武汉大学2014-2015学年第一学期期末考试线性代数B（A卷）解答

一、(8分)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

解　依第一列展开

原式 $=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} x+(-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$　　8分

$=x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1} y\cdot y^{n-1}=x^n+(-1)^{n+1} y^n\ (n\ge 2)$

二、(8分)设 $A^2+2A-B=0$，其中 B 是 n 阶矩阵 $|B|\neq 0$, 证明矩阵方程 $2AX=BX+C$ 对任意 n 阶矩阵 C 都有唯一的解矩阵 X.

解　由 $A^2+2A=B$ 知 $|A|\neq 0$ 从而 $2A-B=-A^2$ 知 $|2A-B|\neq 0$.　　4分

故 $(2A-B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 有唯一解, 从而 $(2A-B)X=c$ 有唯一解,

$X=(2A-B)^{-1}C.$　　4分

三、(8分)设 $\alpha_1=(2\ ,-1\ ,3)^T$，$\alpha_2=(4\ ,-2\ ,5)^T$，$\alpha_3=(2\ ,-1\ ,2)^T$，试求一组不全为0的常数 $k_1\ ,k_2\ ,k_3$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$。

解　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

所以有　$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$，即　$k_1=1, k_2=-1, k_3=1$　　8分

四、（10分）问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=3+2\lambda \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式。

解　$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{bmatrix}$，当 $\lambda=1$ 时，方程组有解，此时

$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$\therefore X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$　　10分

五、（10 分）用初等变换求矩阵$\begin{bmatrix}3&0&5&-3&0\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\2&1&1&1&0\\3&-1&2&-1&2\end{bmatrix}$的秩，并写出行向量组的一个最大线性无关组。

解 $\begin{pmatrix}3&0&5&-3&0\\1&0&-1&1&1\\0&1&3&-2&-2\\2&1&1&1&0\\3&-1&2&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\1&0&-1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&3&-1&-2\\0&0&8&-5&-3\end{pmatrix}$ 秩$(A)=4$ 6 分

$\alpha_1=(3,0,5,-3,0),\alpha_2=(1,0,-1,1,1),\alpha_3=(2,1,1,1,0),\alpha_4=(3,-1,2,-1,2)$
是其行向量组的一个最大线性无关组。 4 分

六、（8 分）设三阶方阵A有一特征值是 2, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$; 另一特征值为$-1$, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$, 求$A\begin{bmatrix}3\\4\\-6\end{bmatrix}$.

解 由已知$A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, 而$\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$$ 8 分

七、（10 分）设A、B是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B+I$，且$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$I$为三阶单位矩阵，求$A$.

解 由所给关系得$(A+2B)(A-B)-(A-B)=I$，即$(A+2B-E)(A-B)=I$

由$|A-B|\neq 0$知: $A=\frac{1}{3}[(A-B)^{-1}+I-2(A-B)]$ 6 分

而 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$I-2(A-B)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&-1&0\\0&-2&-1\end{pmatrix}$

故$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&0&0\\1&-3&0\end{pmatrix}$ 4 分

八、（10 分）用正交变换化二次型 $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并判断二次型的正定性。

解　$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4,\ e_1 = (0,1,0)^T$，$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$　6 分

经正交变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$　f 化成标准形：$2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$ 正定　4 分

九、（8 分）证明:线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式不为 0，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

证明必要性：（反证法）设 $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$，则其行向量组

$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in})(i = 1, 2, \cdots, n)$ 必线性相关，不妨设 α_n 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表出，

即 $\alpha_n = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$，此时若取 $b_n = -k_1b_1 - k_2b_2 - \cdots - k_{n-1}b_{n-1} + 1$ 则增广阵可化为：

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & b_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即得到秩 $(\overline{A}) \neq$ 秩 (A)，故方程组无解，这与已知矛盾，假设不成立.

充分性：由克莱姆法则即可得到.　8 分

十、（10 分）已知线性空间 R^3 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的全体向量。

解（1）设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，则 $B = AP$，故

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$　5 分

（2）设所求向量的坐标为 x，则 $Ax = APx$，即 $A(P - E)x = 0$，

因为 A 为可逆矩阵，得 $(P - E)x = 0$，由

$$(P-E)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 得 $x=k(1,-1,1)^T$，

故 $\alpha=k(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=k(2,1,3)^T$ 5 分

十一、（10 分）设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2-A=12E$

(1) 证明秩 $r(A+3E)+r(A-4E)=n$；

(2) 证明 A 可相似于对角阵； (3) 求行列式 $|A+4E|$。

证明 (1) 因为 $(A+3E)(A-4E)=0$

$r(A+3E)+r(A-4E)\le n$，且 $r(A+3E)+r(A-4E)\ge r(E)=n$

所以 $r(A+3E)+r(A-4E)=n$。 5 分

(2) 因为 $(A+3E)(A-4E)=0$，特征值 λ 的取值为 $-3,4$，

$\lambda=-3$ 线性无关特征向量有 $n-r(A+3E)$ 个

$\lambda=4$ 线性无关特征向量有 $n-r(A-4E)$ 个

所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，能相似于对角阵。

(3) $A+4E$ 的特征值为-3＋4＝1 和 4＋4＝8，所以

$|A+4E|=|P(\Lambda+4E)P^{-1}|=1^r 8^{n-r}=8^{n-r}$，其中 r 为特征值 $\lambda=-3$ 的重数。5 分