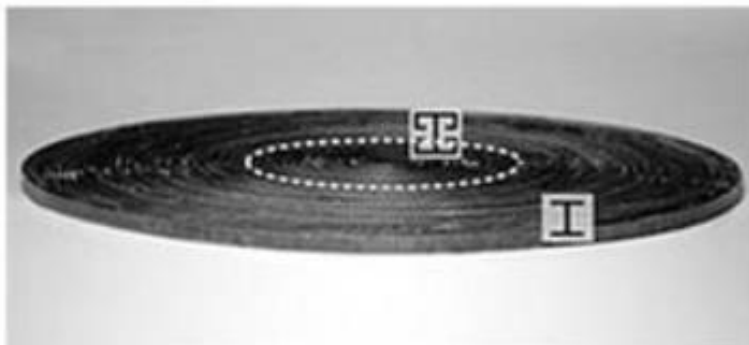
普通材料和负折射率材料



新型人工合成电磁材料天线



人工控制电波传播方向实现隐身



基于人工超材料的电磁黑洞



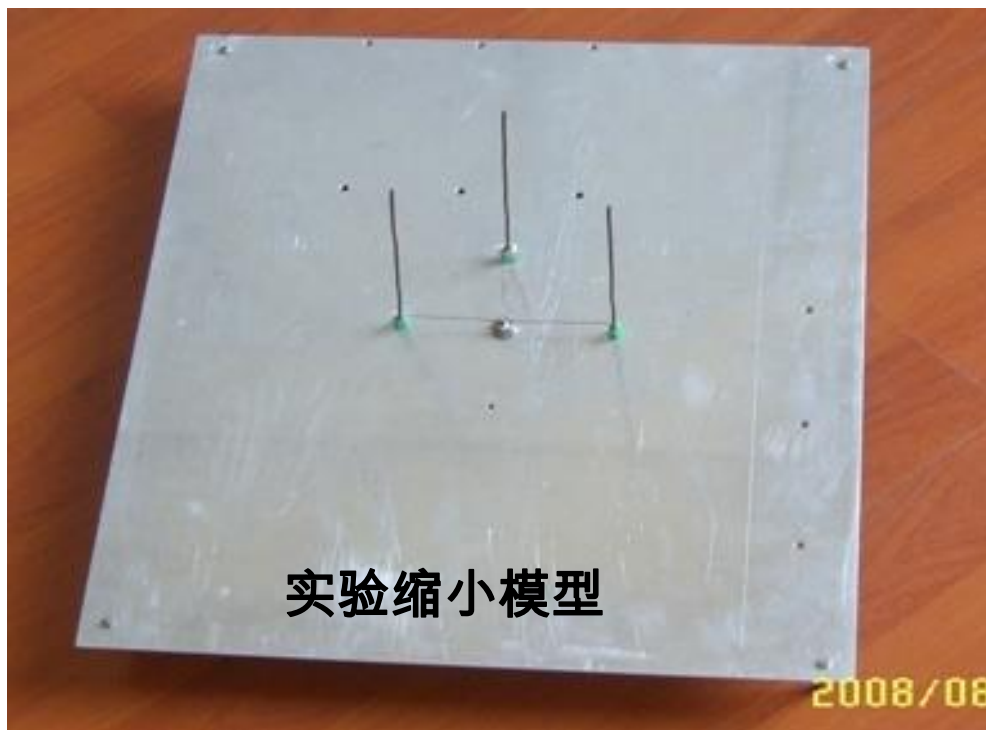
§ 6 电磁场的边界条件

