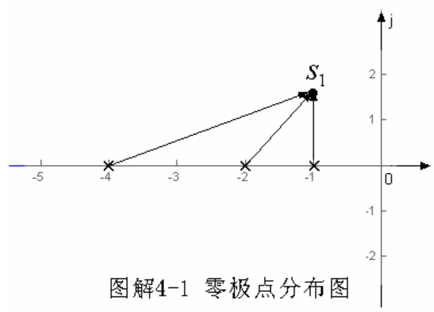
第四章习题及答案

4-1 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

试证明点 $s_1=-1+j\sqrt{3}$ 在根轨迹上，并求出相应的根轨迹增益 K^* 和开环增益 K 。



图解4-1 零极点分布图

解 若点 s_1 在根轨迹上，则点 s_1 应满足相角条件 $\angle G(s)H(s)=\pm(2k+1)\pi$ ，如图解 4-1 所示。

对于 s_1 = -1+j$\sqrt{3}$，由相角条件

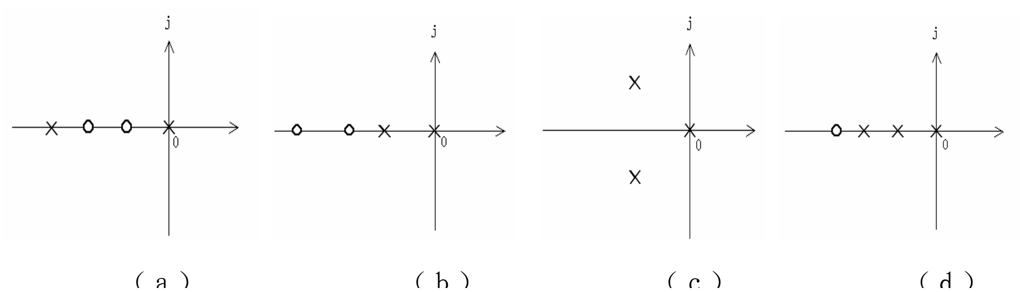
$$\angle G(s_1)H(s_1)=$$
$$0-\angle(-1+j\sqrt{3}+1)-\angle(-1+j\sqrt{3}+2)-\angle(-1+j\sqrt{3}+4)=$$
$$0-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\pi$$

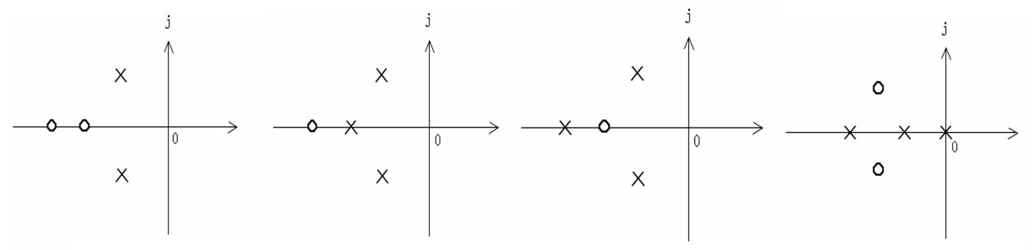
满足相角条件，因此 s_1 = -1+j$\sqrt{3}$ 在根轨迹上。将 s_1 代入幅值条件：

$$\left|G(s_1)H（s_1)\right|=\frac{K^*}{\left|-1+j\sqrt{3}+1\right|\cdot\left|-1+j\sqrt{3}+2\right|\cdot\left|-1+j\sqrt{3}+4\right|}=1$$

解出 ： K^*=12 ，K=$\frac{K^*}{8}=\frac{3}{2}$

4-2 已知开环零、极点如图 4-2 所示，试绘制相应的根轨迹。

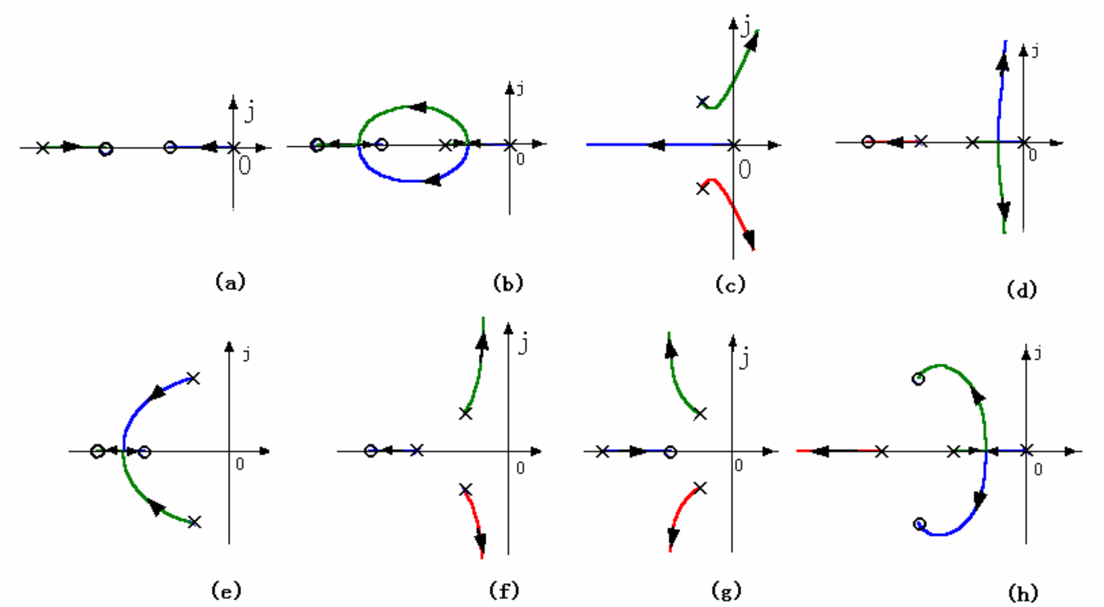




（e）　　　　　　（f）　　　　　　（g）　　　　　　（h）

题 4-2 图　开环零、极点分布图

解 根轨如图解 4-2 所示：



图解 4-2　根轨迹图

4-3 单位反馈系统的开环传递函数如下，试概略绘出系统根轨迹。

(1) $G(s)=\dfrac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$

(2) $G(s)=\dfrac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$

(3) $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(2s+1)}$

解 (1) $G(s)=\dfrac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}=\dfrac{10K}{s(s+5)(s+2)}$

