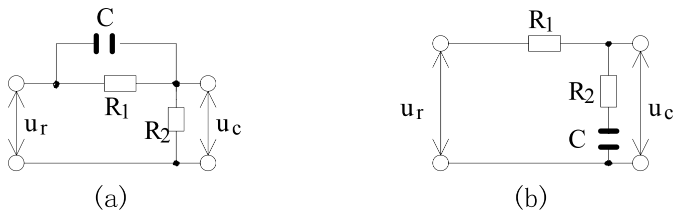
第五章习题与解答

5-1　试求题5-1图(a)、(b)网络的频率特性。



题5-1图　R-C网络

解　(a)依图：$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{R_2}{R_2+\dfrac{R_1\dfrac{1}{sC}}{R_1+\dfrac{1}{sC}}}=\frac{K_1(\tau_1 s+1)}{T_1 s+1}\qquad \begin{cases}K_1=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\\ \tau_1=R_1C\\ T_1=\dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\end{cases}$$

$$G_a(j\omega)=\frac{U_c(j\omega)}{U_r(j\omega)}=\frac{R_2+j\omega R_1R_2C}{R_1+R_2+j\omega R_1R_2C}=\frac{K_1(1+j\tau_1\omega)}{1+jT_1\omega}$$

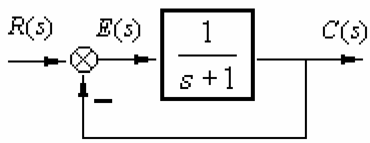
(b)依图：$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{R_2+\dfrac{1}{sC}}{R_1+R_2+\dfrac{1}{sC}}=\frac{\tau_2 s+1}{T_2 s+1}\qquad \begin{cases}\tau_2=R_2C\\ T_2=(R_1+R_2)C\end{cases}$$

$$G_b(j\omega)=\frac{U_c(j\omega)}{U_r(j\omega)}=\frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega(R_1+R_2)C}=\frac{1+j\tau_2\omega}{1+jT_2\omega}$$

5-2　某系统结构图如题5-2图所示，试根据频率特性的物理意义，求下列输入信号作用时，系统的稳态输出 $c_s(t)$ 和稳态误差 $e_s(t)$

（1）　$r(t)=\sin 2t$

（2）　$r(t)=\sin(t+30^\circ)-2\cos(2t-45^\circ)$



题5-2图 反馈控制系统结构图

解　系统闭环传递函数为:　　$\Phi(s)=\dfrac{1}{s+2}$

频率特性:　　$\Phi(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}=\dfrac{2}{4+\omega^2}+j\dfrac{-\omega}{4+\omega^2}$

幅频特性:　　$|\Phi(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$

相频特性:　　$\varphi(\omega)=\arctan(\dfrac{-\omega}{2})$

系统误差传递函数:　　$\Phi_e(s)=\dfrac{1}{1+G(s)}=\dfrac{s+1}{s+2}$,

则　　$|\Phi_e(j\omega)|=\dfrac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{4+\omega^2}}$,　　$\varphi_e(j\omega)=\arctan\omega-\arctan(\dfrac{\omega}{2})$

（1）当 $r(t)=\sin 2t$ 时，$\omega=2$，$r_m=1$

则　　$|\Phi(j\omega)|_{\omega=2}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}=0.35$,　　$\varphi(j2)=\arctan(\dfrac{-2}{2})=-45^\circ$

$$|\Phi_e(j\omega)|_{\omega=2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=0.79,$$

$$\varphi_e(j2)=\arctan\frac{2}{6}=18.4^\circ$$

$$c_{ss}=r_m|\Phi(j2)|\sin(2t-\varphi^\circ)=0.35\sin(2t-45^\circ)$$

$$e_{ss}=r_m|\Phi_e(j2)|\sin(2t-\varphi_e)=0.79\sin(2t+18.4^\circ)$$

（2）　当 $r(t)=\sin(t+30°)-2\cos(2t-45°)$ 时:　$\begin{cases}\omega_1=1, & r_{m1}=1\\ \omega_2=2, & r_{m2}=2\end{cases}$

$$|\Phi(j1)|=\frac{\sqrt{5}}{5}=0.45\qquad \varphi(j1)=\arctan(\frac{-1}{2})=-26.5^\circ$$

$$|\Phi_e(j1)|=\frac{\sqrt{10}}{5}=0.63\qquad \varphi_e(j1)=\arctan(\frac{1}{3})=18.4^\circ$$

$$c_{ss}(t)=r_m|\Phi(j1)|\cdot\sin[t+30^\circ+\varphi(j1)]-r_m|\Phi(j2)|\cdot\cos[2t-45^\circ+\varphi(j2)]$$
$$=0.4\sin(t+3.4^\circ)-0.7\cos(2t-90^\circ)$$

$$e_{ss}(t)=r_m|\Phi_e(j1)|\cdot\sin[t+30^\circ+\varphi_e(j1)]-r_m|\Phi_e(j2)|\cdot\cos[2t-45^\circ+\varphi_e(j2)]$$
$$=0.63\sin(t+48.4^\circ)-1.58\cos(2t-26.6^\circ)$$

5-3　若系统单位阶跃响应

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \qquad t \geq 0$$

试求系统频率特性。

解 $$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}, \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

则 $$\frac{C(s)}{R(s)} = \Phi(s) = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

频率特性为 $$\Phi(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}$$

5-4 绘制下列传递函数的幅相曲线：

(1) $G(s) = K/s$

(2) $G(s) = K/s^2$

(3) $G(s) = K/s^3$

解 (1) $$G(j) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-j(+\frac{\pi}{2})}$$

$$\omega = 0, \qquad |G(j0)| \to \infty$$

$$\omega \to \infty, \qquad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

幅频特性如图解5-4(a)。

(2) $$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = \frac{K}{\omega^2} e^{-j(\pi)}$$

$$\omega = 0, \qquad |G(j0)| \to \infty$$

$$\omega \to \infty, \qquad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\pi$$

幅频特性如图解5-4(b)。

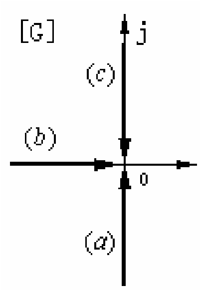
(3) $$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3} = \frac{K}{\omega^3} e^{-j(\frac{3\pi}{2})}$$

$$\omega = 0, \qquad |G(j0)| \to \infty$$

$$\omega \to \infty, \qquad |G(j\infty)| = 0$$

$$\varphi(\omega) = \frac{-3\pi}{2}$$

幅频特性如图解5-4(c)。



图解5-4

5-5 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算 $\omega = 0.5$ 和 $\omega = 2$ 时开环频率特性的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$。

解 $$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{10}{j\omega(1+j2\omega)((1-\omega^2+j0.5\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{10}{\omega\sqrt{1+(2\omega)^2}\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.5\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90°-\arctan 2\omega-\arctan\frac{0.5\omega}{1-\omega^2}$$

计算可得 $\begin{cases}A(0.5)=17.8885\\ \varphi(0.5)=-153.435°\end{cases}$ $\begin{cases}A(2)=0.3835\\ \varphi(2)=-327.53°\end{cases}$

5-6 试绘制下列传递函数的幅相曲线。

(1) $$G(s)=\frac{5}{(2s+1)(8s+1)}$$

(2) $$G(s)=\frac{10(1+s)}{s^2}$$

解 (1) $$|G(j\omega)|=\frac{5}{\sqrt{(1-16\omega^2)^2+(10\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega)=-tg^{-1}2\omega-tg^{-1}8\omega=-tg^{-1}\frac{10\omega}{1-16\omega^2}$$

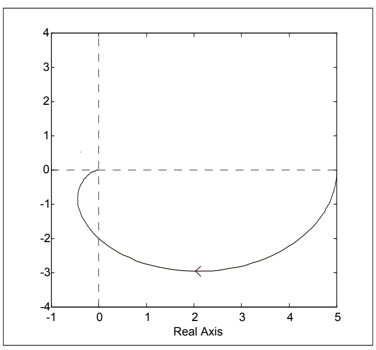
取ω为不同值进行计算并描点画图，可以作出准确图形

三个特殊点： ① ω=0时， $|G(j\omega)|=5,\quad \angle G(j\omega)=0^0$

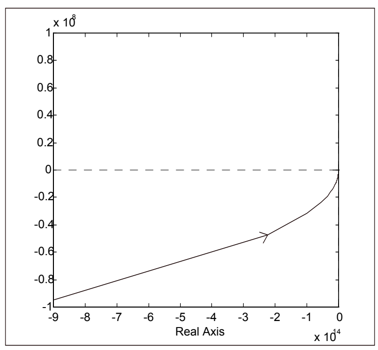
② ω=0.25时， $|G(j\omega)|=2,\quad \angle G(j\omega)=-90°$

③ ω=∞时， $|G(j\omega)|=0,\quad \angle G(j\omega)=-180^0$

幅相特性曲线如图解5-6（1）所示。



图解5-6（1）Nyquist图



图解5-6（2） Nyquist图

(2) $$|G(j\omega)|=\frac{10\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^2}$$

$$\angle G(j\omega)=tg^{-1}\omega-180^0$$

两个特殊点： ① ω=0时， $|G(j\omega)|=\infty$ ，$\angle G(j\omega)=-180^0$

② ω=∞时， $|G(j\omega)|=0$ ，$\angle G(j\omega)=-90^0$

幅相特性曲线如图解5-6（2）所示。

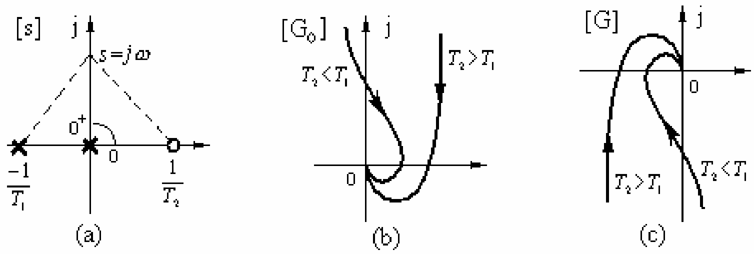
5-7 已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)}；\qquad K,T_1,T_2>0$$

当$\omega=1$时，$\angle G(j\omega)=-180°$，$|G(j\omega)|=0.5$。系统的单位速度稳态误差$e_{ssv}=1$。试写出系统开环频率特性表达式$G(j\omega)$。

解 $G(s)=\dfrac{-K(T_2s-1)}{s(T_1s+1)}$

先绘制$G_0(s)=\dfrac{K(T_2s-1)}{s(T_1s+1)}$的幅相曲线，然后顺时针转180° 即可得到$G(j\omega)$幅相曲线。$G_0(s)$的零极点分布图及幅相曲线分别如图解5-7(a)、(b)所示。$G(s)$的幅相曲线如图解5-7(c)所示。



图解5-7

依题意有： $K_v=\lim\limits_{s\to0}sG(s)=K$， $e_{ssv}=1/K=1$，因此$K=1$。

$$\angle G(j1)=-\arctan T_2-90°-\arctan T_1=-180°$$

$$\arctan T_1+\arctan T_2=\arctan\frac{T_1+T_2}{1-T_1T_2}=90°$$

$$T_1T_2=1$$

另有：
$$|G(j1)|=\left|\frac{(1-jT_2)(1-jT_1)}{1+T_1^2}\right|=\frac{|1-T_1T_2-j(T_1+T_2)|}{1+T_2^2}=\frac{(T_1+T_2)}{1+T_2^2}=0.5$$

$$T_2^2-2T_2+1-2T_1=T_2^2-2T_2+1-2/T_2=0$$

$$T_2^3-2T_2^2+T_2-2=(T_2^2+1)(T_2-2)=0$$

可得：　　　　$T_2=2$，$T_1=1/T_2=0.5$，$K=1$。

所以：　　　　$G(j\omega)=\dfrac{1-j2\omega}{j\omega(1+j0.5\omega)}$

5-8　已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(s^2+1)}$$

试概略绘制系统开环幅相曲线。

解　$G(j\omega)$ 的零极点分布图如图解5-9(a)所示。

$\omega=0\to\infty$ 变化时，有

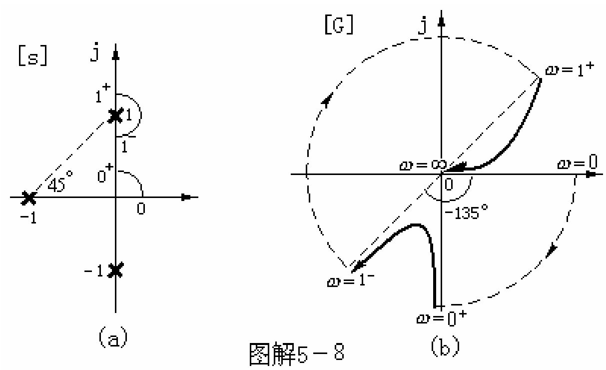
$G(j0^+)=\infty\angle-90°$

$G(j1^-)=\infty\angle-135°$

$G(1^+)=\infty\angle 315°$

$G(j\infty)=0\angle-360°$

分析 s 平面各零极点矢量随 $\omega=0\to\infty$ 的变化趋势，可以绘出开环幅相曲线如图解5-8(b)所示。



图解5－8

5-9　绘制下列传递函数的渐近对数幅频特性曲线。

(1)　$G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$;

