



电磁场理论

Electromagnetic Theory

武汉大学 柯亨玉



第一讲 序 论

- 科学内涵和应用领域
 - 学科发展简史回顾
 - 主要研究对象和内容
 - 课程学习目的及要求
-

科学内涵及应用



□ 科学内涵

电磁场是什么？	↔	科学问题
如何得到电磁场？	↔	技术问题
电磁场有何用途？	↔	应用问题



□ 科学内涵

科学内涵

1. 物理学的分支科学

电磁场属性与统一场理论
微观量子电磁现象及本质
电磁场与物质的相互作用



□ 科学内涵

科学内涵

2. 无线电技术的基础理论
信息获取的基本手段
器件及系统的基本理论
信息与通信的工具



□ 科学内涵

科学
内
涵

3. 电气工程科学核心理论
电磁能量的产生转换
电磁能量的传输和储存
电磁场能的开发和应用



□ 科学内涵

科学内涵

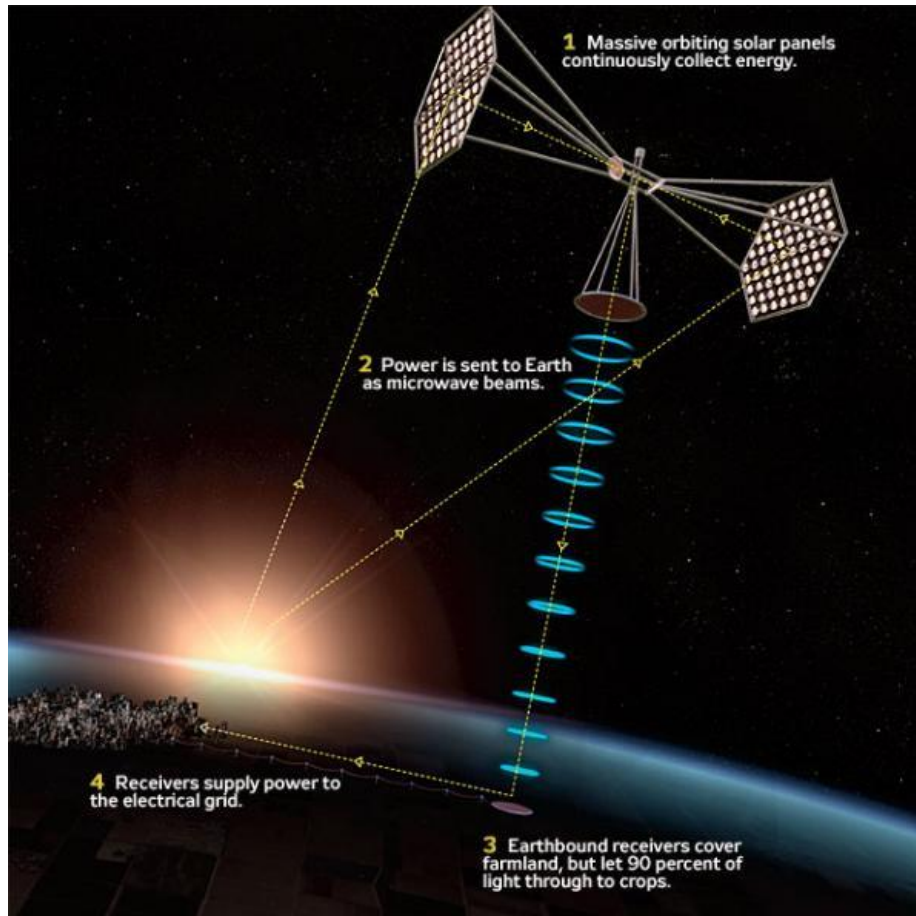
- 4. 遥测、控、感与定位手段
电波测、控、感和定位理论
测、控、感和定位关键技术
测、控、感和定位系统及应用



□ 主要应用领域

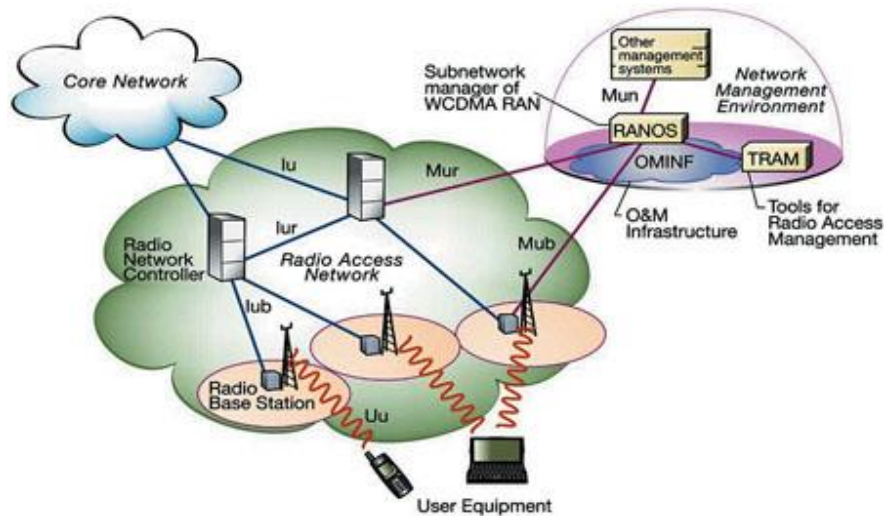
- ☑ 电磁场（或波）为能量一种形态，是当今世界最重要的能源，研究问题涉及电磁能产生、存储、变换、传输和应用。







□ 主要应用领域



- ☑ 电磁波作为信息的载体，成为信息发布与通信的主要手段，研究问题包括信息调制、传输、储存、处理、再现和应用。



□ 主要应用领域

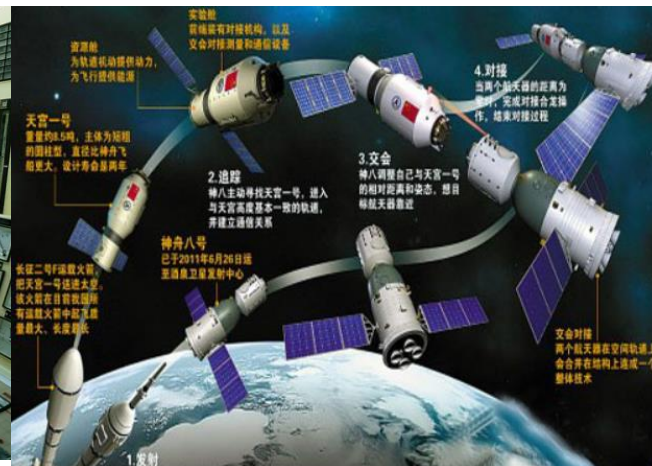
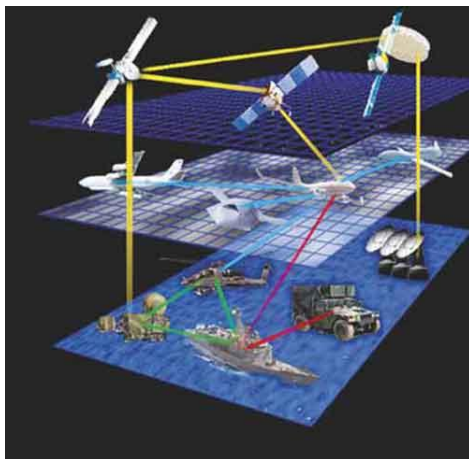
☑ 作为探测未知世界的重要手段，主要研究问题包括电磁波与目标体的相互作用、目标体的探测及其特征的提取等等



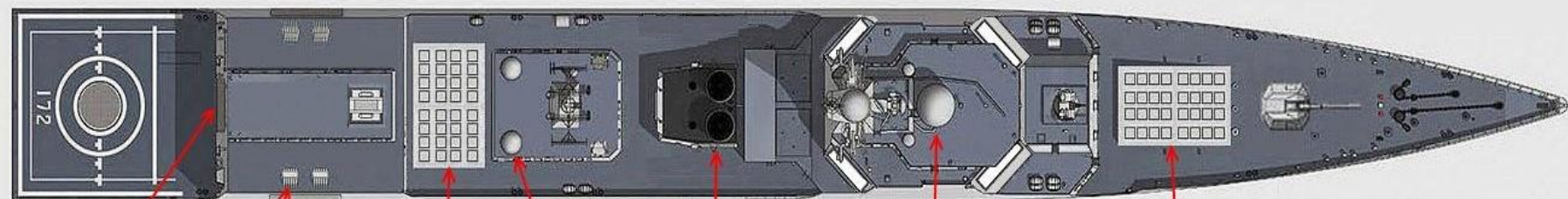
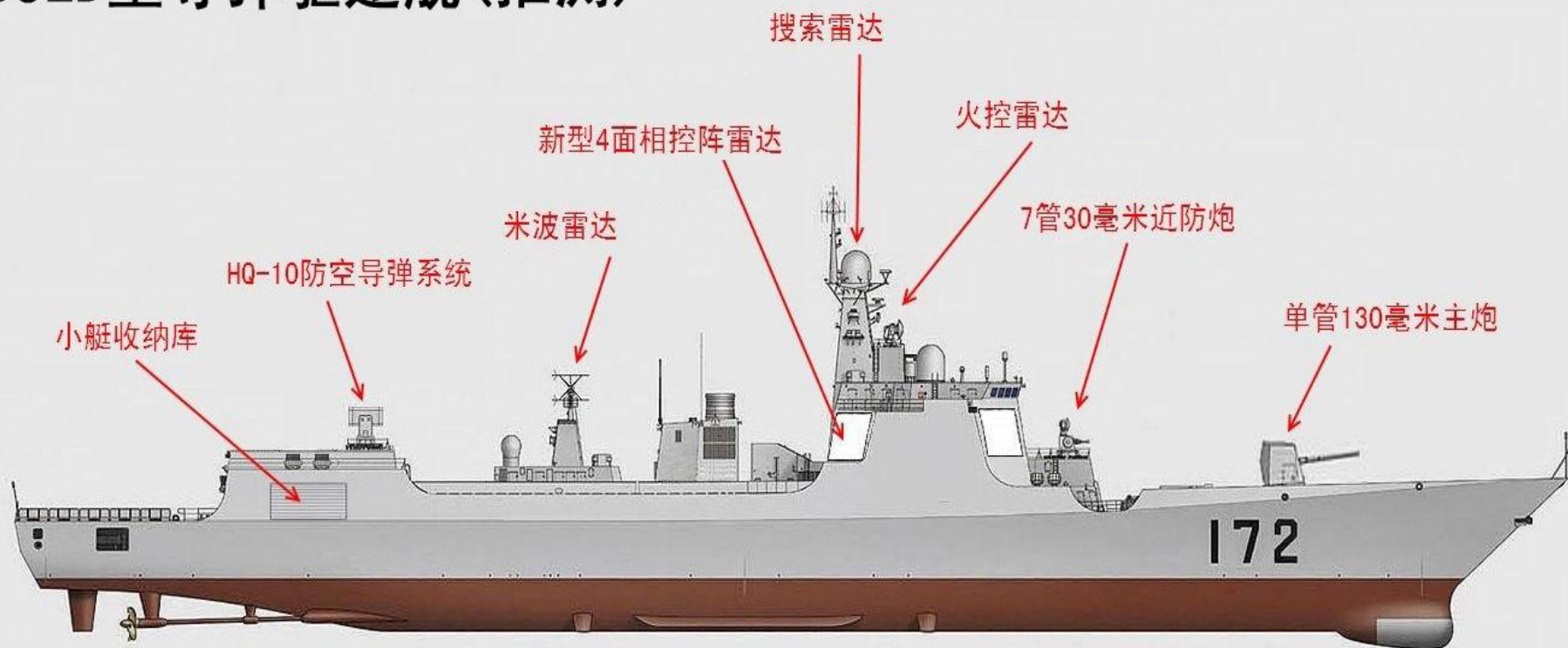


□ 主要应用领域

☑ 电磁波信号作为测控的手段，构成现代工业、交通、国防等领域的应用基础



052D型导弹驱逐舰(推测)



中置单机库

多用途火箭发射系统

卫星通讯天线

国产柴燃交替动力系统

4×8单元新型导弹垂直发射系统

对海搜索雷达

4×8单元新型导弹垂直发射系统



思考题：

1. 为什么电磁波可作为信息的载体？
2. 电磁波被广泛用作信息载体的原因？
3. 为什么电磁波可作为探测的工具？

电磁场理论发展历程



1. 电磁场理论的早期研究

电、磁现象是大自然最重要的往来现象，也最早被科学家们关心和研究的物理现象，其中贡献最大的有**来顿**、**富兰克林**、**伏打**等科学家。

19世纪以前，电、磁现象作为两个独立的物理现象被广泛的关注和研究。正是由于这些研究为电磁学理论的建立奠定了基础。



2. 电磁场理论的建立

18世纪末期，德国哲学家**谢林**认为，宇宙是有活力的，而不是僵死的，认为电是宇宙的活力和灵魂；电-磁-光-热现象相互联系。



奥斯特是谢林的信徒，从1807年开始研究电与磁之间的关系。
1820年发现电流以力作用于磁针



2. 电磁场理论的建立



安培发现作用力的方向和电流的方向以及磁针到通过电流的导线的垂直线方向相互垂直，并定量建立了若干数学公式。这表明，电流与磁之间存在着密切的联系。



2. 电磁场理论的建立



法拉第相信电、磁、光、热相互联系。奥斯特1820年发现电流以力作用于磁针后，法拉第敏锐地意识到磁也一定能够对电产生影响。1821年他开始探索磁生电效应。1831年他发现；当磁棒插入导体线圈时；线圈中产生电流。表明电与磁之间存在密切联系。