系统有三个开环极点：$p_1=0$, p_2= -2, p_3 = -5

① 实轴上的根轨迹：

$$(-\infty,-5],\ [-2,0]$$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-2-5}{3}=-\dfrac{7}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi\end{cases}$

③ 分离点：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+5}+\frac{1}{d+2}=0$$

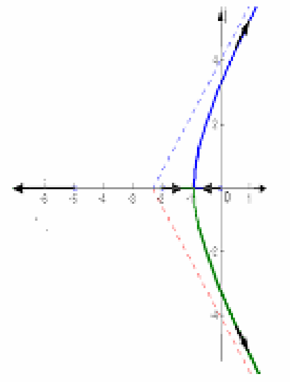


图4-3(a) 根轨迹图

解之得：$d_1=-0.88$，$d_2-3.7863$ (舍去)。

④ 与虚轴的交点：特征方程为 D(s)= $s^3+7s^2+10s+10K=0$

令 $\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-7\omega^2+10K=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+10\omega=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\omega=\sqrt{10}\\ K=7\end{cases}$

与虚轴的交点（0，$\pm\sqrt{10}j$）。 根轨迹如图解 4-3(a)所示。

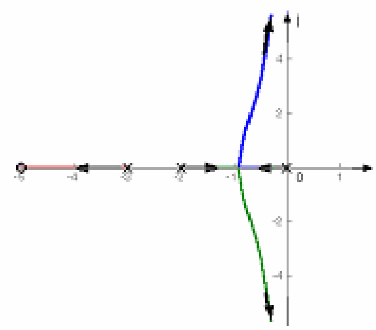


图4-3(b) 根轨迹图

(2) 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$[-5,-3]$, $[-2,0]$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-2-3-(-5)}{2}=0\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+3}=\dfrac{1}{d+5}$

用试探法可得 $d=-0.886$。根轨迹如图解 4-3(b)所示。

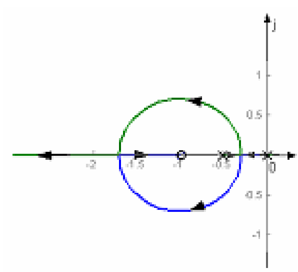


图4-3(c) 根轨迹图

(3) $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(2s+1)}=\dfrac{K(s+1)}{2s(s+\frac{1}{2})}$

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$\left(-\infty,-1\right]$，$\left[-0.5,0\right]$

② 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+0.5}=\dfrac{1}{d+1}$

解之得：d= -0.293,d= -1.707。根轨迹如图解 4-3(c)所示。

4-4 单位反馈系统的开环传递函数如下，试概略绘出相应的根轨迹。

(1) $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

(2) $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$

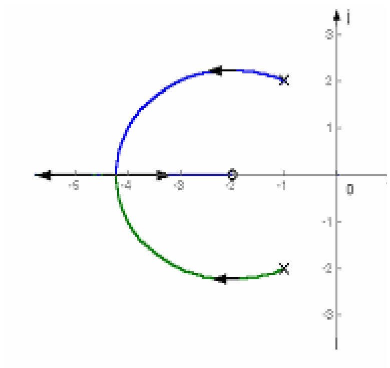


图4-4(a) 根轨迹图

解 (1) $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $\left(-\infty,-2\right]$

② 分离点： $\dfrac{1}{d+1+j2}+\dfrac{1}{d+1-j2}=\dfrac{1}{d+2}$

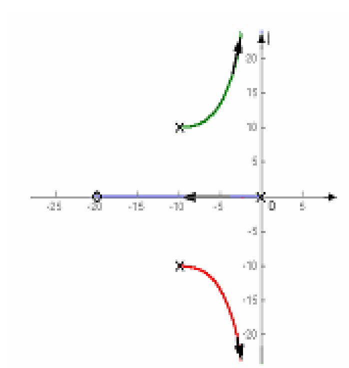
解之得：$d=-4.23$

③ 起始角：

$$\theta_{p_1}=180^\circ+63.435^\circ-90^\circ=153.43^\circ$$

由对称性得另一起始角为 -153.43°。

根轨迹如图解 4-4(a)所示。



图解4-4(b) 根轨迹图

(2) $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$

系统有三个开环极点和一个开环零点。

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $\left[-20,\ 0\right]$

② 起始角： $\theta=\quad 180^\circ+45^\circ-90^\circ-135^\circ=0°$

根轨迹如图解 4-4(b)所示。

4- 5　系统的开环传递函数如下，试概略绘出相应的根轨迹。

(1) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*}{s(s^2+8s+20)}$

(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$

(3) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

(4) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$

解 (1) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*}{s(s^2+8s+20)}$

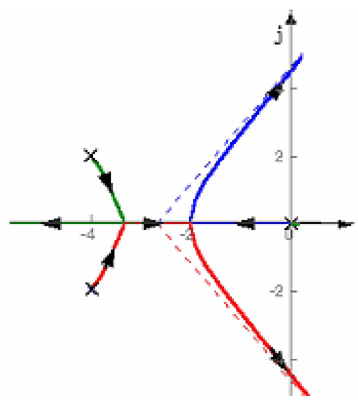


图4-5(a) 根轨迹图

① 实轴上的根轨迹： $(-\infty,0]$

② 渐近线：

$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0+(-4+j2)+(-4-j2)}{3}=-\dfrac{8}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi\end{cases}$$