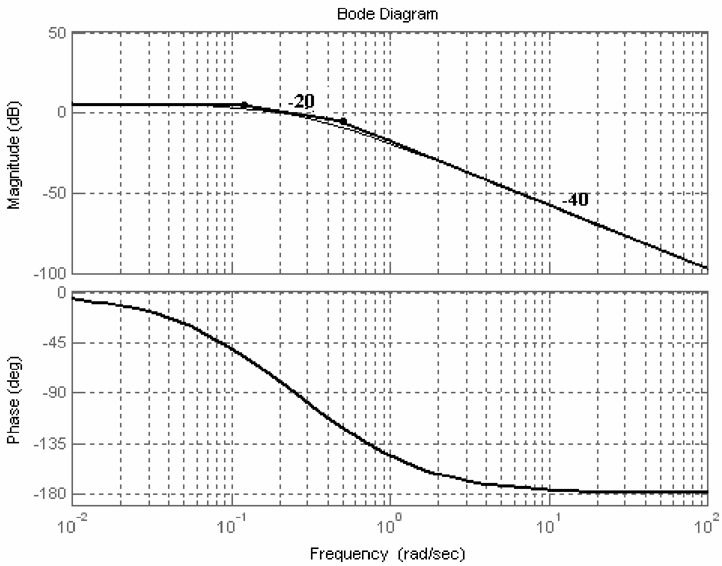
(2)　$G(s)=\dfrac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$;

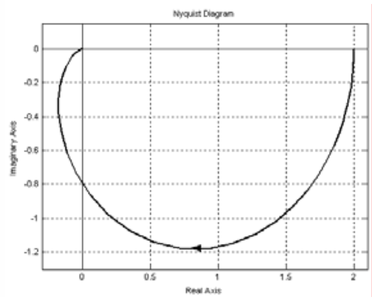
(3)　$G(s)=\dfrac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}$

(4)　$G(s)=\dfrac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$

(5) $$G(s)=\frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$$

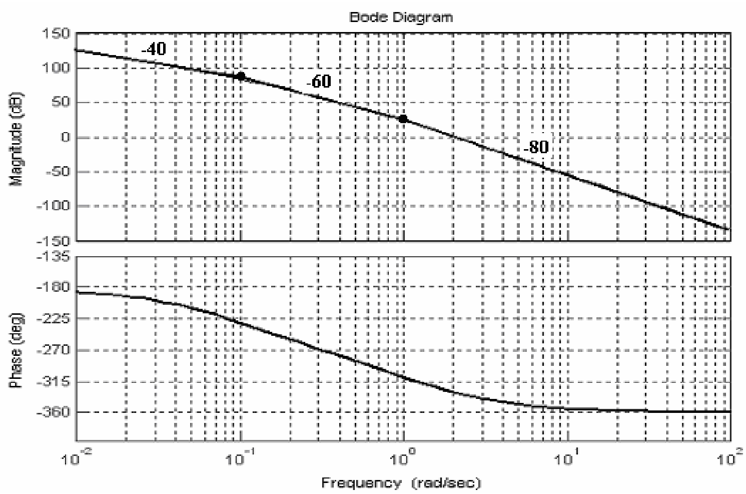
解 (1) $$G(s)=\frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$$

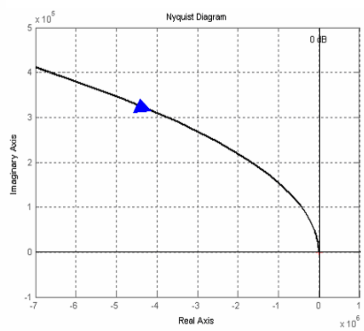




图解5-9（1） Bode图 Nyquist图

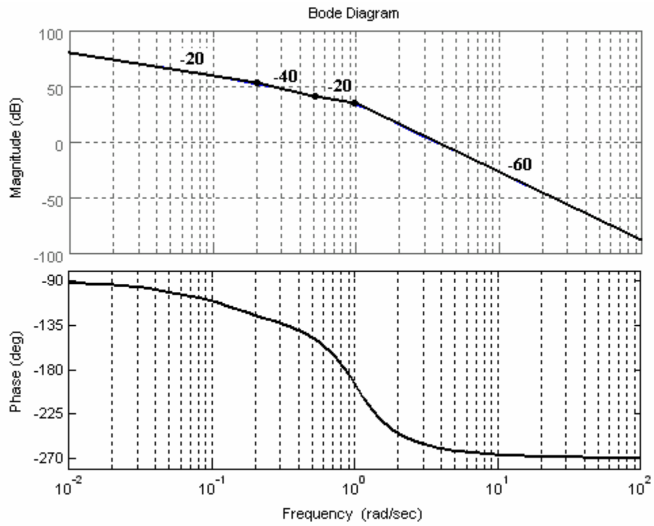
(2) $$G(s)=\frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$$

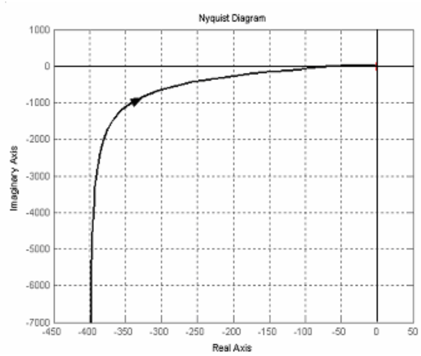




图解5-9（2） Bode图 Nyquist图

(3) $$G(s)=\frac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}=\frac{100(2s+1)}{s(\frac{s}{0.2}+1)(s^2+s+1)}$$

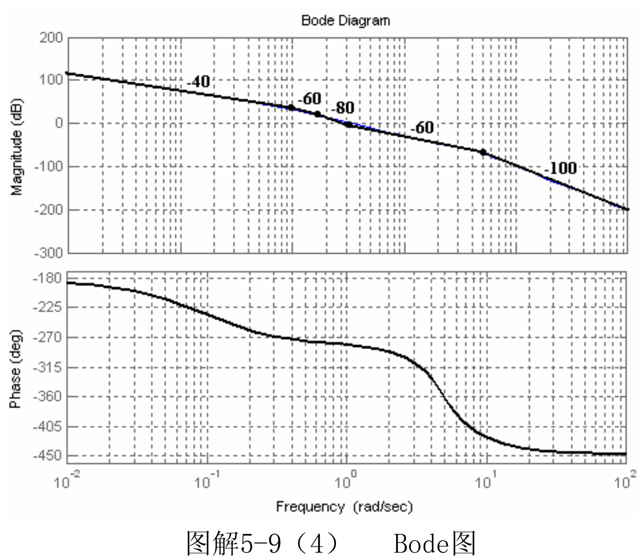


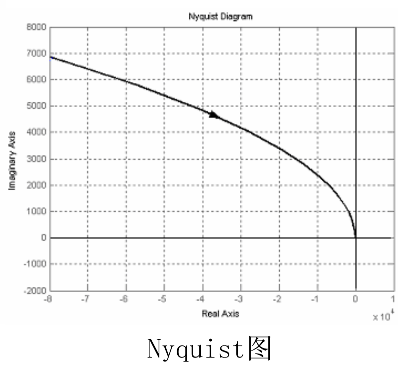


图解5-9（3） Bode图 Nyquist图

(4) $$G(s)=\frac{20(3s+1)}{s^2(6s+1)(s^2+4s+25)(10s+1)}$$

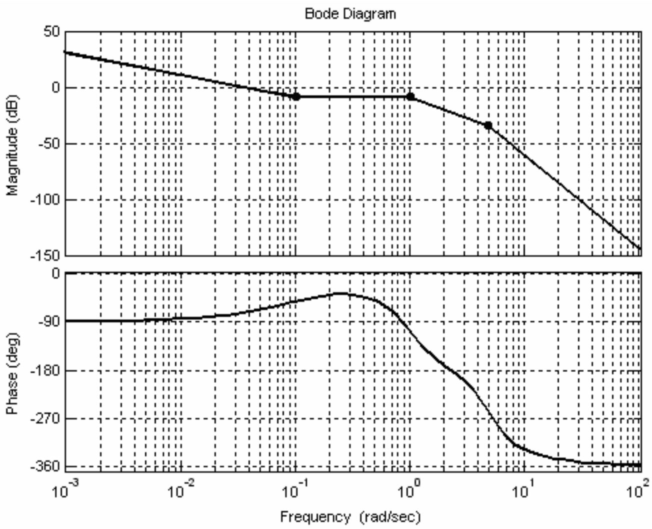
$$G(s)=\frac{\frac{20}{25}(3s+1)}{s^2(6s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{25}s+1\right](10s+1)}$$

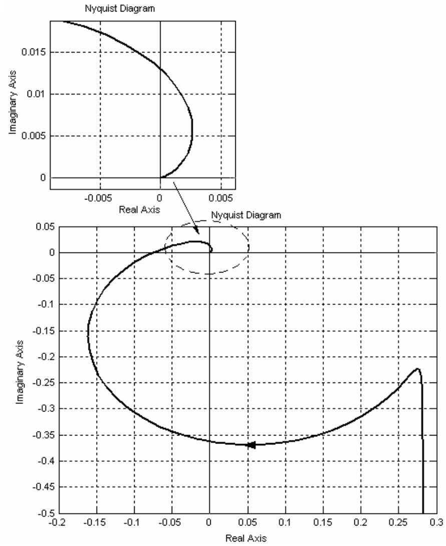




图解5-9（4） Bode图 Nyquist图

(5) $G(s)=\dfrac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}=\dfrac{\dfrac{0.8}{25}\left(\dfrac{1}{0.1}s+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\dfrac{1}{5}s\right)^2+\dfrac{4}{25}s+1\right]}$



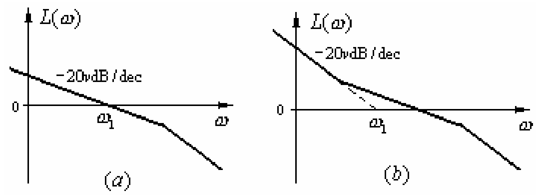


图解5-9（5）　　Bode图　　　　　　　　　　　　Nyquist图

5-10　若传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s^v}G_0(s)$，式中，$G_0(s)$ 为 $G(s)$ 中，除比例和积分两种环节外的部分，试证

$$\omega_1=K^{\frac{1}{v}}$$

式中，ω_1 为近似对数幅频曲线最左端直线（或其延长线）与零分贝线交点的频率，如题5-10图所示。



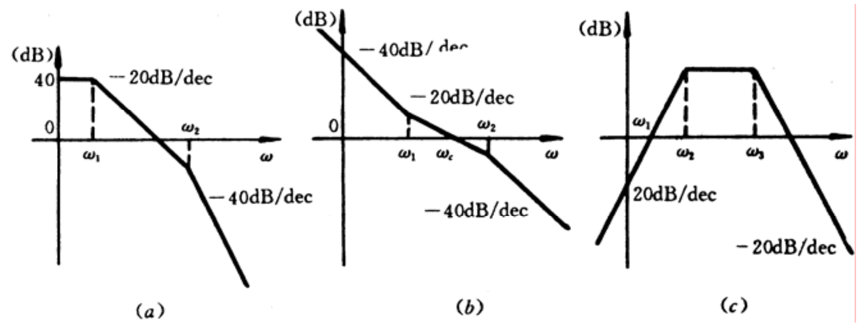
题5-10图

证　依题意，G(s)近似对数频率曲线最左端直线(或其延长线)对应的传递函数为 $\dfrac{K}{s^v}$ 。题意即要证明 $\dfrac{K}{s^v}$ 的对数幅频曲线与0db交点处的频率值 $\omega_1=K^{\frac{1}{v}}$。因此，令 $20\lg\left|\dfrac{K}{(j\omega)^v}\right|=0$，可得 $\dfrac{K}{\omega_1^v}=1$，故 $\omega_1^v=K$，　　$\therefore \omega_1=K^{\frac{1}{v}}$，证毕。

5-11　三个最小相角系统传递函数的近似对数幅频曲线分别如题5-11图(a)、(b)和(c)所示。要求：

（1）写出对应的传递函数；

（2）概略绘制对应的对数幅频和对数相频曲线。

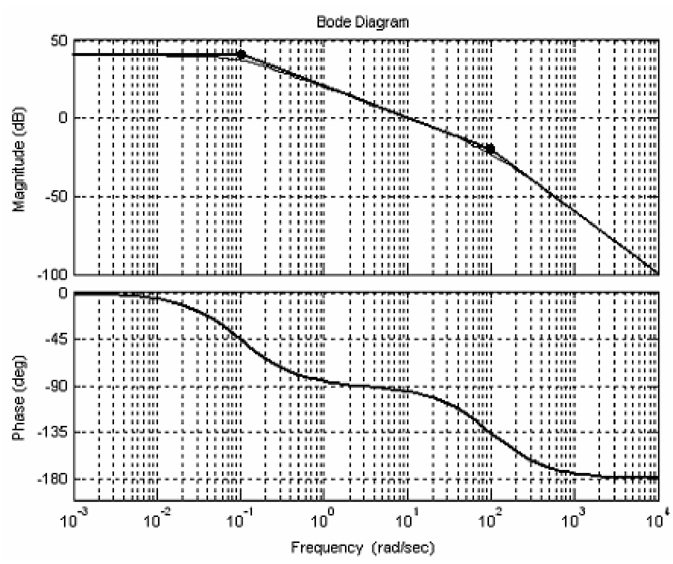


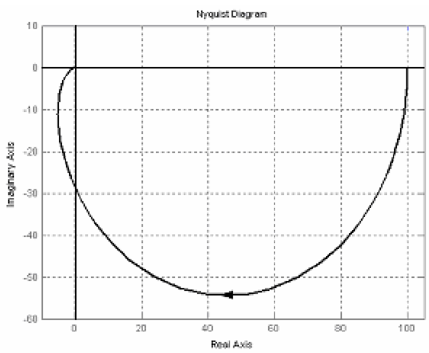
题5-11图

解　(a) 依图可写出：$G(s)=\dfrac{K}{(\dfrac{s}{\omega_1}+1)(\dfrac{s}{\omega_2}+1)}$

其中参数：　　$20\lg K = L(\omega) = 40db$，　　$K=100$

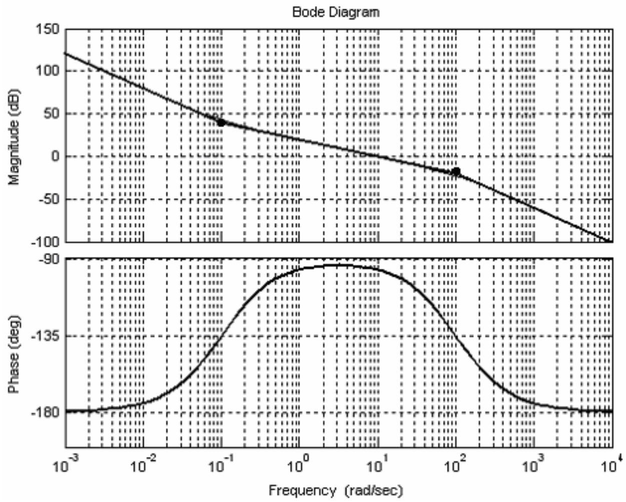
则：　　$$G(s)=\frac{100}{(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$$

