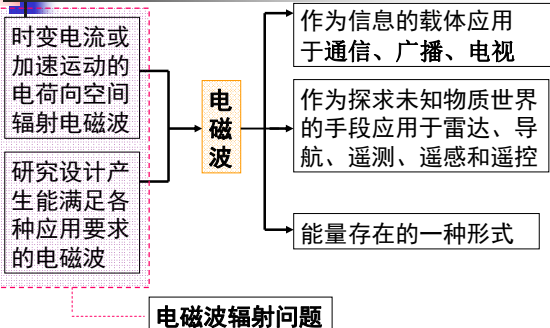


## 第六章 电磁波的辐射

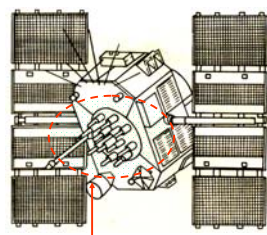
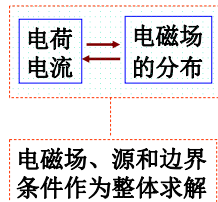


## 主要内容:

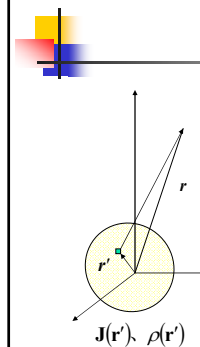
- ❖ 电磁波的辐射及其计算公式
- ❖ 电磁波辐射基本单元的辐射特性
- ❖ 天线的一般概念及其主要参数
- ❖ 广义Maxwell方程组及其应用
- ❖ 雷达概念及其工作原理

### 6.1 辐射场及其计算公式

#### 1 电磁场的计算公式



GPS卫星天线系统—12单元螺旋天线阵，可覆盖半个地球



为了突出电磁场辐射的本质，设无界自由空间区域 $V$ 上存在随时间简谐变化的电流和电荷，在空间激发随时谐变的电磁场可通过势函数方法获得。

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV'$$

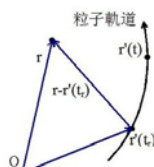
$\mathbf{r}$ 点 $t$ 时刻的势是空间 $\mathbf{r}'$ 点， $t-dt$ 时刻的源经过 $dt$ 时间传播到达 $\mathbf{r}$ 点所产生结果的叠加，从理论上证明了波源的影响是以有限速度传播的。

$$A(\mathbf{r})e^{j\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega(t-\Delta t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$A(\mathbf{r})e^{j\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{j\omega t} e^{-j\omega\Delta t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$


$$-j\omega\Delta t = jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\therefore \Delta t = \frac{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\omega} = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$



推迟时间的概念意味着电磁波的传播不是瞬时的。电磁波从发射位置传播到终点位置，需要一段传播期间，称为时间延迟。

与日常生活的速度来比，电磁波传播的速度相当快。因此，对于小尺寸系统，这时间延迟，通常很难察觉。例如，从开启电灯泡到这电灯泡的光波抵达观测者的双眼，所经过的时间延迟，只有几兆分之一秒( $10^{-6}$ s)。但是，对于大尺寸系统，像太阳照射阳光到地球，时间延迟大约为8分钟，可已经过实验探测察觉。



$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \left[ \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{k^2} \right] \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \phi = j \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{\varepsilon\mu\omega}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\varepsilon\mu\omega} - j\omega \mathbf{A} = -j\omega \left( \mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\varepsilon\mu\omega^2} \right)$$

对于辐射问题，场点远离源区，源激发的电场可利用其与磁场的关系计算。采用球坐标系，源发电磁场的计算公式为：

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0 r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

源在空间激发的电磁场由两部分组成：

① 电荷和电流源直接激发的电磁场，它们与电荷和电流分布相联系。 **静场**

② 变化的电场与磁场之间相互激发而产生的电磁场，与电场和磁场时间变化率相联系。 **辐射场**

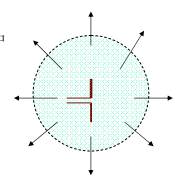

**总电磁场 = 源所激发的电磁场 + 电磁场相互激发的电磁场**

**静态电磁场特点**  
场量与  $r^2$  成反比

**不能有静态电磁场特点**  
场量只能与  $r$  成反比

根据能量守恒原理，辐射场的能流密度矢量对以天线为中心的任意球面积分应为常数：

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = r^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega$$



## 2 电磁场的三个区域及其特点

三个尺度概念：

- ◆ 源区的尺度  $|r'|$
- ◆ 电磁波的波长  $\lambda$
- ◆ 场点至原点的距离  $|r|$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV'$$

$\frac{|r - r'|}{\lambda} \ll 1$

$\frac{|r - r'|}{\lambda} \rightarrow 1$

$\frac{|r - r'|}{\lambda} \gg 1$

振幅项
相位项

### ① 近场区

$$k|r - r'| = \frac{2\pi}{\lambda} |r - r'| \ll 1 \quad e^{-jk|r - r'|} \approx e^{-j0} \approx 1$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV' \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

这说明在源区附近，磁矢势蜕变为**静态电磁场**的磁矢势。由磁矢势计算得到的磁场必然具有静态场的特点。因此在源区的附近，源激发的电磁场可以采取静态电磁场方法进行计算。这也意味着在源区附近，源直接产生的静态电磁场远大于电磁场相互激发所产生的电磁场。

### ② 感应区

$$\frac{|r - r'|}{\lambda} \rightarrow 1$$

场点与源区的距离大约在一个波长的数量：在这范围内，源直接产生的场与变化电磁场相互激发所产生的电磁场同时并存，量级上相当。在这个区域中，既有变化的电磁场相互激发形成的电磁波，将源的能量以电磁波形式辐射出去。同时也存在不向外辐射的静态场，将源提供能量的一部分存储在空间中，这一区域称为**感应区**。

### ③ 远区——辐射区 $\frac{|r-r'|}{\lambda} \gg 1$ $|r| \gg 1$ $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{|r|} \ll 1$

场点远离源区：由于源直接激发的电磁场与 $r^2$ 成反比，所以在这个区域中，源直接激发的静态场远小于电磁场相互激发而形成的电磁场。电磁场主要以波动形式将源的能量辐射出去。这一区域称为远区，或者称为**辐射区域**。

### 3 磁矢势的多极矩展开

首先分析磁矢势被积函数中各因子对势函数贡献的大小。

振幅项      相位项

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{J(r') dV'}{|r-r'|} \exp(-jk|r-r'|)$$

$\frac{1}{r+\delta} = \frac{1}{r} - \frac{\delta}{r^2} + \frac{\delta^2}{r^3} - \dots$

$\frac{1}{x+\delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\delta x}{x^2} + \frac{(\delta x)^2}{x^3} - \dots$

$\exp[-jk(x+\delta x)] = \exp(-jkx) [1 - jk\delta x]$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