③分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+4+j2}+\dfrac{1}{d+4-j2}=0$

解之得：d= -2, d= -3.33。

④与虚轴交点：D(s)=s^3+8s^2+20s+K^*

把 s=jω代入上方程，整理，令其实、虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=K^*-8\omega^2=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=20\omega-\omega^3=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases}$　　$\begin{cases}\omega=\pm2\sqrt{5}\\K^*=160\end{cases}$

⑤起始角：由相角条件　$\theta_{p_2}=-63^\circ$，$\theta_{p_3}=63^\circ$。

根轨迹如图解 4-5(a)所示。

(2) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$

① 实轴上的根轨迹：$[-5,-2]$，$[-1,0]$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0+(-5)+(-2)+(-1)}{4}=-2\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+5}=0$

解之得：d_1= -4.06，d_2= -0.399，d_3= -1.54(舍去)；

④ 与虚轴交点：

$D(s)=s^4+8s^3+17s^2+10s+K^*$

令 s=jω，带入特征方程，令实部，虚部分别为零

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=\omega^4-8\omega^2+2K^*=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(6+K^*)\omega-5\omega^3=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}\omega=0\\K^*=0\end{cases}$　　$\begin{cases}\omega=\pm1.12\\K^*=19.7\end{cases}$

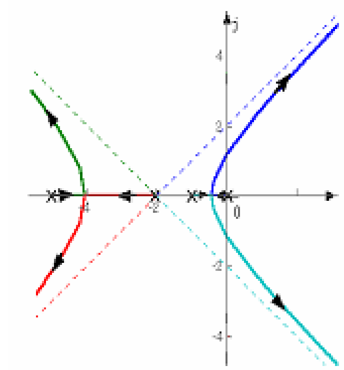


图4-5(b) 根轨迹图

根轨迹如图解 4-5(b)所示。

(3) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

系统有四个开环极点、一个开环零点。根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$[-\infty,-3]$，$[-2,0]$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-3+(-1+j1)+(-1-j1)-(-2)}{3}=-1\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi\end{cases}$

③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=s(s+3)(s^2+2s+2)+K^*(s+2)\quad =0$$

把 s=jω代入上方程，令

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=\omega^4-8\omega^2+2K^*=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(6+K^*)\omega-5\omega^3=0\end{cases}$$

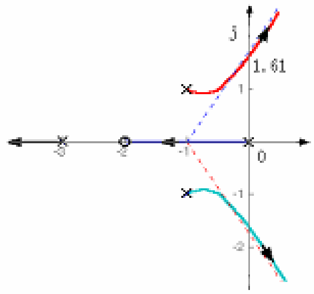


图4-5(c) 根轨迹图

解得：
$$\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\pm 1.61\\ K^*=7.03\end{cases}$$

④起始角

$$\theta_{p_3}=180^\circ+45^\circ\ -90^\circ-135^\circ-25.57^\circ=-25.57^\circ$$

根轨迹如图解 4-5(c)所示。

(4) $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$

系统根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$[-\infty,-1]$, $[0,1]$

② 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{1+(-2+j\sqrt{3})+(-2-j\sqrt{3})-(-1)}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi\end{cases}$$

③ 分离点：
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d-1}+\frac{1}{d+2-j2\sqrt{3}}+\frac{1}{d+2+j2\sqrt{3}}=\frac{1}{d+1}$$

解得：d_1= -2.26 , d_2=0.49 , $d_{3,4}$= -0.76$\pm j2.16$(舍去)

④ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=s(s-1)(s^2+4s+16)+K^*(s+1)\quad =0$$

把 s=jω代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=\omega^4-12\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(K^*-16)\omega-3\omega^3=0\end{cases}$$

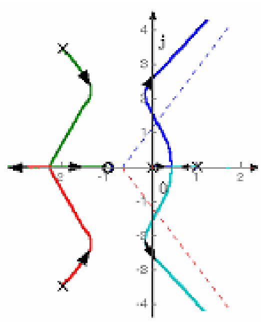


图4-5(d) 根轨迹图

解得： $\begin{cases}\omega = 0 \\ K^* = 0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega = \pm 1.38 \\ K^* = 21.7\end{cases}$ $\begin{cases}\omega = \pm 2.66 \\ K^* = 37.3\end{cases}$

⑤ 起始角：

$$\theta_{p_3} = 180^\circ + 106.1^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 130.89^\circ = -54.79^\circ$$

由对称性得，另一起始角为 54.79°，根轨迹如图解 4-5(d)所示。

4- 6 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)$，要求：

（1）确定 $G(s) = \dfrac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为 $\pm j1$ 的 z 值和 K^* 值；

（2）概略绘出 $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图（要求确定根轨迹的渐近线、分离点、与虚轴交点和起始角）。

解（1）闭环特征方程

$$D(s) = s^2(s+10)(s+20) + K^*(s+z) = s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$$

有 $$D(j\omega) = (\omega^4 - 200\omega^2 + K^*z) + j(K^*\omega - 30\omega^3) = 0$$

令实虚部分别等于零即： $\begin{cases}\omega^4 - 200\omega^2 + K^*z = 0 \\ K^*\omega - 30\omega^3 = 0\end{cases}$

把 ω=1 代入得： $K^* = 30$， $z = 199/30$。

（2）系统有五个开环极点：

$p_1 = 0$， p_2 = -1 p_3 = -3.5 p_4 = -3+j2 p_5 = -3-j2

① 实轴上的根轨迹：$[-\infty, -3.5]$, $[-1, 0]$

② 渐近线： $\begin{cases}\sigma_a = \dfrac{-1-3.5+(-3+j2)+(-3-j2)}{5} = -2.1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{5} = \pm\dfrac{\pi}{5}, \pm\dfrac{3\pi}{5}, \pi\end{cases}$

