



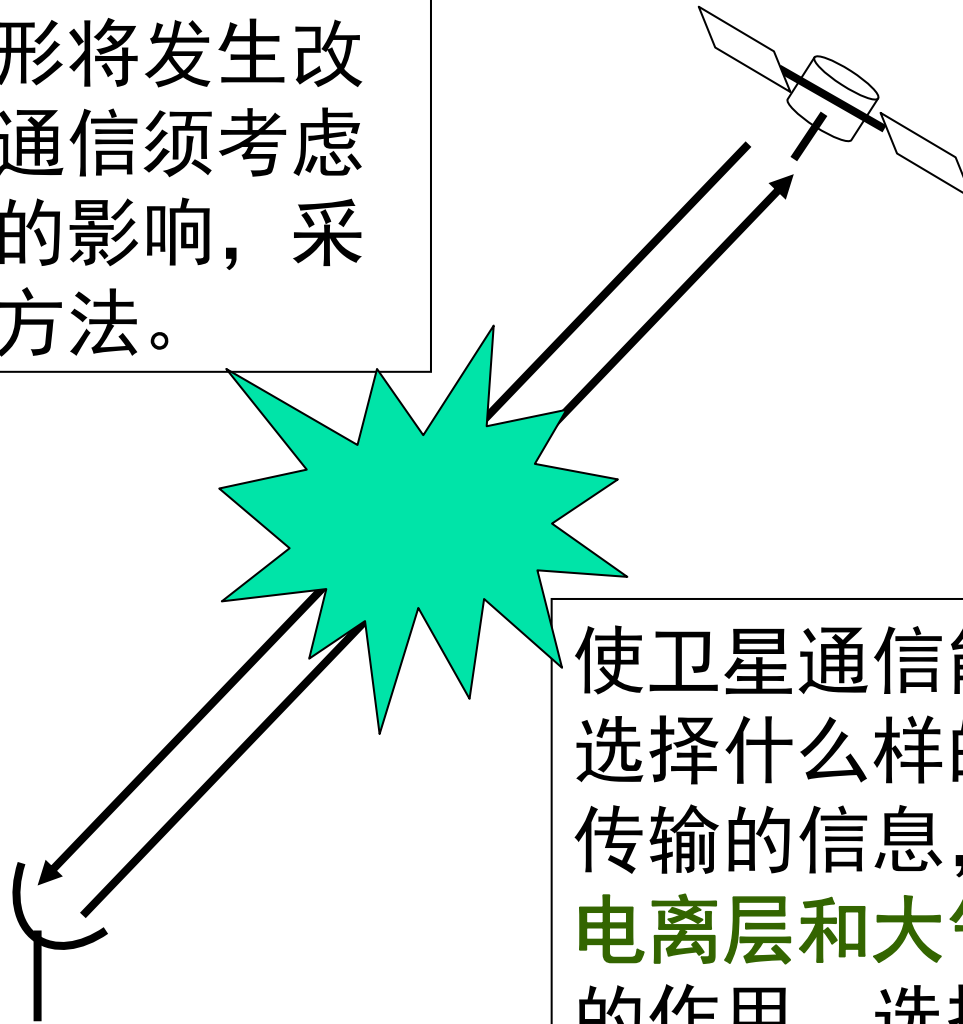
## 第七章 电波传播理论基础

---

实际空间充满了各种不同电磁特性的介质。电磁波在不同介质中传播表现出不同的特性。人们正是通过这些不同的特性获取介质或目标性质的理论依据。因此电波传播是无线通信、遥感、目标定位和环境监测的基础。

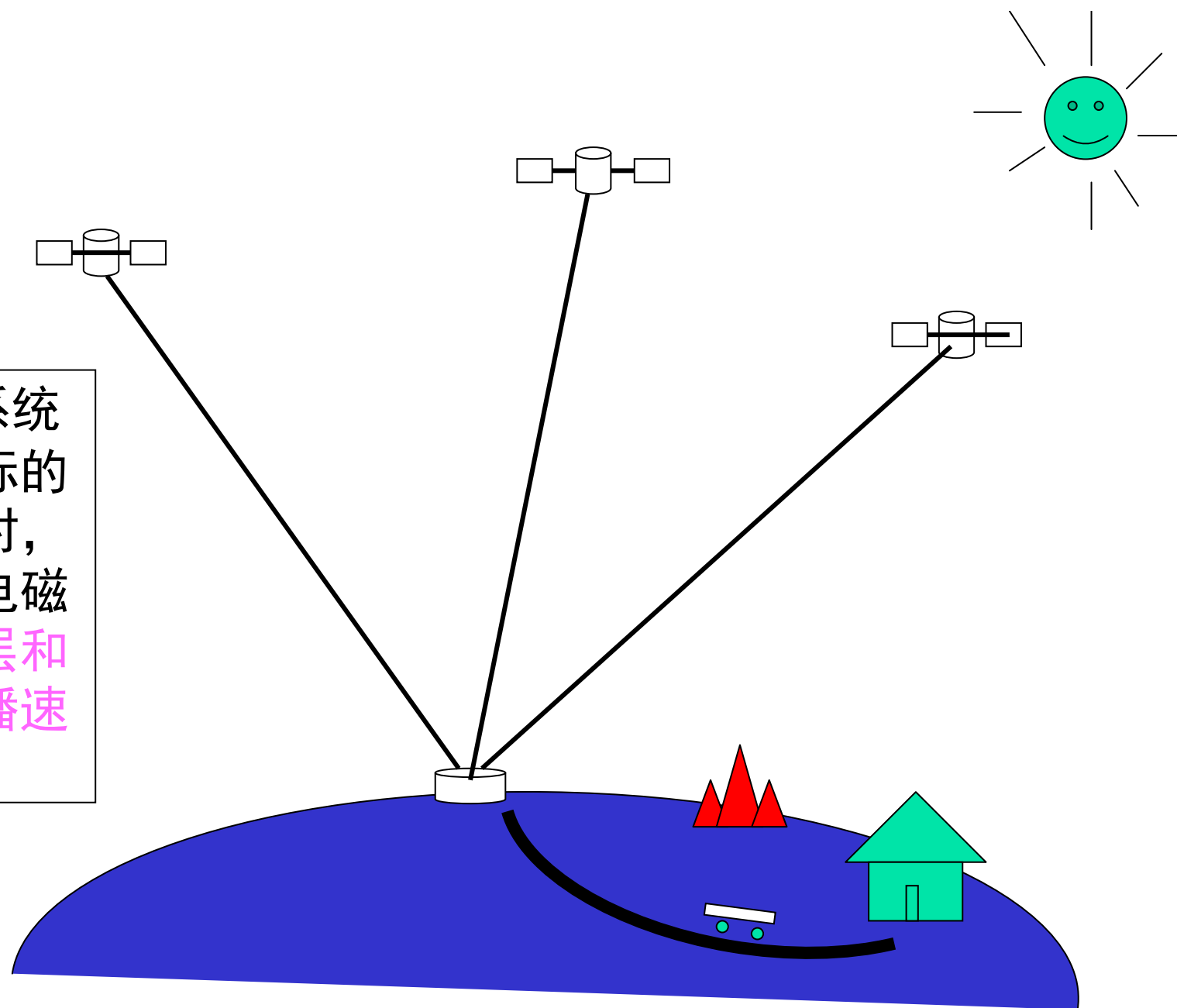
卫星信号通过电离层和大气层，信号波形将发生改变。因此卫星通信须考虑电离层和大气的影响，采取相应的修正方法。