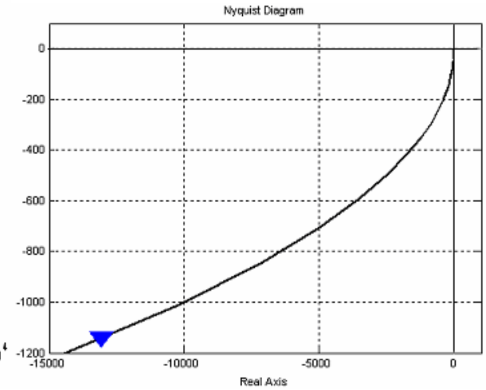




图解5-11（a）　Bode图　　　　　　　　　　Nyquist图

(b) 依图可写出 $$G(s)=\frac{K(\frac{s}{\omega_1}+1)}{s^2(\frac{s}{\omega_2}+1)} \qquad K=\omega_0{}^2=\omega_1\omega_C$$

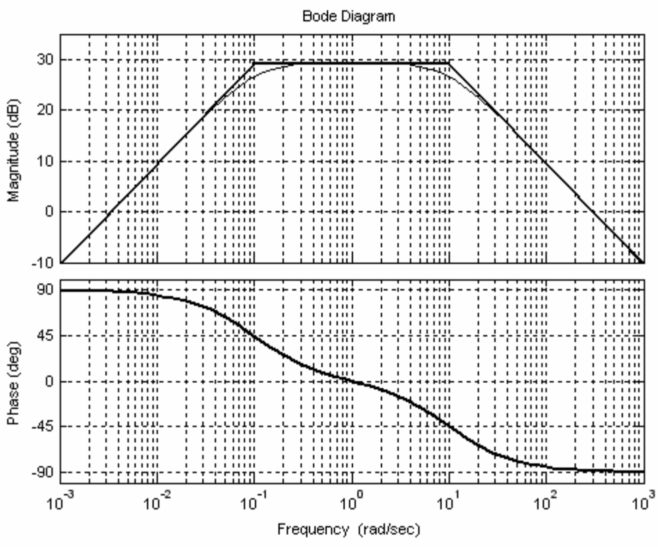


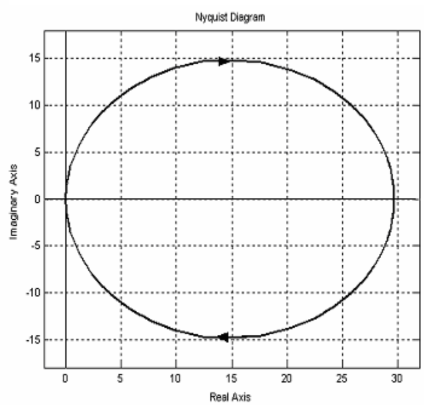


图解5-11（b） Bode图 Nyquist图

(c) $$G(s)=\frac{K\cdot s}{(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$$

$$\because \qquad 20\lg K\omega_1=0, \qquad K=\frac{1}{\omega_1}$$



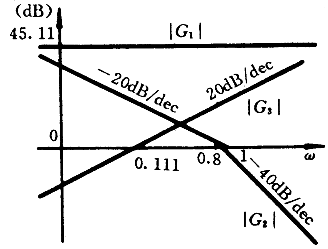


图解5-11（c） Bode图 Nyquist图

5-12 已知$G_1(s)$、$G_2(s)$和$G_3(s)$均为最小相角传递函数，其近似对数幅频曲线如题5-12图所示。试概略绘制传递函数

$$G_4(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}$$

的对数幅频、对数相频和幅相特性曲线。



题5-12图

解：(1) $\because\quad L_1(\omega)=20\lg K_1=45.11$

$\therefore\quad K_1=180$

则：$\quad G_1(s)=K_1$

(2)

$\because\quad L_3(\omega)=20\lg\omega K_3=20\lg 0.111K_3=0$

$\therefore\quad K_3=\dfrac{1}{0.111}=9\quad,\quad G_3(s)=K_3 s$

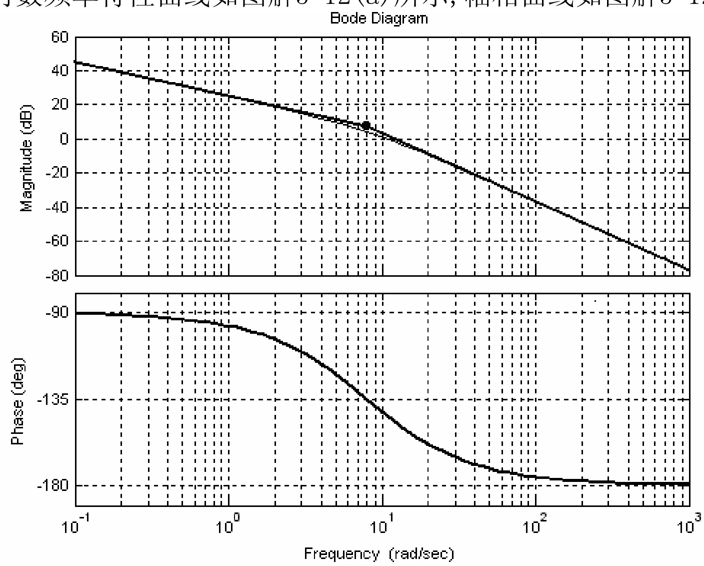
(3) $\quad G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(\dfrac{s}{0.8}+1)}$

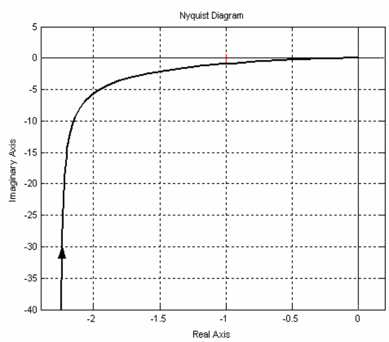
$$20\lg K_2/\omega=20\lg\frac{K_2}{1}=0\ ,\quad K_2=1$$

(4) $\because\quad G_4(s)=\dfrac{G_1G_2}{1+G_2G_3}$

将G_1,G_2,G_3代入得：$G_4(s)=\dfrac{18}{s(0.125s+1)}$

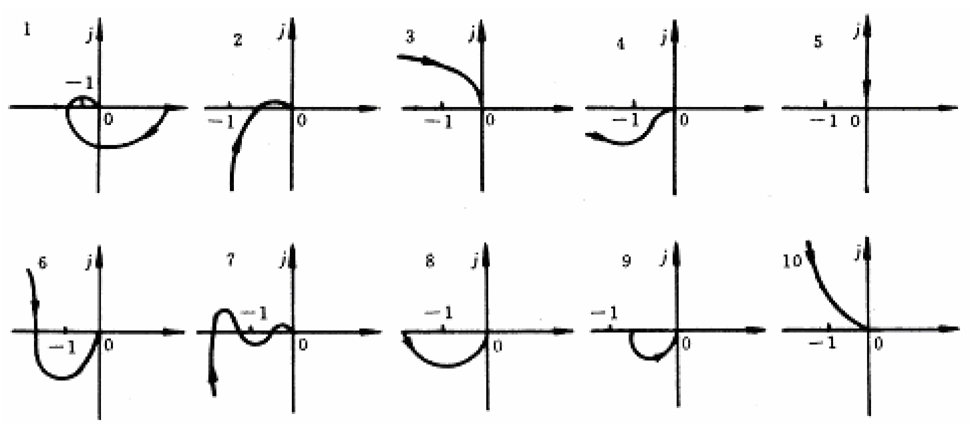
对数频率特性曲线如图解5-12(a)所示,幅相曲线如图解5-12(b)所示：





图解5-12 (a) Bode图 (b) Nyquist图

5-13 试根据奈氏判据，判断题5-13图(1)～(10)所示曲线对应闭环系统的稳定性。已知曲线(1)～(10)对应的开环传递函数分别为（按自左至右顺序）。



题5-13图

解 题5-13计算结果列表

题号	开环传递函数	P	N	$Z=P-2N$	闭环稳定性	备注
1	$G(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	0	−1	2	不稳定	
2	$G(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	0	0	0	稳定	
3	$G(s)=\dfrac{K}{s^2(Ts+1)}$	0	−1	2	不稳定	
4	$G(s)=\dfrac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)} \qquad (T_1>T_2)$	0	0	0	稳定	
5	$G(s)=\dfrac{K}{s^3}$	0	−1	2	不稳定	
6	$G(s)=\dfrac{K(T_1s+1)(T_2s+1)}{s^3}$	0	0	0	稳定	
7	$G(s)=\dfrac{K(T_5s+1)(T_6s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$	0	0	0	稳定	
8	$G(s)=\dfrac{K}{T_1s-1} \qquad (K>1)$	1	1/2	0	稳定	
9	$G(s)=\dfrac{K}{T_1s-1} \qquad (K<1)$	1	0	1	不稳定	
10	$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts-1)}$	1	−1/2	2	不稳定	

5-14　已知系统开环传递函数，试根据奈氏判据，确定其闭环稳定的条件：

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}\text{；}\qquad K,T>0$$

（1）$T=2$ 时，K 值的范围；

（2）$K=10$ 时，T 值的范围；

（3）K,T 值的范围。

解　$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega)(1+jT\omega)}=\frac{-K\left[(1+T)\omega+j(1-T\omega^2)\right]}{\omega(1+\omega^2)(1+T^2\omega^2)}=X(\omega)+Y(\omega)$$

令 $Y(\omega)=0$，解出 $\omega=\frac{1}{\sqrt{T}}$，代入 $X(\omega)$ 表达式并令其绝对值小于1

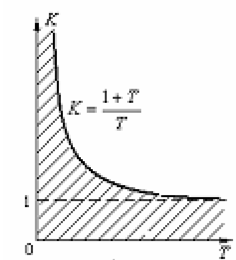
$$\left|X(\frac{1}{\sqrt{T}})\right|=\frac{KT}{1+T}<1$$

得出：　$0<K<\frac{1+T}{T}$　　或　　$0<T<\frac{1}{K-1}$

（1）$T=2$ 时，$0<K<\frac{3}{2}$；

（2）$K=10$ 时，$0<T<\frac{1}{9}$；

（3）K,T 值的范围如图解5-14中阴影部分所示。



图解5-14

5-15　已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{10(s^2-2s+5)}{(s+2)(s-0.5)}$$

试概略绘制幅相特性曲线，并根据奈氏判据判定闭环系统的稳定性。

解　作出系统开环零极点分布图如图解5-15（a）所示。$G(j\omega)$ 的起点、终点为：

$$G(j0)=50\angle 180°$$

$$G(j\infty)=10\angle 0°$$

$G(j\omega)$ 与实轴的交点：

$$G(j\omega)=\frac{10(5-\omega^2-j2\omega)}{(2+j\omega)(-0.5+j\omega)}$$

$$=\frac{10\left[-(5-\omega^2)(1+\omega^2)+3\omega^2+j\omega(-5.5+3.5\omega^2)\right]}{(1+\omega^2)^2+(1.5\omega)^2}$$

令 $\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=0$　可解出

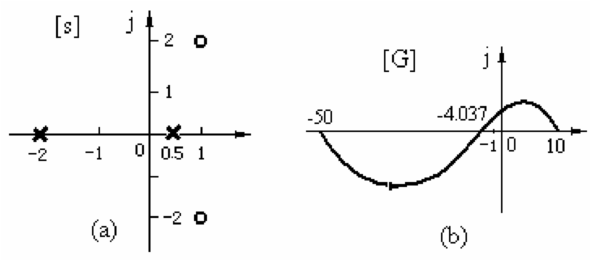
$$\omega_0=\sqrt{5.5/3.5}=1.254$$

代入实部　　　　　$\mathrm{Re}\left[G(j\omega_0)\right]=-4.037$

概略绘制幅相特性曲线如图解5-15（b）所示。根据奈氏判据有

$$Z=P-2N=1-2(\frac{-1}{2})=2$$

所以闭环系统不稳定。

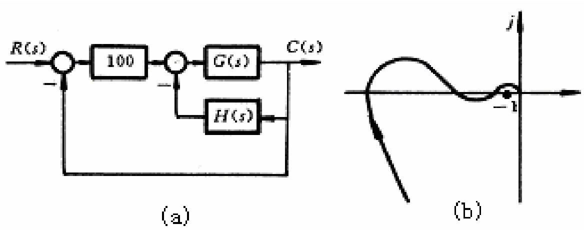


图解5-15

5-16　某系统的结构图和开环幅相曲线如题5-16图(a)、(b)所示。图中

$$G(s)=\frac{1}{s(1+s)^2}\quad ,\quad H(s)=\frac{s^3}{(s+1)^2}$$

试判断闭环系统稳定性，并决定闭环特征方程正实部根个数。



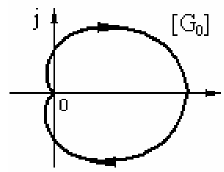
题5-16图

解　内回路开环传递函数：　$G_0(s)=G(s)H(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)^4}$

$$G(j0)=0\angle 0$$

$$G(j0^+)=0\angle 180^0$$

$$G(j\infty)=0\angle -180^0$$



图解5-16

大致画出$G_0(j\omega)$的幅相曲线如图解5-16所示。可见$G_0(j\omega)$不会包围（-1,j0）点。

$$\therefore\quad Z_0=P_0-2N_0=0-2\times 0=0$$

即内回路小闭环一定稳定。内回路小闭环极点（即开环极点）在右半S平面的个数为0。

$$P=Z_0=0$$

由题5-16图(b)看出:系统开环频率特性包围（-1,j0）点的圈数　N=-1。根据劳斯判据

$$Z=P-2N=Z_1-2N=0-2\times(-1)=2$$

系统不稳定，有两个闭环极点在右半S平面。

5-17 已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{10}{s(0.2s^2+0.8s-1)}$$