振幅项微小变化导致误差的量级

相位项微小变化导致误差的量级

### 结论：

对远场区（ $r$ 很大）振幅的微小变化对最后结果影响很小，而相位项的微小变化对结果影响大。所以在磁矢势中，对于振幅因子取零级的近似，对相位因子保留一级近似

$$\begin{cases} |r-r'| \approx r - \hat{r} \cdot r' & r \gg r' \\ \frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r} \\ \exp(-jk|r-r'|) = \exp(-jk\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r'}) \approx \exp[j(k\hat{r} \cdot r' - kr)] \end{cases}$$

得到：

$$\begin{aligned} A(r) &= \mu_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V J(r') e^{jk\hat{r} \cdot r'} dV' \\ &= \mu_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V J(r') \left[ 1 + jk\hat{r} \cdot r' + \frac{1}{2}(jk\hat{r} \cdot r')^2 + \dots \right] dV' \\ &= A^{(0)}(r) + A^{(1)}(r) + A^{(2)}(r) + \dots \end{aligned}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

$\frac{1}{r+\delta} = \frac{1}{r} - \frac{\delta}{r^2} + \frac{\delta^2}{r^3} - \dots$

电偶极矩

其中

$$\begin{aligned} A^{(0)}(r) &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi r} \mathbf{P} \quad \iiint_V J(r') dV' = \iiint_V \frac{dr'}{dt} \sum_i n_i(r') \hat{e}_i dV' = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = j\omega\mathbf{P} \\ \iiint_V J(r') dV' &= \iiint_V (\hat{r} \cdot r') J dV' = \iiint_V \frac{1}{2} \hat{r} \cdot [(r'J + Jr')] dV' = \iiint_V \frac{1}{2} \hat{r} \cdot (r'J - Jr') dV' \\ &= \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \iiint_V \rho(r') \left[ r' \frac{dr'}{dt} + \frac{dr'}{dt} r' \right] dV' - \hat{r} \times \iiint_V \frac{1}{2} (r' \times J) dV' \\ &= \frac{1}{6} \hat{r} \cdot \frac{d}{dt} \iiint_V 3\rho(r') r' r' dV' - \hat{r} \times \iiint_V \frac{1}{2} (r' \times J) dV' = \frac{1}{6} \hat{r} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} - \hat{r} \times \mathbf{m} \end{aligned}$$

磁偶极矩

电四极矩

$$A^{(1)}(r) = \frac{jk\mu_0}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ -\hat{r} \times \mathbf{m} + \frac{1}{6} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right] = \frac{jk\mu_0}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ -\hat{r} \times \mathbf{m} + j\omega \frac{1}{6} \mathbf{r} \cdot \mathbf{D} \right]$$

上述结果说明：

小区域时变电流体系在远的电磁场为**源中电多极矩和磁多极矩激发电磁场**的叠加。

**电四极矩**与**磁偶极矩**激发电磁场的能力为同一量级。进一步还可证明，**电多极矩激发电磁场**的能力高于同级的**磁多极矩**。

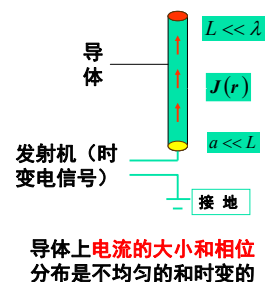
利用求得的磁矢势可以求得电流激发的场，其**辐射场**在计算过程中必须把静态电磁场部分分离出来。

### 6.2 电偶极子天线

#### 1 电偶极子天线结构

能向空间辐射和接收电磁波的装置称为天线，是无线电设备的一个重要部件。天线通过其上**随时间变化的电流**在空间激发的变化的电磁场，从而辐射电磁波。

偶极子天线结构

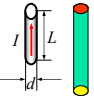


作为一种近似的处理，设导线元上的电流只有z分量，其分布函数为：

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \hat{e}_z I_0 \exp(j\omega t) & |z| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & |z| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$L \rightarrow 0$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{e}_z \delta(z) L I_0$$



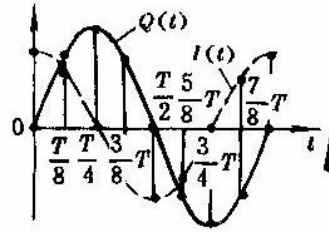
根据电流连续性原理，在电偶极子天线的两个端点，将同时积累大小相等符号相反的时变电荷，利用电荷与电流之间的关系得到：

$$\begin{cases} I(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = \frac{d}{dt} Q_0 e^{j\omega t} = I_0 e^{j\omega t} \Rightarrow Q_0 = -j \frac{I_0}{\omega} \\ \hat{e}_z I(t) L = \frac{d}{dt} \hat{e}_z Q(t) L = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_e(t) \Rightarrow \mathbf{P}_{e0} = \hat{e}_z Q_0 L \end{cases}$$

相位相差  $\pi/2$

$Q(t) = Q_0 e^{j\omega t}$   
 $P_e(t) = P_{e0} e^{j\omega t}$

$$Q_0 = -j \frac{I_0}{\omega} \quad \text{电荷和电流相位相差 } -\pi/2$$



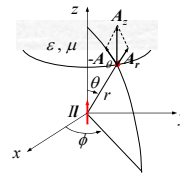
## 2 电偶极子天线的电磁场

设天线位于自由空间的坐标原点，其磁矢势为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \hat{e}_z \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \exp(-jkr)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \hat{e}_r - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \hat{e}_\theta \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_\theta}{\sin \theta} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{e}_\phi \frac{I_0 L k^2 \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr}$$



矢量量  $\mathbf{A}$  在球坐标系中的各分量为

$$\begin{aligned} A_r &= A \cos \theta \\ A_\theta &= -A \sin \theta \\ A_\phi &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{e}_\phi \frac{I_0 L k^2 \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr}$$

由  $\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega \epsilon_0}$ ，或者  $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，根据磁场强度算出电场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{e}_r \frac{2I_0 L k^3 \cos \theta}{4\pi \omega \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \\ &+ \hat{e}_\theta \frac{I_0 L k^3 \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon_0} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{k^2 I L \sin \theta}{4\pi} \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jkr} \\ E_r &= -j \frac{k^3 I L \cos \theta}{2\pi \omega \epsilon_0} \left( \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr} \\ E_\theta &= -j \frac{k^3 I L \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon_0} \left( -\frac{1}{kr} + \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr} \\ H_\theta &= H_r = E_\phi = 0 \end{aligned}$$

可见，在球坐标系中，z 向电流元场强具有  $H_\phi, E_r$  及  $E_\theta$  三个分量，而分量  $H_\theta = H_r = E_\phi = 0$ 。