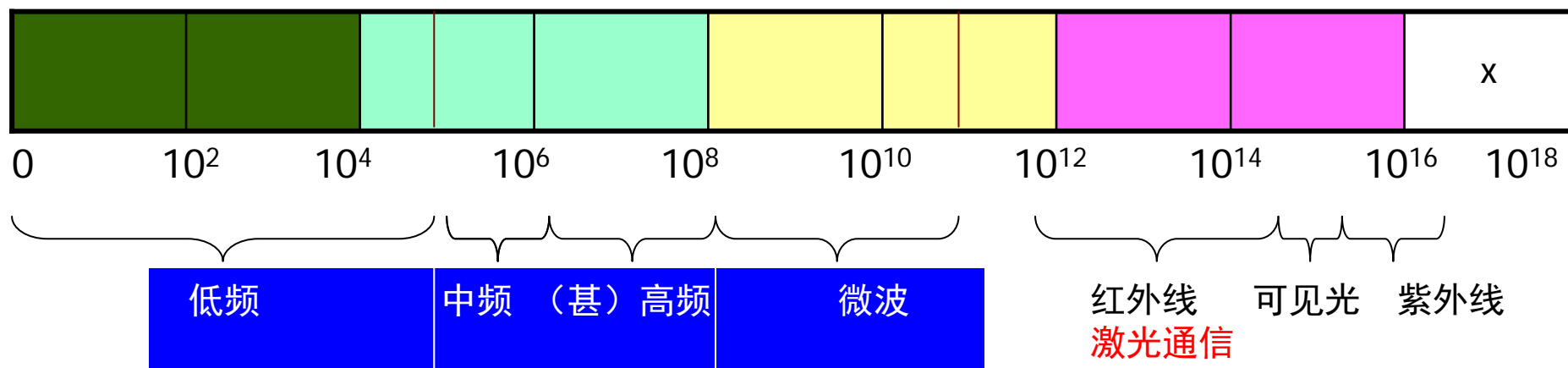
能否传播？  
如何传播？  
什么特性？



使卫星通信能够实现，选择什么样的载波信号传输的信息，必须考虑**电离层和大气**对电磁波的作用，选择那种适合卫星通信的频率，使得卫星通信能够正常进行

GPS定位系统  
在确定目标的  
精确位置时，  
必须考虑电磁  
波在电离层和  
大气中传播速  
度的修正。





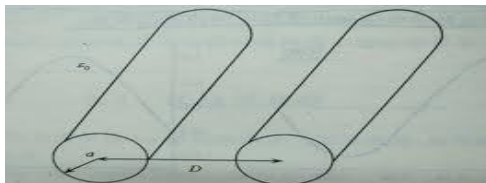
低频：波长数千米，绕射和衍射效应强，地面传播距离远，覆盖面积大，**导航、无线电信标、对潜通信**

中高（甚）频：辐射强，天线小，**广播电视、电报、交通管制、通信导航和海洋空间环境监测**

微波：频率高，频带宽，**移动通信、微波通信、卫星通信、雷达遥感**，但在导体中衰减快，传播距离短

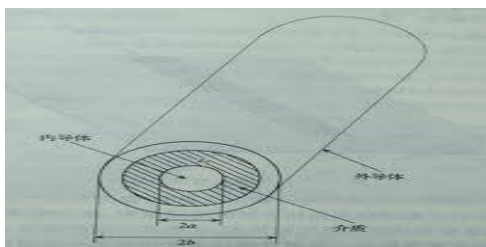
# 不同频率的电磁波信号的传输

双导线 ( $< \text{kHz}$ )



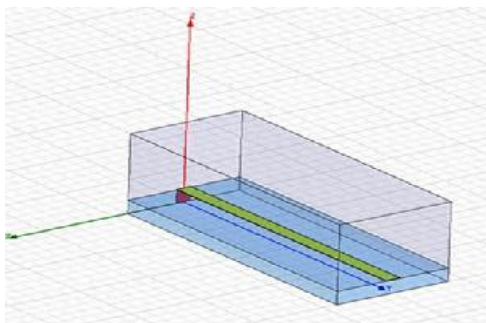
低频，稳态场的电路理论

同轴线 ( $< \text{MHz}$ )



辐射和热损耗增大，增加载流横截面和屏蔽辐射，场理论

波导 ( $< \text{GHz}$ 、微波)