试根据奈氏判据确定闭环系统的稳定性。

解 作出系统开环零极点分布图如图解5-17(a)所示。

$$G(j\omega)=\frac{10}{j\omega(1+j0.2\omega)(1-j\omega)}=\frac{10[0.8\omega-j(1+0.2\omega^2)]}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$G(j\omega)$ 的起点、终点为：

$$G(j0)=\infty\angle-180^\circ$$

$$G(j0^+)=\infty\angle-270^\circ$$

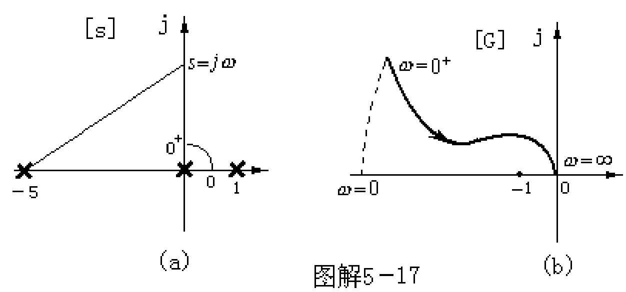
$$G(j\infty)=0\angle-270^\circ$$

$$\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-8$$

幅相特性曲线 $G(j\omega)$ 与负实轴无交点。由于惯性环节的时间常数 $T_1=0.2$，小于不稳定惯性环节的时间常数 $T_2=1$，故 $\varphi(\omega)$ 呈现先增大后减小的变化趋势。绘出幅相特性曲线如图解5-17(b)所示。根据奈氏判据

$$Z=P-2N=1-2\times(\frac{-1}{2})=2$$

表明闭环系统不稳定。



图解5-17

5-18 已知单位反馈系统的开环传递函数，试判断闭环系统的稳定性。

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(\frac{s^2}{4}+1)}$$

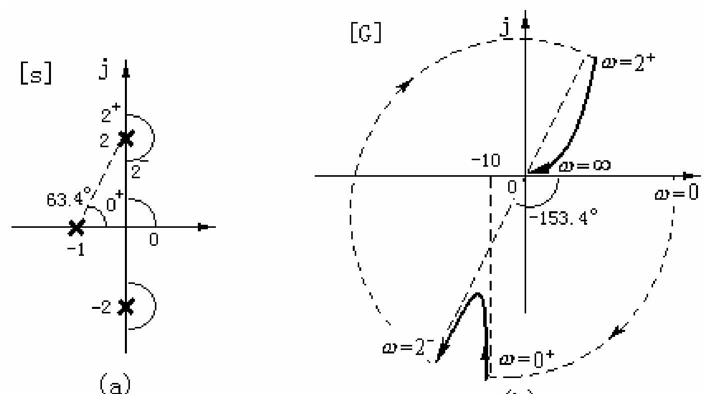
解 作出系统开环零极点分布图如图解5-18(a)所示。当 $\omega=0\to\infty$ 变化时，$G(j\omega)$ 的变化趋势：

$$G(j0)=\infty\angle 0^\circ$$
$$G(j0^+)=\infty\angle -90^\circ$$
$$G(j2^-)=\infty\angle -153.4^\circ$$
$$G(j2^+)=\infty\angle -333.4^\circ$$
$$G(j\infty)=0\angle -360^\circ$$

绘出幅相特性曲线$G(j\omega)$如图解5-18(b)所示。根据奈氏判据

$$Z=P-2N=0-2\times(-1)=2$$

表明闭环系统不稳定。



图解5－18

5-19 反馈系统，其开环传递函数为

(1) $$G(s)=\frac{100}{s(0.2s+1)}$$

(2) $$G(s)=\frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

(3) $$G(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

(4) $$G(s)=\frac{100(\frac{s}{2}+1)}{s(s+1)(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{20}+1)}$$

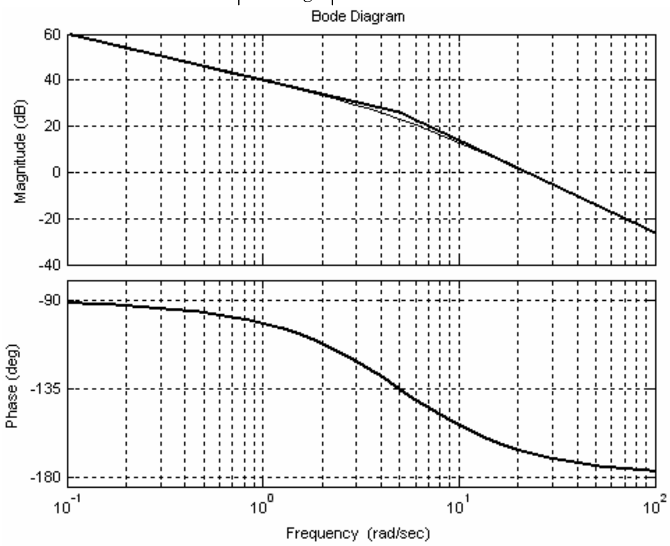
试用奈氏判据或对数稳定判据判断闭环系统的稳定性，并确定系统的相角裕度和幅值裕度。

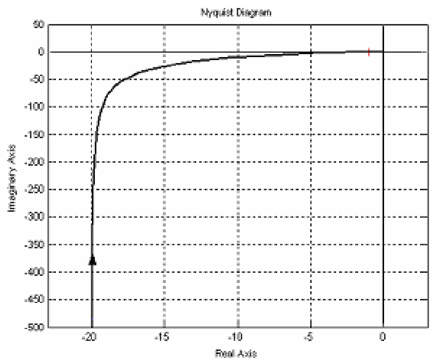
解 (1) $$G(s)=\frac{100}{s(0.2s+1)}=\frac{100}{s(\frac{s}{5}+1)}$$

画Bode图得：$\begin{cases}\omega_C=\sqrt{5\times100}=22.36\\ \omega_g=\infty\end{cases}$

$$\gamma=180^0+\angle G(j\omega)=180^0-90^0-tg^{-1}0.2\omega_C=12.6^0$$

$$h=\frac{1}{|G(\omega_g)|}=\infty$$





图解5-19 (1)　　Bode图　　Nyquist图

(2)　　$G(s)=\dfrac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}=\dfrac{50}{(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{2}+1)(2s+1)}$

画Bode图判定稳定性：Z=P-2N=0-2×(-1)=2　系统不稳定。

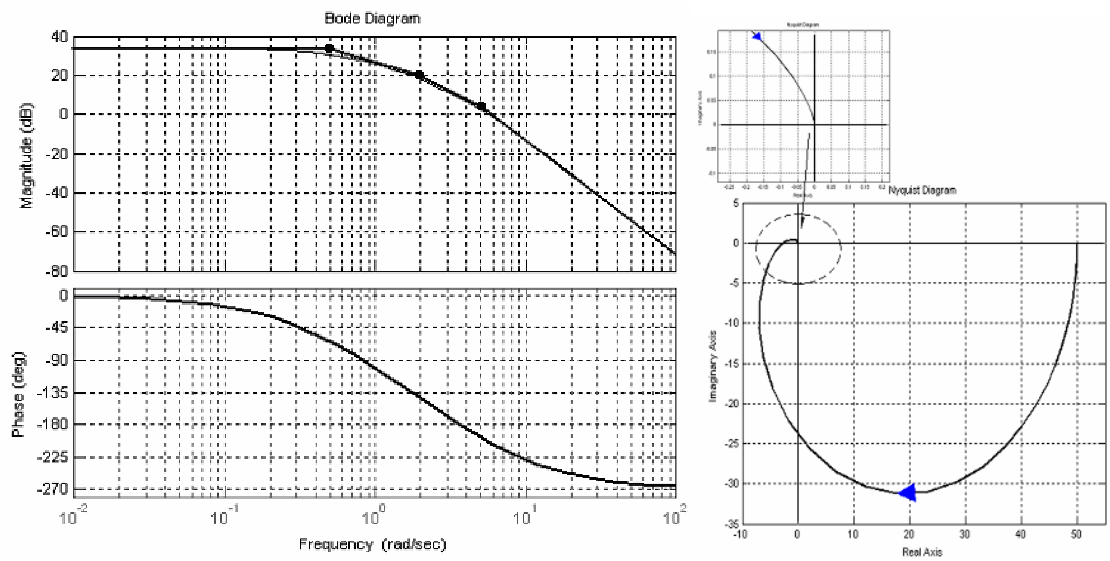
由Bode图得：$\omega_c>6$

令：　$|G(j\omega)|=1\approx\dfrac{50}{\frac{\omega_c}{5}\cdot\frac{\omega_c}{2}\cdot2\omega_c}$　解得　$\omega_c=6.3$

令：　$\angle G(j\omega_g)=tg^{-1}\dfrac{\omega_g}{5}-tg^{-1}\dfrac{\omega_g}{2}-tg^{-1}2\omega_g=-180^0$　解得　$\omega_g=3.7$

$$\gamma=180^0+\angle G(j\omega)=180^0-tg^{-1}\frac{\omega_C}{5}-tg^{-1}\frac{\omega_C}{2}-tg^{-1}2\omega_C=-29.4^0$$

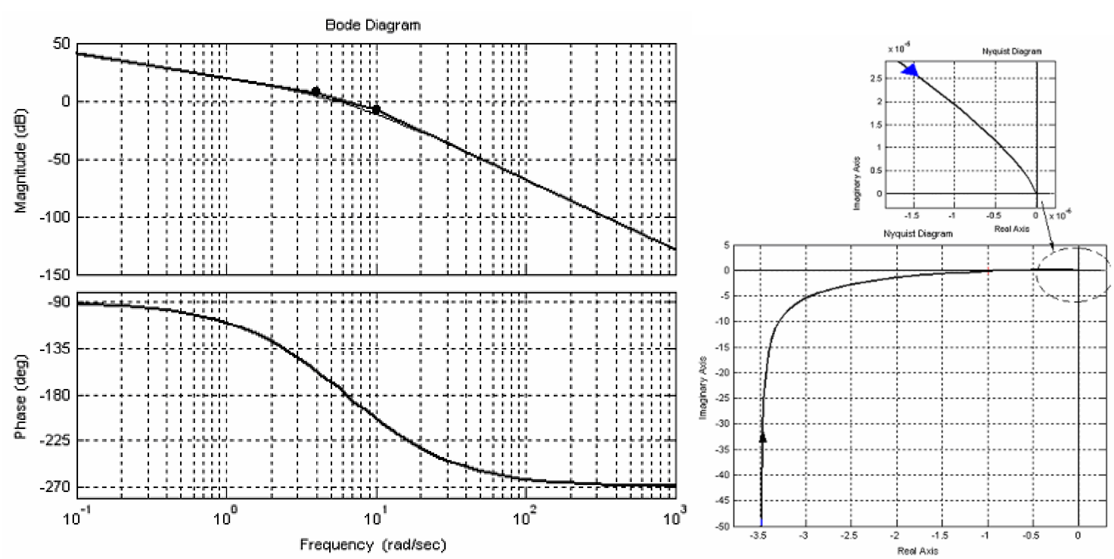
$$h=\frac{1}{|G(\omega_g)|}=\frac{\sqrt{(\frac{\omega_g}{5})^2+1}\sqrt{(\frac{\omega_g}{2})^2+1}\sqrt{(2\omega_g)^2+1}}{50}=0.391$$



图解5-19 (2)　　Bode图　　　　　　　　Nyquist图

(3) $$G(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}=\frac{10}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{4}+1)}$$

画Bode图得： $\begin{cases}\omega_C=\sqrt{4\times10}=6.325\\ \omega_g=\sqrt{4\times10}=6.325\end{cases}$ $\begin{cases}\gamma=0^0\\ h=1\end{cases}$ 系统临界稳定。



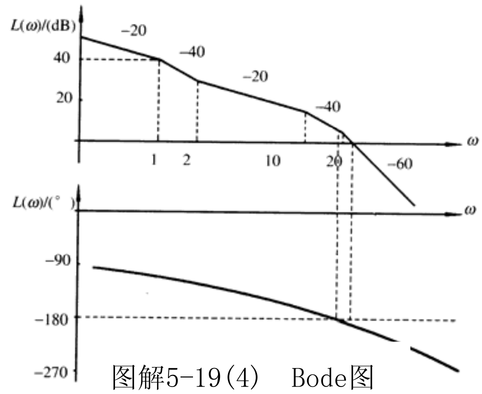
图解5-19 (3)　　Bode图　　　　　　　　Nyquist图

(4) $$G(s)=\frac{100(\frac{s}{2}+1)}{s(s+1)(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{20}+1)}$$