2. 电磁场理论的建立



麦克斯韦深入研究并探讨了电与磁之间发生作用的问题，发展了场的概念。在法拉第实验的基础上，总结了宏观电磁现象规律，引进位移电流的概念，提出了一组描述电磁现象的规律偏微分方程，即麦克斯韦方程组，建立了宏观经典电磁场理论。



2. 电磁场理论的建立



1855年：开始致力于电磁学的研究

1864年：《电磁场的动力学理论》

1873年：《电磁通论》著作完成

1873年：经典宏观电磁场理论建立



2. 电磁场理论的建立



德国科学家**赫兹**，1887 年用火花隙激励一个环状天线，用另一个带隙的环状天线接收，证实了麦克斯韦关于电磁波存在的预言，这一重要的实验导致了后来无线电报的发明。从此开始了电磁场和电磁波理论的应用与发展时代。



3. 电磁场的应用

☑ 无线电报 (telegraph)

1895年，**马可尼**进行了2.5公里无线电报传送

1896年，**波波夫**进行了250米的电报传送试验

1899年，跨越英吉利海峡电报传送试验成功

1901年，跨越大西洋的3200公里的试验成功

马可尼成为1909年的诺贝尔奖得主



☑ 有线电话 (telephone)

1876年，美国科学家**贝尔**在美国建国100周年博览会上展示了他所发明的有线电话。

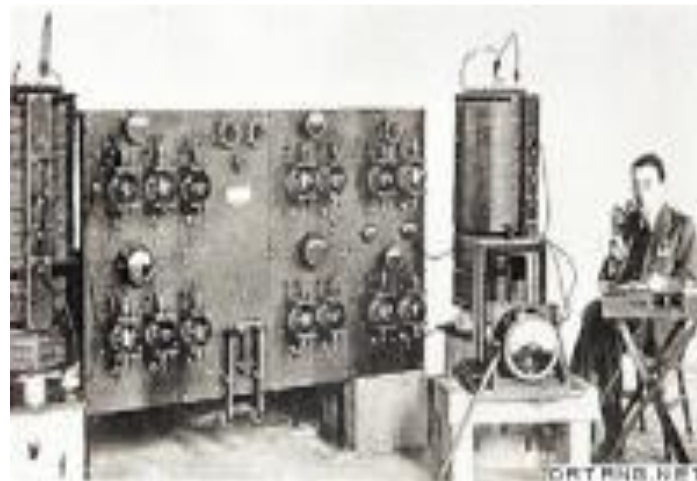




☑ 广播 (broadcasting)

1906年，美国**费森登**用50千赫的发电机作发射机，用微音器接入天线实现调制，使大西洋航船上的报

务员听到了广播播出的音乐。1919年第一个定时的无线电广播电台在英国建成。





☑ 电视 (television video)

1884年，德国**尼普科夫**提出机械扫描电视的设想，1927年，英国**贝尔德**成功用电话线路把图像从伦敦传至大西洋中的船上。**兹沃霄金**在1923年和1924年相继发明了摄像管和显像管。1931年，世界上第一个全电子电视系统出现。





☑ 雷达 (Radar)

雷达的英文RADAR是Radio Detection And Ranging的缩写，意为无线电探测和测距



1922年，**马可尼**发表无线电波能检测物体的论文，是雷达最早的概念。雷达作为一种探测目标的电子设备，产生于二次世界大战。



1936年，英国设计警戒雷达投入了运行
1938年，美国研制成第一部火炮控制雷达
1940年，微波雷达的研制成为可能
1944年，自动跟踪飞机的雷达研制成功
1945年，显示运动目标的显示技术发明



☑ 卫星通信(satellite communications)



1958年, 美国低轨“斯科尔”卫星发射成功
1964年, 同步通信卫星实现了三大洲的通信
1965年, 第一颗商用定点同步卫星投入运行
1969年, 卫星通信经历10年发展终趋于成熟



☑ 卫星定位技术

(Navigation Satellite
Timing and Ranging/
Global Positioning
System — GPS)





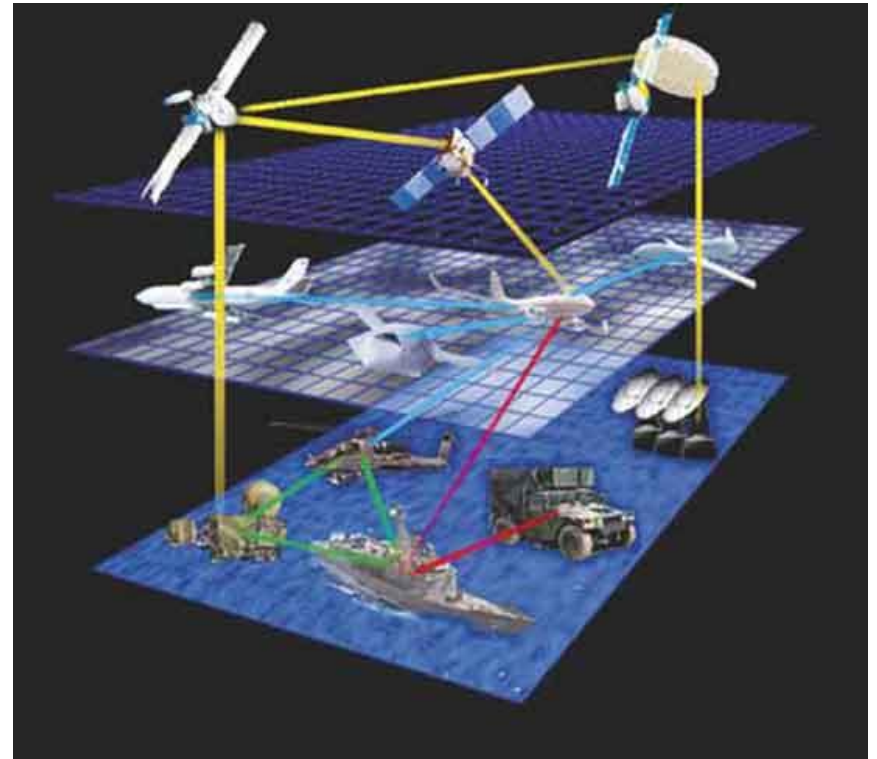
☑ 卫星定位技术 —GPS

1957年卫星发射成功后，以卫星为基地对地球表面及近地空间目标的定位和导航成为可能。1958年底，美国开始研究实施这一计划，于1964年研究成功子午仪卫星导航系统。1973年美国提出了由24颗卫星组成的实用系统新方案，即GPS计划，1990年最终的GPS方案是由21颗工作卫星和3颗在轨备用卫星组成。



☑ 北斗定位系统

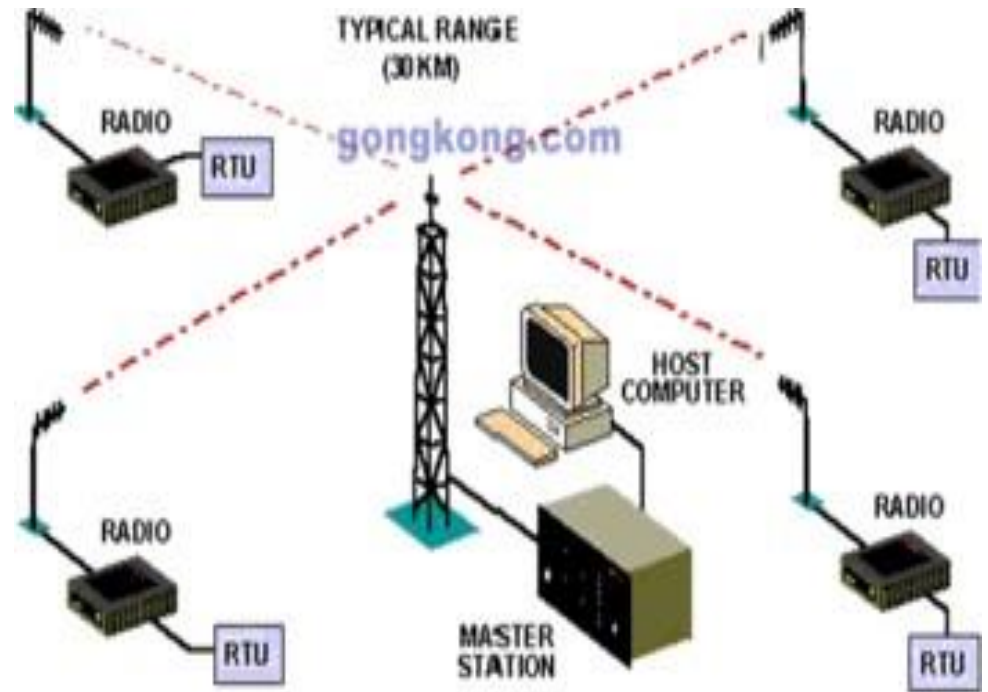
北斗定位系统是我国建立的区域导航定位系统。北斗一代由三颗卫星、地面控制中心、用户三部分组成。功能为定位, 通信和授时。北斗二代为全地定位系统, 2011年完成系统组网, 2012年具备运行能力。2020年完成建设任务。





☑ 无线通信技术—利用电磁波实现的通信

利用电磁波信号可以在自由空间传播特性进行信息交换的一种通信方式。移动中实现的无线通信又称为移动通信，人们把二者称为无线移动通信



主要研究对象和问题



- 场的物理质属性及运动规律
- 场（波）与物质相互作用及应用
- 复杂电磁系统的认知与仿真计算
- 电波环境特性及其对人类的影响

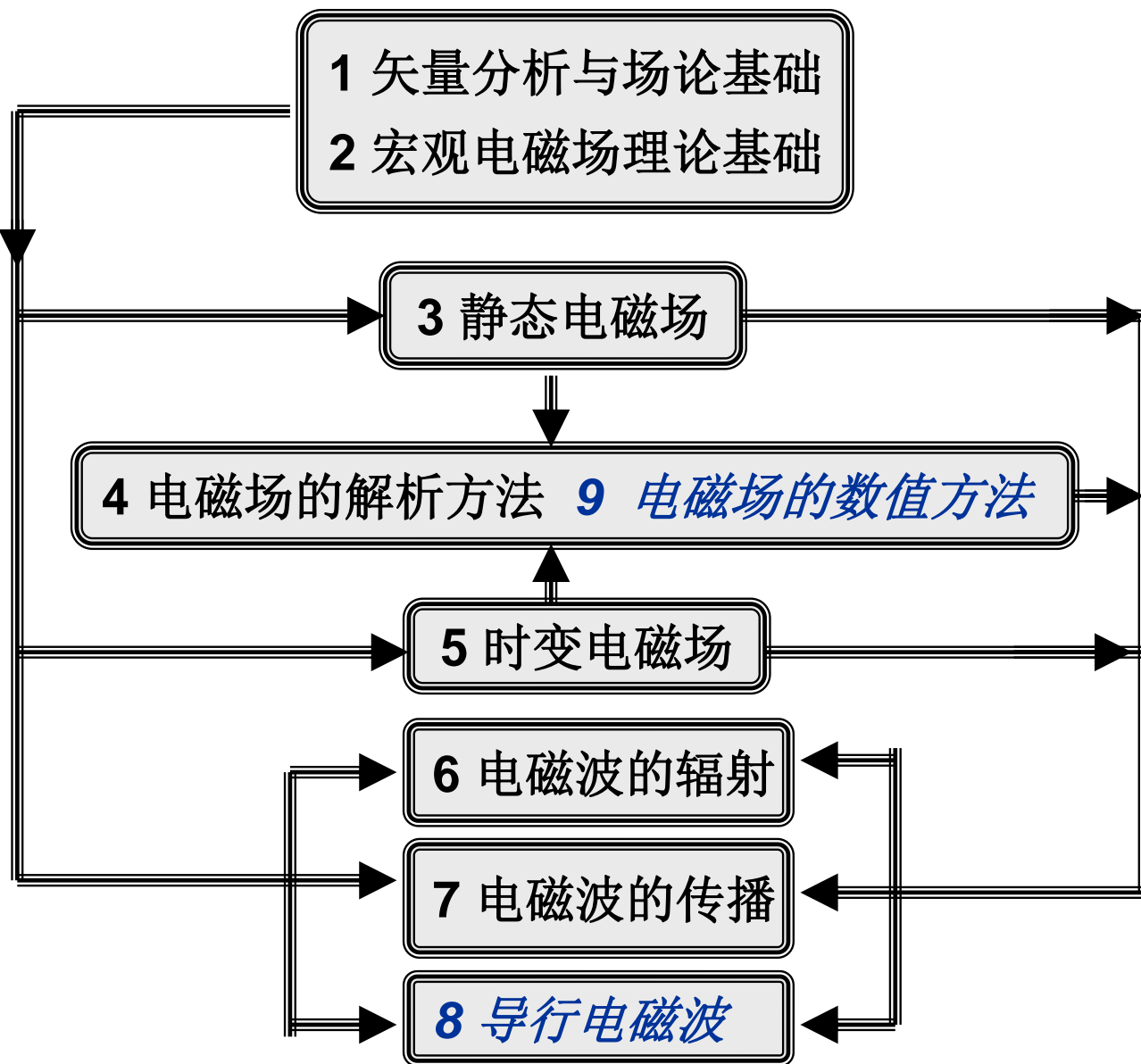


- 电磁频谱的开拓与利用
- 电磁能的开发与利用
- 新器件及系统的开发
- 电磁场与波的新应用

学习目的、方法及其要求



- 掌握电磁场的基本属性和运动规律
- 掌握电磁场问题的基本分析方法
- 了解电磁场的主要应用领域及原理
- 培养抽象思维和分析归纳问题的能力
- 培养应用数学提炼物理问题的能力
- 独立完成作业，做好课堂笔记
- 精读一至二本教学参考书





