10.6

解. 定解问题如下（课本有误）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty \quad t>0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

利用 d'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

令 $a=1$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\,d\xi$$

第十一章:

A组习题:

11.2.

解: 令 $u=X(x)T(t)$ 分离变量.

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

本征值为 $\lambda = k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1,2\cdots)$

本征函数为 ~~X~~ $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$

$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$.

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = 3\sin\frac{\pi x}{l}$$

$\therefore\ A_1=3 \quad A_{n\neq1}=0$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

$B_n=0$

则 $u(x,t) = 3\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$

利用初始条件确定常数时可用比较法确定待定常数.

B组习题

11.1 (2)

解 令 $u=X(x)T(t)$ 分离变量:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

本征值 $\lambda = k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1,2,\cdots)$

本征函数: $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$

$T(t)$ 常微分方程为:

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$$

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

$A_n=0$.

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{k\delta(x-c)}{\rho}$$

利用正交性质:

$$B_n = \frac{2}{l}\Big/\frac{n\pi a}{l} \times \int_0^l \frac{k\delta(x-c)}{\rho}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{k}{\rho}\sin\frac{n\pi a}{l}\cdot\frac{2}{n\pi a}$$

故则:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi a\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$(\ 0<c<l\ )$

11.4

解:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} = 0 & (0<x<l) \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=ct & u(l,t)=0 \end{cases}$$

设 $u(x,t) = w(x,t)+v(x,t)$

$$\begin{cases} u(0,t) = w(0,t)+v(0,t) = ct \\ u(l,t) = w(l,t)+v(l,t) = 0 \end{cases}$$

令 $v(0,t)=0 \quad v(l,t)=0$.

$w(0,t)=ct \quad w(l,t)=0$.

设 w 随 x 线性变化可得:

$w(x,t) = ct(l-x)$

故 V 的定解问题为：

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 V_{xx} = -\left[\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 W_{xx}\right] = -\frac{c(l-x)}{l} \\ V(x,0)=0 \\ V(0,t)=0 \quad V(l,t)=0 \end{cases}$$

令 $V = X(x)T(t)$ 求齐次方程本征值问题：

即 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$

本征值为 $\lambda = k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1,2\dots)$

本征函数为 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$

$V = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 代入V非齐次方程：

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \end{cases}$$

其中：$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[-\frac{c(l-x)}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$= -\frac{2c}{n\pi}$

$T_n(0) = 0$

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \end{cases}$$

利用Laplace变换：

$p\tilde{T}_n(p) + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\tilde{T}_n(p) = \tilde{f}_n(p)$

$\tilde{T}_n(p) = \frac{\tilde{f}_n(p)}{p + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$

$T_n(t) = f_n(t) \overset{卷积}{*} \exp\left[-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right]$

$= -\frac{2c}{n\pi}\int_0^t \exp\left[-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right]d\tau$

$= -\frac{2cl^2}{a^2\pi^3}\frac{1}{n^3}\left(1 - \exp\left[-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t\right]\right)$

故则 $u(x,t) = V(x,t) + w(x,t)$

$= \frac{ct(l-x)}{l} - \frac{2cl^2}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left[1 - e^{\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$

注：首先将非齐次边界化为齐次边界，解决非齐次方程时先求解有关X齐次方程的本征值及本征函数，然后代入定解方程求解有关$T_n(t)$常微分方程：即将非齐次源用本征函数展开求出$f_n(t)$，$T_n(0)$

利用Laplace变换求解$T_n(t)$常微分方程时注意利用卷积定理 $[f_n(t) * T_n^a(t)]$

11.5

解 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0<x<l) \\ u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 \\ u(x,0) = x(l-x) \end{cases}$

设 $u = X(x)T(t)$ 分离变量：

$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$

本征值为 $\lambda = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1,2\dots)$

本征函数 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$

代入 $T_n'(t) + a^2k_n^2T_n(t) = 0$ 中

$T_n(t) = C_n\exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right]$

故 $u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x)$

$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$= -\frac{4l^2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right]$

当n为偶数时 $C_n = 0$

故则 $u(x,t) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$

11.6

解：设 $u = X(x)T(t)$ 分离变量后

$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X_x(0) = 0 \quad X_x(l) = 0 \end{cases}$

本征值 $\lambda = k_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=0,1,2\dots)$

本征函数为 $X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$

设 $u = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(t)$ 代入定解方程：

$n\neq0$ 时 $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)\cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l} = A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t \\ T_n(0) = 0 \quad T_n'(0) = 0 \end{cases}$

当 $n=1$

$$\begin{cases} T_1''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_1(t)=A\sin\omega t \\ T_1(0)=0 \quad T_1'(0)=0 \end{cases}$$