③ 分离点： $$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3.5} + \frac{1}{d+3-j2} + \frac{1}{d+3+j2} = 0$$

解得： d_1= -0.45 , d_2=-2.40 (舍去) ,$d_{3,4}$= -3.25 $\pm j1.90$ (舍去)

④ 与虚轴交点：闭环特征方程为

D（s）=s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)+K^*=0

把 s=jω代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(j\omega) = K^* + 10.5\omega^4 - 79.5\omega^2 = 0 \\ \mathrm{Im}(j\omega) = \omega^5 - 43.5\omega^3 + 45.5\omega = 0 \end{cases}$$

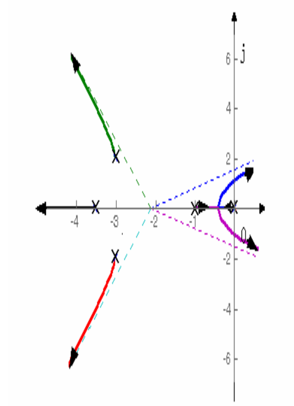
解得：

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ K^* = 0 \end{cases}, \begin{cases} \omega = \pm 1.02 \\ K^* = 71.90 \end{cases}, \begin{cases} \omega = \pm 6.52 \\ K^* = -15546.3 \end{cases} \text{（舍去）}$$

⑤ 起始角：根据法则七（相角条件），根轨迹的起始角为

$$\theta_{p_4} = 180^\circ - 75.96^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 146.3^\circ = 92.74^\circ$$

由对称性得，另一起始角为 92.74°，根轨迹如图解 4-6 所示。



图解 4-6 根轨迹图

4- 7 已知控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$$

试概略绘制系统根轨迹。

解 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $[-\infty, -2]$

② 渐近线：

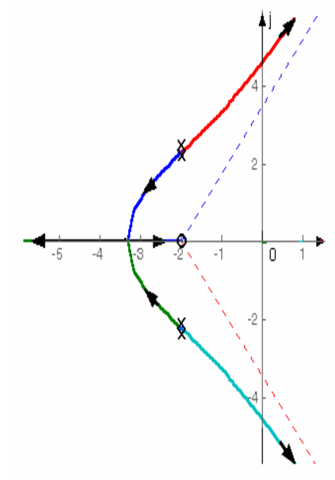
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-2 - j\sqrt{5} - 2 + j\sqrt{5} - (-2)}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$$

③ 分离点： $\dfrac{2}{d+2+j\sqrt{5}} + \dfrac{2}{d+2-j\sqrt{5}} = \dfrac{1}{d+2}$

解之得：d= -3.29 d= 0.71(舍去)

④ 与虚轴交点：闭环特征方程为

D（S）=$(s^2+4s+9)^2 + K^*(s+2)$=0



图解 4-7 根轨迹图

把 s=jω代入上方程，令

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega)) = \omega^4 - 34\omega^2 + 81 + 2K^* = 0 \\ \mathrm{Im}(D(j\omega)) = (72 + K^*)\omega - 8\omega^3 = 0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}\omega = \pm\sqrt{21} \\ K^* = 96\end{cases}$$

⑤ 起始角： $90^\circ - (2\theta_{p_1} - 2\times 90^\circ) = (2k+1)\pi$

解出 $\theta_{p_1} = 45^\circ, \theta_{p_2} = -135^\circ$

根轨迹如图解 4-7 所示。

4－8 已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 3s + 9)}$$

试用根轨迹法确定使闭环系统稳定的 K 值范围。

解 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $(-\infty, 0]$

②起始角： -30°

③渐近线： $\begin{cases}\sigma_a = \dfrac{-1.5 + j2.6 - 1.5 - j2.6}{3} = -1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3}, \pi\end{cases}$

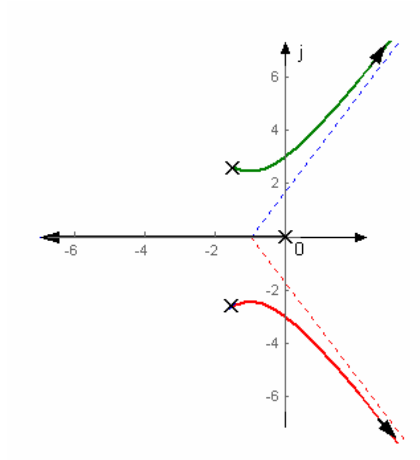
④ 与虚轴交点：闭环特征方程

$$D(s) = s(s^2 + 3s + 9) + K^* = 0$$

把 s=jω 代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega)) = K^* - 3\omega^2 = 0 \\ \mathrm{Im}(D(j\omega)) = 9\omega - \omega^3 = 0\end{cases}$$

解得： $\begin{cases}\omega = 0 \\ K^* = 0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega = \pm 3 \\ K^* = 27\end{cases}$



图解 4-8 根轨迹图

根轨迹如图解 4-8 所示。从根轨迹图可知，闭环系统稳定的 K^* 范围为 $0 < K^* < 27$，又 $K = K^*/9$，故相应的的 K 范围为 $0 < K < 3$。

4-9 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}$$

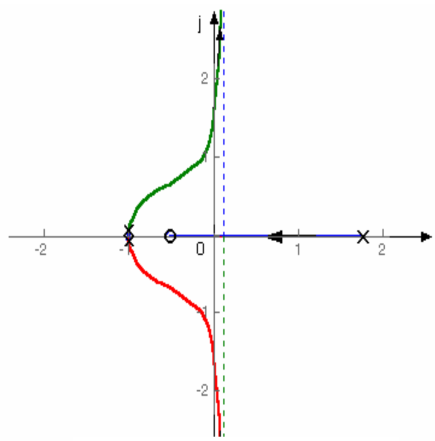
试绘制系统根轨迹，并确定使系统稳定的 K 值范围。

解 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $[0.5,7/4]$

② 渐近线：

$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-1-1+7/4-(-0.5)}{2}=\dfrac{1}{8}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$