主要参考书

- 【1】 J. D. Kraus, Electromagnetism with Application (Fifth Edition)
- 【2】 毕德显, 电磁场理论, 电子工业出版社
- 【3】 谢处方, 饶克谨等. 电磁场与电磁波 (第四版). 北京: 高等教育出版社,
- 【4】 王蔷等, 电磁场理论基础, 清华大学出版社



第二讲 数学基础

场论与矢量分析基础

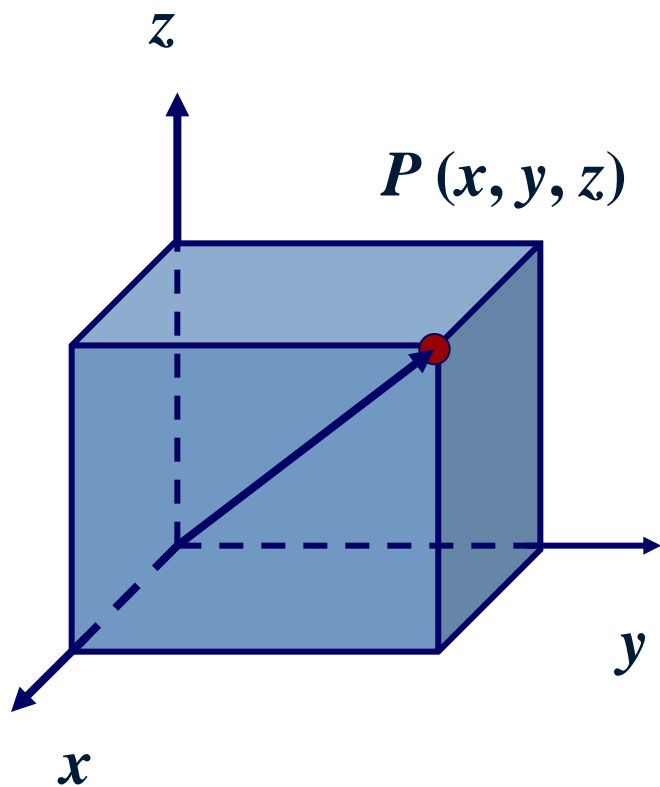


主要内容:

- 正交曲线坐标系及变换
- 场论基础（梯度、散度和旋度）
- 矢量场的Helmholtz定理



§ 1.1 正交曲线坐标系



1. 正交曲线坐标系

空间任意点位置可由三条相互正交曲线的交点来确定；

确定空间任意点位置的体系称为正交曲线坐标系；

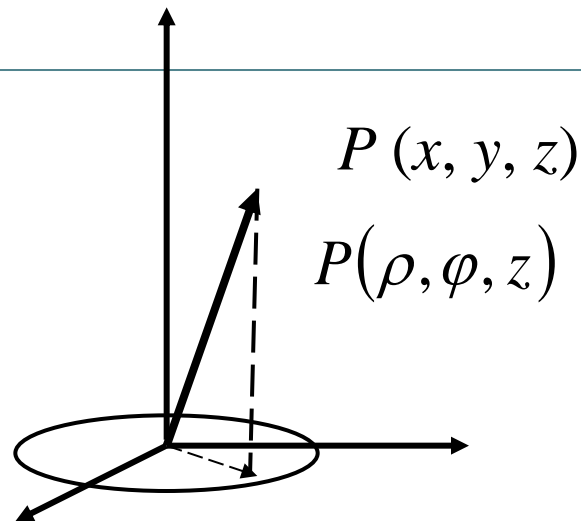
三条正交曲线称为坐标轴，描述坐标轴的量称为坐标变量；



2. 正交曲线坐标系的变换

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases}$$

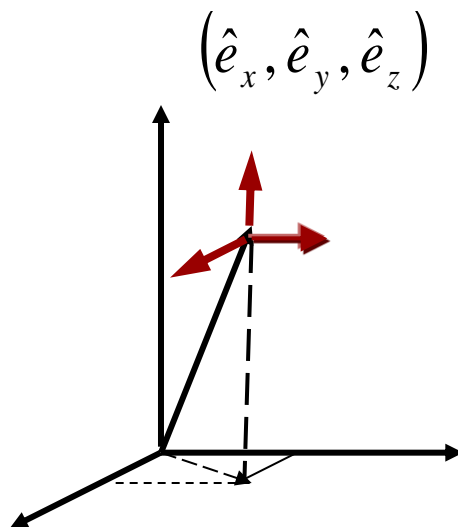
$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$



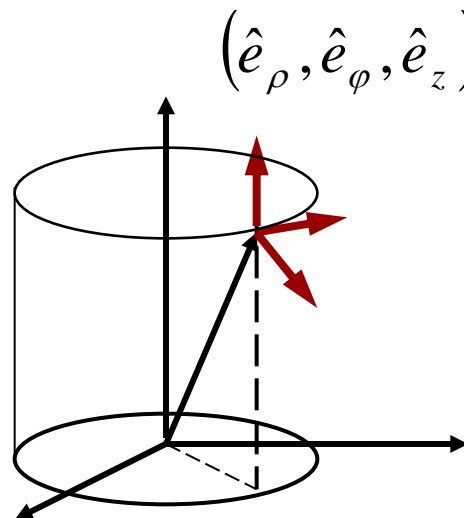
三维空间中同一点可以用不同的正交曲线坐标系描述。不同坐标系之间存在相互变换关系，这种变换之间满足一一对应关系



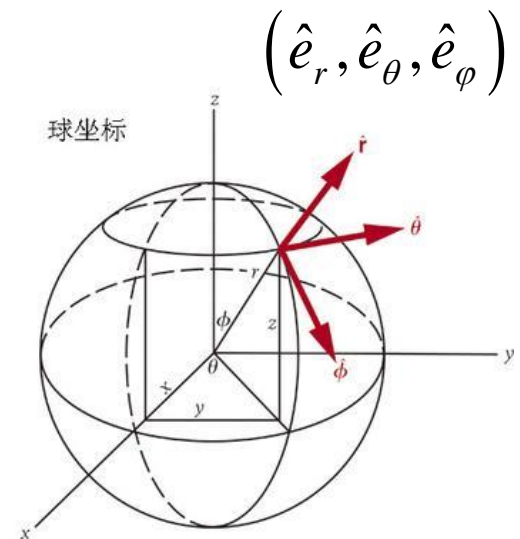
任一正交曲线坐标系有一组与坐标轴相对应的单位矢量。如直角坐标系、圆柱坐标和球坐标系等



直角坐标



柱坐标

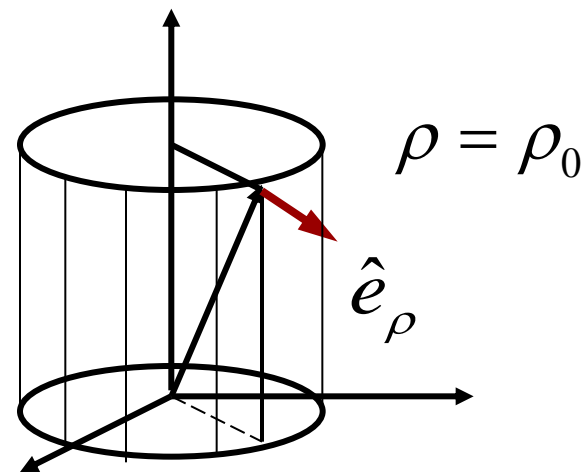
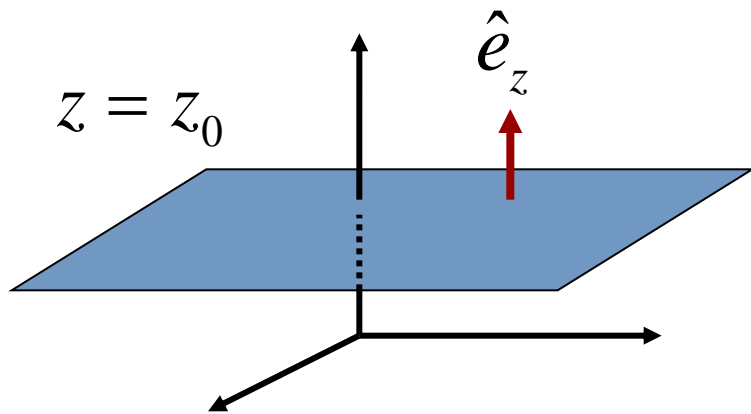


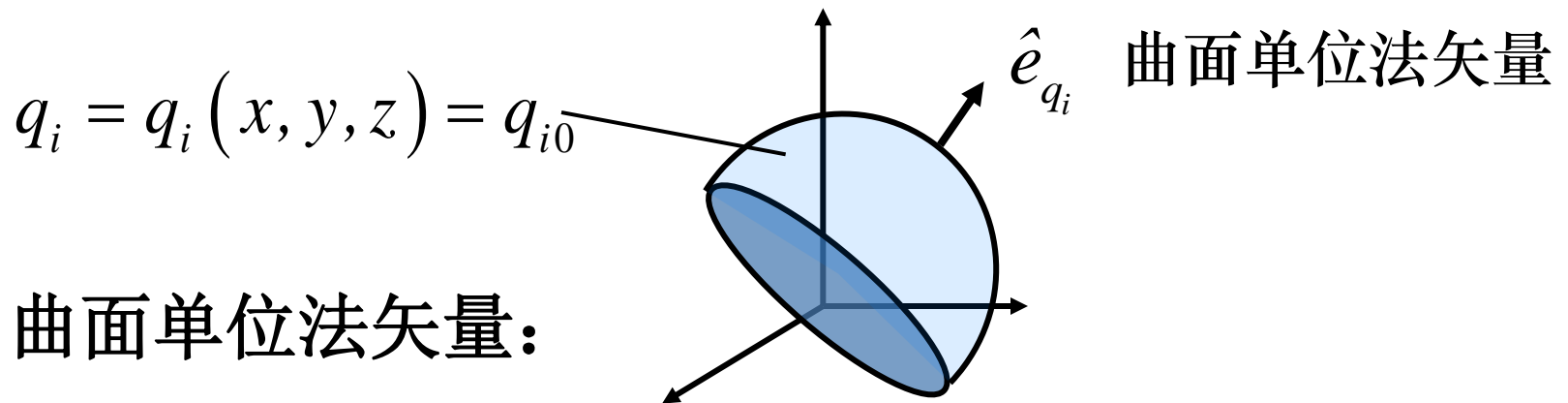
球坐标



坐标变量的单位矢量特点：

空间某点坐标变量的单位矢量为相应坐标变量等于该点坐标值时所对应曲面的单位法矢





$$\hat{e}_{q_i} = \frac{\hat{e}_x \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial z}\right)^2}}$$



例1 球坐标系坐标变量的单位矢量

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \frac{\hat{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial r}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2}} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \end{aligned}$$

球坐标系坐标变量的
单位矢量是变矢量！



3. 正交曲线坐标系中的弧长

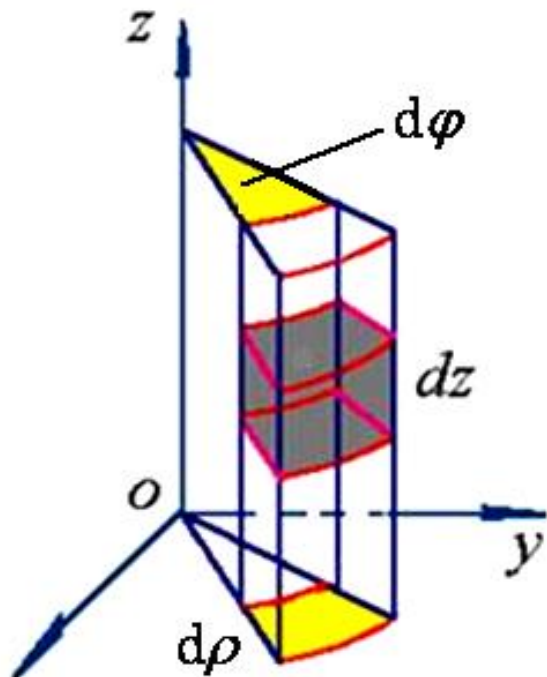
直角坐标系中，空间任意点的坐标变量的微小变化，变化前后的弧长是：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