电流元产生的电磁场为 TM 波。

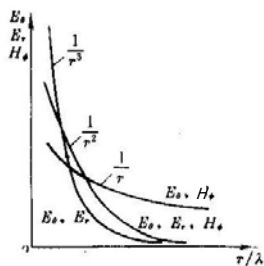


图6.1 电磁场各成分随 $r/\lambda$ 的变化曲线

### TE波, TM波, TEM波

在自由空间传播的均匀平面电磁波（空间中没有自由电荷，没有传导电流），电场和磁场都没有和波传播方向平行的分量，都和传播方向垂直。此时，电矢量 $E$ ，磁矢量 $H$ 和传播方向 $k$ 两两垂直。只是在这种情况下，才可以说电磁波是横波。沿一定途径（比如说波导）传播的电磁波为导行电磁波。根据麦克斯韦方程，导行电磁波在传播方向上一般是有 $E$ 和 $H$ 分量的。TE波，TM波，TEM波是属于电磁波的三种模式。TE波指电矢量与传播方向垂直，或者说传播方向上没有电矢量。TM波是指磁矢量与传播方向垂直。TEM波指电矢量于磁矢量都与传播方向垂直。

### 近区电磁场区 $kr \ll 1, \exp(-jkr) \approx 1$

对于近区场。因  $r \ll \lambda$ ， $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \ll 1$ ，则低次项  $\left(\frac{1}{kr}\right)$  可以忽略，且令  $e^{-jkr} \approx 1$ ，那么

记

$$P_{e0} = Q_0 L = -j \frac{I_0 L}{\omega}$$

$$\begin{cases} E_r \approx \frac{2 P_{e0} \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = -j \frac{2 I_0 L \cos \theta}{\omega 4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta \approx \frac{P_{e0} \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = -j \frac{I_0 L \sin \theta}{\omega 4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ H_\phi \approx \frac{I_0 L \sin \theta}{4 \pi r^2} = + \frac{I_0 L \sin \theta}{4 \pi r^2} \end{cases}$$

电磁场  
相位差

$$S(r) = \frac{1}{2} \text{Re}[E(r) \times H^*(r)] = 0$$

为虚数

这正是电偶极子的静电场和恒定电流元的磁场。因此尽管电偶极子上的电流是时变的，它在近区激发的电磁场仍具有静态电磁场特点。这说明，在电偶极子附近，时变电磁场之间相互激发是产生具有波动特点的电磁场，比电荷和电流直接激发不具有波动特点的静态场要小得多。

从近区电磁场的表达式看到，电场与磁场始终保持  $\frac{1}{2}\pi$  的相位差，其Poynting矢量的平均值恒为零，没有能量向外部输运。因此在源区附近，电磁场为静态电磁场的特点。

### 3 远区辐射场及其特点

当场点位于远场区， $kr \gg 1$  其电磁场的结果为：

$$\begin{cases} H_\phi \approx j \frac{I_0 L \sin \theta}{2 \lambda r} \exp(-jkr) \\ E_\theta \approx j \frac{I_0 L \sin \theta}{2 \lambda r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \exp(-jkr) \end{cases} \quad \text{方向因子}$$

$$\begin{cases} E_r \approx \frac{2 P_{e0} \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta \approx \frac{P_{e0} \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \\ H_\phi \approx \frac{I_0 L \sin \theta}{4 \pi r^2} \end{cases} \quad \text{近区:}$$

这是一个与近区具有完全不同性质的电磁场

远区的辐射场有如下特点：

① 电磁场的瞬时表达式为：

$$\begin{cases} H_\phi = \frac{I_0 L \sin \theta}{2 \lambda r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \\ E_\theta = \frac{I_0 L \sin \theta}{2 \lambda r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

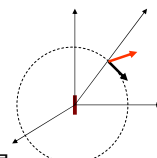
其等相位面方程为球面，其方程是：

$$\omega t - kr = C$$

在等相位面上，电场和磁场的相位为同一常数，为沿径向向外传播的球面波。

波在空间传播的速度为：

$$v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad \text{即光速}$$



## 远场区的电磁场

离偶极子足够远， $r \gg \lambda$  的波场区，波阵面趋于球形

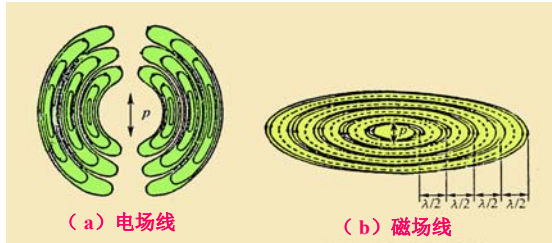


图 波场区的电场和磁场线

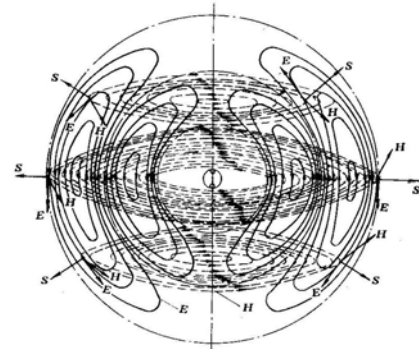


图 远场区电流元周围电-磁力线的瞬时分布



- ② 电磁波在空间传播方向上既没有电场分量、也没有磁场分量，电场、磁场和传播方向相互垂直，为横电磁波（TEM）在与传播方向相垂直的平面内，电场或磁场矢量末端的轨迹为直线，是线极化（偏振）地面电磁波。

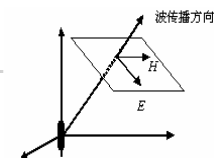
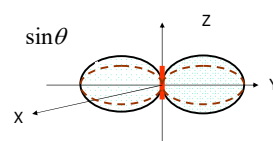


图 6-4 电偶极子辐射的 TEM 波

$$E \perp H \perp \text{传播方向}$$

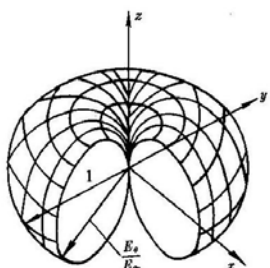
$$\eta = \frac{E_\theta}{H_\phi} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120 \pi$$

- ③ 电偶极子远区辐射场具有方向性。在同一半径的球面上，不同方向辐射场的强度随方位的不同而变化，所以电偶极子远区场是非均匀的球面波。场强度随方向变化的曲线（归一化）：



为什么在电偶极子轴线方向没有电磁波的辐射？

天线辐射场归一化了的方向图



- ④ 利用Poynting 矢量的定义，求得周期内平均能流密度矢量为：

$$S = \frac{1}{2} \text{Re} [E_\theta \hat{\theta} \times \phi H_\phi^*] = \frac{\hat{r}}{2} \text{Re} [E_\theta H_\phi^*] = \frac{\hat{r}}{2} \text{Re} \left[ \frac{1}{\eta_0} E_\theta^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{I_0}{2} \right)^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \eta_0 \sin^2 \theta \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

能流密度矢量沿球面径向向外传输，具有方向性，不同的方向能流密度不同，这意味着空间的某些方向上能流密度大，另一些方向上能流密度小，甚至某些方向上能流密度为零。



#### 4. 天线的辐射功率与辐射电阻

在单位时间内通过半径为  $r$  的球面向外传播的电磁能为：

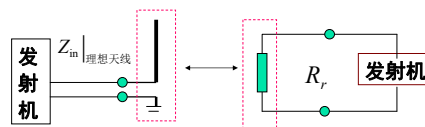
$$P = \oint_S S(r, \theta, \varphi) \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \oint_S \left( \frac{I_0}{2} \right)^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \eta_0 \sin^4 \theta d\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{2} I_0^2 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$$

