第九章习题

（一）

9.1 $$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u(\mathrm{x}\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\dfrac{q}{k} \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \dfrac{q}{k}\end{cases}$$

9.2 $$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\dfrac{F(t)}{ES} \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \dfrac{F(t)}{ES}\end{cases}$$

利用 Hooke 定律，和 x 轴方向一致的 $F(t)$ 取正，反之取负。

9.3 泛定方程：$\mathrm{u}_{\mathrm{t}}(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0$

初始条件：$\mathrm{u}(x,t)\big|_{t=0} = \dfrac{x(l-x)}{2}$

边界条件：在 $x=l$，热流 q 流入 $\begin{cases}u(x,t)\big|_{\mathrm{x}=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \dfrac{q}{k}\end{cases}$，

在 $x=0$，热流 q 流入 $\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \dfrac{-q}{k} \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0\end{cases}$

和 x 轴方向一致的 q 取正，反之取负。

9.8 泛定方程：$\mathrm{u}_{\mathrm{t}}(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0$

初始条件：$\mathrm{u}(x,t)\big|_{t=0} = \phi（x）$

边界条件：（1） $\begin{cases} u(\mathrm{x},t)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$ （2） $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$

（3） 在 $x=l$ 端绝热 $\begin{cases} u(\mathrm{x},t)\big|_{x=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$,

在 $x=0$ 端绝热 $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

（二）

9.1 假设杆是均匀的，所以初始位移是线性的。两端受压 $u(x,0)=\varepsilon(l-2x)$，一端受压 $u(x,0)=-2\varepsilon x$，初速度都是零。

9.2 边界条件 $u(0,t)=0$，$\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$，

初始条件 $u(x,0)=\dfrac{bx}{l}$，$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$。

9.4 提示：写出 $(x，x+dx)$ 的牛顿方程纵、横方向的投影，注意 $x=0$ 处张力等于弦的自重，可证明 $T(x)=\rho g(l-x)$。$u_{tt}=g\left[(l-x)u_x\right]_x$.

9.5 $u_{tt}=a^2\left[(l^2-x^2)u_x\right]_x$，$a=\dfrac{\omega}{\sqrt{2}}$.

第十章习题

（一）

10.1（**1**）$\sin x\cos at+x^2t+\dfrac{1}{3}a^2t^3$ （**2**）$x^3+3a^2xt^2+xt$ （**3**）$t\sin x$

10.2 $u(x,y,z)=x^2t+\dfrac{1}{3}a^2t^3+yzt$

（二）

10.1 $I(t)=\dfrac{q_o}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{LC}}t.$

10.2 $u(x,t)=bt-b(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a}).$

10.3 $u(x,t)=u_o e^{-ht}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-r^2dr}\right).$

10.4 $u(x,y)=xy+y+1.$

10.5 $u(x,t)=u_1+4(u_0-u_1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)\pi}e^{-\frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x.$

10.6 $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2}+\dfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}\varphi(\xi)d\xi.$

第十一章习题

（一）

11.2 （1）

（2）$u(x,t)=\sin\dfrac{3\pi x}{2l}\cos\dfrac{3a\pi t}{2l}+\dfrac{2l}{5a\pi}\sin\dfrac{5\pi x}{2l}\sin\dfrac{5a\pi t}{2l}$

11.3 （1）$\dfrac{2k}{\pi a\rho}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi c}{l}\sin\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$

（2） $u(x,t)=\pi+32\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)^2(2k+3)}\cos\dfrac{(2k+1)x}{2}\sin\dfrac{(2k+1)t}{2}$

（3） $u(x,t)=\dfrac{l}{2}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{-4l}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}e^{-D(2k+1)^2\pi^2t/l^2}$

（4）本征函数是 $\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$，利用本征函数展开 $u(x,t)=\sum T_n(t)\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$，

$A\sin\omega t=\sin\omega t\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$，再解关于 $T_n(t)$ 的微分方程。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4A}{(2n+1)}\frac{4l^2\ [(2n+1)\pi a]^2\sin\omega t-16l^4\omega\cos\omega t+16l^4\omega\ e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/4l}}{[(2n+1)\pi a]^4+16l^4\omega^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

（二）

11.1 $-\dfrac{2cl^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\left(1-e^{-\omega_n^2 t}\right)\sin\alpha_n x+\dfrac{ct}{l}(l-x)$，其中 $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{l}$，$\omega_n=a\alpha_n$。

11.2 由 $E\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\dfrac{Q}{\sigma}$可以求得初始位移， 解是

$$\frac{8Ql}{E\sigma\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\text{。}$$

11.3 $\dfrac{blt^3}{12}+\dfrac{2bl^3}{a^2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^4}\left(t-\dfrac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\cos\alpha_n x+$

$+\dfrac{lt}{2}+\dfrac{2l^2}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\omega_n t\cos\alpha_n x$，其中 $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{l}$，$\omega_n=a\alpha_n$。

11.4 $u(x,t)=\dfrac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$

11.5 提示：要分别求解 n=0、n=1 及 n＞1 时 T（t）的方程。

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-(\frac{\pi a}{l})^2}\left[\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right]\cos\frac{\pi x}{l}.$$

11.6 $u(x,t)=-\dfrac{Ax^2}{2a^2}+\left(\dfrac{Al}{2a^2}+\dfrac{B}{l}\right)x+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}.$