正交曲线坐标系中，坐标变量的微小变化 $q_i \rightarrow q_i + dq_i$ ，对应的弧长改变量？



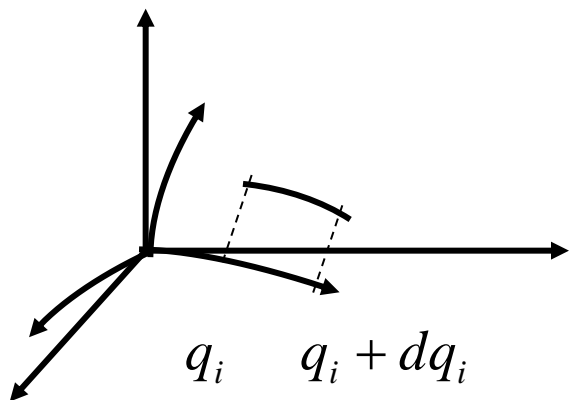
如在圆柱坐标系中



$$ds_{\rho} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\rho$$

$$\begin{aligned} ds_{\varphi} &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \rho \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \rho d\varphi \end{aligned}$$

$$ds_z = dz$$



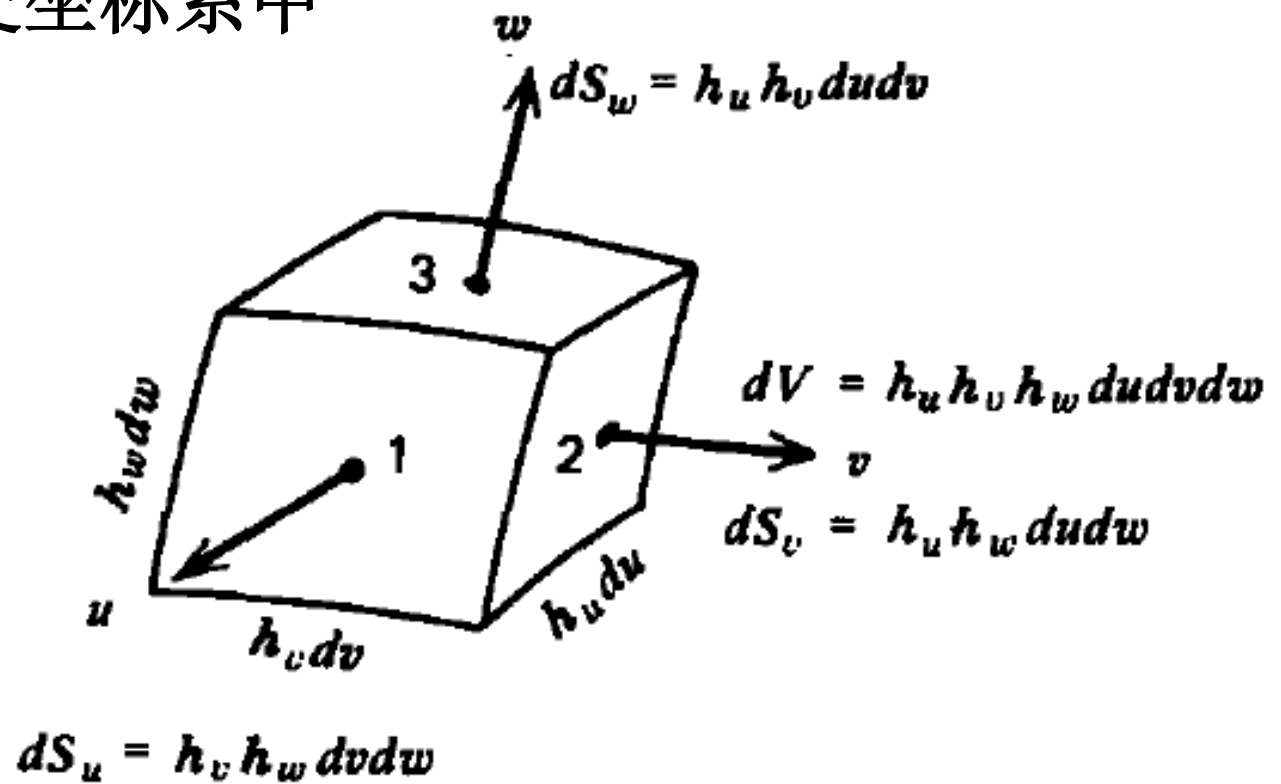
$$\begin{aligned} ds_{dq_i} &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} dq_i = h_i dq_i \end{aligned}$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

称为度规（或称**Lame**）系数



u, v, w 正交坐标系中





§ 1.3 标量场的梯度

1. 场的概念

任何物理现象总是发生在一定的空间上, 描述该物理现象的量在空间区域按相应规律分布。如

电荷在其周围激发的电场分布

电流在其周围激发的磁场分布

地球外部空间的温度分布

在空间区域上每一点有确定物理量与之对应,
称在该区域上定义了某物理量的场



只有数值而无方向的场称标量场

既有数值又有方向的场称矢量场

场与时间无关，为静态场，反之为时变场

空间区域用坐标变量 $x, y, z \in \Omega$

场量（标量）用 u 矢量场用 \mathbf{F}

场在数学上表现为空间某一确定区域定义的函数

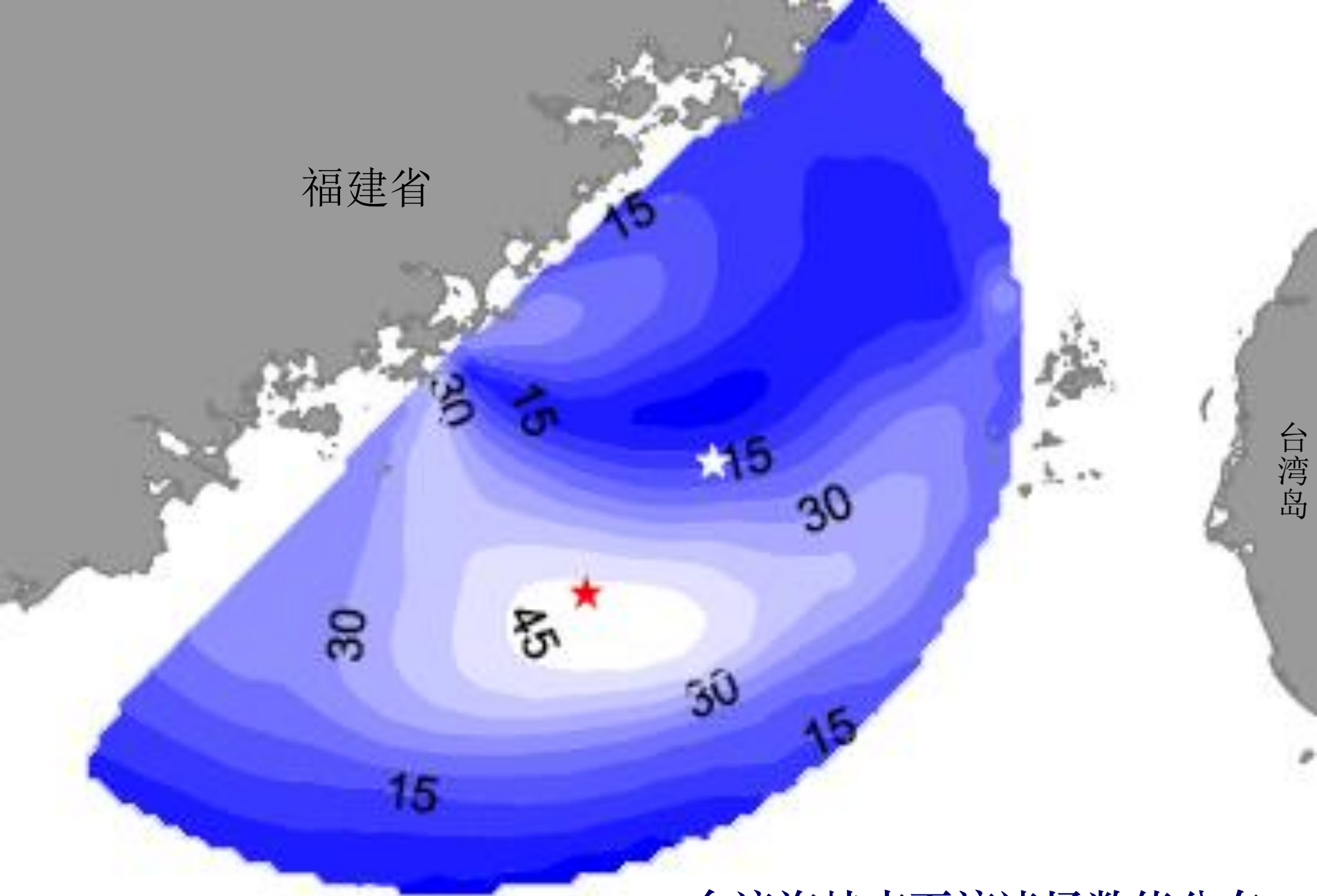


静态标量场用 $u(x, y, z)$

时变场标量场用 $u(x, y, z, t)$

静态矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$

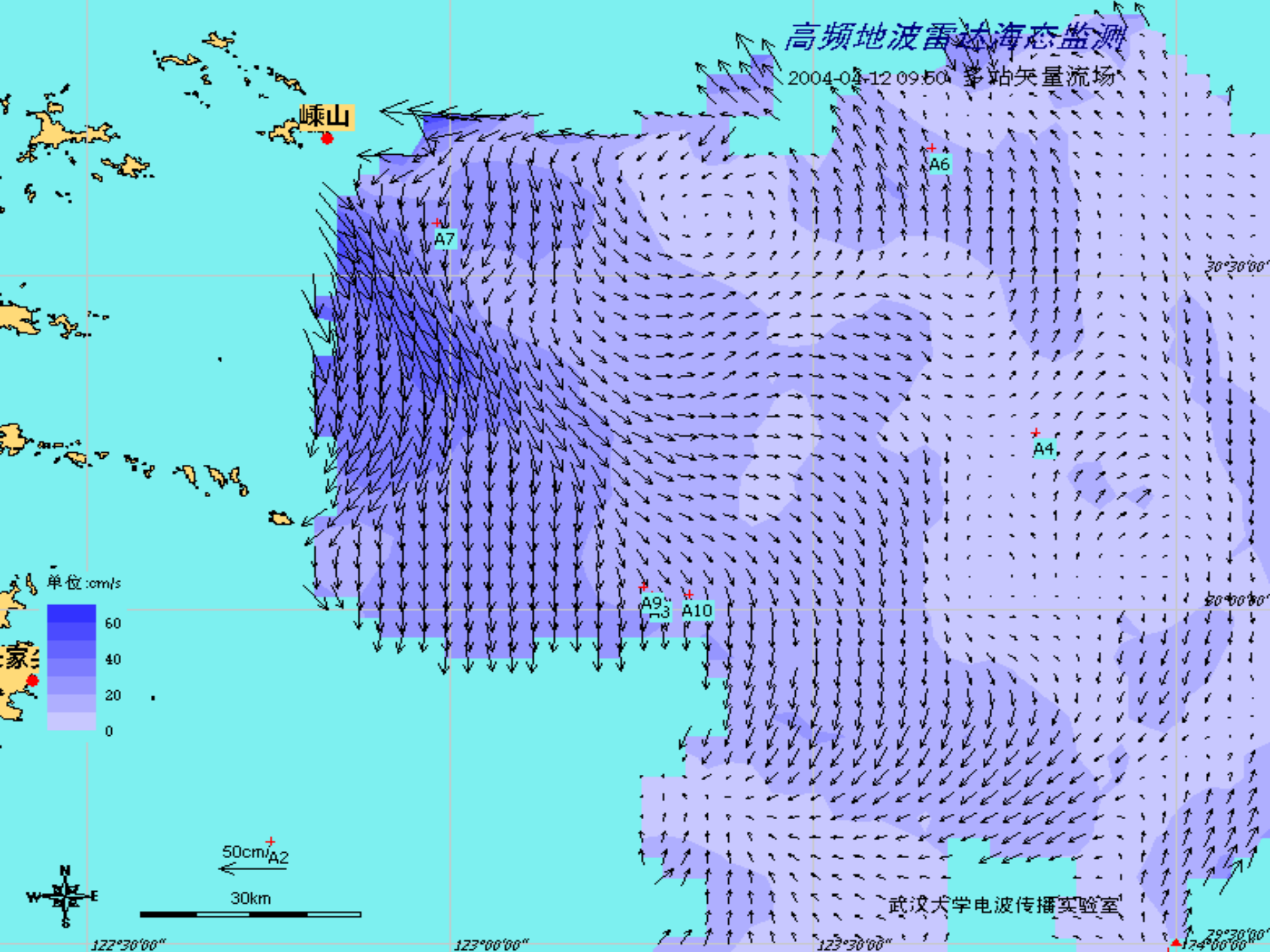
时变矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z, t)$