$P$  是一个与球面半径无关的常数，即在单位时间通过任意半径球面向外传输的能量（功率）是相同的。根据能量守恒定律，这部分能量的确是天线以电磁波的形式所辐射。

**辐射电阻愈大，则辐射功率愈强**

由于能量不断向外辐射，要保证辐射进行下去，必须提供能源，如发射机。设天线是理想的天线（没有损耗），发射机与天线匹配，发射机供给的能量全部被天线辐射出去，天线可以看作一个两端网络，其辐射能力可应用二端网络的等效电阻表征，称为天线的**辐射电阻**， $R_r$  是衡量天线辐射电磁场能力的重要参量。



在实际中，输入阻抗并不完全等于辐射电阻，这是因为输入到天线上的能量并不完全被辐射，还包括天线导体的热损耗、天线近场储存的能量，使得输入阻抗并非是纯电阻。只有理想天线：

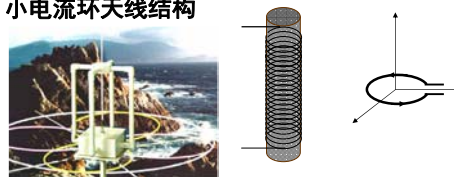
$$Z_{in}|_{\text{理想天线}} = \frac{U_{in}}{I_{in}} = R_r = \frac{2P}{I_0^2} = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$$

例： 1、 $L = 0.25\lambda$  ,  $R_r = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \approx 50(\Omega)$

2、 $L = 0.025\lambda$  ,  $R_r = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \approx 50 \times 10^{-2}(\Omega)$

#### 6.3 小电流环—磁偶极子天线

##### 1 小电流环天线结构

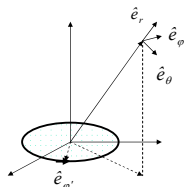


电流环上通有随时间谐振变的电流，电流的振幅为恒量，数学上可表示为：

如果电流环半径很小，考虑到是随位置变化的，将其在球坐标系中表示，即

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \hat{e}_\varphi I_0 \delta(z') \delta(\rho' - a)$$

$$= I_0 \delta(z') \delta(\rho' - a) \begin{bmatrix} \hat{e}_\varphi \sin \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ \hat{e}_\theta \cos \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \end{bmatrix}$$



磁矢位

$$\mathbf{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0 a \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \hat{e}_\varphi \sin \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ \hat{e}_\theta \cos \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \end{bmatrix} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' = \frac{I_0 a \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi'$$

由于环上电流只有  $\varphi$  分量，可以预言  $\mathbf{A}$  仅有  $\varphi$  分量，故上式积分后只剩下  $\varphi$  分量。

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} + a \left[ \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-jkr} \sin \theta \cos \varphi'$$

$$\mathbf{A}_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0 \Delta S \mu_0}{4\pi} e^{-jkr} \left[ \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

$$\begin{cases} H_r = j \frac{I_0 k \Delta S \cos \theta}{2\pi r^2} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] \\ H_\theta = - \frac{I_0 k^2 \Delta S \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = E_\theta = 0 \\ E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0 k^2 \Delta S \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] \end{cases}$$

### 近场区电磁场

$$kr \ll 1, \exp(-jkr) \approx 1$$

$$\begin{cases} H_r \approx \frac{2I_0 \Delta s \cos \theta}{4\pi r^3} \\ H_\theta \approx \frac{I_0 \Delta s \sin \theta}{4\pi r^3} \\ E_\phi \approx -j \frac{I_0 k \Delta s \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

其磁场正好是第三章中小电流圆环（即磁偶极子）产生磁场的表达式（3-5-12）

### 远场区的辐射场

$$kr \gg 1$$

$$\begin{cases} E_\phi = \frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_\theta = -\frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{cases}$$

与电偶极子远区场相比，除电场和磁场的极化方向互为置换外，特性类似

利用辐射电阻的定义，得到小电流圆环（磁偶极子）的辐射电阻是

$$R_r = \frac{2P}{I_0^2} = \frac{2}{I_0^2} \oint_S \mathbf{S}(r, \theta, \phi) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{I_0^2} \int_0^\pi \text{Re}[-E_\phi H_\theta^*] 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

$$= 320\pi^4 \left(\frac{\Delta s}{\lambda^2}\right)^2 (\Omega)$$

【例】设导线的长度为1米，求制作成圆环和电偶极子天线的辐射电阻。电磁振荡频率为1MHz

电偶极子天线

小圆环天线

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 = 0.88 \times 10^{-2}$$

$$R_r = 320\pi^4 \left(\frac{\Delta s}{\lambda^2}\right)^2 = 2.44 \times 10^{-8}$$

辐射电阻愈大，则辐射功率愈强

计算结果表明，同样频率、同样长度的导线制作成小电流环天线的辐射阻抗远小于制作电偶极子天线的辐射阻抗。这说明小电流环天线辐射电磁波的能力远小于电偶极子天线。其原因何在？



因为电流环上的电流方向不一致，导致其产生的辐射场有部分互相抵消，从而削弱了整个辐射场

## 4 小电流环与磁偶极子等效

在静态电磁场中，恒定小电流环可用磁偶极子等效。在时变电磁场中，置于坐标原点的磁偶极子的磁矢势〔参考（6-1-12）式〕为： $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{e}}_z m$

$$A(r, \theta, \phi) = -jk\mu_0 \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}}{4\pi r} e^{-jkr} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{jk\mu_0 m}{4\pi r} \sin \theta$$

其远区电磁场为：

$$E_\phi = \frac{mk^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \quad H_\theta = -\frac{mk^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr}$$

小电流环

$$m = I_0 \Delta s$$

$$E_\phi = \frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \quad H_\theta = -\frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr}$$

如何用一个电偶极子和一个磁偶极子天线实现圆极化波？

电偶极子辐射电场为  $E_\theta \approx j \frac{I_1 L}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr}$

磁偶极子辐射电场为  $E_\phi = \frac{I_1 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr}$

如果  $I_1 L = \frac{2\pi}{\lambda} I_2 \Delta s$

电场的两个分量初始相位保持为 $\pi/2$

## 6.4※ 天线的一般概念

天线是专门用于发射和接收电磁波的装置。为了适应各种不同要求的电磁波发射和接收，必须对天线发射和接收电磁波的特性进行设计——天线理论与设计。

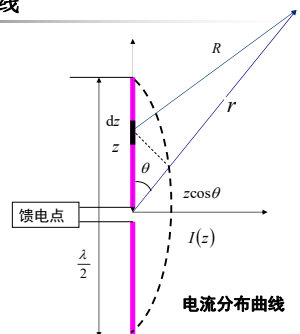




- ① 天线发射和接收电磁波 **方向特性**
- ② 天线发射和接收电磁波的阻抗特性
- ③ 天线发射和接收电磁波的极化特性
- ④ 天线的电磁兼容性

## 1 半波长振子天线

电偶极子是理想的  
天线模型，因为实际  
工程应用中不存在  
幅度恒定的电流元。  
半波振子天线是实际  
天线模型。所谓半波  
振子天线是长度为**半个  
波长**的线天线。