内导体热损耗增大，去掉内导体  
矩形波导

光纤

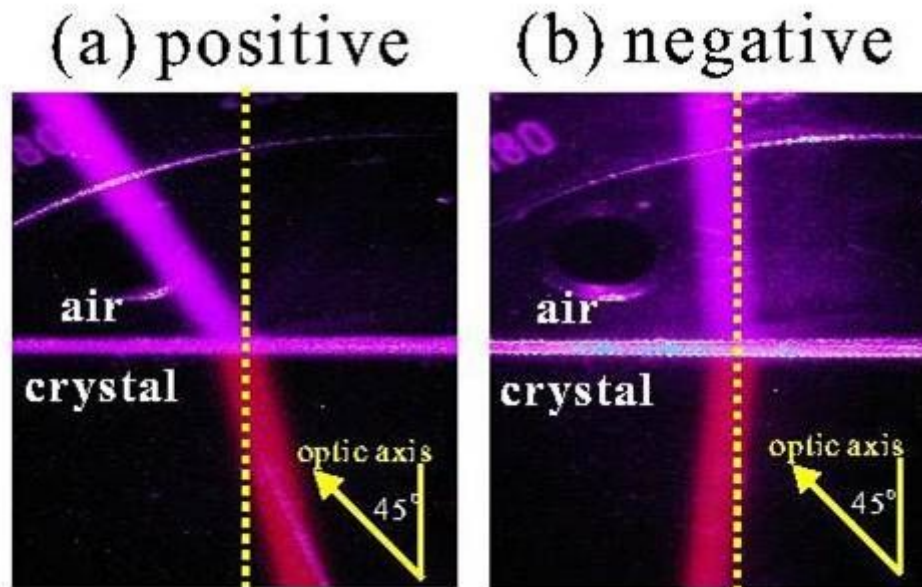


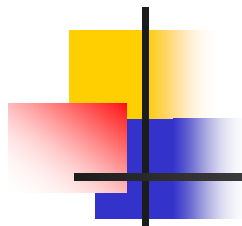
光波段，矩形波导的尺寸与光波长相当，工艺困难，介质柱波导：  
不同介质交界面可约束电磁波

俄罗斯有人提出：具有这种特性的介质是否存在？在这种介质中，折射率为负值。

$$\varepsilon, \mu < 0$$

2005年前后有人在实验室做出这种介质，称为负折射介质





## 主要内容:

---

- ◆ 理想介质空间电磁波的传播
- ◆ 等效波阻抗概念及其应用
- ◆ 波在界面上的反射、折射及其应用
- ◆ 有耗介质中波的传播
- ◆ 介质的色散和波传播的速度概念
- ◆ 电磁波的衍射现象及其应用
- ◆ 各向异性介质波的传播问题



## 7.1 行波、驻波与波阻抗

### 1 电磁波的反射、透射与行波驻波状态

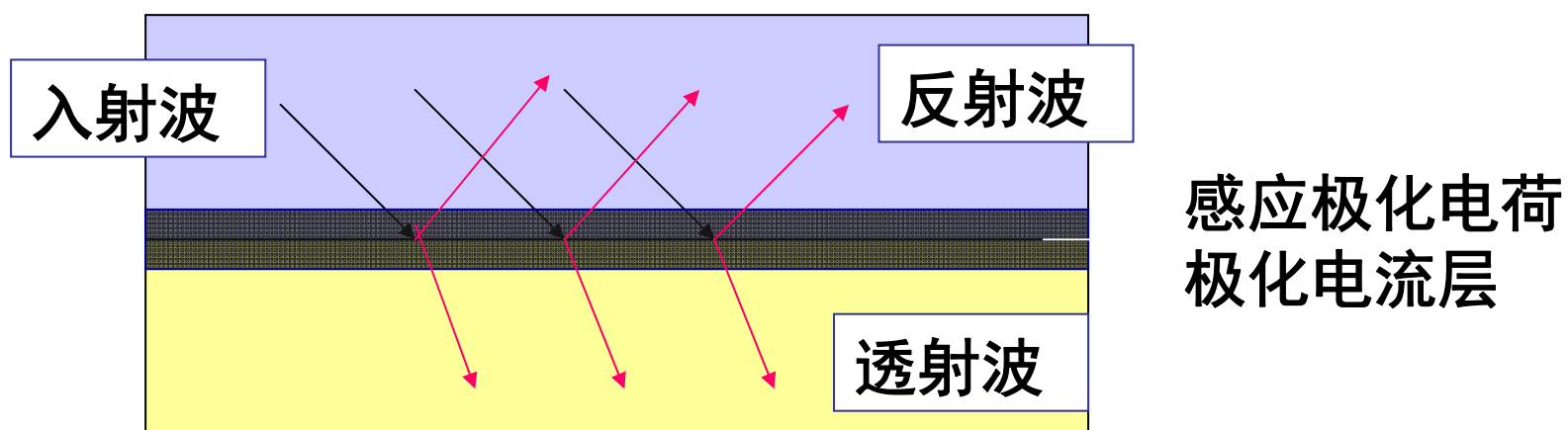
在无源线性各向同性均匀介质空间中，空间无界，Maxwell方程的基本解为平面电磁波：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k} \quad , \quad \frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