台湾海峡表面流速场数值分布

高频地波雷达海态监测

2004-04-12 09:50 多站矢量流场





关于的场三个基本问题：

- (1) 场的基本特性及表征与分析方法
- (2) 场与产生场的源的关系及相互作用
- (3) 场与场的相互联系与相互作用

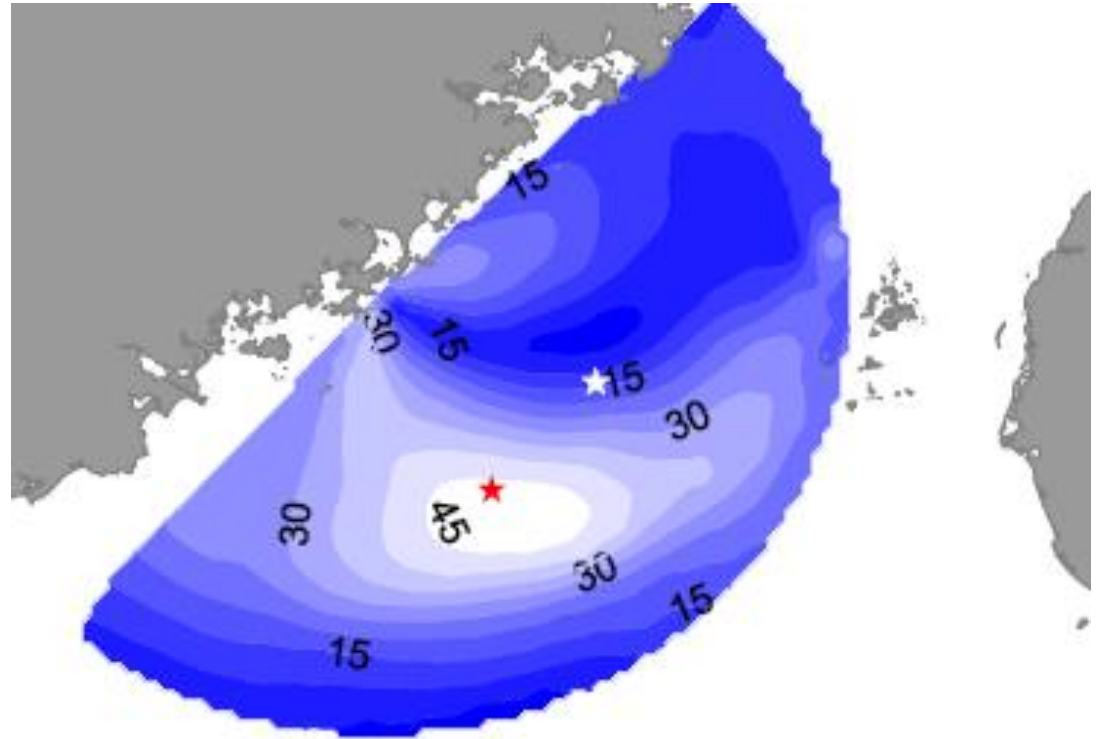


2. 标量场的等值面

场是空间位置的
函数

标量场同一数值各点在空间
形成的曲面

$$u(x, y, z) = C$$

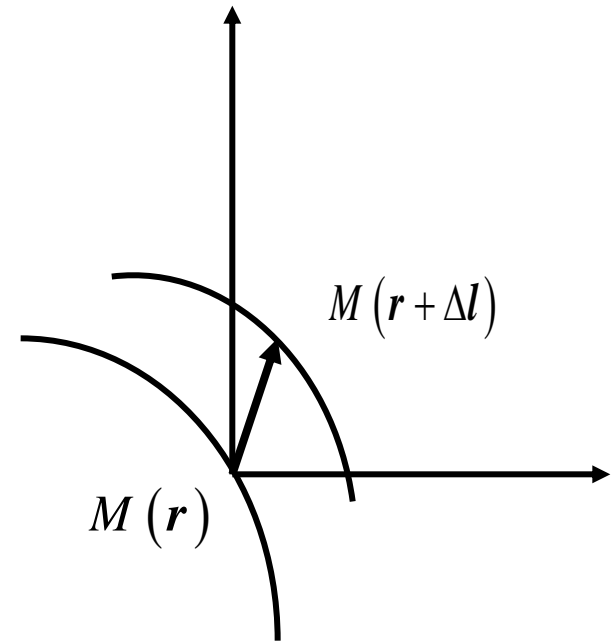




3. 场的空间变化-方向导数

实际应用中不仅需要了解宏观上场在空间的数值，还需要知道场在不同方向变化。

方向性导数可以描述标量场在空间某个方向上变化情况



方向性导数表示场沿 Δl 方向的空间变化率



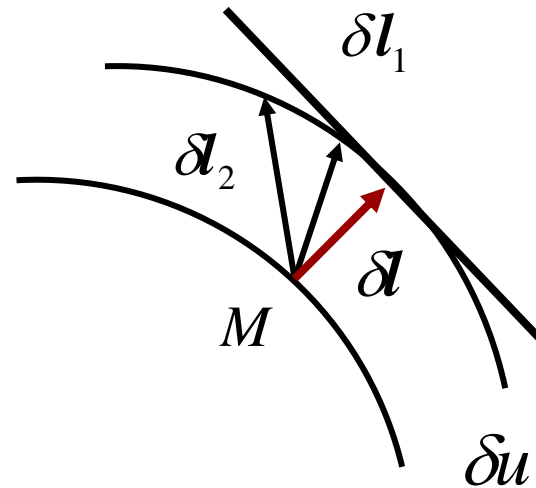
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} /_{M_0} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right] \frac{1}{dl} \\&= \left[\hat{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz}{dl} \right] \\&= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma\end{aligned}$$

$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为 Δl 的方向余弦



4. 场的空间变化-梯度

场在某点处沿不同方向变化快慢程度（方向性导数）不同，必存在变化最快的方向



$$\frac{\delta u}{\delta l_2} < \frac{\delta u}{\delta l_1} < \frac{\delta u}{\delta l}$$



标量场梯度（矢量场）：

标量场在空间变化最快的方向及数值

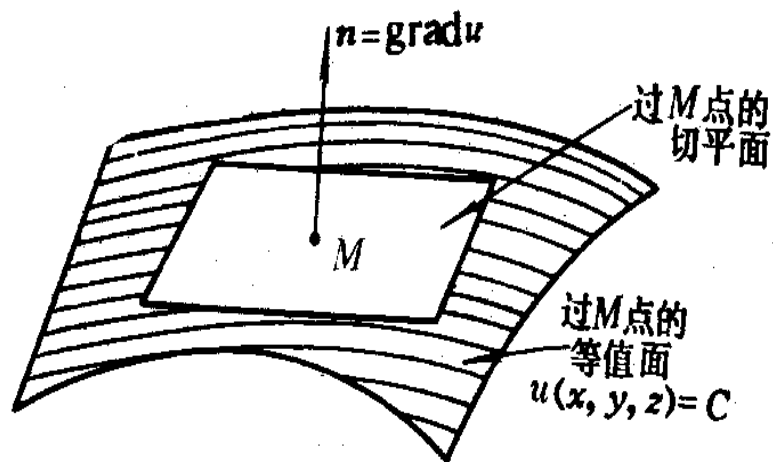
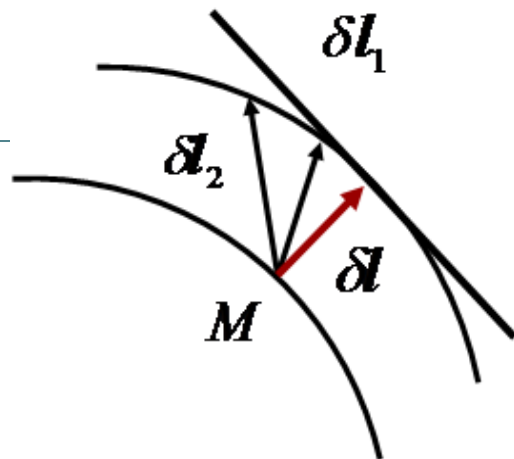
$$\nabla u = \hat{n} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{max} = \hat{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

梯度建立了标量场与某类矢量场的联系



5. 梯度的性质

- 梯度为矢量场, 描述场变化最快的方向及大小
- 场的方向导数为场的梯度在该方向上的投影
- 梯度垂直于通过该点等值 (或切平) 面, 或等值面法矢





6. 梯度运算的基本公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla c = 0 \\ \nabla cu = c \nabla u \\ \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\ \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \\ \nabla f(u) = f'(u) \nabla u \end{array} \right.$$



7. 正交曲线坐标系中梯度的表达式

$$\nabla u = \hat{e}_{q_1} \frac{\partial u}{\partial s_1} + \hat{e}_{q_2} \frac{\partial u}{\partial s_2} + \hat{e}_{q_3} \frac{\partial u}{\partial s_3}$$

$$ds_1 = h_1 dq_1, ds_2 = h_2 dq_2, ds_3 = h_3 dq_3$$

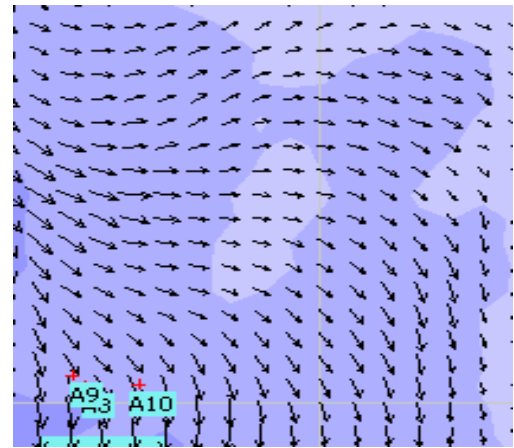
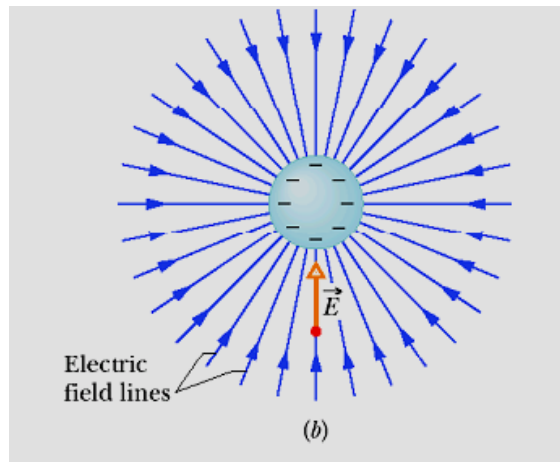
$$\nabla u = \hat{e}_{q_1} \frac{\partial u}{h_1 \partial q_1} + \hat{e}_{q_2} \frac{\partial u}{h_2 \partial q_2} + \hat{e}_{q_3} \frac{\partial u}{h_3 \partial q_3}$$



§ 1.4 矢量场的散度

1. 矢量场与矢量线

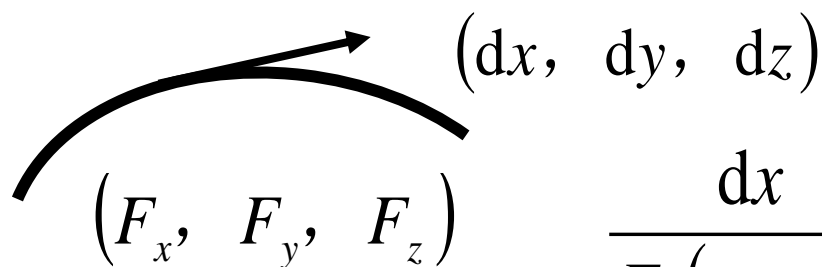
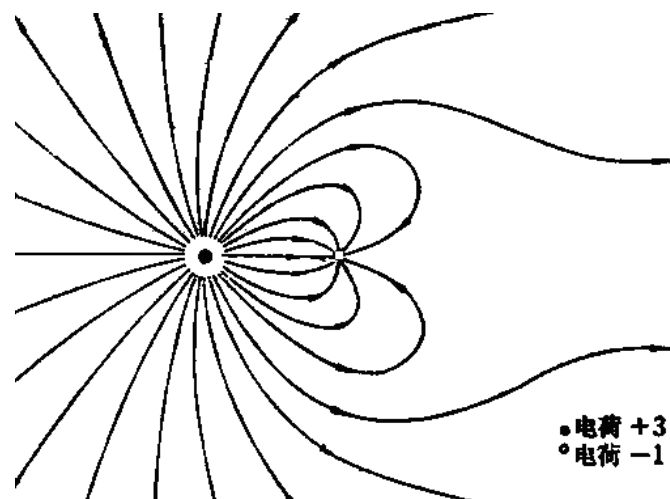
矢量场：空间区域的每一点有确定矢量对应，
称该空间区域上定义了一个矢量场。





矢量线可以形象描述矢量方向 但不能定量描述矢量场的大小

所谓矢量线是这样的曲线，
其上每一点的切线方向为
该点矢量场的方向。



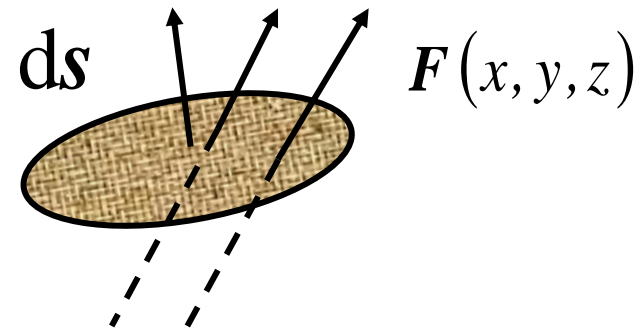
$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}$$