11.7 $u(x,t)=\dfrac{60}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n}e^{-\frac{8n^2xt}{9}}\sin\dfrac{2n\pi x}{3}+10(x+1).$

11.8 $u(x,t)=2xt+(2e^t-e^{-t}-3te^{-t})\cos x$

第十二章习题

（一）

12.2（**1**） $\dfrac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}$， （**2**） $\dfrac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}$，

12.3（**1**） $\dfrac{3}{5}P_1+\dfrac{2}{5}P_3$， （**2**） $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{t^{k+2}}{2k+3}-\dfrac{t^k}{2k-1}\right)P_k(x)$，利用母函数和递推公式。

12.4 利用比较法把边界条件展开成 Lagendre 多项式，$\dfrac{1}{5}r\cos\theta(5r^2\cos^2\theta-3r^2+3)$，

12.5 $2v_0\left(1+rP_1+r^2P_2\right)$。

（二）

12.1 母函数展开式的两边对 x 求导。

12.2（1）从 12.1（4）的递推关系可以看出，$P_l(x)$ 有原函数的，利用这一点计算题中的积分。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{4k+1}{2(2k-1)(k+1)}P_{2k}(x)。$$

（2）$\displaystyle \frac{1}{2}P_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{4k+1}{4(2k-1)(k+1)}P_{2k}(x)$。

12.3 $r<a$，$\displaystyle u(r,\theta)=\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!\ (2k)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$；

$r>a$，$\displaystyle u(r,\theta)=\frac{v_1+v_2}{2}\frac{a}{r}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!\ (2k)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$。

12.4 设想一个同样大小的下半球面，它的温度保持在 $-u_0$，这样能保持底面温度为零，而且不影响上半球内的的解。

$$u_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)。$$

第十三章习题

（一）

13.7 （1）$(-x^3+8x)J_1(x)-4x^2J_0(x)+c$

（2）$6\sqrt[3]{x}J_1(\sqrt[3]{x})-3\sqrt[3]{x^4}J_0(\sqrt[3]{x})+c$

13.9 $\begin{cases}\dfrac{A}{a}\rho\cos\varphi & \rho<a\\[2ex] \dfrac{Aa}{\rho}\cos\varphi & \rho>a\end{cases}$，

13.10 $\displaystyle \frac{r_1}{r_1^2-r_2^2}\frac{r^2-r_2^2}{r}\sin\varphi$。

13.11 $\displaystyle 2u_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(x_m^0\rho/a\right)}{x_m^0J_1(x_m^0)}e^{-D\left(x_m^0/a\right)^2t}$，

13.12 $\displaystyle \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2u_0}{x_m^0}\frac{\mathrm{sh}\left(x_m^0z/a\right)}{\mathrm{sh}\left(x_m^0h/a\right)}\frac{J_0\left(x_m^0\rho/a\right)}{J_1(x_m^0)}$。

（二）

13.1 $\Phi(\varphi)$ 构成第一类齐次边界条件的本征值问题，自然也满足周期性边界条件。

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \rho^{n\pi/\ (\beta-\alpha)} \ \sin\frac{n\pi(\varphi-\alpha)}{(\beta-\alpha)},$$

其中 $A_n = \dfrac{2}{\beta-\alpha} \ a^{-n\pi/\ (\beta-\alpha)} \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\sin\frac{n\pi(\varphi-\alpha)}{\beta-\alpha} \ d\varphi$。

13.2 $\dfrac{u_1+u_2}{2}+\dfrac{2(u_1-u_2)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n+1}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}$,

13.3 $R(\rho)$ 构成第一类齐次边界条件的本征值问题，它的本征值是 $k_m^n = \dfrac{x_m^n}{a}$，$Z(z)$ 构成第二类齐次边界条件的本征值问题，它的本征值是 $\mu = \left(\dfrac{n\pi}{h}\right)^2$，根据 $k^2 = \lambda - \mu$ 可以解关于 $T(t)$ 的方程。

13.4 $8H \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(x_m^0\right)^3 \ J_1\left(x_m^0\right)} \ J_1\left(\frac{x_m^0\rho}{R}\right) \ \cos\left(\frac{ax_m^0 \ t}{R}\right)$。

13.5 （**1**） $b(a^2+b^2)^{-3/2}$，（**2**） $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

第十四章习题

（一）

14.2 $\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(\xi)\left[\frac{1}{x^2+(\xi-y)^2}-\frac{1}{x^2+(\xi+y)^2}\right]d\xi$。

14.5 $\dfrac{-xy}{12}\left(x^2+y^2-a^2\right)$。

14. 6 $G(x,x_o)=\dfrac{i}{2k}e^{ik|x-x_o|}.$

注意：一维亥姆霍兹方程的基本解（无界区域的格林函数）应满足的方程及边界条件为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2G(x,x_o)}{dx^2}+k^2G(x,x_0)=-\delta(x-x_o),\\ G(x,x_o)\Big|_{|x|\to\infty}\text{有限，}G\text{（}x_o^+,x_o)=(G(x_o,x_o)).\end{cases}$$

14. 7 $u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_o^{2\pi}\frac{(R^2-p)^2 f(\varphi')}{R^2+p^2-2Rp\cos a}d\varphi'.$