$f(t)=A\sin\omega t$

利用 Laplace 变换：

$$p^2\widetilde{T_1}(p)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2\widetilde{T_1}(p)=\widetilde{f}(p)$$

$$\widetilde{T_1}(p)=\frac{\widetilde{f}(p)}{p^2+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}$$

利用卷积公式：

$$T_1(t)=f(t)*\frac{l}{\pi a}\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right)t$$

$$=\int_0^t A\sin\omega\tau\,\frac{l}{\pi a}\sin\left[\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{Al}{\pi a}\,\frac{1}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left[\omega\sin\frac{\pi a t}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right]$$

当 $n>1$ 时

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_n(t)=0 \\ T_n(0)=0 \quad T_n'(0)=0 \end{cases}$$

$T_n(t)=0$

当 $n=0$ 时：

$$\begin{cases} T_0''(t)=0 \\ T_0(0)=0 \quad T_0'(0)=0 \end{cases}$$

$T_n(t)=0$

综合以上结果可知：

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\,\frac{1}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left[\omega\sin\frac{\pi a t}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right]\cos\frac{\pi x}{l}$$

1.7

解：设 $u=v+w$

$$\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)=0 \\ u(l,t)=v(l,t)+w(l,t)=B \end{cases}$$

令 $v(0,t)=0 \quad v(l,t)=0$

则 $w(0,t)=0 \quad w(l,t)=B$

$u=v+w$ 代入 u 的泛定方程：

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=A-[w_{tt}-a^2w_{xx}]$$

令 $A-[w_{tt}-a^2w_{xx}]=0$

此时 w 与 t 无关，故则

$$\begin{cases} w_{xx}=-\frac{A}{a^2} \\ w(0,t)=0 \quad w(l,t)=B \end{cases}$$

其可求得：

$$w(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+\left(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2}\right)x$$

v 的定解问题为：

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v(0,t)=0 \quad v(l,t)=0 \\ v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=-w(x) \\ v_t(x,0)=u_t(x,0)-w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l}+B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=w(x)$$

$$v_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

$B_n=0$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

故 $u=w+v=-\frac{A}{2a}x^2+\left(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2}\right)x$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中 $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\frac{A}{2a}x^2-\left(\frac{B}{l}+\frac{Al}{2a^2}\right)x\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

注：当非齐次边界和非齐次方程中源的部分均与时间 t 无关时在将非齐次边界齐次化时，同时能够将非齐次方程齐次化。当然如果 $f(x,t)$ 与 t 有关时则不一定要求在齐次化边界时，亦将方程齐次化。

第十二章

A 作业题：

12.1

证明：$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)r^l \quad (r<1,\ -1\le x\le 1)$

令 $x=1$

$\therefore P_l(1)=1$

令 $x=-1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2r+r^2}}=\frac{1}{1+r}=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l r^l=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(-1)r^l$$

$\therefore P_l(-1)=(-1)^l$

令 $x=0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(0)t^l$$

利用 Taylor 的级数展开定义将 $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ 在 $r=0$ 处展开:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}=1-\frac{1}{2}r^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}r^4+\cdots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}r^{2n}+\cdots$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(0)t^l$$

比较两边系数可知:

$$P_{2l-1}(0)=0$$

$$P_{2l}(0)=\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}$$

12.2. (2)

解: 利用递推关系式 $(l\neq 0)$

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$$

$$xP_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)\right]$$

$$\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l+1}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\left[(l+1)P_{l+1}^2(x)+lP_{l-1}(x)P_{l+1}(x)\right]dx$$

$$=\frac{l+1}{2l+1}\int_{-1}^{1}P_{l+1}^2(x)\,dx \quad (\text{利用} P_l(x) \text{正交性})$$

$$=\frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{2}{2l+3}=\frac{2l+2}{(2l+1)(2l+3)}$$

若 $l=0$ $P_0(x)=1$ $P_1(x)=x$

$\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$ 亦满足上面结论.

综上

$$\int_{-1}^{1}xP_l(x)\cdot P_{l+1}(x)=\frac{2l+2}{(2l+1)(2l+3)}$$

注: 充分利用 $P_l(x)$ 正交性.

12.3.