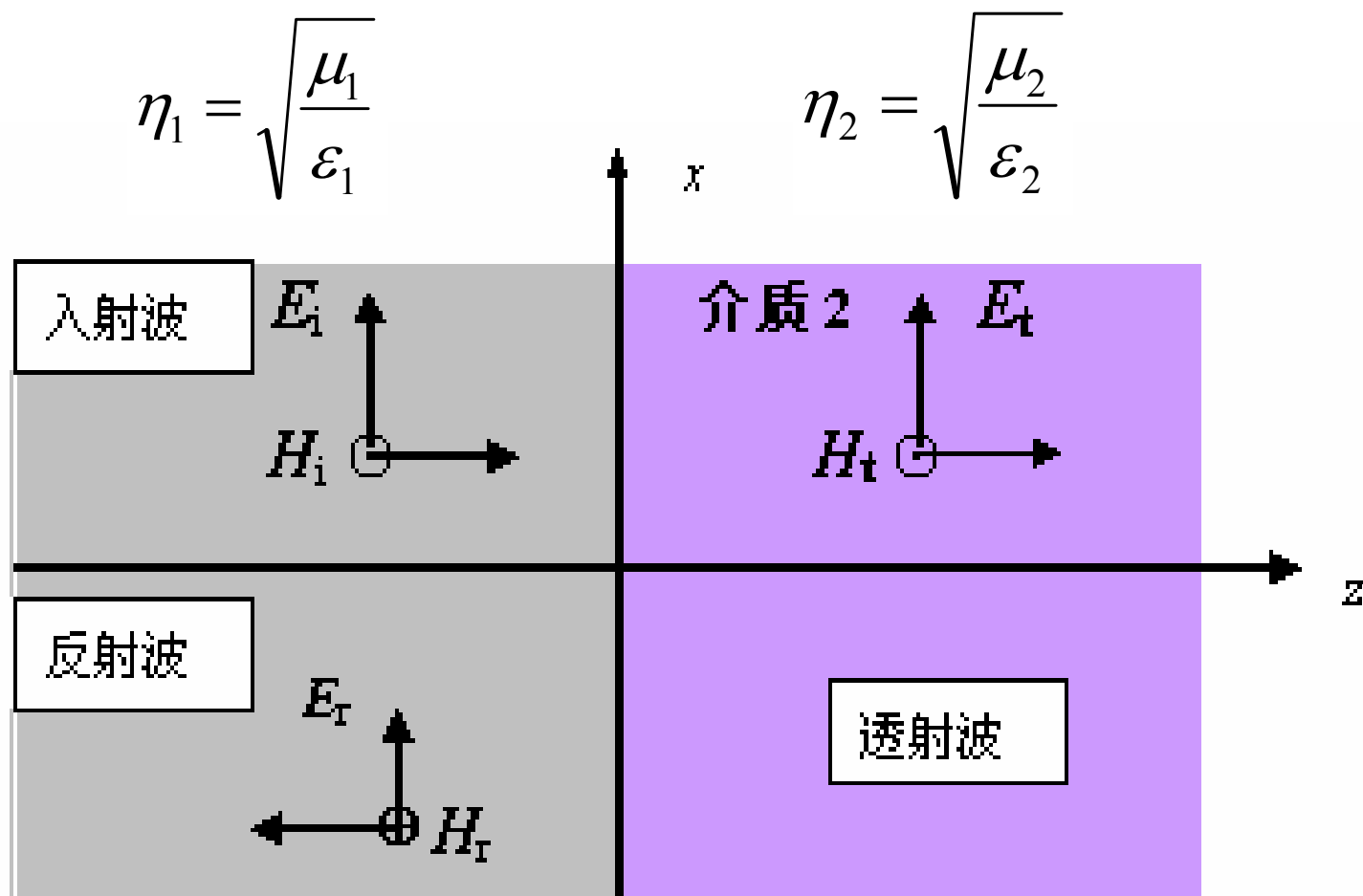


无界介质空间是理想模型，实际空间总是由多种不同介质组成。因此电磁波在传播过程中不可避免的要遇到各种不同形状的介质分界面。



界面两侧介质电磁特性不同，入射电磁波在界面两侧的薄层内感应出随时间变化的极化电荷、极化电流和磁化电流，成为新的电磁波辐射源。新的辐射源向界面两侧辐射电磁波，其中在入射波所在介质空间的部分称为**反射波**，在界面另一侧的称为**透射波或折射波**。

设空间由两种不同介质组成，平面电磁波自介质1垂直入射到介质2的分界面



介质空间1  
中的电磁场

入射波电场的复振幅

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{e}_x \left[ E_i e^{-jk_1 z} + E_r e^{jk_1 z} \right] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} \left[ E_i e^{-jk_1 z} - E_r e^{jk_1 z} \right] \end{cases}$$

反射波电场复振幅

介质空间2  
中的电磁场

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_t e^{-jk_2 z} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_2} E_t e^{-jk_2 z} \end{cases}$$

透射波电场复振幅

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$$

$[E_i E_r E_t]$ 之间满足什么关系?

利用在介质的分界面上电磁场满足边界条件

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Rightarrow E_i + E_r = E_t$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Rightarrow \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

定义反射波振幅与入射波振幅之比为反射系数，  
利用上述关系得到反射系数：

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad E_r = E_i \Gamma$$

如果介质是理想介质，反射系数为实数

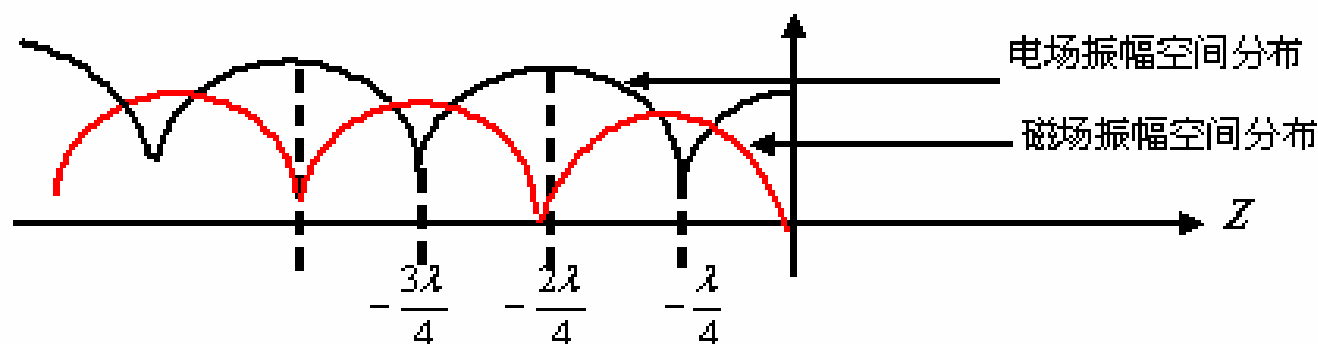
介质1中的电磁场为：      行波项      驻波项

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_i [e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}] = \hat{e}_x E_i \left[ \underbrace{(1 - \Gamma) e^{-jk_1 z}}_{\text{行波项}} + \underbrace{2\Gamma \cos k_1 z}_{\text{驻波项}} \right] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i [e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}] = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i \left[ (1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} - 2\Gamma \cos k_1 z \right] \end{cases}$$