图解 4-9　根轨迹图

③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

D（S）$=\frac{4}{7}s^3+\frac{1}{7}s^2+(2K-\frac{10}{7})\mathrm{S}+K-1=0$

把 $s=j\omega$ 代入上方程，令

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=K-1-\dfrac{1}{7}\omega^2=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(2K-\dfrac{10}{7})\omega-\dfrac{4}{7}\omega^3=0\end{cases}$$

解得： $\begin{cases}\omega=0\\ K=1\end{cases}$ ， $\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K=\dfrac{9}{7}\end{cases}$

根轨迹如图解 4-9 所示。由图解 4-9 可知使系统稳定的 K 值范围为 $1<K<9/7$ 。

4-10 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s^2-2s+5)}{(s+2)(s-0.5)}$$

试绘制系统根轨迹，确定使系统稳定的 K 值范围。

解 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹： $[-2,0.5]$

② 分离点：由

$$\frac{1}{d-0.5}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d-1+j2}+\frac{1}{d-1-j2}$$

解得： d_1= -0.41 。

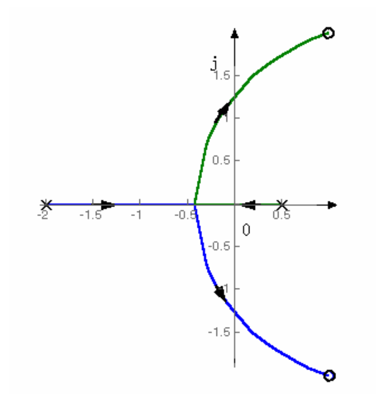
③ 与虚轴交点：

$$D(s)=(s+2)(s-0.5)+K^*(s^2-2s+5)=0$$

把 s=jω代入上方程，令

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=-(1+K^*)\omega^2+5K^*-1=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(1.5-2K^*)\omega=0\end{cases}$$

解得： $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0.2\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\pm1.25\\ K^*=0.75\end{cases}$



图解 4-10 根轨迹图

根轨迹如图解 4-10 所示。由图解 4-10 可知系统稳定的K^*值范围为 0.2<K^*<0.75 又 K=5K^*， 所以系统稳定的K值范围为 1<K<3.75。

4-11 试绘出下列多项式方程的根轨迹。

(1) $s^3+2s^2+3s+Ks+2K=0$；

(2) $s^3+3s^2+(K+2)s+10K=0$

解 (1) $s^3+2s^2+3s+Ks+2K=0$

作等效开环传递函数 $G^*(s)=\dfrac{K(s+2)}{s^3+2s^2+3s}$。

根轨迹绘制如下：

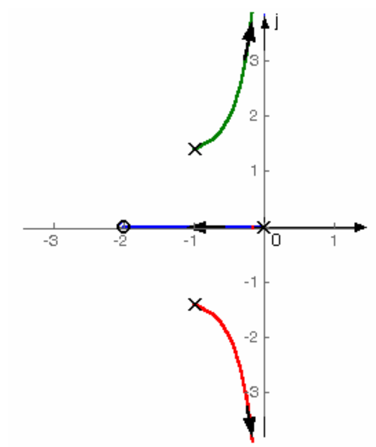
① 实轴上的根轨迹： $[-2,0]$

② 渐近线：

$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-1+j\sqrt{2}+(-1-j\sqrt{2})-(-2)}{2}=0\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

③ 起始角：

$$\theta_{p_1}=180^\circ+54.74^\circ-90^\circ-125.26^\circ=19.48^\circ$$

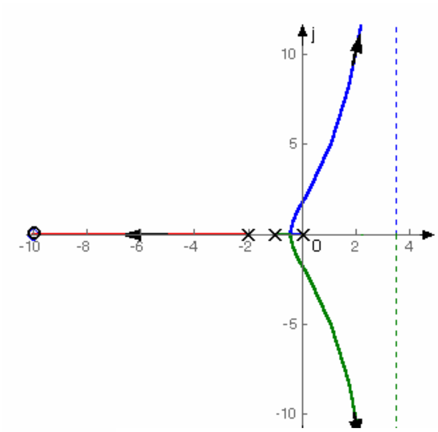


图解 4-11(a) 根轨迹图

根轨迹如图解 4-11(a)所示。

(2) $s^3+3s^2+(K+2)s+10K=0$

作等效开环传递函数 $G^*(s)=\dfrac{K(s+10)}{s^3+3s^2+2s}$。



图解 4-11(b) 根轨迹图

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$[-10,-2],[-1,0]$；

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-1-2-(-10)}{2}=3.5\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{1}{d+10}$

解得

$$d_1=-0.4344,d_2=-14.4752\,(舍),\ d_3=-1.5904\,(舍)$$

④ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+3s^2+(K+2)s+10K=0$$

把 s=jω 代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=10K-3\omega^2=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(K+2)\omega-\omega^3=0\end{cases}$$

试根可得：

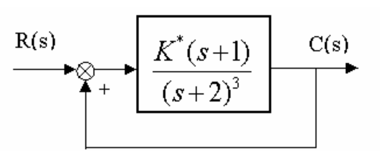
$$\begin{cases}\omega=0\\ K=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm1.69\\ K=\dfrac{6}{7}\end{cases}$$