画Bode图得：$\begin{cases}\omega_c=21.5\\ \omega_g=13.1\end{cases}$

$$\begin{cases}\gamma=180°+\angle\varphi(\omega_c)=-24.8°\\ h=0.343=-9.3(dB)\end{cases}$$

系统不稳定。



图解5-19(4) Bode图

5-20 设单位反馈控制系统的开环传递函数，试确定相角裕度为45° 时的α值.

$$G(s)=\frac{as+1}{s^2}$$

解 $$G(j\omega)==\frac{\sqrt{1+(a\omega)^2}}{\omega^2}\angle(tg^{-1}a\omega-180^0)$$

开环幅相曲线如图所示。以原点为圆心作单位圆，在A点：

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+a^2{\omega_c}^2}}{{\omega_c}^2}=1$$

即： $${\omega_c}^4=a^2{\omega_c}^2+1 \qquad (1)$$

要求相位裕度 $\gamma=180^0+\varphi(\omega_c)=45^0$

即： $\varphi(\omega_c)=tg^{-1}a\omega_c-180°=45^0-180^0=-135^0$

$\therefore$ $$a\omega_c=1 \qquad (2)$$

联立求解（1）、（2）两式得：$\omega_c=1.19$， $a=0.84$。

5-21 系统中

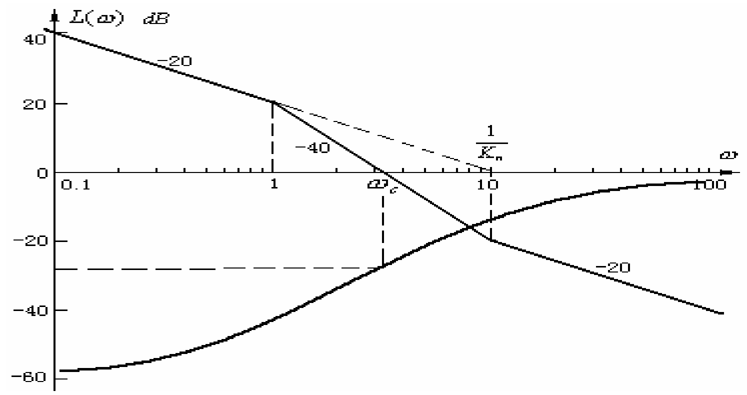
$$G(s)=\frac{10}{s(s-1)},\qquad H(s)=1+K_hs$$

试确定闭环系统临界稳定时的Kh。

解 开环系统传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10(1+K_ns)}{s(s-1)}$$

法(一):画伯特图如图解5-21所示



图解5-21

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{10(K_n j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)}$$

临界稳定时 $\varphi(\omega_c)=-90^0-180^0+tg^{-1}\omega_c+tg^{-1}K_n\omega_c=-180^0$

$$tg^{-1}\omega_c+tg^{-1}K_n\omega_c=90^0$$

$$\frac{\omega_c+K_n\omega_c}{1-\omega_c K_n\omega_c}=\infty$$

$$1-K_n{\omega_c}^2=0$$

$$K_n=\frac{1}{{\omega_c}^2}$$

由Bode图 $\omega_c=3.16$

$\therefore$ $K_n\approx 0.1$

法(二) $\because$ $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{10(1+K_n j\omega)}{j\omega(j\omega-1)}=u(\omega)+jv(\omega)$

$$u(\omega)=\frac{10\omega(1+K_n)}{-\omega(\omega^2+1)}\quad ;\quad v(\omega)=\frac{10(K_n\omega^2-1)}{-\omega(\omega^2+1)}$$

令 $v(\omega)=0$ ，则 $10(K_n\omega^2-1)=0$ $\therefore$ $\omega^2=1/K_n$

$$\therefore\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{K_n}} \tag{1}$$

又令 $u(\omega)=\dfrac{10\omega(1+K_n)}{-\omega(\omega^2+1)}=-1$

代入(1)得： $10(1+K_n)=(\dfrac{1}{K_n}+1)$

$$10{K_n}^2+9K_n-1=0$$

解出：　$K_n = \dfrac{-9 \pm \sqrt{121}}{20}$　$\therefore K_n = \dfrac{1}{10}$　$, K_n = -1$（舍去）。

故当$\omega = \sqrt{10}$ 1/秒，$K_n = 1/10$时，系统临界稳定。

5-22　若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的K的临界值。

解　$\because G(j\omega) = \dfrac{K}{1+j\omega} e^{-j0.8\omega}$

幅频特性为　$|G(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}$

相频特性为　$\varphi(\omega) = \angle e^{-j0.8\omega} + \angle \dfrac{1}{1+j\omega} = -0.8\omega + tg^{-1}(-\omega)$

求幅相特性通过(-1, j0)点时的K值

即　$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \tag{1}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -0.8\omega - tg^{-1}\omega = -\pi \tag{2}$$

由(2)式　$tg^{-1}\omega = \pi - 0.8\omega$

$$tg(tg^{-1}\omega) = tg(\pi - 0.8\omega) = -tg0.8\omega$$

$$\therefore \omega = -tg0.8\omega$$

代入(1)：　$\dfrac{K}{\sqrt{1+[tg(0.8\omega)]^2}} = 1$

$\therefore$　$K = \sqrt{1+[tg(0.8\omega)]^2} = \sec 0.8\omega$

解出 :　$\omega_c = 2.45$　,　$K = 2.65$

5-23　设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定的延迟时间τ的范围。

解　令　$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = 1 \tag{1}$$

$$\angle G(j\omega) = 180^0 - \tau\omega\frac{180}{\pi} - 4tg^{-1}\omega = 180^0 \tag{2}$$

由(1):　$1 + \omega^2 = \sqrt{5}\omega$

解得：　$\omega_1 = 1.618,$　$\omega_2 = 0.618$(舍去)

将ω=0.618代入(2)式：

$$\tau\omega\cdot\frac{180}{\pi}=360^0-4tg^{-1}\omega$$

解得：τ=1.3686,由图可见：当τ〈1.3686时，G(jω)不包围(-1,j0)点,所以τ的稳定范围是：　　　　0<τ<1.3686

5-24　某最小相角系统的开环对数幅频特性如题5-24图所示。要求

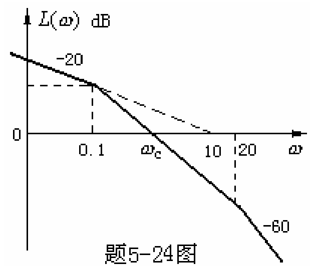
（1）写出系统开环传递函数；

（2）利用相角裕度判断系统的稳定性；

（3）将其对数幅频特性向右平移十倍频程，试讨论对系统性能的影响。

解（1）由题5-29图可以写出系统开环传递函数如下：

$$G(s)=\frac{10}{s(\frac{s}{0.1}+1)(\frac{s}{20}+1)}$$



题5-24图

（2）系统的开环相频特性为

$$\varphi(\omega)=-90°-\arctan\frac{\omega}{0.1}-\arctan\frac{\omega}{20}$$

截止频率　　$\omega_c=\sqrt{0.1\times10}=1$

相角裕度　　$\gamma=180°+\varphi(\omega_c)=2.85°$

故系统稳定。

（3）将其对数幅频特性向右平移十倍频程后，可得系统新的开环传递函数

$$G(s)=\frac{100}{s(s+1)(\frac{s}{200}+1)}$$

其截止频率　　$\omega_{c1}=10\omega_c=10$

而相角裕度　　$\gamma_1=180°+\varphi(\omega_{c1})=2.85°=\gamma$

故系统稳定性不变。由时域指标估算公式可得

$$\sigma\%=0.16+0.4(\frac{1}{\sin\gamma}-1)=\sigma_1\%$$

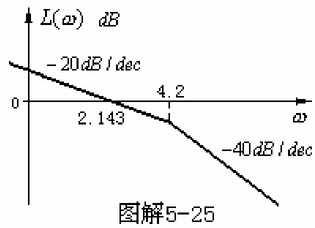
$$t_s=\frac{K_0\pi}{\omega_c}=\frac{K_0\pi}{10\omega_{c1}}=0.1t_{s1}$$

所以，系统的超调量不变，调节时间缩短，动态响应加快。

5-25　对于典型二阶系统，已知参数$\omega_n=3$，$\xi=0.7$，试确定截止频率ω_c和相角裕度γ。

解　依题意，可设系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}=\frac{3^2}{s(s+2\times0.7\times3)}=\frac{2.143}{s(\frac{s}{4.2}+1)}$$



图解5-25

绘制开环对数幅频特性曲线$L(\omega)$如图解5-25所示，得

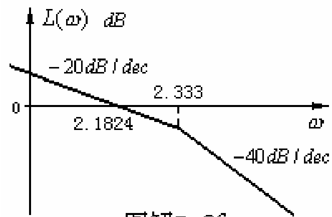
$$\omega_c=2.143$$

$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=63^\circ$$

5-26　对于典型二阶系统，已知σ%=15%，$t_s=3\,\mathrm{s}$，试计算相角裕度γ。

解　依题意，可设系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$



图解5-26

依题
$$\begin{cases}\sigma\%=15\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\\ t_s=3=3.5/\xi\omega_n\end{cases}$$

联立求解
$$\begin{cases}\xi=0.517\\ \omega_n=2.257\end{cases}$$

有
$$G(s)=\frac{2.257^2}{s(s+2\times0.517\times2.257)}=\frac{2.1824}{s(\frac{s}{2.333}+1)}$$

绘制开环对数幅频特性曲线$L(\omega)$如图解5-26所示，得

$$\omega_c=2.1824$$

$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=46.9^\circ$$

5-27　一单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s)=\frac{16.7s}{(0.8s+1)(0.25s+1)(0.0625s+1)}$$

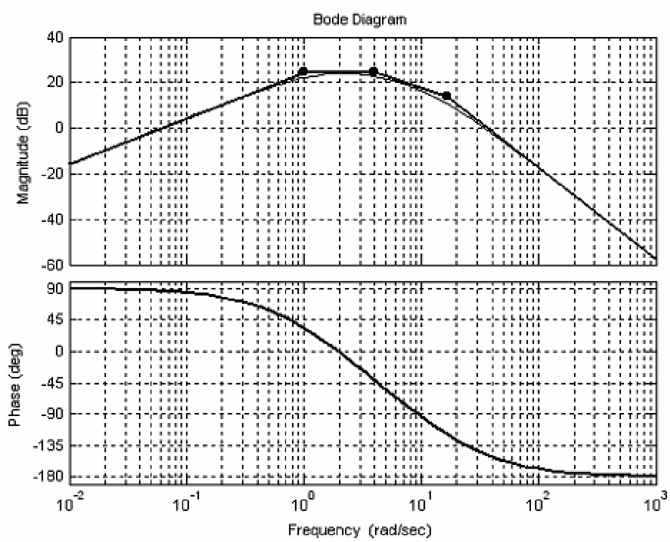
试应用尼柯尔斯图线，绘制闭环系统对数幅频和相频曲线。

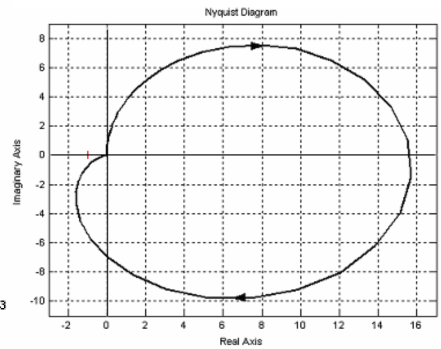
解　由G(s)知：20lg16.7=24.5db

交接频率：$\omega_1=\dfrac{1}{0.8}=1.25$，$\omega_2=\dfrac{1}{0.25}=4$，$\omega_3=\dfrac{1}{0.0625}=16$

应用尼柯尔斯曲线得：

ω	0.01	0.05	0.1	0.3	0.6	3	10	20	30	40	50	60	70	80	100
|G|db	-15	-2	4	13	19	24	15	7	2	-3	-7	-10	-13	-16	-20
$\phi(\omega)^0$	88	85	83	70	54	-23	-94	-127	-143	-151	-156	-160	-163	-164	-166
M (db)	-15	-4.5	-2	-.75	-0.6	-0.5	0	1.8	4.3	2.3	-3.4	-7.5	-11	-16	-20
$\alpha(\omega)^0$	69	48	30	12	5	-1	-11	-28	-53	-110	-140	-152	-158	-162	-165

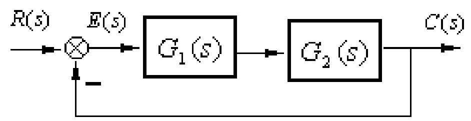




图解5-27　　　　　　　Bode图　　　　　　　　　　　　　　　Nyquist图

5-28　一控制系统，其结构图如题5-28图所示，图中

$$G_1(s)=\frac{10(1+s)}{1+8s},\quad G_2(s)=\frac{4.8}{s(1+\frac{s}{20})}$$



题5-28图　某控制系统结构图

试按以下数据估算系统时域指标σ%和ts。

（1）γ和ωc

（2）Mr和ωc

（3）闭环幅频特性曲线形状

解　(1)　$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\dfrac{48(1+s)}{s(1+8s)(1+\frac{s}{20})}$

$$20\lg 48=33.6db$$

$$\omega_1=1/8=0.125\quad,\quad \omega_2=1\quad,\quad \omega_3=20$$

$$\therefore\quad \omega_c=6\quad,\quad \gamma\approx 65^0$$

查图5-55 得 $\sigma\%=21\%,\quad t_S=\dfrac{6.6}{\omega_C}=1.13$秒

(2) 根据M_r,ω_C估算性能指标

当 ω=5 时：L(ω)=0，φ(ω)=-111°

找出：　　　$M_r=\dfrac{1}{\sin r}=1.103,\quad (r=65^\circ),\quad \omega_C$=6

查图5-61 得 $\sigma\% = 21\%$， $t_S = \dfrac{6.8}{\omega_C} = 1.13$秒

(3) 根据闭环幅频特性的形状

ω	0.3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L(db)	36	18	9.5	5	3	0	-2	-4	-5	-7	-20
φ(°)	-142.5	-130	-118.5	-114	-111	-111	-112.5	-115.5	-118.5	-124	-148
M(db)	0	0.68	1	1.05	0	1.1	-2.1	-3.3	-4	-5.5	-19.3