当天线在馈电点加上时变电信号时，实验表明天线上的电流近似为驻波分布，两端点为电流的节点，中心点电流幅值最大。天线上电流幅度函数近似为：

$$I(z) = I_0 \cos(kz) \quad |z| \leq \frac{\lambda}{4}$$

由于电流是空间位置的函数，所以不能简单的把它当为电偶极子天线来看待。但天线上任一小微元  $dz$  上的电流可视为常量，该微元可视为电偶极子。因此整个半波振子天线可以分割为多个首尾相联的电偶极子天线的叠加。

$$dE_\theta = j \frac{I_0}{2\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos kz \, dz \, \frac{1}{R} \sin \theta \exp(-jkR)$$

$$E_\theta = j \frac{I_0}{2\lambda} \eta_0 \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} dz \cos kz \, \frac{1}{R} \sin \theta \exp(-jkR)$$

对振幅项： $R \approx r$ ；相位项： $R \approx r - Z \cos \theta$

$$E_\theta = j \eta_0 I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{2\pi r \sin \theta} \exp(-jkr)$$

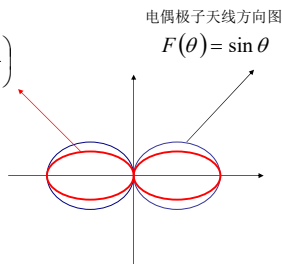
归一化函数（方向图）：

$$H_\theta = j I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{2\pi r \sin \theta} \exp(-jkr)$$

场强度的归一化函数（**方向图**）是

$$F(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \cos\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)$$

由于干涉效应，在有些方向上，叠加得到加强。有另外一些方向上，叠加结果减弱。使得半波振子辐射场的能量更为集中。



单位时间内辐射的能量（功率）为：

$$P = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} d\Omega = \eta_0 \frac{I_0^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos y}{y} \right) dy$$

$$= 1.22 \eta_0 \frac{I_0^2}{4\pi}$$

$$R_r = \frac{2P}{I_0^2} = 2.44 \times \frac{\eta_0}{4\pi} \approx 30 \times (2.44) = 73(\Omega)$$

## 2 天线的基本特性参数

电偶极子、小电流圆环和半波振子天线辐射场具有共同的基本特性。对于一般的天线，无论其结构如何复杂，它们都有与电偶极子相类似的辐射场结构，即：

$$E = \hat{\theta} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0 \frac{L}{\lambda} \frac{1}{r} \sin \theta \exp(-jkr)$$

任意天线 = 极化·幅度·电流·结构·距离·方向性·相位

其中

极化因子：表示天线辐射场的偏振方向

幅度因子：表示辐射场的常数因子

电流：为馈电点的电流幅度，与发射功率相联系

结构因子：天线体空间几何结构

距离因子：是指天线相位中心点到场点的距离，  
表征球面波能量的扩散

方向因子：表示天线辐射场的空间分布的特性

相位因子：表示天线与场点之间的相位差

### (1) 天线方向性函数 $D$

天线在空间辐射电磁波具有方向特性，在某些方向上辐射能力强，而在另外一些方向上，辐射能力弱。利用天线的这一特点实现电磁波信号的定向传输。**天线的方向性函数  $D$**  定义为：单位立体角辐射功率与单位立体角平均辐射功率之比。

$$\frac{dP}{d\Omega} = S(\theta, \varphi) r^2 d\Omega$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{dP/d\Omega}{P/4\pi} = \frac{4\pi S(\theta, \varphi) r^2}{\iint_S S(\theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{4\pi F^2(\theta, \varphi)}{\iint_S F^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} = K F^2(\theta, \varphi)$$

归一化的方向性图

表征天线在空间不同方向上辐射电磁能量强弱程度

$$\text{方向性系数 } K = \frac{4\pi}{\iint_S F^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}$$

**方向性系数** 是天线在空间辐射电磁波能量最强的方向在单位立体角所辐射电磁波能量与单位立体角平均辐射电磁波能量之比





## (2) 天线的增益函数 $G$

对理想天线，输入功率也等于天线的辐射功率。但在实际工程应用上，输入能量并不完全被天线辐射出去，真正用于电磁波辐射的能量是输入功率的一部分。如果天线的效率为  $\eta$ ，天线辐射的功率为  $P = \eta P_{in}$ ，天线的增益函数  $G$  定义为

$$G(\theta, \varphi) = \frac{(dP/d\Omega)}{(P_{in}/4\pi)} = \eta D(\theta, \varphi) = \eta \kappa F^2(\theta, \varphi)$$

$P_{in}$  是输入功率     $\eta D = \frac{P}{P_{in}} = \frac{dP/d\Omega}{P_{in}/4\pi}$

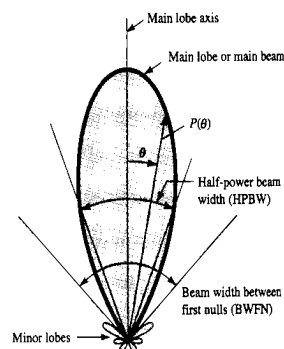
天线输入功率不完全被辐射的主要原因有：

- ① 天线阻抗与发射机不匹配，导致电磁波被反射回发射机；
- ② 部分变为天线近场的电磁能量；
- ③ 部分被天线体的非理想导体而热耗散；

$$\eta = \frac{P(\text{辐射电磁波总功率})}{P_{in}(\text{发射机输入总功率})}$$

## (3) 波束宽度

天线的方向性图呈现许多花瓣形状，一般由主波束和若干个副波束组成。定义主波束两侧方向性函数为最大值一半（称为半功率点）的两点之间的夹角为波束宽度



半波振子天线：

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} d\theta} = \frac{2 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta}}{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} d\theta}$$

$$\kappa = 2 \left( \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} d\theta \right)^{-1} = 1.64$$

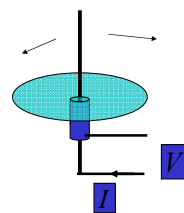
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \quad \Delta\varphi_{HPBW} = 78^\circ$$

## (4) 天线的输入阻抗

天线的输入阻抗定义为

$$Z_A = \frac{V}{I} \Big|_{\text{输入端}} = R_A + jX_A$$

天线的输入阻抗一般为复数，实部称为输入电阻，与天线辐射电阻和热耗散相关；虚部为输入电抗，与储存在天线近区中电磁场的功率相关。



## 6.5 广义Maxwell方程

### 1 Maxwell方程组的对偶性质

无源区中的Maxwell方程组，按如下方式组合

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\left( \begin{array}{l} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \\ \varepsilon \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \varepsilon \end{array} \right)} \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

数学上称这种具有相同形式，并能够通过变量相互替换从一组方程得到另一组方程的两组方程为**对偶方程**，对应的量称为**对偶量**。容易证明两组互为对偶的方程，其解也具有对偶性。因此利用对偶原理可以使对偶问题的求解得以简化。