根轨迹如图解 4-11(b)所示。

4-12 控制系统的结构如题 4-12 图所示，试概略绘制其根轨迹。

解 系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{(s+2)^3}$$



题 4-12 图 系统结构图

此系统为正反馈系统，应绘零度根轨迹。

① 实轴上的根轨迹：$[-\infty,-2],[-1,+\infty]$

② 分离点： $\dfrac{3}{d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

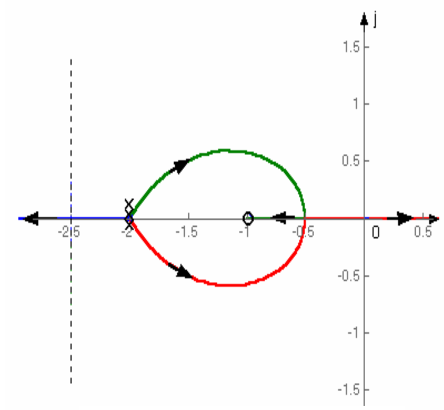
解得 d= -0.5

③ 起始角：根据相角条件，

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i-\sum_{j=1}^{n}\theta_j=2k\pi$$

得 $\theta_{p_1}=60^\circ$，$\theta_{p_2}=-60^\circ$，$\theta_{p_3}=180^\circ$。

根轨迹如图解 4-12 所示。



图解 4-12 根轨迹图

4-13 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K^* 值。

解 由开环传递函数的表达式知需绘制 0° 根轨迹。

① 实轴上的根轨迹： $[-2,0]$， $[1,+\infty)$；

② 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}=\dfrac{1}{d-1}$

解得： $d_1=-0.732$， $d_2=2.732$

将 s= d_1 = -0.732,s= $d_2=2.732$ 代入幅值条件得

$$K^*_{d_1}=0.54,\quad K^*_{d_2}=7.46$$

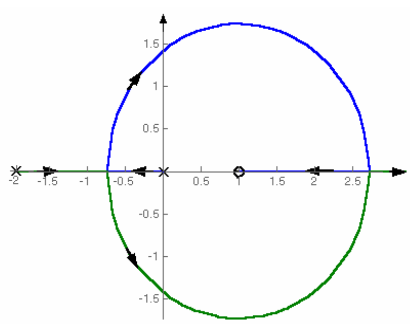
③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=s(s+2)+K^*(1-s)=0$$

把 s=j ω 代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=-\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(2-K^*)\omega=0\end{cases}$$

解得： $\begin{cases}\omega=0\\ K^*=0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\pm1.41\\ K^*=2\end{cases}$



图解 4-13 根轨迹图

根轨迹如图解 4-13 所示，复平面上的根轨迹为以开环零点为圆心，开环零点到分离点的距离为半径的圆 。系统产生重实根的 K^* 为 0.54，7.46，产生纯虚根的 K^* 为 2。

4-14 设单位反馈系统的开环传递函数如下，试绘制参数b从零变到无穷时的根轨迹图，并写出$b=2$时系统的闭环传递函数。

（1）$G(s)=\dfrac{20}{(s+4)(s+b)}$

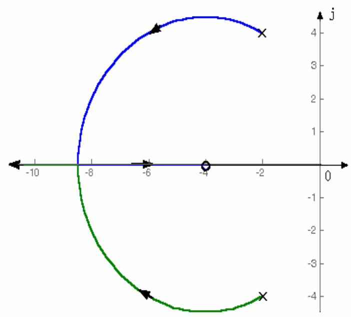
（2）$G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$

解 （1）做等效开环传递函数

$$G^*(s)=\frac{b(s+4)}{s^2+4s+20}$$

① 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-4]$

② 分离点：$\dfrac{1}{d+2+j4}+\dfrac{1}{d+2-j4}=\dfrac{1}{d+4}$



图解 4-14(a) 根轨迹图

解得：d_1= -0.472 (舍去)， d_2=-8.472

如图解 4-14(a)所示，根轨迹为以开环零点为圆心，开环零点到开环极点的距离为半径的圆。

当$b=2$时，两个闭环特征根为$\lambda_{1,2}=-3\pm j4.24$。

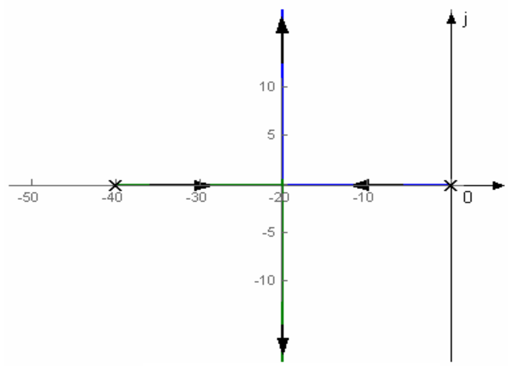
此时闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{20}{(s+3+j4.24)(s+3-j4.24)}$$

（2）做等效开环传递函数 $G^*(s)=\dfrac{30b}{s(s+40)}$

① 实轴上的根轨迹：$[-40,-0]$

② 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+40}=0$



图解 4-14(b) 根轨迹图

解得：d= -20

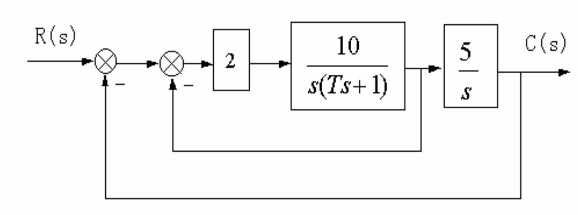
根轨迹如图解 4-14(b)所示，

当$b=2$时，两个闭环特征根为$\lambda_1=-38.44$，$\lambda_2=-1.56$

此时闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{30(s+2)}{(s+1.56)(s+38.44)}$$