由于反射波与入射波干涉叠加，介质1中电磁波由两个部分组成，第一项与表示沿 $z$ 方向传播的波，称为**行波项**；第二项没有相位传播因子，是两个振幅相等、传播方向相反的行波叠加而形成的空间分布，且不随时间而传播，称为**驻波项**。

对于理想介质，反射系数是实数，

$$\begin{cases} |\mathbf{E}_1| = |E_i| [1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_1 z]^{1/2} \\ |\mathbf{H}_1| = \frac{1}{\eta_1} |E_i| [1 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cos 2k_1 z]^{1/2} \end{cases}$$



由于反射波与入射波干涉叠加，电场和磁场的振幅不再是常数，而是随空间不同位置而变化，在

$$z = -\frac{n\lambda_1}{2}, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

电场振幅达到最大值：

$$|E_1|_{\max} = |E_i|(1 + \Gamma)$$

磁场振幅达到最小值：

$$|H_1|_{\min} = \frac{1}{\eta_1} |E_i| (1 - \Gamma)$$

介质1中的Poynting矢量（即传输功率）为：

$$\begin{aligned}(P_{\text{av}})_1 &= \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*] \\&= \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} \text{Re} [1 - \Gamma^2 + 2j\Gamma |\sin 2k_1 z|] \hat{e}_z \\&= \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} [1 - \Gamma^2] \hat{e}_z = (P_{\text{av}})_{\text{in}} - (P_{\text{av}})_{\text{r}}\end{aligned}$$

介质1中沿Z轴传输的功率为入射电磁波传输的功率减去反射波的传输功率



定义透射波振幅与入射波振幅之比为透射系数

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Rightarrow E_i + E_r = E_t$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Rightarrow \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma \quad E_t = E_i T$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_x \text{TE}_i e^{-jk_2 z} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_2} \text{TE}_i e^{-jk_2 z} \end{cases}$$

透射波功率：

$$\begin{aligned} (P_{\text{av}})_t &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^*] \\ &= \frac{1}{2\eta_2} |\mathbf{E}_i|^2 T^2 \end{aligned}$$

透射波与反射波功率之和：

$$\begin{aligned} (P_{\text{av}})_r + (P_{\text{av}})_t &= \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} \Gamma^2 + \frac{|E_i|^2}{2\eta_2} T^2 \\ &= \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} \left[ \Gamma^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} T^2 \right] = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} = (P_{\text{av}})_i \end{aligned}$$

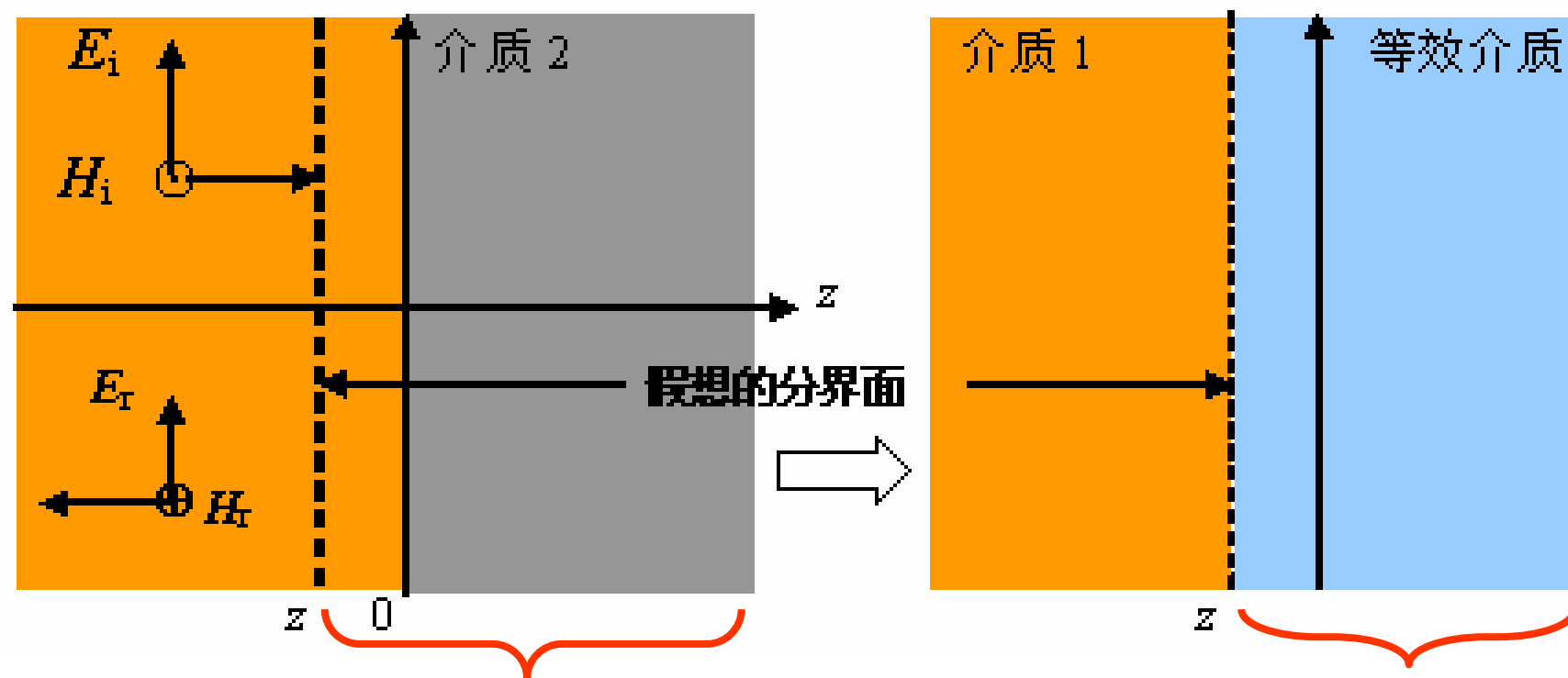
## 2 等效波阻抗

均匀介质空间的波阻抗为电场和磁场复振幅之比，将这一概念推广到不同介质组成的介质空间中，如前面讨论的两均匀介质空间的 $z$ 处，其波阻抗为：

$$\begin{aligned}\eta_{\text{ef}}(z) &= \frac{E_1(z)}{H_1(z)} = \frac{E_i(z) + E_r(z)}{H_i(z) + H_r(z)} = \eta_1 \frac{E_i(z) + E_r(z)}{E_i(z) - E_r(z)} \\ &= \eta_1 \frac{e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}}{e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}} = \eta_1 \frac{\eta_2 - j\eta_1 \operatorname{tg} k_1 z}{\eta_1 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_1 z}, \quad z < 0\end{aligned}$$