2. 矢量场的通量

单位面积矢量的通量
—通量密度描述了矢量场的大小。

场定义区域某点选取
面元，穿过该面元矢量
线的数称为矢量场
对于面积元的通量



$$d\psi = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta s$$

$d\psi$ 与面元大小及法向、矢量场
的大小及方向有关

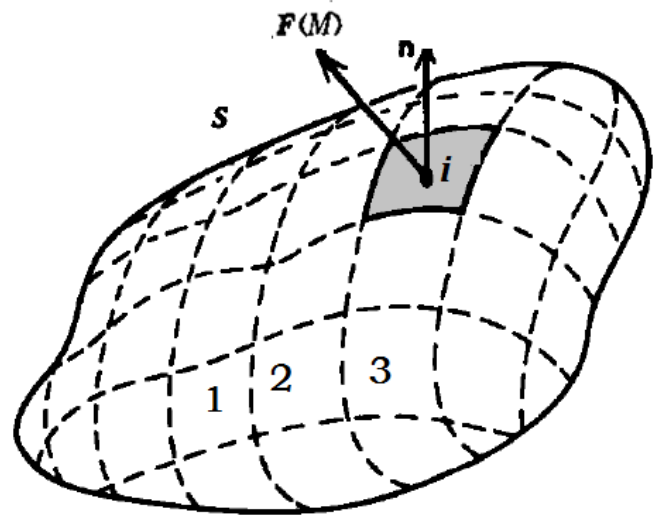
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\hat{\mathbf{n}} \frac{d\psi}{ds} \right)_{\text{Max}}$$



矢量场对于曲面 \mathbf{s} 的通量为曲面 \mathbf{s} 上所有小面积元通的叠加:

$$\psi = \sum_i d\psi_i = \iint \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}$$

$$d\psi_i = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta s_i$$





当曲面 s 闭合，规定曲面法矢由闭合曲面内指向外，矢量场对于闭合曲面的通量为一标量

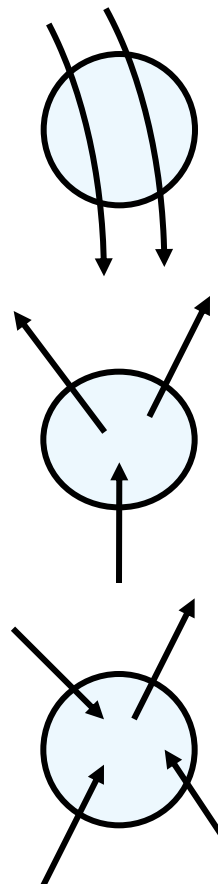
$$\oiint\limits_s F(x, y, z) \cdot ds = Q$$

矢量场通量满足叠加原理

$$\sum_{i=1}^N \oiint\limits_s f_i(x, y, z) \cdot ds = \oiint\limits_s \sum_{i=1}^N f_i(x, y, z) \cdot ds = \sum_{i=1}^N q_i = Q$$



$$Q = \oiint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$



流入流出闭合曲面矢量线相等或没有矢量线流入和流出

发散和汇聚力线源相等或没有产生力线源

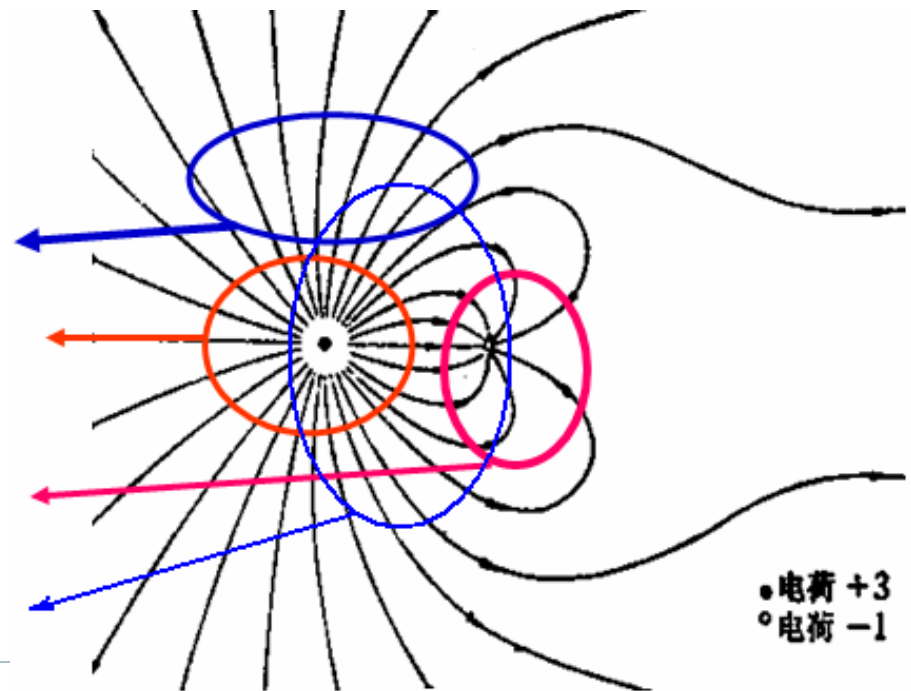
有净的矢量线流出
有产生发散力线源

有净的矢量线流入
有产生汇聚力线源



闭合曲面的通量与曲面内包含产生发散和汇聚力线（场）的源直接相关。如点电荷激发电场

$$Q = \oiint_{S_i} \mathbf{E}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \times \begin{cases} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{cases}$$

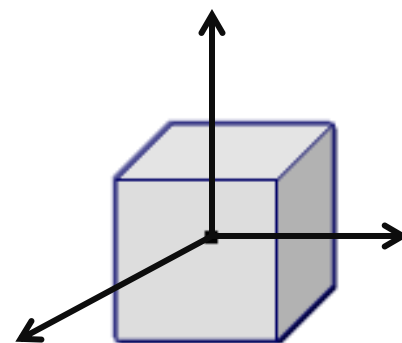




3. 散度与通量源

为描述空间某一点处矢量场发散的强弱程度，引入散度概念，定义为包含某点在内的单位体积所对应的闭合曲面之通量

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_s \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}$$

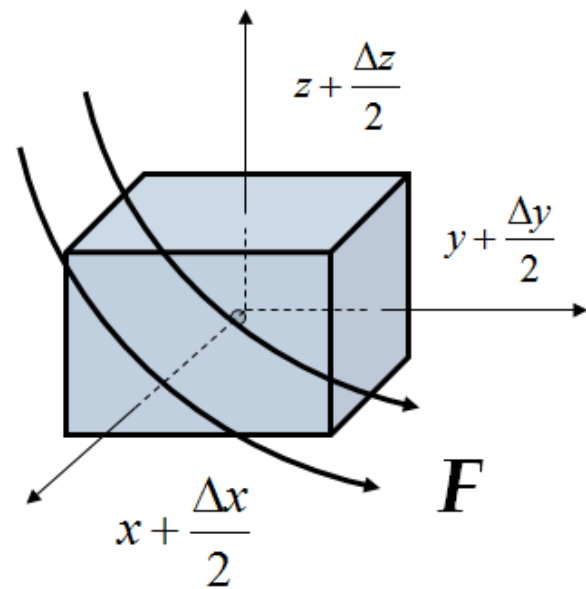


散度： 单位体积矢量场的发散强度

- ① 含某点在内单位体积元及闭合曲面积
- ② 矢量场对单位体积元闭合曲面的通量



$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \left(F_x \Delta z \Delta y \right) /_{x=x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(F_x \Delta z \Delta y \right) /_{x=x-\frac{\Delta x}{2}} \\ &+ \left(F_y \Delta z \Delta x \right) /_{y=y+\frac{\Delta y}{2}} - \left(F_y \Delta z \Delta x \right) /_{y=y-\frac{\Delta y}{2}} \\ &+ \left(F_z \Delta y \Delta x \right) /_{z=z+\frac{\Delta z}{2}} - \left(F_z \Delta y \Delta x \right) /_{z=z-\frac{\Delta z}{2}} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}\end{aligned}$$





$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \begin{cases} = 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

散度的三个结果对应的原因？

矢量（或标量）场（结果）为源（原因）所激发

矢量场散度与包含该点的单位中含场激励源密度相关

散度不全为零的矢量场称有散场

能产生有散矢量场的源称为通量源



根据散度的物理意义，矢量场相对于小体积元的通量与体积元内的通量源成正比：

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \kappa \rho(x, y, z) \Delta V$$

其中 $\rho(x, y, z)$ 为通量源密度。于是有：

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \kappa \rho(x, y, z)$$

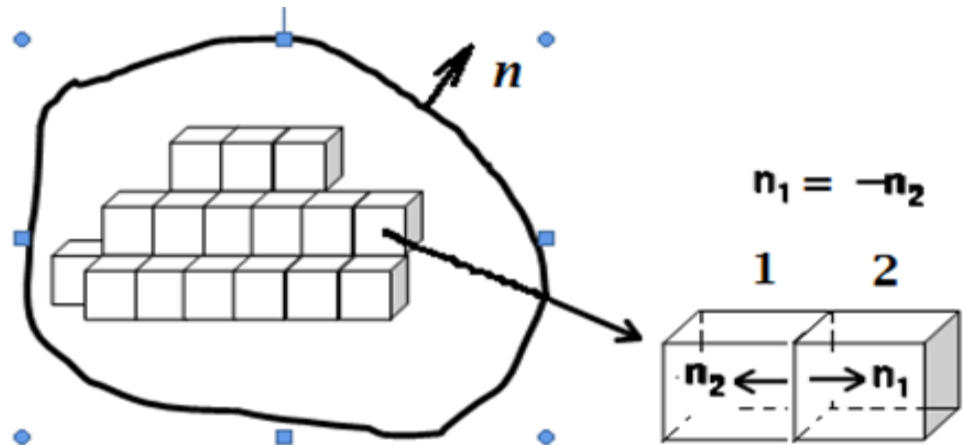
κ 为比例常数，一般由实验获得。



4. Gauss定理

矢量场对于任意闭合曲面的通量等于该闭合曲面矢量场散度的体积分，即Gauss定理

$$\begin{aligned}\psi &= \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV\end{aligned}$$



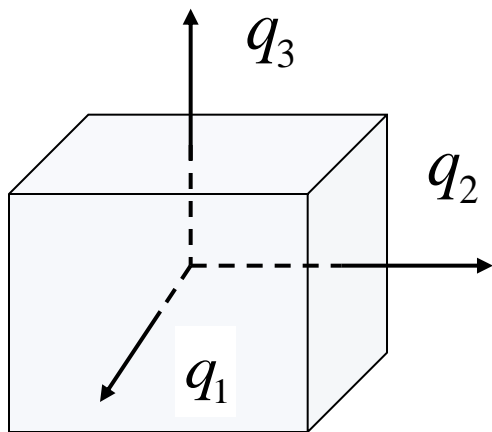
$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \sum_i \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) dV_i = \sum_i \oiint_{S_i} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{S}_i$$



5. 散度有关公式

任意正交曲线坐标系中散度表达式为：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right]$$



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_s \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} \\ &= F_{q_1} h_2 h_3 dq_2 dq_3 \Big|_{q_1 + \frac{\delta q_1}{2}} - F_{q_1} h_2 h_3 dq_2 dq_3 \Big|_{q_1 - \frac{\delta q_1}{2}} + \dots \\ &= \frac{\partial (h_2 h_3 F_{q_1})}{h_1 h_2 h_3 \partial q_1} h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 + \dots \end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{C} = \nabla \cdot \mathbf{C} = 0 (\mathbf{C} \text{ 为常矢量}) \\ \operatorname{div} \mathbf{C} f = \mathbf{C} \cdot \nabla f \\ \operatorname{div} \alpha \mathbf{F} = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} (\alpha \text{ 为常量}) \\ \operatorname{div} f \mathbf{F} = f \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \\ \operatorname{div} (\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} \pm \nabla \cdot \mathbf{G} \end{array} \right.$$

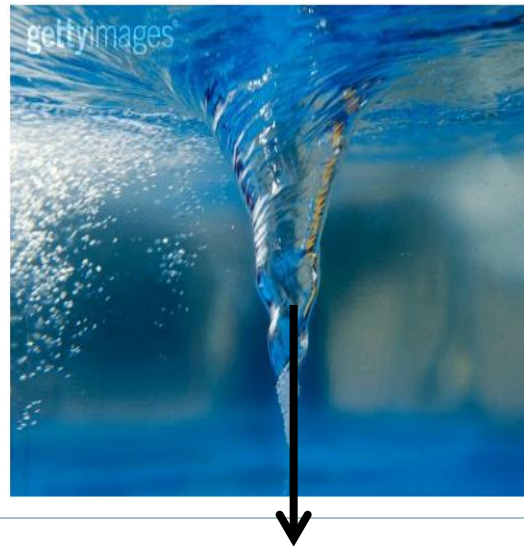
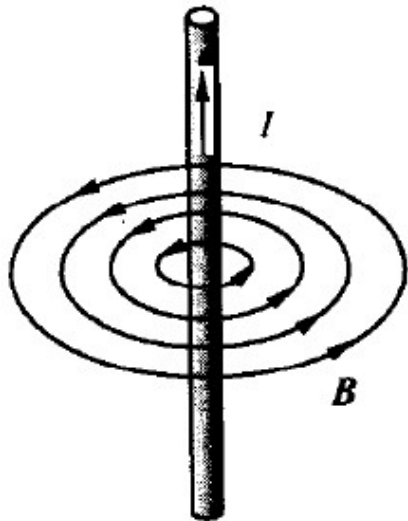