4-15 已知系统结构图如题 4-15 图所示，试绘制时间常数T变化时系统的根轨迹，并分析参数T的变化对系统动态性能的影响。



题 4-15 图　系统结构图

解：$G(s)=\dfrac{100}{Ts^3+s^2+20s}$

作等效开环传递函数

$$G^*(s)=\frac{1/T\,(s^2+20s+100)}{s^3}$$

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$[-\infty,-10],[-10,0]$

② 分离点：$\dfrac{3}{d}=\dfrac{2}{d+10}$

解得　d= -30。

根据幅值条件，对应的$T=0.015$。

③ 虚轴交点：闭环特征方程为

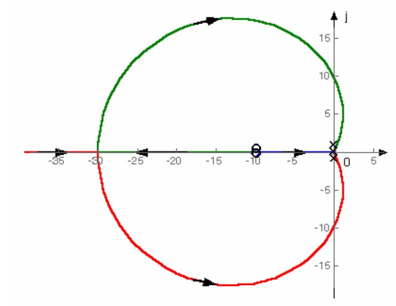
$$D(s)=Ts^3+s^2+20s+100=0$$

把 s=jω代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=100-\omega^2=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=20\omega-T\omega^3=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}\omega=\pm 10\\ T=0.2\end{cases}$

④ 起始角：$\theta_{p_1}=60^\circ$



图解 4-15　根轨迹图

参数T从零到无穷大变化时的根轨迹如图解 4-15 所示。

从根轨迹图可以看出，当$0<T\le 0.015$时，系统阶跃响应为单调收敛过程；$0.015<T<0.2$时，阶跃响应为振荡收敛过程；$T>0.2$时，有两支根轨迹在 s 右半平面，此时系统不稳定。

4-16 实系数特征方程

$$A(s)=s^3+5s^2+(6+a)s+a=0$$

要使其根全为实数，试确定参数 a 的范围。

解 作等效开环传递函数

$$G(s)=\frac{a(s+1)}{s^3+5s^2+6s}=\frac{a(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

当 $a>0$ 时，需绘制 180° 根轨迹。

① 实轴上的根轨迹：$[-3,-2]$，$[-1,0]$

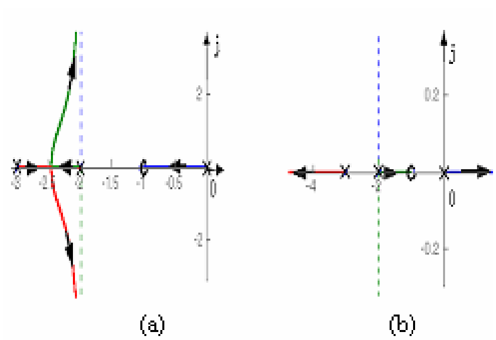
② 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-2-3+1}{3-1}=-2\\[2mm]\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

③ 分离点：
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}=\frac{1}{d+1}$$

解得 $\quad d=-2.47$

分离点处的根轨迹增益可由幅值条件求得：

$$K^*{}_d=\frac{|d||d+2||d+3|}{d+1}=0.4147$$



图解 4-16 根轨迹图

根据以上计算，可绘制出系统根轨迹如图所示。由根轨迹图解 4-16(a) 可以看出，当 $0\le a\le 0.4147$ 时，多项式的根全为实数。

当 $a<0$ 时，需绘制 0° 根轨迹。实轴上的根轨迹区段为：$(-\infty,-3]$，$[-2,-1]$，$[0,\infty)$。

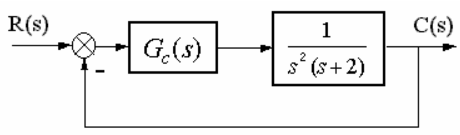
由根轨迹图图解 4-16(b) 可以看出，当 $a<0$ 时，多项式的根全为实数。因此所求参数 a 的范围为 $0\le a\le 0.4147$ 或 $a<0$。

4-17 某单位反馈系统结构图如题 4-17 图所示，试分别绘出控制器传递函数 $G_c(s)$ 为

(1) $\quad G_{c1}(s)=K^*$

(2) $\quad G_{c2}(s)=K^*(s+3)$

(3) $G_{c3}(s) = K^*(s+1)$ 时系统的根轨迹，并讨论比例加微分控制器 $G_c(s) = K^*(s+z_c)$ 中，零点 $-z_c$ 的取值对系统稳定性的影响。



题 4-17 图　系统结构图

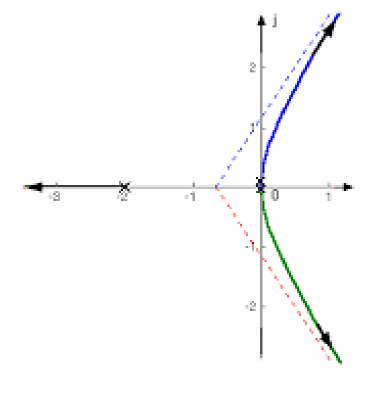
解 (1) $G_{c1}(s) = K^*$ 时

系统开环传递函数为 G（C）$=\dfrac{K^*}{s^2(s+2)}$

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：　$(-\infty,-2]$

② 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a = \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3},\pi\end{cases}$$



图解 4-17(a)　根轨迹图

根轨迹如图解 4-17(a)所示。

(2) $G_{c2}(s) = K^*(s+3)$；

系统开环传递函数为 G（s）$=\dfrac{K^*(s+3)}{s^2(s+2)}$，根轨迹绘制如下：

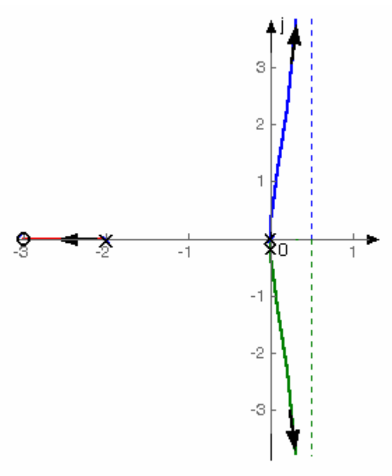
① 实轴上的根轨迹：　$[-3,-2]$

② 渐近线：
$$\begin{cases}\sigma_a = \dfrac{-2-(-3)}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

根轨迹如图解 4-17(b)所示。

(3) $G_{c3}(s) = K^*(s+1)$

系统开环传递函数为 G（C）$=\dfrac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}$。



图解 4-17(c)　根轨迹图

根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：　$[-2,-1]$

② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-2-(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