### 2 广义Maxwell方程

在有源区，Maxwell方程是不对称的，其原因是自然界还没有发现类似于电荷的磁荷，也没有发现类似于电流的磁流。

如果引入假想的“磁荷”和“磁流”，其激发的电磁场与电荷和电流激发的电磁场相互对偶，则推广后所得到的Maxwell方程就具有对偶性。

$\rho_m$ ：假想的**磁荷密度**  $\mathbf{J}_m$ ：假想**磁流密度**

磁荷守恒定律： $\nabla \cdot \mathbf{J}_m(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_m(r, t) = 0$

广义Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}, & \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu}, & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{es}, & \hat{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = -\mathbf{J}_{ms} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_{ms}, & \hat{n} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{J}_{es} \end{cases}$$

假想的“磁荷”和“磁流”不可能是随意的，必须建立在合理的理论基础之上。

### 3 广义Maxwell方程的对偶性

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m, \mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{\rho_e}{\varepsilon}, & \nabla \times \mathbf{E}_e = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_e = 0, & \nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶}} \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0, & \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_m = \frac{\rho_m}{\mu}, & \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \end{cases}$$

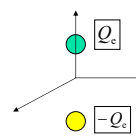
$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{e2} - \mathbf{D}_{e1}) = \rho_{es} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{e2} - \mathbf{B}_{e1}) = 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{E}_{e2} - \mathbf{E}_{e1}] = 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{e2} - \mathbf{H}_{e1}] = \mathbf{J}_{es} \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶}} \begin{cases} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{m2} - \mathbf{D}_{m1}) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{m2} - \mathbf{B}_{m1}) = \rho_{ms} \\ \hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] = -\mathbf{J}_{ms} \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{E}_e \leftrightarrow \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_e \leftrightarrow -\mathbf{E}_m, \mathbf{J}_e \leftrightarrow \mathbf{J}_m, \rho_e \leftrightarrow \rho_m, \varepsilon \leftrightarrow \mu, \mu \leftrightarrow \varepsilon$

电偶极子

$$\mathbf{P}_e = \hat{e}_z QL$$

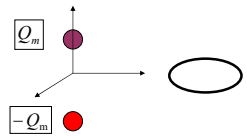
$$\mathbf{E} = \hat{e}_r \frac{2P_e \cos \theta}{4\pi \varepsilon r^3} + \hat{e}_\theta \frac{P_e \sin \theta}{4\pi \varepsilon r^3}$$



磁偶极子

$$\mathbf{P}_m = \hat{e}_z P_m$$

$$\mathbf{H} = \hat{e}_r \frac{2P_m \cos \theta}{4\pi \mu r^3} + \hat{e}_\theta \frac{P_m \sin \theta}{4\pi \mu r^3}$$



利用对偶极子激发的场求出磁偶极子激发的场

在**谐变电磁场**中，坐标原点 $z$ 向电偶极子的辐射场为

$$\begin{cases} H_{\varphi} \approx j \frac{I_{e0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \exp(-jkr) \\ E_{\theta} \approx j \frac{I_{e0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

通过对偶变量替换，得到置于坐标原点的 $z$ 向磁偶极子的辐射场为：

$$\begin{cases} E_{\varphi} \approx -j \frac{I_{m0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \exp(-jkr) \\ H_{\theta} \approx j \frac{I_{m0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

将磁偶极子辐射场公式与小电流环辐射场公式比较，其极化、结构、距离、方向性、相位等因子完全相同，具有完全相同的辐射场特性。因此小电流圆环与磁偶极子的等效，比较幅度常数得：

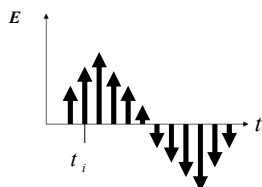
$$\begin{cases} E_{\varphi} = \frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4 \pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_{\theta} = -\frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4 \pi r} e^{-jkr} \end{cases} \quad \begin{cases} E_{\varphi} \approx -j \frac{I_{m0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \exp(-jkr) \\ H_{\theta} \approx j \frac{I_{m0} L}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

$$I_{m0} L = j I_0 \Delta s \omega \mu$$

前提条件是：感应电荷与源电荷同步变化！

#### 4 时变电磁场的镜像原理

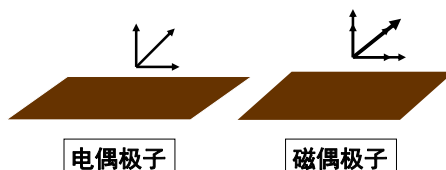
镜像方法是求解静态电磁场十分有效的方法，当电磁场是时变的，镜像原理是否仍然有效？



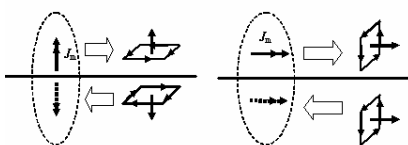
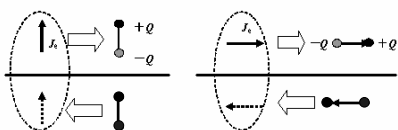
将时变电磁场在时间上离散，在每个很小的时间间隔中，场的变化很小，可视为时不变电磁场。

每一瞬时电磁场可视为稳态电磁场，稳态场中的镜像方法完全可以应用。

把时变电磁场分解为由不同瞬时电磁场的叠加，就像电影中一个时间连续变化的动作由多个静态的镜头组合一样，而每一个瞬时电磁场可视为稳态电磁场，稳态场中的镜像方法完全可以应用。

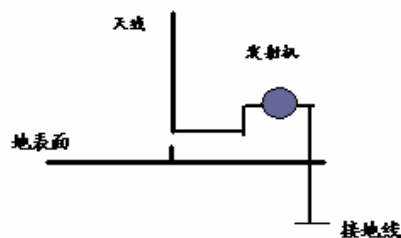


电偶极子  
为相距一定  
距离的正负  
电荷



磁偶极子为小  
电流矩形环，  
矩形电流环为  
首尾相接的四个  
电偶极子系

为测试天线的性能，将天线放置在如图所示的地表面上（可视为接地的理想导体平面），请问此时测量的结果与真空中电偶极子天线的辐射特性有何不同？在测试过程中，由于不小心，将垂直地表面的天线倒放在地面上，结果导致发射机毁坏，并请解释导致发射机毁坏的原因。



## 5 广义Maxwell方程的应用—缝隙天线

磁荷和磁流的引入完全是数学上的假设。要使这种假设具有实际应用价值，必须给磁荷和磁流以实在的意义。如前面例子中利用小电流圆环与假想的磁偶极子等效，得到了空间磁偶极子概念。但在等效的过程中，一个自始至终的原则是两者激发电磁场的结果是相等的。这也是获得等效磁荷与磁流的基本方法。下面我们通过缝隙天线的例子介绍磁荷与磁流的等效方法。

### 缝隙天线（共形）

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & , |x| > \frac{d}{2}, |z| > \frac{L}{2} \\ -\hat{e}_z \frac{U_0}{d}, |x| \leq \frac{d}{2}, |z| \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