§ 1.5 矢量场的旋度

1. 矢量场的涡旋特性与环量

通量源（如正、负电荷）激发矢量场

是否存在通量源以外的矢量场激励源？





高频地波雷达海洋监测

2005-10-02 05:30 双站矢量流场

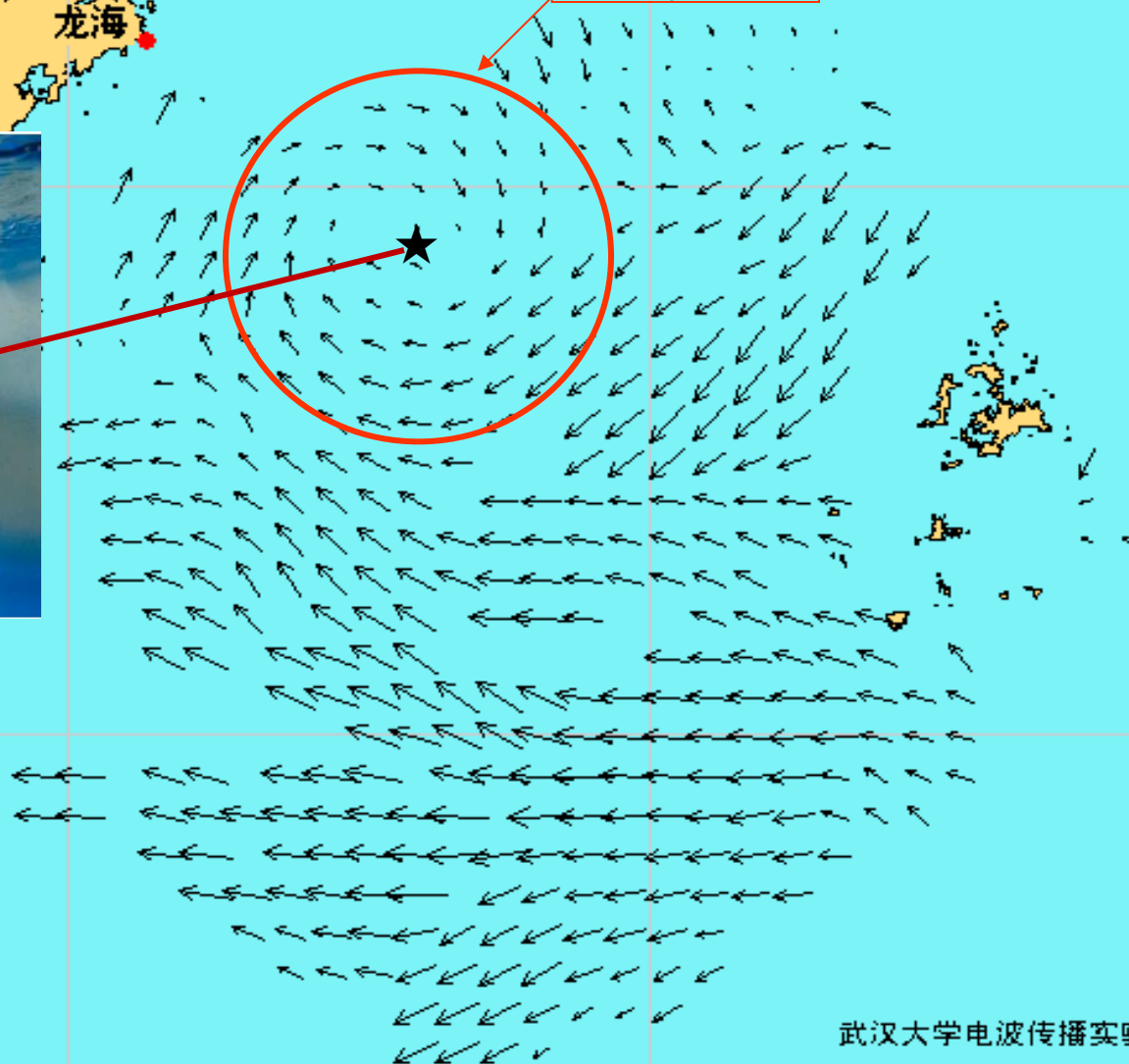
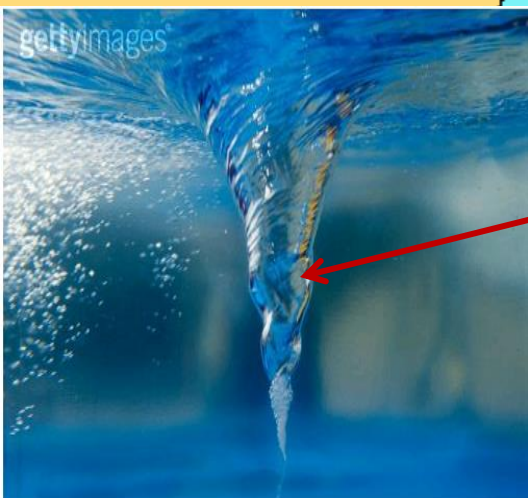
50km

50cm/s

厦门

龙海

旋涡场

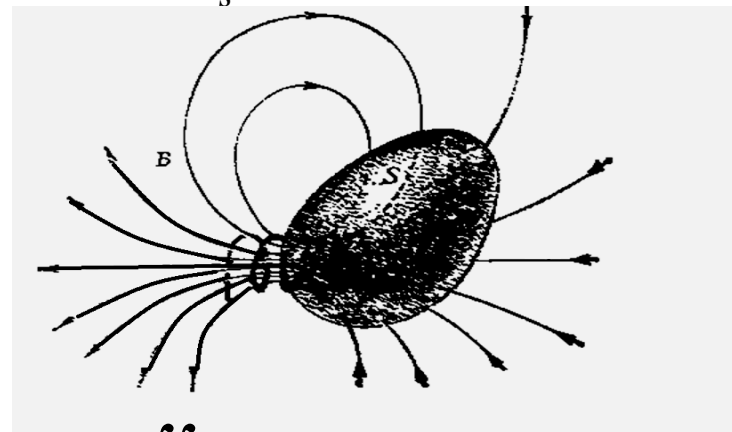
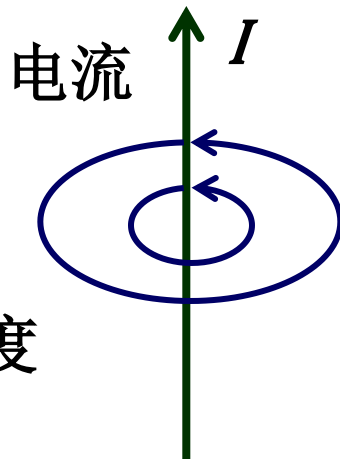


武汉大学电波传播实验室



如：磁场沿任意闭合曲线的积分与通过闭合曲线所围曲面的电流成正比，即：

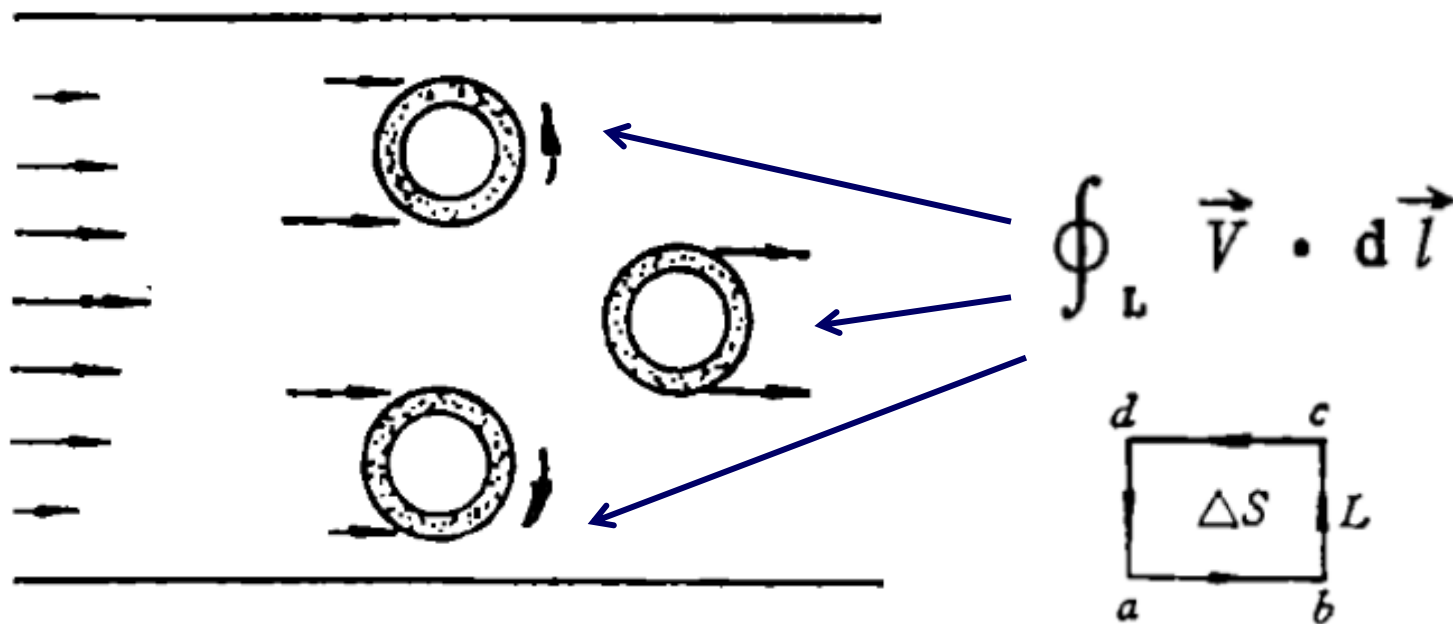
$$\oint_L \mathbf{B}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}$$



$$\oiint_S \mathbf{B}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = 0$$



为描述矢量场旋转的程度，引入环量





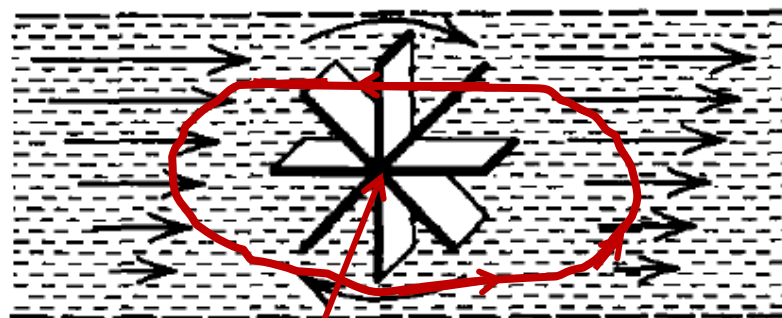
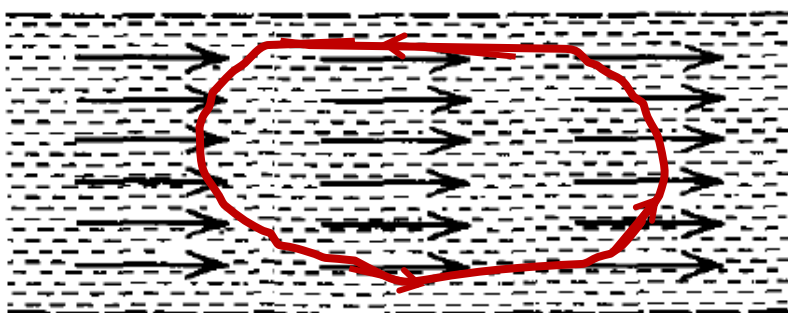
矢量场对于闭合曲线 L 的环量定义为:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L} \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{矢量场沿} L \text{无旋转特性} \\ > 0 & \text{矢量场沿} L \text{有正的旋转特性} \\ < 0 & \text{矢量场沿} L \text{有负的旋转特性} \end{cases}$$

Γ 描述了矢量场对于闭合曲线 L 的旋转量的量度



$$\Gamma = \oint_L \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L} \rightarrow \begin{cases} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$$