解: $f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}$ $(0<t<1 \quad -1\le x\le 1)$

$$f(x)=\frac{1-2xt+t^2}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l$$

$$=(1+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l-2\sum_{l=0}^{\infty}xP_l(x)t^l$$

当 $l\neq 0$.

$$xP_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)\right]$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}xP_l(x)t^{l+1}$$

$$=xP_0(x)t+\sum_{l=1}^{\infty}xP_l(x)t^{l+1}$$

$$=xt+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x)t^{l+1}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)t^{l+1}$$

$$=xt+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{l}{2l-1}P_l(x)t^l+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{2l+3}P_l(x)t^{l+2}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{lt^l}{2l-1}+\frac{(l+1)t^{l+2}}{2l+3}\right]P_l(x)$$

综上

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}\right]P_l(x)$$

注: 利用递推关系式化简时 $l\neq 0$. 故 $l=0$ 项应单独列出.

12.4.

解: 由于边界球面温度分布与 φ 无关且稳态分布.

球内求 Laplace 方程:

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad (r<1)$$

$$u(r,\theta)|_{r=1}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l P_l(\cos\theta)=\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{4}(4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\cos\theta)$$

$$=\cos^3\theta=\frac{2}{5}P_3(\cos\theta)+\frac{3}{5}P_1(\cos\theta)$$

综上 $A_3=\frac{2}{5}$ $A_1=\frac{3}{5}$

在球内 $r<1$.

$$u(r,\theta)=\frac{2}{5}r^3P_3(\cos\theta)+\frac{3}{5}rP_1(\cos\theta)$$

评：球坐标下的 Laplace 方程讨论对球面边界，而轴对称问题则 $\cos\theta$ 方程为 Legendre 方程解为 Legendre 多项式 特征值为 $l(l+1)$ 特征函数（本征函数）为 $P_l(\cos\theta)$ 此时有关 r 方程为欧拉方程 解一般形式为 $A_n r^l + B_n r^{-(l+1)}$

特别注意空间分为球内、球外讨论，以便对以上两根 r^l 及 $r^{-(l+1)}$ 进行取舍。

以上例题中求待定系数可用比较系数法获得：

B组问题.

12.1. (4).

先证明 12.1 (1).

因 $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$

将上式两边对x求导

$$\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x) t^l$$

两边同乘 $(1-2xt+t^2)$ 并再一次用母函数定义式.

$$t\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l$$

比较上式两边 t^{l+1} 系数得：

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP_l'(x) + P'_{l-1}(x) \quad ①$$

然后对递推关系：

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad ③$$

两边求导.

$$(l+1)P'_{l+1}(x) - (2l+1)P_l(x) - (2l+1)xP_l'(x) + P'_{l-1}(x) = 0 \quad ②$$

将①中 $xP_l'(x)$ 代入②式中可得：

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)$$

评：$P_l(x)$ 两个很重要递推关系：

$$\begin{cases} (l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \\ P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x) \end{cases}$$

在求定积分时前者可化简 $xP_l(x)$ 后者可进一步将 $P_l(x)$ 化为 $P'_{l+1}(x)$，最终化为积分特定函数值，

12.2.

解 $f(x) = \begin{cases} 0 & -1\le x<0 \\ x & 0\le x\le 1 \end{cases}$

∴ $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_n P_l(x)$

$$A_n = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = \frac{2l+1}{2}\int_0^1 xP_l(x)dx.$$

利用 $xP_l(x) = \frac{1}{2l+1}[(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)]$

及 $P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)$

$$A_n = \frac{1}{2}(l+1)\int_0^1 P_{l+1}(x)dx + \frac{l}{2}\int_0^1 P_{l-1}(x)dx$$

$$= \frac{l+1}{2(2l+3)}\int_0^1[P'_{l+2}(x) - P'_l(x)]dx + \frac{l}{2(2l-1)}\cdot\int_0^1[P'_l(x) - P'_{l-2}(x)]dx$$

$$= \frac{l+1}{2(2l+3)}[P_{l+2}(1) - P_{l+2}(0) - P_l(1) + P_l(0)] + \frac{l}{2(2l-1)}[P_l(1) - P_l(0) - P_{l-2}(1) + P_{l-2}(0)]$$

(1) $n=0$

$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4}$

(2) $n=1$

$A_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}P_1(x)$

(3) $n\ge 2$ 时.

利用A组问题 12.1 结论：

$P_l(1) = 1$. $P_{l+2}(1) = P_l(1) = P_{l-2}(1) = 1$

$$A_n = \frac{l+1}{2(2l+3)}[P_l(0) - P_{l+2}(0)] + \frac{l}{2(2l-1)}[P_{l-2}(0) - P_l(0)]$$

当 $l=2n+1$ $P_{2n+1}(0) = 0$. 故 $A_{2n+1} = 0$.

当 $l=2n$. $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

$$A_n = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{4n+1}{4(2n-1)(n+1)}$$

故则

$f(x) = \frac{1}{2}P_1(x)$ ， $+\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\cdot(2l)! \quad 4l+1$