上半空间  
导体  
 $U = U_0 \exp(j\omega t)$   
 $L \gg d, \quad \mathbf{E} = \hat{e}_x E_0 \exp(j\omega t) \quad E_0 d = U_0$

上半空间辐射电磁场满足Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \end{cases} \quad y > 0$$

假设缝隙天线在上半空间的辐射场可以等效为磁流在上半空间产生的场，它满足的方程应为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_m = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \end{cases}$$

$$\hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] = -\mathbf{J}_{ms}, \quad \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] = 0$$

由于上半空间无源，导体平板表面缝隙在上半空间的辐射场可以等效为导体平板面缝隙处的磁流在上半空间的辐射。

$$\hat{e}_y I_{m0} = -\hat{e}_y \times \hat{e}_x E_x d = \hat{e}_z U_0 \quad \mathbf{P}_m = \hat{e}_z I_{m0} L$$

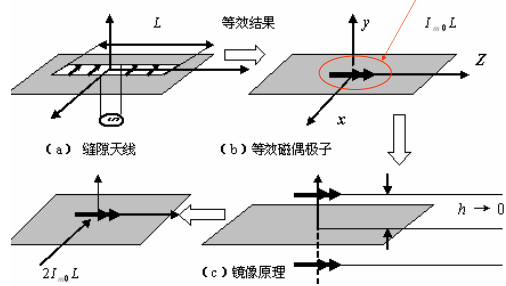


图 6-14 缝隙天线

置于坐标原点的z向电偶极子的辐射场

$$\begin{cases} E_\theta \approx -j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \exp(-jkr) \\ H_\theta \approx j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

缝隙天线在上半空间辐射场

$$\begin{cases} E_\theta \approx -j U_0 \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \exp(-jkr) \\ H_\theta \approx j U_0 \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

## 6.6※ 雷达（Radar）的基本概念

### 1 雷达的基本概念

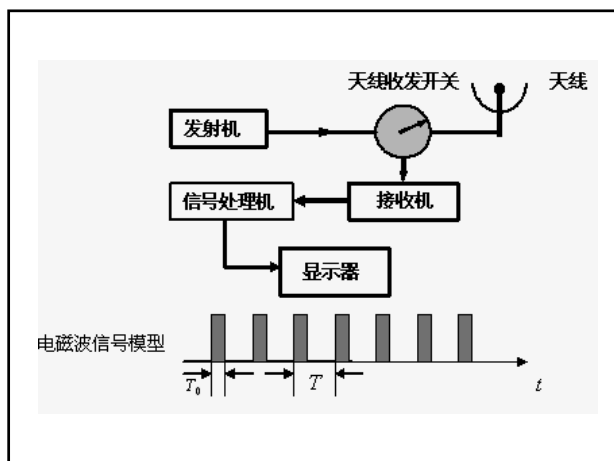
1922年，意大利科学家G·马可尼发表了无线电波能检测物体的论文，是雷达最早的基本概念。雷达作为一种探测目标的电子设备，产生于二次世界大战。雷达的英文RADAR是Radio Detection And Ranging的缩写，意为“无线电探测和测距”。





雷达系统由**发射机**、**天线**、**接收机**、**信号处理机和显示系统**。

雷达天线把发射机按照一定目的要求产生的电磁波能量射向空间某一方向，空间目标被雷达波照射并反射或散射电磁波。这些载有目标的信息（如距离、方位角、运动速度等）反射或散射波被雷达天线接收，送至雷达接收机进行处理，提取有用信息。



## 2 最大探测距离和目标的距离测量

目标的距离由雷达发射电磁波脉冲与接收目标散射回波的时间差和电磁波传播速度确定

$$R = \frac{1}{2} c \Delta t$$

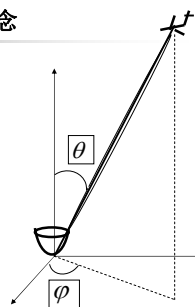
最大探测距离：由脉冲时间间隔与电磁波速度确定。

$$R_{\max} = \frac{1}{2} c T$$

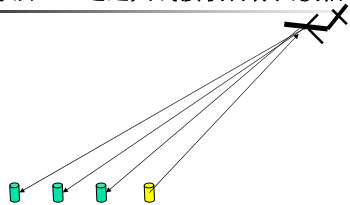
## 3 目标方位与相控阵天线概念

目标在空间的方位由雷达天线接收空间电磁波的**方位**或者通过阵列信号处理方法确定。要想准确测量目标的方位，方法之一是使雷达接收天线具有**很窄的方向特性**，它只能接收空间某个确定方位内的散射回波，而在该方位以外，雷达天线接收能力很弱或不能接收。

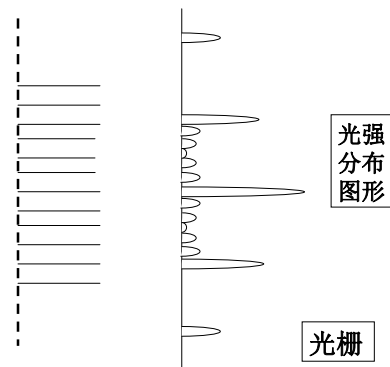
方法一：形成很窄的波束



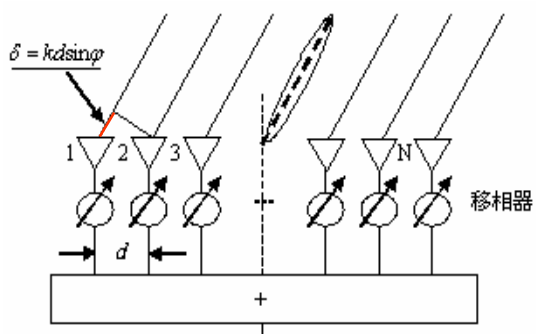
方法二：通过天线接收目标回波信号处理



**相控阵天线**是获得窄的辐射或接收波束的关键技术，它由多个天线单元（如振子天线）组成。通过对不同**单元天线初始相位和幅度**的控制，实现多单元天线发射或接收的电磁波在某个方位上干涉叠加得到加强，另一些方位上干涉叠加减弱，从而实现天线的窄波束，并通过单元天线初始相位和幅度的控制，实现波束在空间的扫描。



相邻天线接收 $\phi$ 方向电磁波的相位差



$$E_n(r) = E_0(r) \exp(j\theta_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

单元天线接收到的电场      相控阵系统对单元天线  $n$  产生的**控制相位**

雷达接收  $\phi$  方向散射电磁波的电场是所有单元天线接收电场的叠加：

$$E(r) = E_1(r) + E_2(r)e^{-j\delta} + E_3(r)e^{-j2\delta} + \dots + E_N(r)e^{-j(N-1)\delta}$$

如果希望波束的指向为  $\varphi = \varphi_0$

$$\text{使 } \theta_n = (N-1)kd \sin \varphi_0 = (N-1)\Delta$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \left( 1 + e^{j(\Delta-\delta)} + e^{j2(\Delta-\delta)} + \dots + e^{j(N-1)(\Delta-\delta)} \right)$$

$$= N \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \frac{\sin\left(N \frac{X}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{X}{2}\right)} e^{j\left[\frac{N-1}{2}X\right]}$$