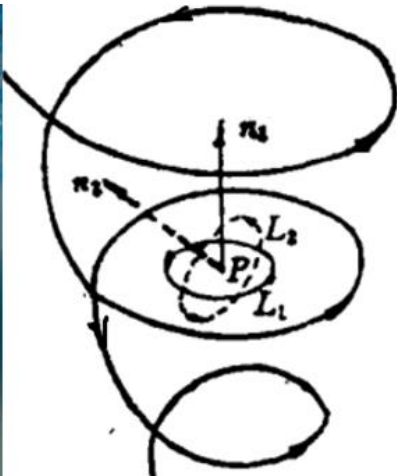
环量与引起矢量场旋转的旋涡源建立了联系



2. 矢量场的旋度

如何描述空间某点矢量场旋转程度？

空间 P 点的环量（包含 P 点在内的单位面积边界回路的环量，含 P 点在内的单位面积以任何方式均收缩于 P 点）



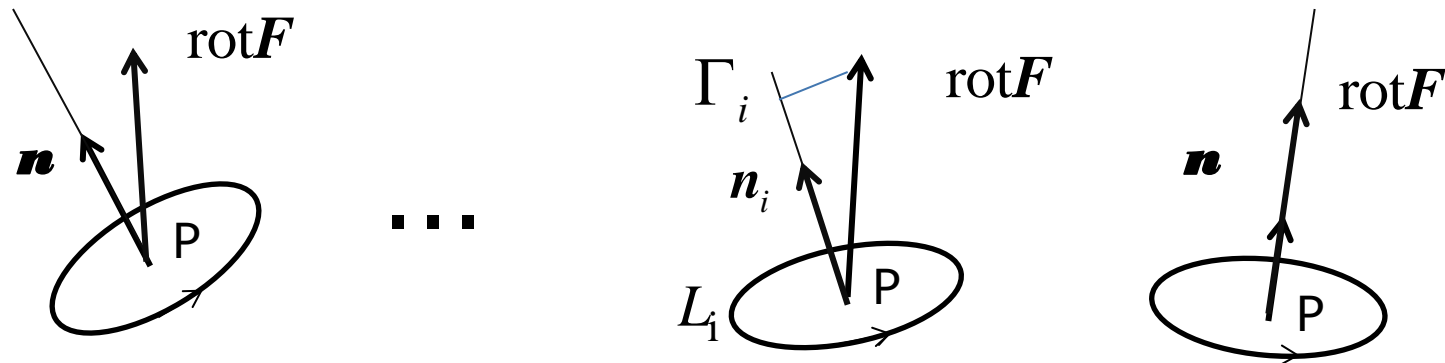
$$\Gamma_1 = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \oint_{L_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L}$$

$$\Gamma_2 = \lim_{\Delta s_2 \rightarrow 0} \oint_{L_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L}$$

...



P 点的环量描述该点矢量场旋转程度的物理量，随面元法矢而变，为描述矢量场旋转程度的**新矢量**。



$$[\mathbf{rot} \mathbf{F}] \text{ 在面元法向 } \mathbf{n}_i \text{ 投影} \leftrightarrow \Gamma_i = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_{L_i} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{L}$$



矢量场对空间某点的环量
(即含该点的单位面积元
边界回路的环量) 与该点
处引起矢量场旋转特性的
原因(旋涡源)建立了因
果联系, 引入旋度概念





旋度：描述空间矢量场旋转程度的量，为一矢量场。其数值为包含该点在内的面元边界的环量与面元比值极限的最大值，其方向为极限取得最大值时面元之法向，即：

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left[\hat{n} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\text{Max}}$$

区域内旋度不恒为零的场为有旋场

区域内旋度恒为零的场无旋场（又称保守场）



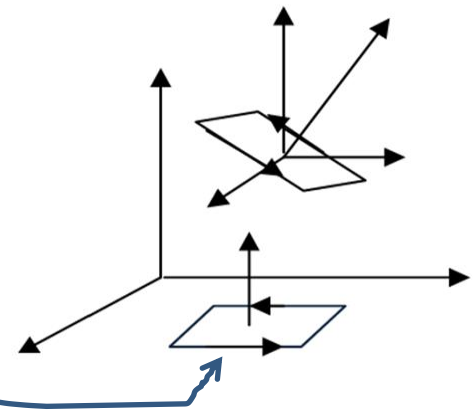
在直角坐标系中，旋度的分量表达式为：

$$\text{rot}\mathbf{F} = \hat{e}_x (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_x) + \hat{e}_y (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_y) + \hat{e}_z (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_z)$$

$$(\text{rot}\mathbf{F})_x = \text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_x = \lim_{\Delta s_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{yz}} \oint_{l_{yz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Delta s_{yz} = \Delta \mathbf{S} \cdot \hat{e}_x$$

$$(\text{rot}\mathbf{F})_y = \text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_y = \lim_{\Delta s_{xz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xz}} \oint_{l_{xz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Delta s_{xz} = \Delta \mathbf{S} \cdot \hat{e}_y$$

$$(\text{rot}\mathbf{F})_z = \text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_z = \lim_{\Delta s_{xy} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xy}} \oint_{l_{xy}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Delta s_{xy} = \Delta \mathbf{S} \cdot \hat{e}_z$$





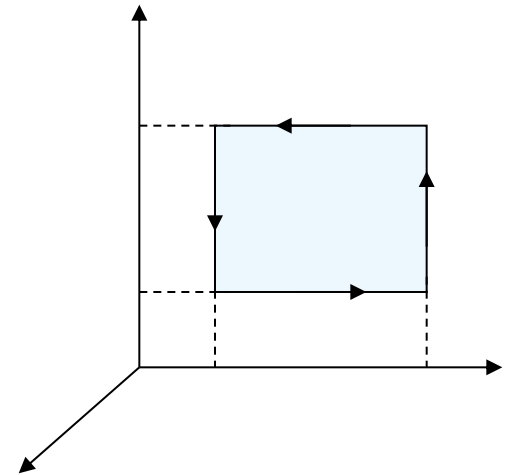
根据线积分的公式，直角坐标系中旋度的表达式为：

$$\text{rot}\mathbf{F} = \hat{e}_x \lim_{\Delta s_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{yz}} \oint_{l_{yz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \hat{e}_y \lim_{\Delta s_{xz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xz}} \oint_{l_{xz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \hat{e}_z \lim_{\Delta s_{xy} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xy}} \oint_{l_{xy}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \hat{e}_x (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_x) + \hat{e}_y (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_y) + \hat{e}_z (\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_z)$$

$$\hat{e}_x [\text{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{e}_x] = F_y \Delta y \Big|_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} - F_y \Delta y \Big|_{z+\frac{\Delta z}{2}}^{z-\frac{\Delta z}{2}}$$

$$+ F_z \Delta z \Big|_{y+\frac{\Delta y}{2}}^{y-\frac{\Delta y}{2}} - F_z \Delta z \Big|_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \Delta z \Delta y$$





根据线积分的公式，直角坐标系中旋度的表达式为：

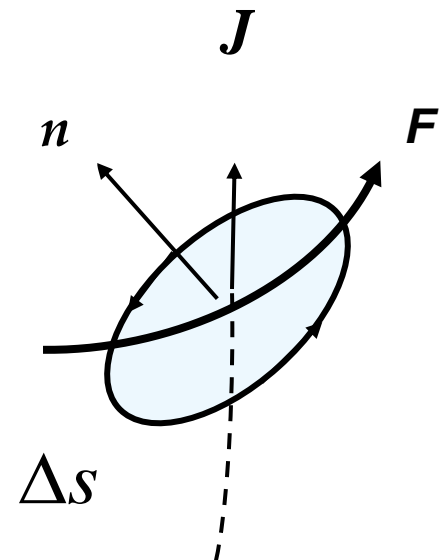
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \hat{e}_x \lim_{\Delta s_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{yz}} \oint_{l_{yz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \hat{e}_y \lim_{\Delta s_{xz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xz}} \oint_{l_{xz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \hat{e}_z \lim_{\Delta s_{xy} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_{xy}} \oint_{l_{xy}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \hat{e}_x (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{e}_x) + \hat{e}_y (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{e}_y) + \hat{e}_z (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{e}_z) \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \hat{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$



3. 旋度与漩涡源的关系

为了给出空间任意点矢量场与旋涡源的关系，当闭合曲线 L 所围的面积趋于零时，矢量场对回路 L 的环量与旋涡源对于 L 所围的面积的通量成正比，即：

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \kappa \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

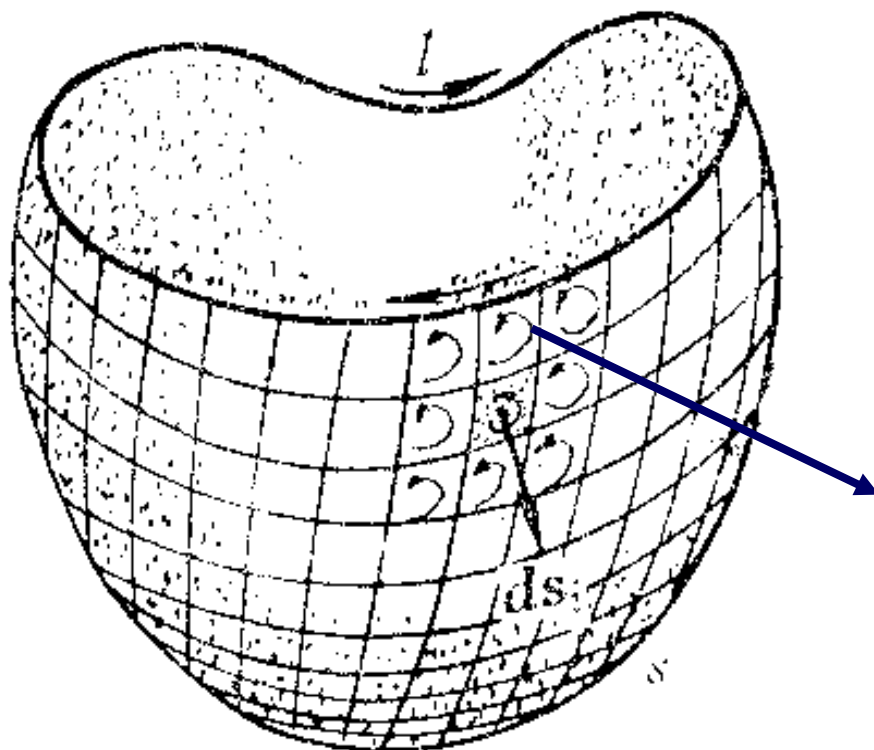




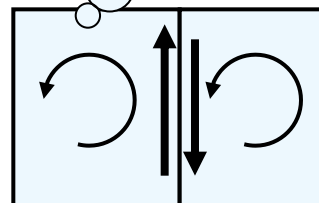
4. Stokes定理

利用旋度的定义式，可得到一般曲线和曲面积分之间的变换关系式，即Stokes定理

$$\oint_{l_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_s = \iint_s \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \kappa \iint_s \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}$$
$$\sum_i \oint_{l_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i = \sum_i \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_i \Delta s_i \Rightarrow \oint_{l_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_s = \iint_s \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$



方向相反
大小相等
结果抵消



矢量对于路径 L 环量的值与选择的积分曲面 S 无关



5. 旋度的有关公式

任意正交曲线坐标系中旋度的表达式为：

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \frac{\hat{e}_{q_1}}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial q_3} \right) \\ & + \frac{\hat{e}_{q_2}}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial q_1} \right) \\ & + \frac{\hat{e}_{q_3}}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{pmatrix} \hat{e}_{q_1} & \hat{e}_{q_2} & \hat{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{pmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{C} = 0 (\mathbf{C} \text{ 为常矢量}) \\ \nabla \times (\mathbf{C}f) = \nabla f \times \mathbf{C} \\ \nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \\ \nabla \times (\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \pm \nabla \times \mathbf{G} \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} \end{array} \right.$$



【例1】 证明：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\&= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) \\&\quad + \frac{\partial}{\partial y} (A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ &\quad - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ &= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \rightarrow \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &\quad - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \rightarrow -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$



§ 1.6 Helmholtz定理

关于矢量场的三个基本问题：

- 是否存在不同于通量源和旋涡源的激励源？
 - 矢量场除有散和有旋外，是否有别的特性？
 - 如何唯一确定空间的矢量场？
-



1. Helmholtz定理

空间区域 V 上的任意矢量场，如果它的散度、旋度和边界条件为已知，则该矢量场唯一并且可以表示为一无旋矢量场和一无散矢量场的叠加，即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{r})$$

其中 $\boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{r})$ 为无散场， $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{r})$ 为无旋场。



Helmholtz 定理明确回答了上述三个问题。即任一矢量场由两个部分构成，其中一部分是无散场，由旋涡源激发；并且满足：

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) \equiv 0$$

另一部分是无旋场，由通量源激发，满足：

$$\nabla \times \mathbf{F}_l(\mathbf{r}) \equiv 0$$



【例2】 证明：一个标量场的梯度必无旋，
一个矢量场的旋度必无散。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F}_l(\mathbf{r}) &= -\nabla \times \nabla \phi(\mathbf{r}) \\ &= -\hat{e}_x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) - \hat{e}_y \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) - \hat{e}_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0\end{aligned}$$



【例3】 求证： $\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R}$ ，其中： $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\begin{aligned}\nabla R &= \frac{\partial R}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z} \hat{e}_z \\ &= \frac{(x - x')}{R} \hat{e}_x + \frac{(y - y')}{R} \hat{e}_y + \frac{(z - z')}{R} \hat{e}_z = \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \nabla' R &= \frac{\partial R}{\partial x'} \hat{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y'} \hat{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z'} \hat{e}_z \\ &= -\frac{(x - x')}{R} \hat{e}_x - \frac{(y - y')}{R} \hat{e}_y - \frac{(z - z')}{R} \hat{e}_z = -\frac{\mathbf{R}}{R}\end{aligned}$$