根轨迹如图解 4-17(c)所示。

从根轨迹图中可以看出，比例加微分控制器 $G_c(s) = K^*(s+z_c)$ 的加入使根轨迹向左移动，且当 $|z_c| < |p|$ 时系统趋于稳定，附加开环零点越靠近虚轴这种趋势越强。

4-18 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(0.5s+1)^4}$$

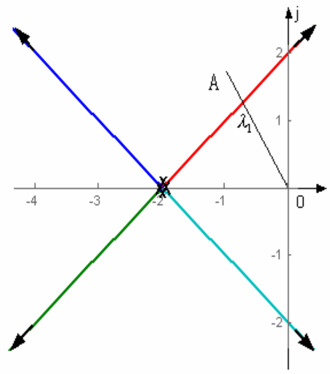
试根据系统根轨迹分析系统稳定性，并估算 $\sigma\% = 16.3\%$ 时的 K 值。

解 (1) $G(s) = \dfrac{16K}{(s+2)^4}$

根轨迹绘制如下：

① 实轴的根轨迹：实轴上的除点 -2 外没有根轨迹区段。

② 渐近线：
$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-2-2-2-2}{4} = -2 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$



图解 4-18 根轨迹图

③ 与虚轴交点：令 $D(j\omega) = 0$，解得根轨迹与虚轴交点为 $\pm j2$。根轨迹与虚轴交点对应的根轨迹增益为 $K^* = |j2+2|^4 = 64$

相应开环增益为 $K = K^*/16 = 4$

根轨迹如图解 4-18 所示。

从根轨迹图中可以看出，当根轨迹增益 $0 < K^* < 64$，开环增益 $0 < K < 4$，根轨迹全在左半 s 平面，系统稳定；当轨迹增益 $K^* > 64$，开环增益 $K > 4$，有两条根轨迹落在右半 s 平面，此时系统不稳定。

(2) 对二阶系统来说，当 $\sigma\% = 16.3\%$ 时，$\xi = 0.5$。系统阻尼角为

$$\beta = \arccos 0.5 = 60^\circ$$

在 s 平面作等阻尼线 OA，使之与实轴夹角为$\pm 60^\circ$。OA 与根轨迹交点为λ_1，其余 3 个交点为λ_2，λ_3和λ_4。而本系统为四阶系统，其闭环极点分布满足主导极点的分布要求，可以认为，λ_1、λ_2是主导极点，忽略λ_3、λ_4作用，将该系统近似为二阶系统。不难计算$\lambda_1 = -0.732 + j1.268$，带入幅值条件可得对应根轨迹增益为：

$$K = \frac{|-0.732 + j1.268 + 2|^4}{16} = 0.646$$

<u>4-19</u>　单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

要求闭环系统的最大超调量$\sigma\% \le 25\%$，调节时间$t_s \le 10s$，试选择K^*值。

解 根轨迹绘制如下：

① 实轴上的根轨迹：$(-\infty, -3]$

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-3-1+j-1-j}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3}, \pi \end{cases}$

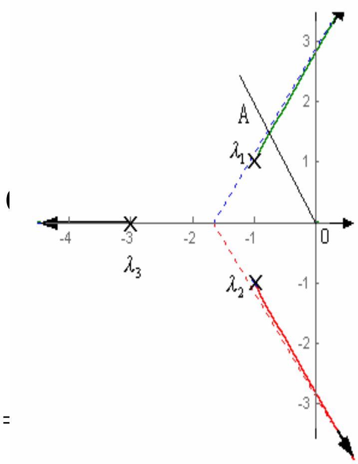
③ 与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6 + K^* = 0$$

把 s=jω代入上方程，整理，令实虚部分别为零得：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(D(j\omega)) = -5\omega^2 + 6 + K^* = 0 \\ \mathrm{Im}(D(j\omega)) = -\omega^3 + 8\omega = 0 \end{cases}$$

解得：　$\begin{cases} \omega = \pm 2.83 \\ K^* = 34 \end{cases}$



图解 4-19 根轨迹图

根轨迹如图解 4-19 所示。

由$\sigma\% \le 25\%$ $\Rightarrow$ ξ>0.4（$\beta = \arccos 0.4 = 66.4^\circ$），在s平面作等阻尼线OA，使之与

实轴夹角为$\pm 66.4^{\circ}$。OA与根轨迹交点为λ_1，其余2个交点为λ_2，λ_3。

令 $\lambda_1 = -\xi\omega_n + j\varpi_n\sqrt{1-\xi^2} = -0.4\omega_n + j0.92\omega_n$

则 $\lambda_2 = -\xi\omega_n - j\varpi_n\sqrt{1-\xi^2} = -0.4\omega_n - j0.92\omega_n$

特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) = s^3 + (0.8\omega_n - \lambda_3)s^2 + (\omega_n^2 - 0.8\omega_n\lambda_3)s - \omega_n^2\lambda_3 \\ &= s^3 + 5s^2 + 8s + 6 + K^* \end{aligned}$$

比较系数得 $\begin{cases} 0.8\omega_n - \lambda_3 = 5 \\ \omega_n^2 - 0.8\omega_n\lambda_3 = 8 \\ -\omega_n^2\lambda_3 = 6 + K^* \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \omega_n = 1.73 \\ \lambda_3 = -3.616 \\ K^* = 4.8 \end{cases}$

由调节时间$t_s \le 10s$，又$t_s=3.5/\xi\omega_n \Rightarrow \xi\omega_n \ge 0.35$，当$\xi\omega_n = 0.35$时，由根之和可得$\lambda_3 = -4.3$，由幅值条件确定出对应的$K^* = 15.5$。要求闭环系统的最大超调$\sigma\% \le 25\%$，调节时间$t_s \le 10s$，则$K^*$取值范围对应为 $0 \le K^* \le 4.8$。