1. 边界上的电磁场问题

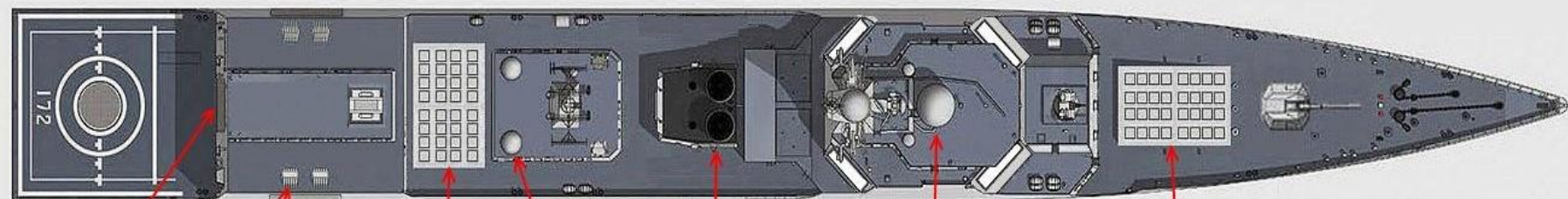
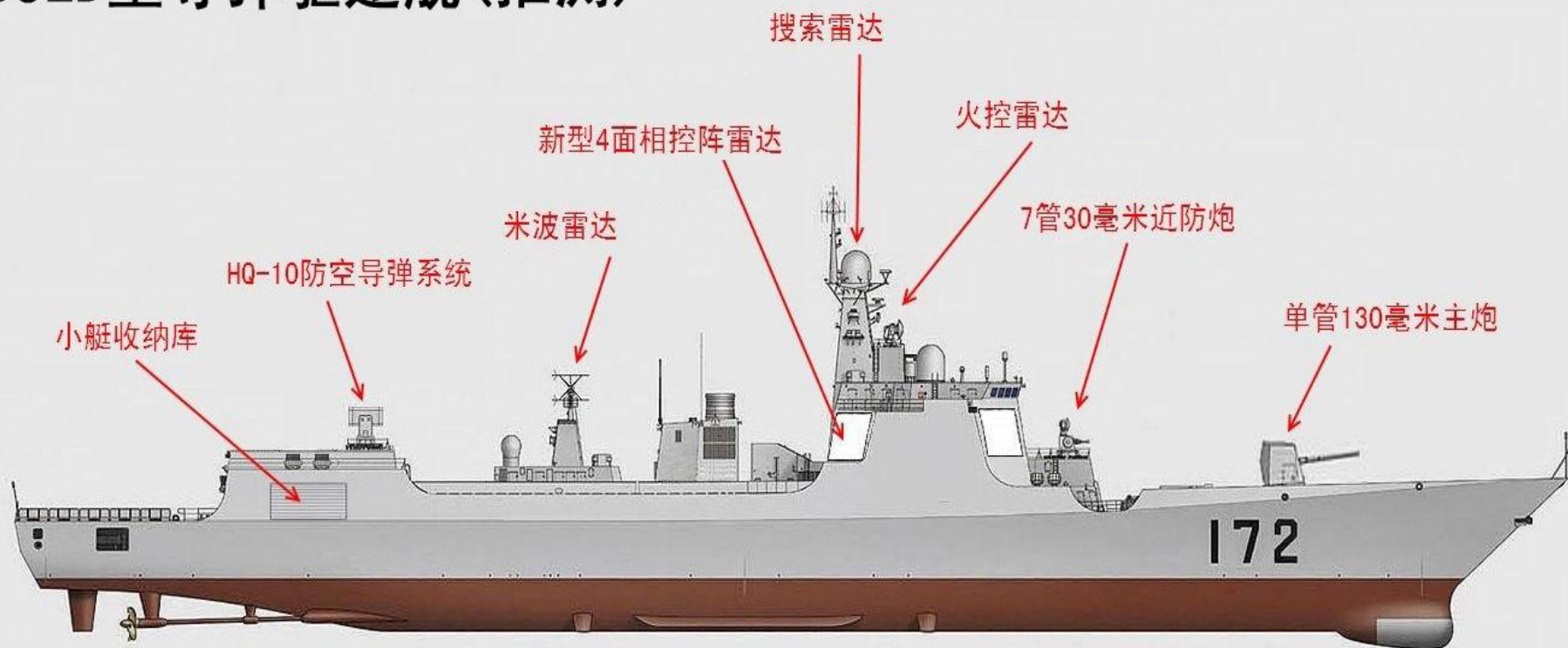
电磁场定义空间区域内外形成场的边界

场在不同介质空间的交界面形成场的边界





052D型导弹驱逐舰(推测)