$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

这相当于将 $z$ 右边视为一种介质空间所表现出的阻抗，称为等效波阻抗。



波阻抗等效

基于等效阻抗概念，假想介质1空间 $z_0$ 处有一分界面，根据反射系数的定义，假想界面 $z_0$ 处波的反射系数为：

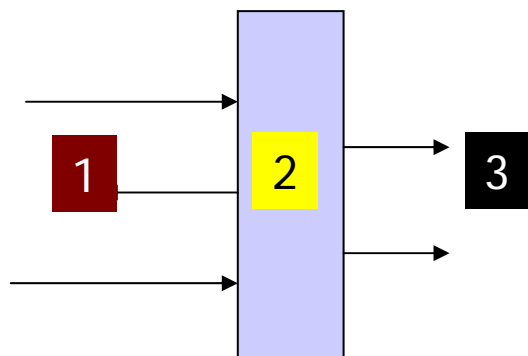
$$\Gamma(z_0) = \frac{E_r(z_0)}{E_i(z_0)} = \frac{\eta_{\text{ef}}(z_0) - \eta_1}{\eta_{\text{ef}}(z_0) + \eta_1}$$

用等效波阻抗代替介质2的波阻抗

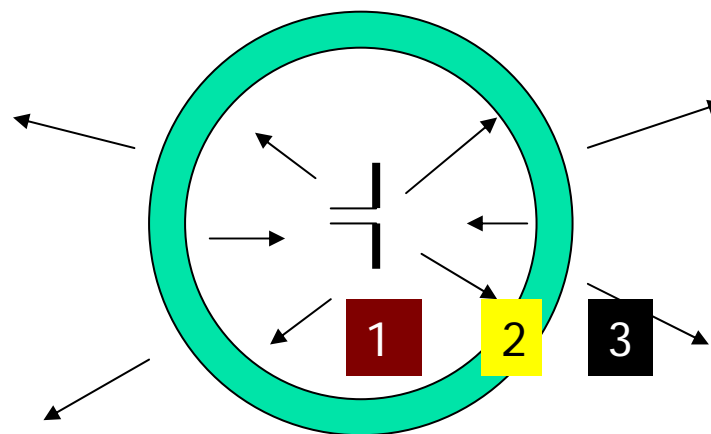
### 3 应用举例

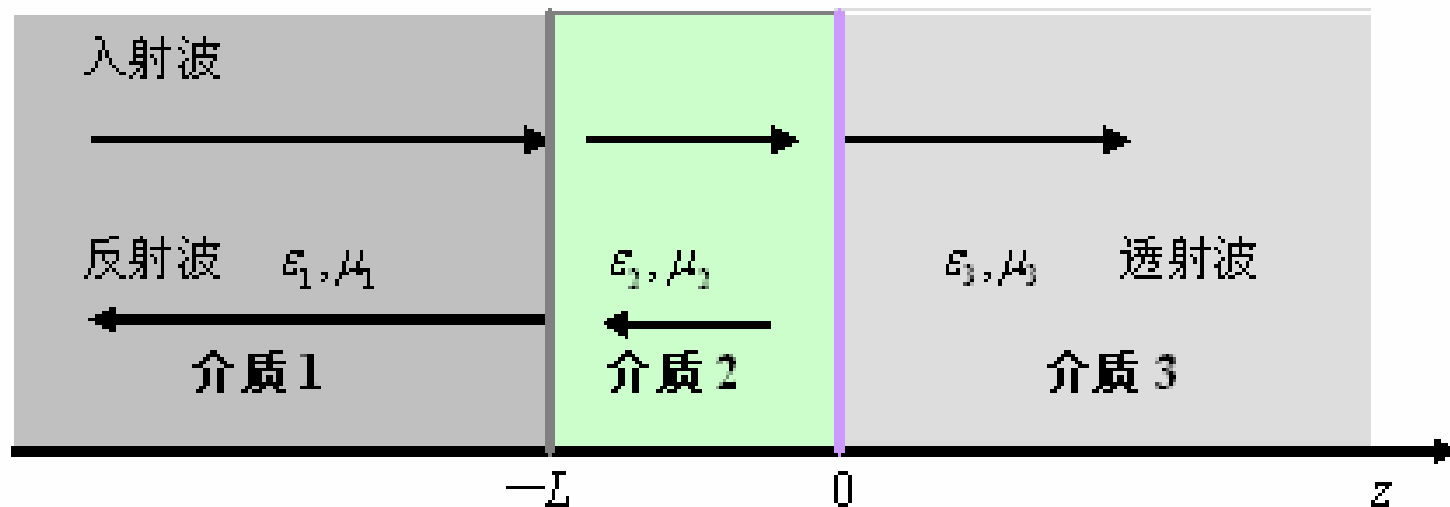
如何克服分界面对电磁波反射而使得电磁波**全部**  
**或大部能量透射**，在实际中有广泛的应用。

照相机的镜头



天线防护罩





设入射波电场只有 $x$ 分量，磁场只有 $y$ 分量。介质1、2和3中的电磁场可以表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{e}_x [E_{1i} e^{-jk_1(z+L)} + E_{1r} e^{jk_1(z+L)}] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} [E_{1i} e^{-jk_1(z+L)} - E_{1r} e^{jk_1(z+L)}] \end{cases} \quad (\text{介质1})$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_x [E_{2i} e^{-jk_2 z} + E_{2r} e^{jk_2 z}] \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_2} [E_{2i} e^{-jk_2 z} - E_{2r} e^{jk_2 z}] \end{cases} \quad (\text{介质2})$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_{3i} e^{-jk_3 z} \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_3} E_{3i} e^{-jk_3 z} \end{cases} \quad (\text{介质3})$$