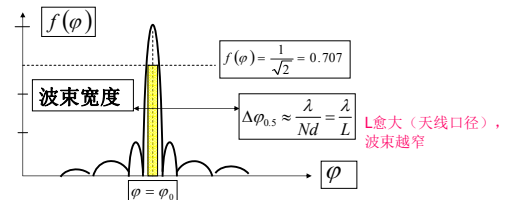
$$f(\varphi) = \frac{\sin\left(N \frac{X}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{X}{2}\right)} \quad X = \frac{2\pi}{\lambda} d(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$$

阵因子

$$\text{当 } \varphi = \varphi_0, X = 0 \quad f(\varphi_0) = 1$$

天线在  $\varphi = \varphi_0$  方向接收电磁波能流密度为:

$$S(\mathbf{r}) = \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] \right]_{\max} = N^2 S_0(\mathbf{r})$$



#### 4 目标运动速度的测量—Doppler原理

当波源与观察者之间存在相对运动时，观察者接收电磁波的频率与不存在相对运动时电磁波的频率不同。当它们相互靠近时，频率增加；相互远离时，频率减小。这一现象称为Doppler效应，频率改变量称Doppler频移。

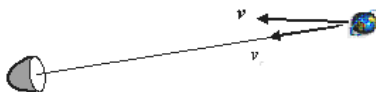


图 6-20 运动目标的 Doppler 效应

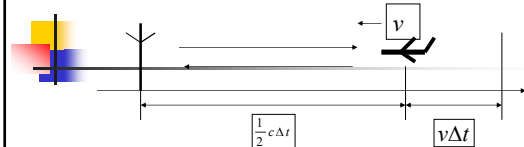
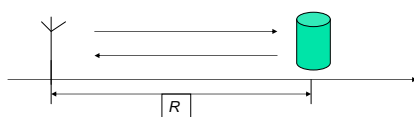
#### 多普勒效应

当你站在公路旁，留意一辆快速行驶汽车的引擎声音，你会发现它在向你行驶时声音的音调会变高（即频率变高），在它离你而去时音调会变得低些（即频率变低）。这种现象叫做**多普勒效应**。在**光现象里**同样存在多普勒效应，当光源向你快速运动时，光的频率也会增加，表现为光的颜色向蓝光方向偏移（因为在可见光里，蓝光的频率高），即光谱出现**蓝移**；而当光源快速离你而去时，光的频率会减小，表现为光的颜色会向红光方向偏移（因为在可见光里，红光的频率低），即光谱出现**红移**。

如果目标处于静止，雷达接收目标回波信号的时间完全由目标的位置确定，雷达接收机检测到的相位改变量是：

$$\Delta \phi = 2kR = kc\Delta t = 2\pi f_0 \Delta t$$

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = 2\pi f_0 = \omega_0$$



$$\Delta \phi(t) = 2kR = (c + 2v_r)\Delta t = 2\pi \left( f_0 + \frac{2v_r}{\lambda} \right) \Delta t = 2\pi (f_0 + \Delta f) \Delta t$$

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = 2\pi (f_0 + \Delta f) = \omega_0 + \Delta \omega \quad \Delta f = \frac{2v_r}{\lambda}$$

根据相对论原理，波源与观测者存在相对运动时，不同惯性坐标系中，波传播的速度保持不变性。

当移动台以恒定速度  $v$  在长度为  $d$  的端点  $x$  和  $y$  的路径上运动时接收到来自远端源  $S$  发出的信号，

无线电信号从  $S$  发出，在  $x$  和  $y$  点分别被移动台接受时所走的路径差为：

$$\Delta l = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta$$

相位变化值和频率变化值为：

$$\Delta \phi = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v \Delta t}{\lambda} \cos \theta$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta$$

当移动台以恒定速度  $v$  在长度为  $d$  的端点  $x$  和  $y$  的路径上运动时接收到来自远端源  $S$  发出的信号，

无线电信号从  $S$  发出，在  $x$  和  $y$  点分别被移动台接受时所走的路径差为：

$$\Delta l = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta$$

相位变化值和频率变化值为：

$$\Delta \phi = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v \Delta t}{\lambda} \cos \theta$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta$$

当移动台以恒定速度  $v$  在长度为  $d$  的端点  $x$  和  $y$  的路径上运动时接收到来自远端源  $S$  发出的信号，

无线电信号从  $S$  发出，在  $x$  和  $y$  点分别被移动台接受时所走的路径差为：

$$\Delta l = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta$$

相位变化值和频率变化值为：

$$\Delta \phi = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v \Delta t}{\lambda} \cos \theta$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta$$

设电荷电流分布：

$$\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$$

$$\rho(\vec{x}', t) = \rho(\vec{x}') e^{-i\omega t}$$

将此式代入推迟势的公式后得到 ( $k = \omega/c$ )

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - r/c)}{r} dV' = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} dV' \right] e^{-i\omega t}$$

令  $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} dV'$ ，则  $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$

上式表示一种时谐波，这是计算辐射场矢势的一般公式。与稳恒电流磁场相比这里  $\vec{A}$  附加了一个因子  $e^{ikr}$ ，称为推迟相因子。

根据洛伦兹条件可以得到矢势与标势的关系：

$$\phi(\vec{x}, t) = \left[ \int \frac{\rho(\vec{x}') e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} dV' \right] e^{-i\omega t} \Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

因此只要求出矢势即可得到标势

此情况下电磁场也是时谐电磁场：

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) \quad (\text{在 } \vec{J} = 0 \text{ 的区域成立})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

设电荷电流分布：

$$\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$$

$$\rho(\vec{x}', t) = \rho(\vec{x}') e^{-i\omega t}$$

将此式代入推迟势的公式后得到 ( $k = \omega/c$ )

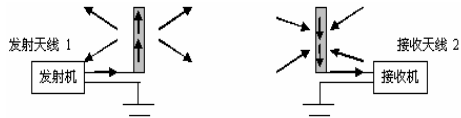
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - r/c)}{r} dV' = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} dV' \right] e^{-i\omega t}$$

令  $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} dV'$ ，则  $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$

上式表示一种时谐波，这是计算辐射场矢势的一般公式。与稳恒电流磁场相比这里  $\vec{A}$  附加了一个因子  $e^{ikr}$ ，称为推迟相因子。

### 3 互易性原理—天线有效截面积

天线既可以用作电磁波的辐射器，也可以用作电磁波的接收器。理论上可以证明同一副天线，其发射和接收具有相同的方向图。即天线的辐射和接收具有互易性。



天线用作接收时，设天线从来波中截取电磁波能量的功率为 $P$ ，来波的能量密度为 $S(\theta, \varphi)$ ，其比值相当于天线从来波中截获电磁能量的面积，是衡量天线作接收时一个重要的参数。



$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{P}{S}$$

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi)$$