令 $M_0 = 1$ $M_r = 1.13$ 或 $M_r = 1.05(dB)$

$$f_b = \frac{7}{2\pi}, \qquad f_6 = \frac{10}{2\pi}, \qquad f_a = \frac{3}{2\pi}, \qquad \frac{f_a}{4} = 1.19$$

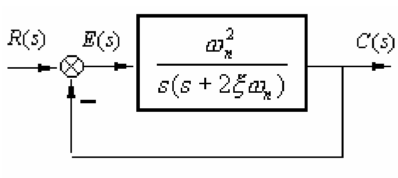
$$N = \frac{M(\frac{f_a}{4})}{M_0} = \frac{1.19}{1} = 1.19$$

$$F = \frac{f_a}{f_6} \cdot \frac{M_r}{M_0} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1.13}{1} = 0.79$$

$$\sigma\% = [41Ln(NF) + 17]\% = 10\%$$

$$t_S = \frac{2.16F - 0.4}{f_a} = 0.6\text{秒}$$

5-29 已知控制系统结构图如题5-29图所示。当输入 $r(t) = 2\sin t$ 时，系统的稳态输出 $c_s(t) = 4\sin(t - 45°)$。试确定系统的参数 ξ, ω_n。



题5-29图 系统结构图

解 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

令
$$|\Phi(j1)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\angle\Phi(j1) = -\arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -45°$$

联立求解可得 $\omega_n = 1.244$，$\xi = 0.22$。

$$t_s=\frac{K_0\pi}{\omega_c}=\frac{K_0\pi}{10\omega_{c1}}=0.1t_{s1}$$

所以，系统的超调量不变，调节时间缩短，动态响应加快。

5-30　某高阶系统，要求时域指标$\sigma=18\%$，$t_s=0.05\ s$，试将其转换成频域指标。

解 根据近似经验公式

$$\sigma\%=0.16+0.4(\frac{1}{\sin\gamma}-1)$$

$$t_s=\frac{K_0\pi}{\omega_c}$$

$$K_0=2+1.5(\frac{1}{\sin\gamma}-1)+2.5(\frac{1}{\sin\gamma}-1)^2$$

代入要求的时域指标可得

$$\frac{1}{\sin\gamma}=\frac{1}{0.4}(\sigma\%-0.16)+1=1.5$$

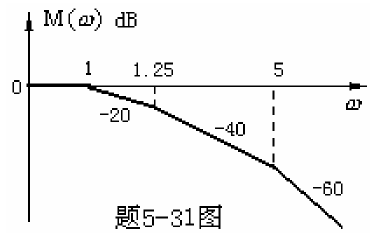
$$\gamma=41.8°$$

$$K_0=3.375$$

$$\omega_c=\frac{K_0\pi}{t_s}=212.1\ (\text{rad/s})$$

所求的频域指标为$\gamma=41.8°$，$\omega_c=212.1$。

5-31　单位反馈系统的闭环对数幅频特性如题5-31图所示。若要求系统具有30°的相角裕度，试计算开环增益应增大的倍数。



题5-31图

解　由题5-31图写出闭环系统传递函数

$$\Phi(s)=\frac{1}{(s+1)(\frac{s}{1.25}+1)(\frac{s}{5}+1)}$$

系统等效开环传递函数

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{6.25}{s(s+2.825)(s+4.425)}=\frac{0.5}{s(\frac{s}{2.825}+1)(\frac{s}{4.425}+1)}$$ 可

知原系统开环增益$K=0.5$。

令相角裕度　$\gamma=180°+\varphi(\omega_{c1})=90°-\arctan\frac{\omega_{c1}}{2.825}-\arctan\frac{\omega_{c1}}{4.425}=30°$

有　$$\frac{\frac{\omega_{c1}}{2.825}+\frac{\omega_{c1}}{4.425}}{1-\frac{\omega_{c1}^2}{12.5}}=tg60°=1.732$$

整理可得　　　　$\omega_{c1}^2+4.186\omega_{c1}-12.5=0$

解出　　　　　　$\omega_{c1}=2.02=K_1$

所以应增大的放大倍数为 $K_1/K=2.02/0.5=4.04$。

5-32　设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统，其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

若要求系统最大输出速度为$2(r/\min)$，输出位置的容许误差小于2^o，试求：

（1）确定满足上述指标的最小K值，计算该K值下系统的相角裕度和幅值裕度；

（2）在前向通路中串接超前校正网络

$$G_c(s)=\frac{0.4s+1}{0.08s+1}$$

计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度，说明超前校正对系统动态性能的影响。

解　(1)确定满足$C_{Max}=2$（转/分）=12^0/秒和$e_{ss}\le 2^0$ 的K，γ，h:

$$K=K_V=\frac{C_{Max}}{e_{ss}}\ge 6\text{（1/秒）}$$

$$G(s)=\frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

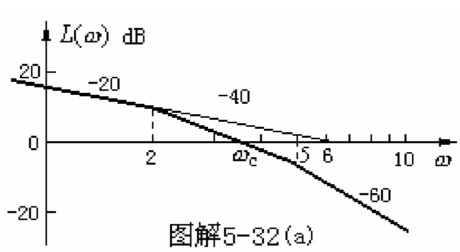
作系统对数幅频特性曲线如图解5-32(a)所示：

由图可知　　$\omega_c=\sqrt{2\times 6}=3.46$

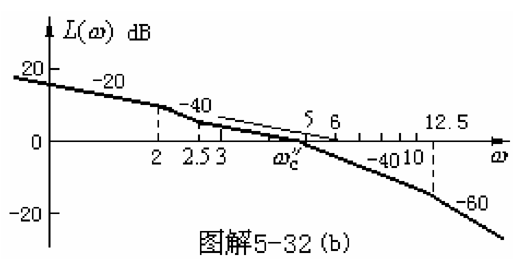
$$\gamma'=90^o-arctg0.2\omega_c'-arctg0.5\omega_c'=-3.8^o$$

算出相角交界频率 $\omega_g'=3.2$

$$20\lg h'=-1(dB)$$



图解5-32(a)



图解5-32(b)

(2)超前校正后系统开环传递函数为

$$G_c(s)G(s)=\frac{6(0.4s+1)}{s(0.08s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

作校正后系统对数幅频特性曲线如图解5-32(b)所示，由图得：

$$\frac{6}{\omega_c''}=\frac{2.5}{2}，\qquad \omega_c''=\frac{6\times 2}{2.5}=4.8$$

$$\gamma''=90^o+arctg0.4\omega_c''-arctg0.2\omega_c''-arctg0.08\omega_c''-arctg0.5\omega_c''=22.5^o$$

算出 $\omega_g''=7.3$， $h''=2.371$， $20\lg h''=7.5dB$。

说明超前校正可以增加相角裕度，从而减小超调量，提高系统稳定性；同时增大了截止频率，缩短调节时间，提高了系统的快速性。

5-33 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$

试设计一串联超前校正装置，使系统满足如下指标：

（1）在单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss}<1/15$；

（2）截止频率ωc≥7.5(rad/s)；

（3）相角裕度γ≥45°。

解 依e_{ss}指标：$e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{15}$

∴ $K=15$

画未校正系统的开环对数幅频特性如图5-33所示。

依Bode图（幅频），得：$\omega_c=\sqrt{15}=3.873$

校正前系统相角裕度：

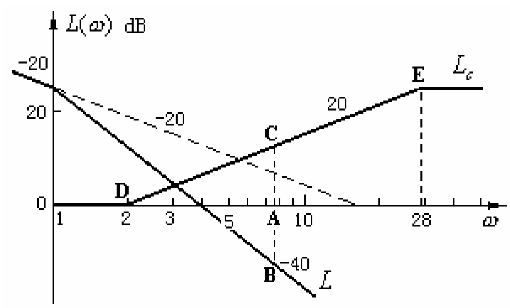
$$\gamma=180^0+\angle G(j\omega_c)=180^0-90^0-\arctan\omega_c$$
$$=90^0-\arctan 3.873=14.48^0$$

定$\omega_c''=7.5$，作图得：

$$b=11.48dB \qquad (AB=11.5dB)$$

作图使：$AC=AB=11.5dB$，过C点作20dB/dec直线交出D点（$\omega_D=2$），令（$DC=CE$）得E点（$\omega_E=28.125$）。这样得出超前校正环节传递函数：

$$G_c(s)=\frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s}{28.125}+1}$$



图解5-33

且有：$\omega_m=\omega_c''=7.5$

校正后系统开环传递函数为：

$$G_c(s)\cdot G(s)=\frac{\frac{s}{2}+1}{\frac{s}{28.125}+1}\cdot\frac{15}{s(s+1)}$$

验算：在校正过程可保证： $e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{1}{15}$

$$\omega_c"=7.5(rad/s")$$

$$\gamma"=180^0-\angle G_c(\omega_c")G(\omega_c"\}$$
$$=180^0-90^0+arctg\frac{\omega_c"}{2}-arctg\frac{\omega_c"}{28.125}-arctg\omega_c"=67.732^0>45^0$$

全部指标满足要求。

5-34 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数K_v≥5(rad/s)，相角裕度γ≥45°，试设计串联迟后校正装置。

解 $$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(\frac{s}{4}+1)}$$ （I型系统）

取 $K=K_v=5$

校正前 $\omega_c=\sqrt{5}=2.236$

$\gamma=180°+\varphi(\omega_c)=-5.12°$ （系统不稳定）

采用串联迟后校正。试探ω_c'，使$\gamma'=45°+5°=50°$

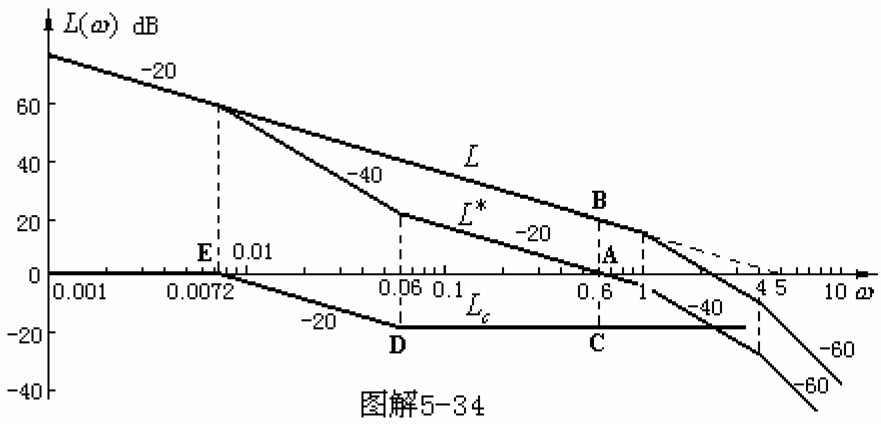
取$\omega_1=0.8$ $\gamma(0.8)=180°+\varphi(0.8)=40.03°$

取$\omega_2=0.5$ $\gamma(0.5)=180°+\varphi(0.5)=56.3°$

取$\omega_3=0.6$ $\gamma(0.6)=180°+\varphi(0.6)=50.57°$

取 $\omega_c'=\omega_3=0.6$

过$\omega_c'=0.6$作$\overline{BC}$，使$\overline{AC}=\overline{BA}$；过画水平线定出$D$ ($\omega_D=0.1\times\omega_c'=0.06$)；过$D$作-20dB/dec线交0dB线于$E$ ($\omega_E=0.0072$)。可以定出校正装置的传递函数



图解5-34

$$G_c(s)=\frac{\frac{s}{\omega_D}+1}{\frac{s}{\omega_E}+1}=\frac{\frac{s}{0.06}+1}{\frac{s}{0.0072}+1}$$

校正后系统开环传递函数 $G_c(s)\cdot G(s)=\dfrac{5(\frac{s}{0.06}+1)}{s(s+1)(\frac{s}{4}+1)(\frac{s}{0.0072}+1)}$

验算： $\gamma'=180°+\angle G_c(j\omega_c')G(j\omega_c')=45.56°>45°$

5-35　设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}$$

（1）若要求校正后系统的相角裕度为30°，幅值裕度为10～12(dB)，试设计串联超前校正装置；

（2）若要求校正后系统的相角裕度为50°，幅值裕度为30～40(dB)，试设计串联迟后校正装置。

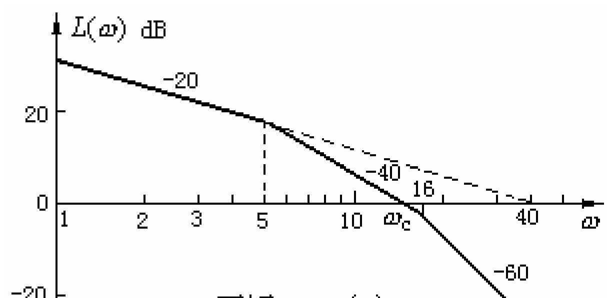
解　$$G(s)=\frac{40}{s(0.2s+1)(0.0625s+1)}=\frac{40}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{16}+1)}$$

(1)　依题作图未校正系统的对数幅频特性曲线如图解5-35(a)所示

校正前： $\omega_c=\sqrt{5\times40}=14.14$ ，

$$\gamma=90^0-arctg\frac{\omega_c}{5}-arctg\frac{\omega_c}{16}=-22^0$$　（系统不稳定）

$$\varphi_m=\gamma''-\gamma+10^0=30^0-(-22^0)+10^0=62^0$$



图解5-35(a)