中置单机库

多用途火箭发射系统

卫星通讯天线

国产柴燃交替动力系统

4×8单元新型导弹垂直发射系统

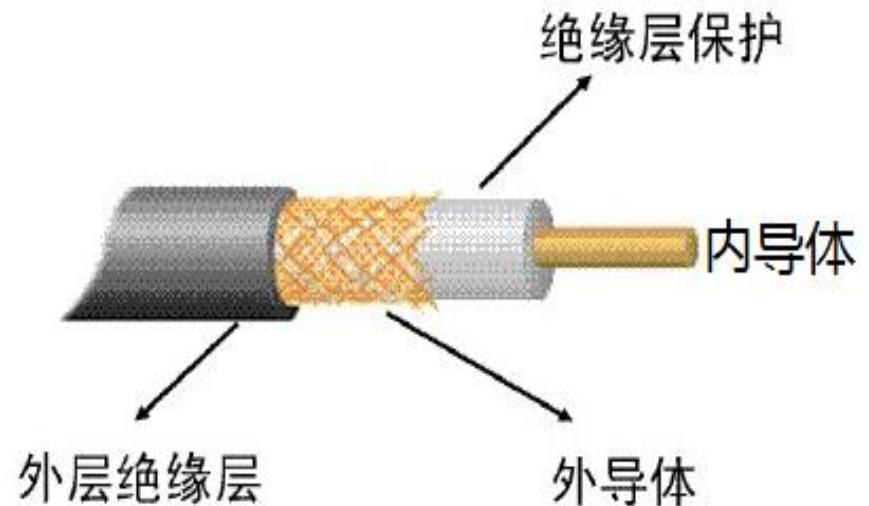
对海搜索雷达

4×8单元新型导弹垂直发射系统



界面两侧介质电磁特性参数不同，场在界面两侧可能不连续。
界面两侧微分方程组失去意义，积分方程仍然有效（为什么？）。

可应用方程组积分式的导出电磁场的边界条件。





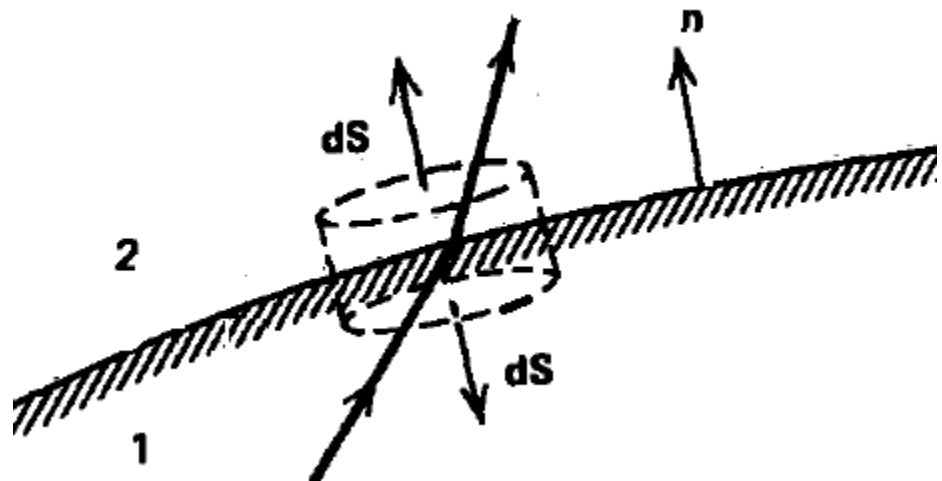
2. 电磁场量的法向条件

把Gauss定理积分式用于媒质交界面扁平圆盘。

令 $h \rightarrow 0$ ，场在圆盘壁上的通量为零，得到：

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = \rho_s$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$



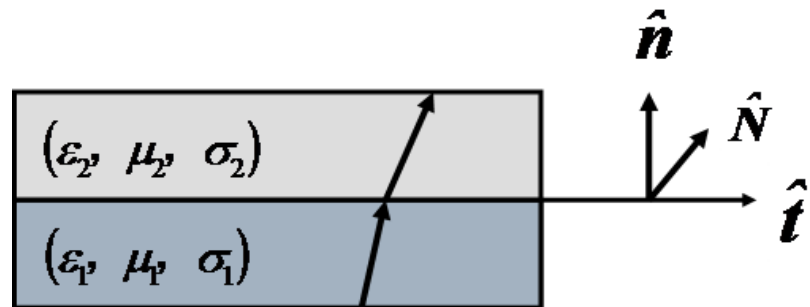
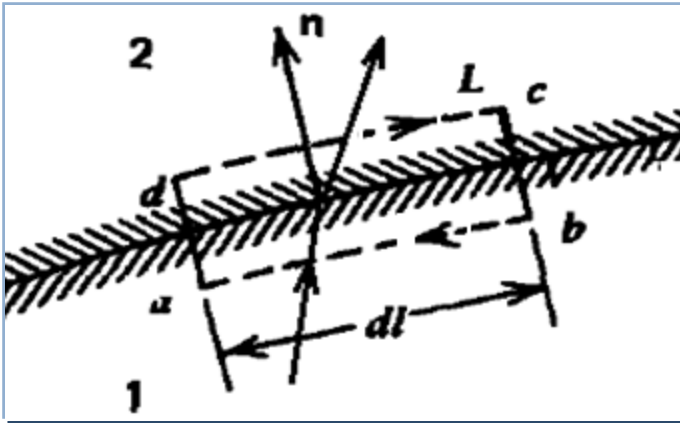


3. 电磁场量的切向条件

在介质分界面两侧，选取如图所示的积环路，应用电磁感应定律、广义安培环路定理

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{N} &= \mathbf{J}_s \cdot \hat{N} \\ \rightarrow \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s \end{aligned}$$





边界条件一般表示：

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s\end{array}\right.$$

理想介质边界条件



理想导体边界条件

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \\ \hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s\end{array}\right.$$

外部介质空间