$E_{1i}$  是入射波电场的复振幅

$E_{1r}, E_{2i}, E_{2r}, E_{3i}$  为待求量



$Z=0$ 和 $Z=-L$ 界面处的反射系数分别为：

$$\Gamma(0^-)_{\perp} = \frac{E_{2r}}{E_{2i}} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$$

$$\Gamma(-L^-)_{\perp} = \frac{E_{1r}}{E_{1i}} = \frac{\eta_{\text{ef}}(-L) - \eta_1}{\eta_{\text{ef}}(-L) + \eta_1}$$

其中

$$\eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 L}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 L}$$

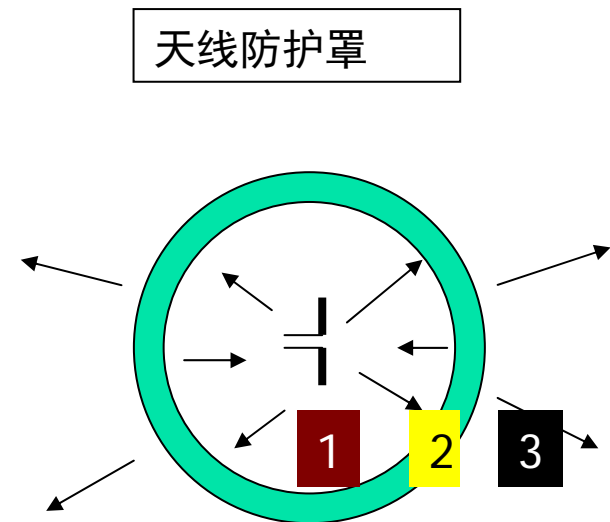
为了确保电磁波能够全部透射，反射系数应为零，则要求：

$$\eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 L}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 L} = \eta_1$$

如果介质1、3的波阻抗相等，介质2的最小厚度由  $k_2 L = \pi$  确定。

$$L = \frac{\lambda_2}{2} \quad \eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_3 = \eta_1$$

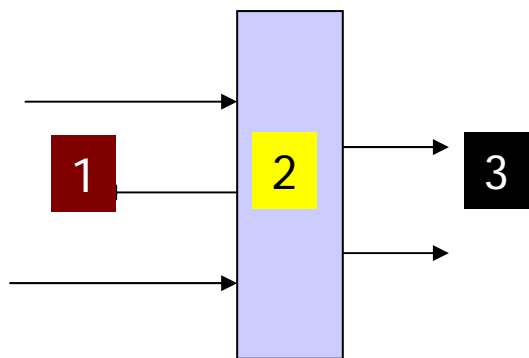
介质2为半波长的介质层



如果介质1、3的波阻抗不相等，介质2的最小厚度由???确定

照相机的镜头

$$\eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 L}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 L} = \eta_1$$