超前校正后截止频率ω_c''大于原系统$\omega_c=14.14$，而原系统在$\omega=16$之后相角下降很快，用一级超前网络无法满足要求。

(2) 设计迟后校正装置

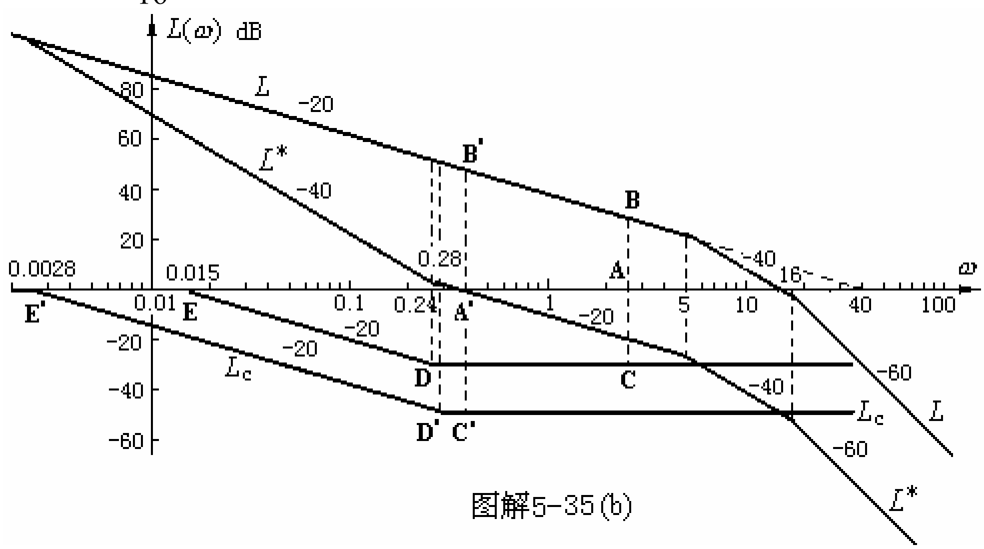
$$\gamma = \gamma'' + 5^0 = 55^0$$

经试算在$\omega = 2.4$：处有　　　$\gamma(2.4) = 55.83^0$

∴ 取　　　　　　　　　$\omega_c'' = 2.4$

对应　　　　　　　　$\left|G(\omega_c'')\right| = 20\left(\lg\dfrac{40}{2.4}\right) = 24.436$

在$\omega_c'' = 2.4$ 以下24.436dB画水平线，左延10dec到对应ω=0.24处，作$-20dB/dec$线交0dB线到E：$\omega_E = \dfrac{0.24}{16} = 0.015$，因此可得出迟后校正装置传递函数：



图解5-35(b)

$$\therefore \quad G_c(s) = \frac{\dfrac{s}{0.24}+1}{\dfrac{s}{0.015}+1}$$

$$G_c(s)\cdot G(s) = \frac{40\left(\dfrac{s}{0.24}+1\right)}{s\left(\dfrac{s}{5}+1\right)\left(\dfrac{s}{16}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.015}+1\right)}$$

$$\gamma'' = 90^0 + \arctan\frac{2.4}{0.24} - \arctan\frac{2.4}{5} - \arctan\frac{2.4}{16} - \arctan\frac{2.4}{0.015}$$

$$= 90^0 + 84.29^0 - 25.64^0 - 8.53^0 - 89.642^0 = 50.48^0 \approx 50^0$$

试算：　$\omega_g'' = 8.6$

由Bode图：

$$h = 20\lg\left|G_c(\omega_g'')G(\omega_g'')\right| = -20\lg\frac{40\times 35.8}{8.6\times 1.99\times 1.29\times 573.33} = 18.9\,\text{dB} < 30\,\text{dB}$$

幅值裕度h不满足要求。为增加h，应将高频段压低。重新设计：使滞后环节高频段幅值衰减40dB（$\omega_g \approx 8.9$）。求对应$20\lg\left|G(\omega_c''')\right| = 40dB$处的$\omega_c'''$

$$\frac{L(\omega_c'')}{\lg 40 - \lg \omega_1''} = \frac{40}{\lg \frac{40}{\omega_c''}} = 20$$

$$\frac{40}{\omega_c'''} = 10^2 = 100, \qquad \therefore \omega_c''' = 0.4$$

$$\gamma(0.4) = 90^0 - \arctan\frac{0.4}{5} - \arctan\frac{0.4}{16} = 84^0$$

查惯性环节表,在$0.7\omega_c''' = 0.28$处：$\varphi \approx -34^0$

$$84^0 - 34^0 = 50^0$$

以$-20dB/dec$交0dB线于E：（$\omega_E = 0.0028$），得出滞后校正装置传递函数：

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28}+1}{\frac{s}{0.0028}+1}$$

在$\omega_c''' = 0.4$处: $\begin{cases} \gamma_c = \arctan\frac{0.4}{0.28} - \arctan\frac{0.4}{0.0028} = -34.59^0 \\ L_c = 20\lg|G_c| = 20\lg\frac{1.744}{142.86} = -38.27dB \end{cases}$

$$G_c(s)G(s) = \frac{40\left(\frac{s}{0.28}+1\right)}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{16}+1\right)\left(\frac{s}{0.0028}+1\right)}$$

验算：$\omega_g''' = 8.6$

$$h = -20\lg|G_cG(\omega_g''')| = -20\left|\frac{40\times 30.73}{8.6\times 1.99\times 1.1353\times 3071.5}\right| = 33.7dB$$

$$\gamma = 180^0 - \angle G_cG(0.4) = 180^0 - 90^0 + \arctan\frac{0.4}{0.28} - \arctan\frac{0.4}{5} - \arctan\frac{0.4}{16} - \arctan\frac{0.4}{0.0028}$$

$$= 90^0 + 55^0 - 4.57^0 - 1.432^0 - 89.6^0 \approx 50^0$$ （满足要求）

因此确定： $G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28}+1}{\frac{s}{0.0028}+1} = \frac{3.57s+1}{357s+1}$

5-36 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 K_v≥5(rad/s)，截止频率 ω_c≥2(rad/s)，相角裕度 γ≥45°，试设计串联校正装置。

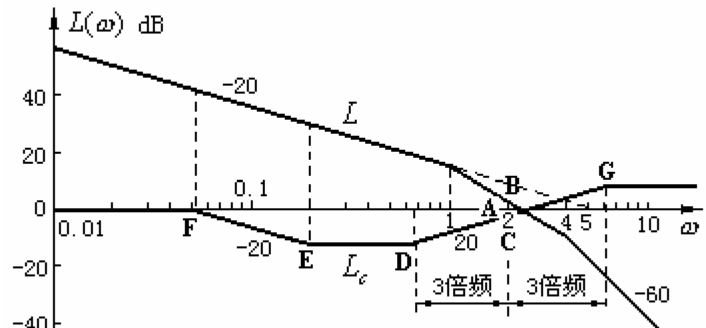
解　在 $\omega=2$ 以后，系统相角下降很快，难以用超前校正补偿；迟后校正也不能奏效，故采用迟后-超前校正方式。根据题目要求，取

$$\omega_c'=2\text{，}\qquad K=K_v=5$$

原系统相角裕度　$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c')=180°-\arctan 2-\arctan\dfrac{2}{4}-90°=0°$

最大超前角　$\varphi_m=\gamma''-\gamma+5°=45°-0°+5°=50°$

查教材图5-65(b)　得：　$a\approx 8$，　$10\lg a\approx 9\text{dB}$



图解5-36

过 $\omega_c'=2$ 作 $\overline{BC}$，使 $\overline{BA}=\overline{AC}$；过 C 作20dB/dec线并且左右延伸各3倍频程，定出 D、G，进而确定 E、F 点。各点对应的频率为：

$$\omega^*=\frac{\omega_c^2}{2}=\frac{\sqrt{5}^2}{2}=2.5$$

$$\omega_E=0.1\omega_c'=0.1\times 2=0.2$$

$$\omega_F=\omega_E\frac{\omega_D}{\omega^*}=0.2\times\frac{0.67}{2.5}=0.0536$$

$$\omega_G=\omega_c'\times 3=6$$

有

$$G_c(s)=\frac{\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.67}+1)\right)}{\left(\dfrac{s}{0.0536}+1\right)\left(\dfrac{s}{6}+1\right)}$$

$$G_c(s)G(s)=\frac{5\left(\dfrac{s}{0.2}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.67}+1)\right)}{s(s+1)\left(\dfrac{s}{4}+1\right)\left(\dfrac{s}{0.0536}+1\right)\left(\dfrac{s}{6}+1\right)}$$

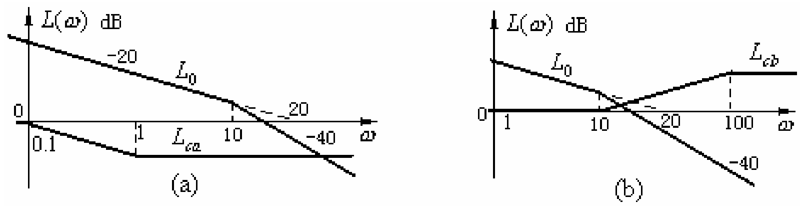
验算：　$\gamma=180°+G_c(j\omega_c')G(j\omega_c')$

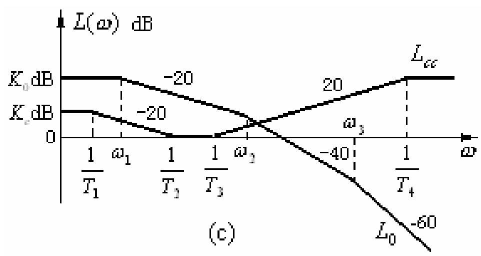
$$= \arctan\frac{2}{0.2} + \arctan\frac{2}{0.67} - \arctan\frac{2}{0.0536} - \arctan\frac{2}{6} = 48.87° > 45°$$

5-37　已知一单位反馈控制系统，其被控对象$G_0(s)$和串联校正装置$G_c(s)$的对数幅频特性分别如题5-37图(a)、(b)和(c)中L_0和L_c所示。要求：

（1）写出校正后各系统的开环传递函数；

（2）分析各$G_c(s)$对系统的作用，并比较其优缺点。





题5-37图

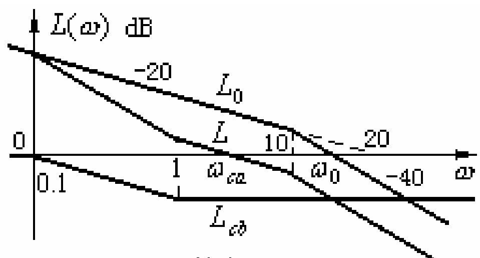
解　(a)　未校正系统开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{20}{s(\frac{s}{10}+1)}$$

$$\omega_{c0} = \sqrt{10\times 20} = 14.14$$

$$\gamma_0 = 180° + \varphi_0(\omega_{c0}) = 180° - 90° - \arctan\frac{14.14}{10} = 35.26$$

采用迟后校正后　$G_{ca}(s) = \dfrac{s+1}{10s+1}$



图解5-37(a)

$$G(s)=G_{ca}(s)\cdot G_0(s)=\frac{20(s+1)}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{0.1}+1)}$$

画出校正后系统的开环对数幅频特性如图解5-37(a)所示。

有 $$\frac{20}{\omega_{ca}}=\frac{1}{0.1},\qquad \omega_{ca}=2$$

$$\gamma_a=180°+\varphi_a(\omega_{ca})=55°$$

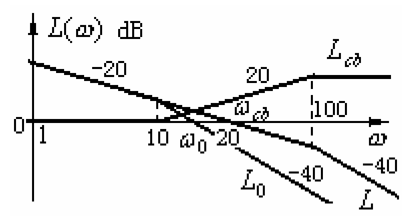
可见 $$\begin{cases}\gamma_a=55°>\gamma_0=35.26° & \text{稳定性增强,}\sigma\%\text{减小;}\\ \omega_{ca}=2<\omega_{c0}=14.14 & \text{响应变慢;}\\ \text{高频段被压低} & \text{抗高频干扰能力增强。}\end{cases}$$

(b) 未校正系统频率指标同(a)。采用超前校正后

$$G_{cb}(s)=\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1}$$

$$G(s)=G_{cb}(s)\cdot G_0(s)=\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1}\cdot\frac{20}{s(\frac{s}{10}+1)}=\frac{20}{s(\frac{s}{100}+1)}$$

画出校正后系统的开环对数幅频特性如图解5-37(b)所示。



图解5-37(b)

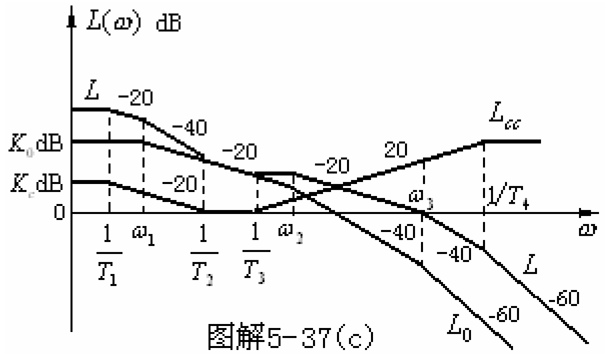
可见 $$\begin{cases}\omega_{cb}=20>\omega_{c0}=14.14 & \text{响应速度加快;}\\ \gamma_b=180°+\varphi_b(\omega_{cb})=78.7°>\gamma_0=35.26° & \sigma\%\text{减小;}\\ \text{高频段被抬高} & \text{抗高频干扰能力下降。}\end{cases}$$

(c) 校正前系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{10^{\frac{K_0}{20}}}{(\frac{s}{\omega_1}+1)(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$$

$$G_c(s)=\frac{10^{\frac{K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

$$G_3(s)=G\cdot G_c=\frac{10^{\frac{K_0+K_c}{20}}(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)(\frac{s}{\omega_1}+1)(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)}$$



图解5-37(c)

画出校正后系统的开环对数幅频特性，可见采用串联滞后—超前校正后

$$\begin{cases}\text{低频段被抬高} & \text{阶跃作用下的稳态误差减小；}\\ \text{中频段}\omega_{cc}\uparrow,\gamma\uparrow & \text{动态性能得到改善；}\\ \text{高频段被抬高} & \text{抗高频干扰的能力下降。}\end{cases}$$

5-38　设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

（1）如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量σ%=20%，试确定K值；

（2）根据所求得的K值，求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间ts，以及静态速度误差系数Kv；

（3）设计一串联校正装置，使系统的Kv≥20，σ%≤17%，ts减小到校正前系统调节时间的一半以内。

（1）由式(5-81)：　$\sigma=0.16+0.4(M_r-1)$

$$M_r=\frac{\sigma-0.16}{0.4}+1=\frac{0.2-0.16}{0.4}+1=1.1 \qquad （1）$$

由(6-8)，　$M_r=\dfrac{1}{\sin\gamma}$

$$\gamma=\arcsin\frac{1}{M_r}=65.4^0 \qquad （2）$$

又　∵　$\gamma=180^0-\angle G(j\omega_c)=180^0-90^0-\arctan\dfrac{\omega}{3}-\arctan\dfrac{\omega}{9}$　　（3）

式(2)、(3)联立：

$$\arctan\frac{\omega_c}{5}+\arctan\frac{\omega_c}{9}=90^0-65.4^0=24.6^0$$

$$tg24.6^0\cdot[27-\omega_c^{\ 2}]=12\omega_c$$

$$\omega_c^{\ 2}+26.21\omega_c-27=0$$

解出：　　　$\omega_c=1$ ，（$\omega_c=2.72$舍去）

∴ 开环增益　$K_0=\dfrac{K}{3\times 9}=\omega_c=1$

∴　　　　　$K=27$

(2) 依式(5-82)：　$t_s=\dfrac{\left[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2\right]\pi}{\omega_c}=6.76$

依题有：　　　$K_v=K_0=1$

(3) 依题要求

$$K_v=\frac{K}{27}\geq 20 \qquad K\geq 540$$

$$\sigma\%\leq 0.15\approx 0.16\overset{(6-9)}{=}0.16+0.4(\frac{1}{\sin\gamma}-1)$$

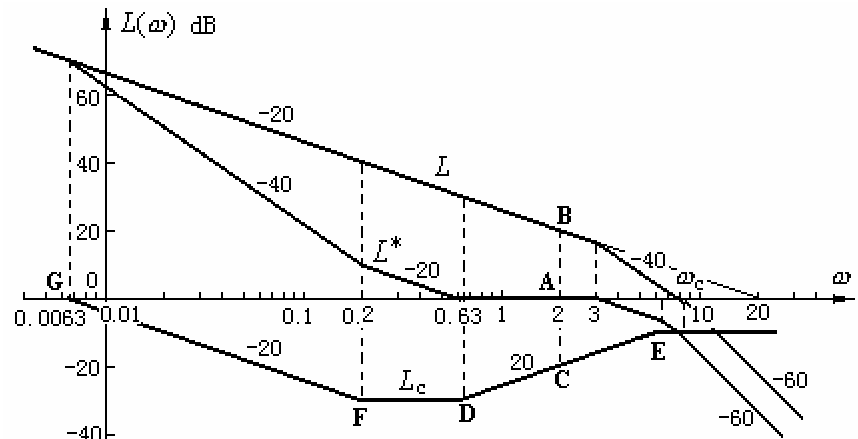
∴　$\gamma\approx 90°$

$$t_s^{'}\leq\frac{t_s}{2}=\frac{6.67}{2}=3.38$$

由第(2)步设计结果 $t_s=6.67$对应于$\omega_c=1$。由频域时域的反比关系（ξ一定时），应取：

$$\omega_c^{'}=2\omega_c=2(rad/s)$$

作出$K_v=20$的原系统开环对数幅频特性曲线$L(\omega)$如图解5-38所示：



图解5-38

$$\omega_c=\sqrt{3\times 20}=7.75$$

$$\gamma=180°-90°-\arctan\frac{7.75}{3}-\arctan\frac{7.75}{9}=-19.55°$$ （系统不稳定）

在$\omega_c^{'}=2$处，原系统相角储备：

$$\gamma_2=180°-90°-\arctan\frac{2}{3}-\arctan\frac{2}{9}=43.78°$$

需采用迟后—超前校正方法。超前部分需提供超前角

$$\varphi_m=\gamma-\gamma_2+5°=90°-43.78°+5°=51.22°$$

查课本图5-65(b),对应超前部分应满足：

$$a\approx 10 \qquad 10\lg a=10$$

在$\omega_c^{'}=2$处定出C使$\overline{AB}=\overline{AC}$，过C作+20dB/dec直线（D、E相距10倍频，C位于D、E的中点），交出D、E，得

$$\omega_D=0.63 \qquad \omega_E=6.3$$

定F点使$\omega_F=0.1\times\omega_c^{'}=0.2$,过F作-20dB/dec斜率直线交频率轴于G，得$\omega_G=0.0063$

$$\therefore \qquad G_c(s)=\frac{(\frac{s}{0.2}+1)(\frac{s}{0.6}+1)}{(\frac{s}{0.0063}+1)(\frac{s}{6.3}+1)}$$

$$G(s)G_c(s)=\frac{20(\frac{s}{0.2}+1)(\frac{s}{0.6}+1)}{s(\frac{s}{3}+1)(\frac{s}{9}+1)(\frac{s}{0.0063}+1)(\frac{s}{6.3}+1)}$$

验算：

$$\gamma=180°+\arctan\frac{2}{0.2}+\arctan\frac{2}{0.63}-90°-\arctan\frac{2}{3}-\arctan\frac{2}{9}-\arctan\frac{2}{0.0063}-\arctan\frac{2}{6.3}$$

$$=180°+84.29°+72.52°-90°-33.69°-12.59°-89.82°-17.61°=93.15°>90°$$

$$\sigma\%\approx 15\%$$

查图5-61 $\quad \dfrac{6.3}{\omega_c{'}}=\dfrac{6.3}{2}=3.15<3.38$ （符合要求）

得出满足要求的串联校正装置传递函数：

$$G_c(s)=\frac{(\frac{s}{0.2}+1)(\frac{s}{0.6}+1)}{(\frac{s}{0.0063}+1)(\frac{s}{6.3}+1)}$$

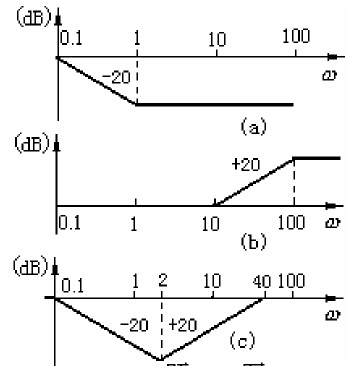
5-39　题5-39图为三种推荐的串联校正网络的对数幅频特性，它们均由最小相角环节组成。若原控制系统为单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s)=\frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

试问：

（1）这些校正网络中，哪一种可使校正后系统的稳定程度最好？

（2）为了将12(Hz)的正弦噪声削弱10倍左右，你确定采用哪种校正网络？



题5-39图

解　（1）

(a) 采用迟后校正时，校正装置的传递函数为　$G_{ca}(s)=\dfrac{s+1}{10s+1}$

校正后系统开环传递函数为　$G_{ca}(s)\cdot G(s)=\dfrac{400(s+1)}{s^2(0.01s+1)(10s+1)}$

画出对数幅频特性曲线如图解5-39中曲线 L_a 所示：

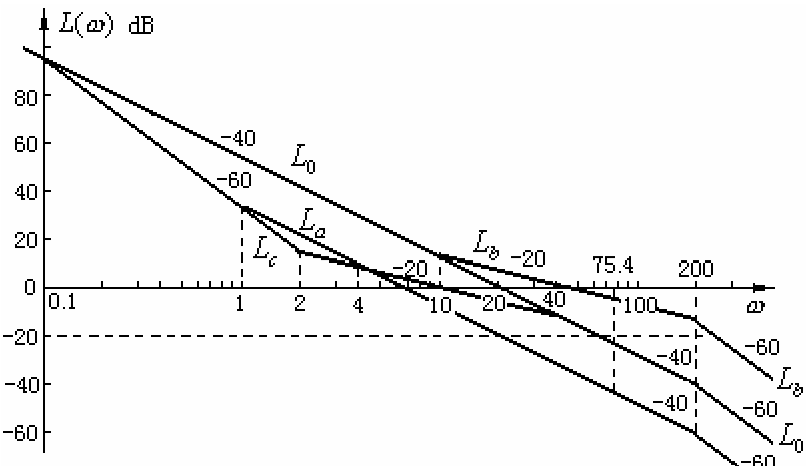
截止频率　　$\omega_{ca}=\sqrt{4\times 10}=6.32$

相角裕度　　$\gamma_a=180^\circ+\varphi_a(\omega_{ca})=-11.7^\circ$　　（系统不稳定）

(b) 采用超前校正时，校正装置的传递函数为　$G_{cb}(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.01s+1}$

校正后系统开环传递函数为　$G_{cb}(s)\cdot G(s)=\dfrac{400(0.1s+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$

画出对数幅频特性曲线如图解5-39中曲线 L_b 所示：



图解5-39

截止频率 $\omega_{cb}=\dfrac{\omega_0^2}{10}=\dfrac{20^2}{10}=40$

相角裕度 $\gamma_b=180°+\varphi_b(\omega_{cb})=32.36°$

(c) 采用迟后-超前校正时，校正装置的传递函数为 $G_{cc}(s)=\dfrac{(0.5s+1)^2}{(10s+1)(0.02s+1)}$

校正后系统开环传递函数为 $G_{cc}(s)\cdot G(s)=\dfrac{400(0.5s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(10s+1)(0.025s+1)}$

画出对数幅频特性曲线如图解5-39中曲线L_c所示：

截止频率 $\omega_{cc}=\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{cb}}=\dfrac{20^2}{40}=10$

相角裕度 $\gamma_c=180°+\varphi_c(\omega_{cc})=48.21°$

可见，采用迟后校正时系统不稳定；采用迟后-超前校正时稳定程度最好，但响应速度比超前校正差一些。

(2) 确定使12Hz正弦噪声削弱10倍左右的校正网络

$f=12Hz$ 时， $\omega=2\pi f=75.4\ (rad/s)$

对于单位反馈系统，高频段的闭环幅频特性与开环幅频特性基本一致。从Bode图上看，在$\omega=75.4$处，有

$$L_c(75.4)=20\lg\frac{1}{\alpha_c}=-23dB$$

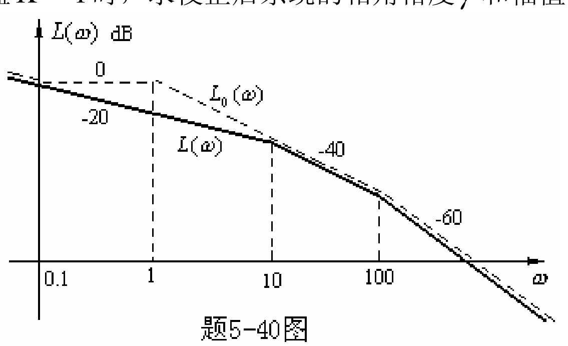
衰减倍数$\alpha_c=10^{\frac{23}{20}}=14.13\approx 10$，可见，采用迟后-超前校正可以满足要求。

5-40 某系统的开环对数幅频特性如题5-40图所示，其中虚线表示校正前的，实线表示校正后的。要求

(1) 确定所用的是何种串联校正方式，写出校正装置的传递函数$G_c(s)$；

(2) 确定使校正后系统稳定的开环增益范围；

(3) 当开环增益$K=1$时，求校正后系统的相角裕度γ和幅值裕度h。



题5-40图

解（1）由系统校正前、后开环对数幅频特性曲线可得校正装置的对数幅频特性曲线如图解5-40 $L_c(\omega)=L(\omega)-L_0(\omega)$ 所示。从而可得

$$G_c(s)=\frac{(s+1)^2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

所用的是串联迟后-超前校正方式。

（2）由题5-40图中实线可写出校正后系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

校正后系统闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+110s^2+1000s+1000K=0$$

列劳思表

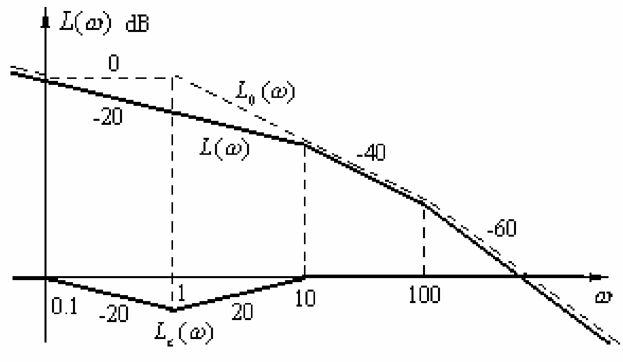
s^3	1	1000	
s^2	110	1000K	
s^1	(11000-1000K)/110		→ K<110
s^0	1000K		→ K>0

所以有 $0<K<110$。

（3）当 $K=1$ 时，由题5-40图可看出

$$\begin{cases}\omega_c=1\\ \omega_g=\sqrt{10\times100}=31.6\end{cases}$$

所以有
$$\begin{cases}\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=83.72^\circ\\ h=1/\left|G(j\omega_g)\right|=109.8\end{cases}$$



图解5-40