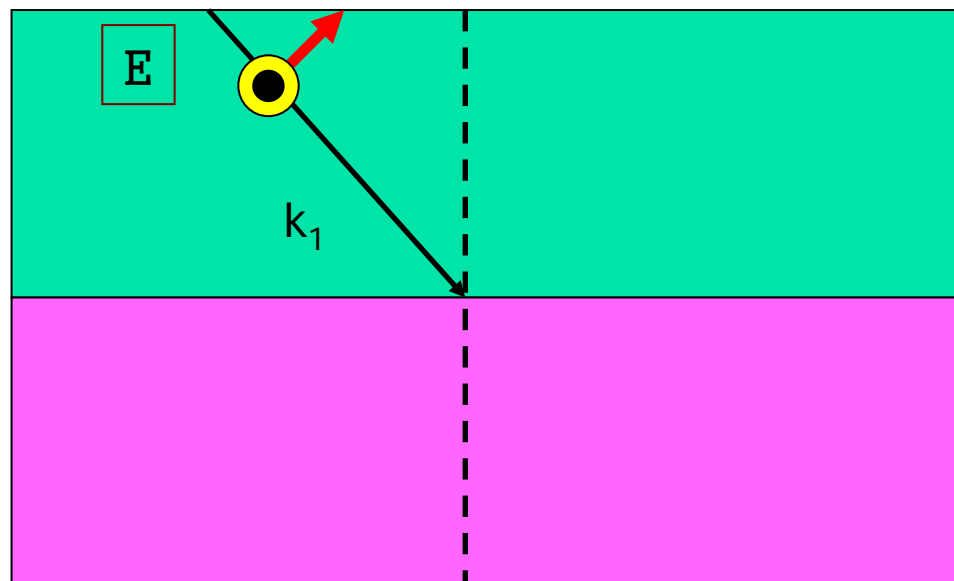
## 7.2 平面波对界面的斜入射

---

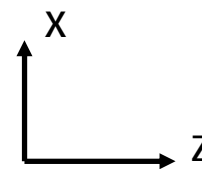
### 1 介质分界面上相位匹配原则

除了垂直入射情况外，经常是均匀平面波对于界面的斜入射情况。真实的界面是非常复杂的，但只要界面的曲率半径远大于波长，电磁波在边界上的行为与平面非常接近。

垂直入射



平行入射

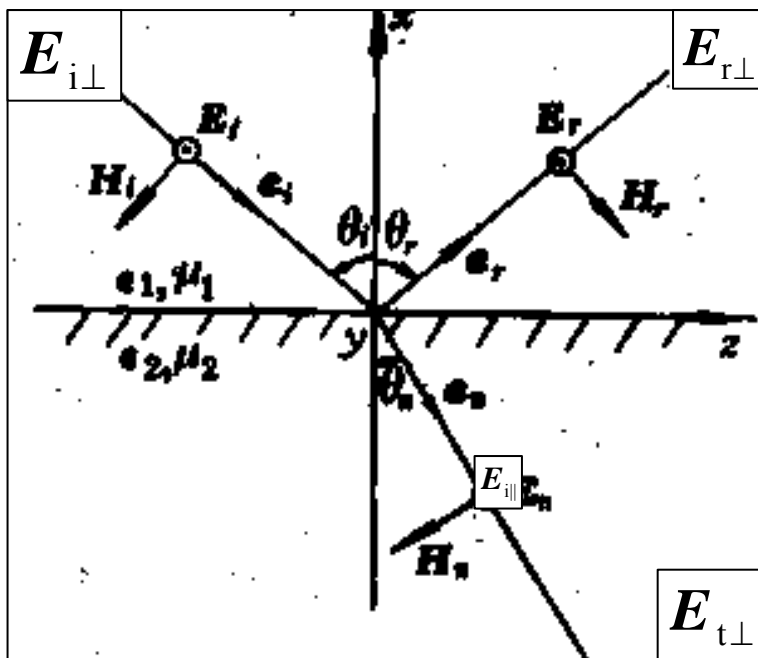


入射波

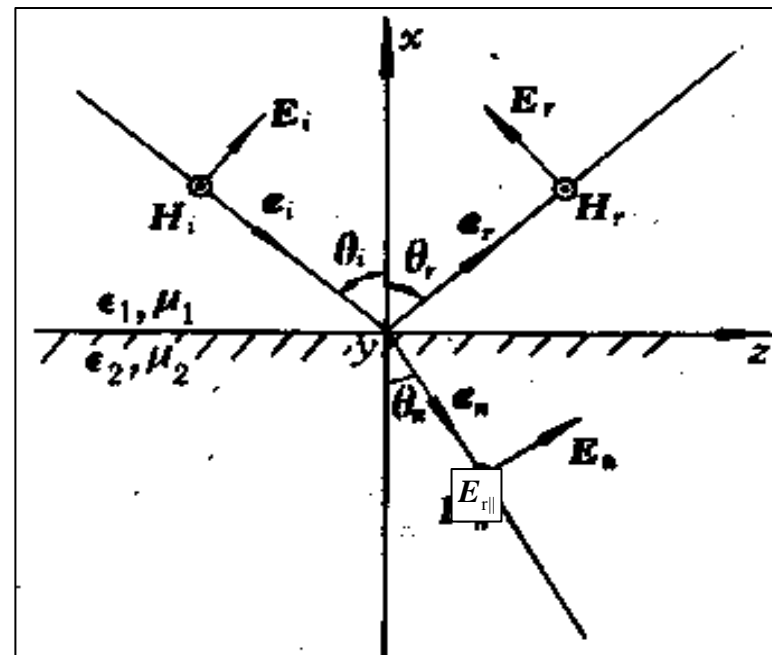
$$\begin{cases} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{i\perp} E_{i\perp} + \hat{e}_{i\parallel} E_{i\parallel}) \exp(-jk_1 \hat{e}_i \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \hat{e}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$k_1 \hat{e}_i \cdot \vec{r} = k_{1z}z + k_{1x}x$

垂直入射



平行入射



反射波

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{r\perp} E_{r\perp} + \hat{e}_{r\parallel} E_{r\parallel}) \exp(-jk_1 \hat{e}_r \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \hat{e}_r \times \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$k_1 \hat{e}_r \cdot \vec{r} = k_{1z}z + k_{1x}x$

折射波

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{t\perp} E_{t\perp} + \hat{e}_{t\parallel} E_{t\parallel}) \exp(-jk_2 \hat{e}_t \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_2} \hat{e}_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$k_2 \hat{e}_t \cdot \vec{r} = k_{2z}z + k_{2x}x$

界面上电场切线分量连续；入射、反射和透射波相位相等得到：

$$\hat{n} \times [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r})] = \hat{n} \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$$

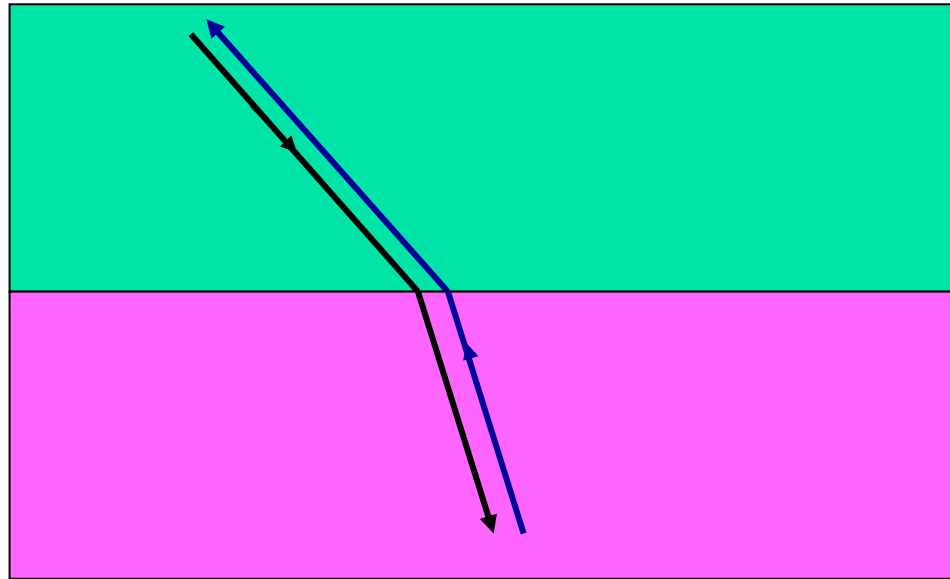
$$k_1 \hat{e}_i \cdot \mathbf{r} = k_1 \hat{e}_r \cdot \mathbf{r} = k_2 \hat{e}_t \cdot \mathbf{r} \quad (z=0 \text{界面上相位匹配原则})$$

- ① 入射波、反射波和透射波的传播方向在同一平面内，该平面由传播方向和界面法线方向构成。
- ② 入射、反射和透射波与界面法向的夹角满足关系

$$\theta_i = \theta_r \quad (\text{入射角等于反射角})$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t$$

③ 平面电磁波的在介质中的运动轨迹（称为射线）具有可逆性。

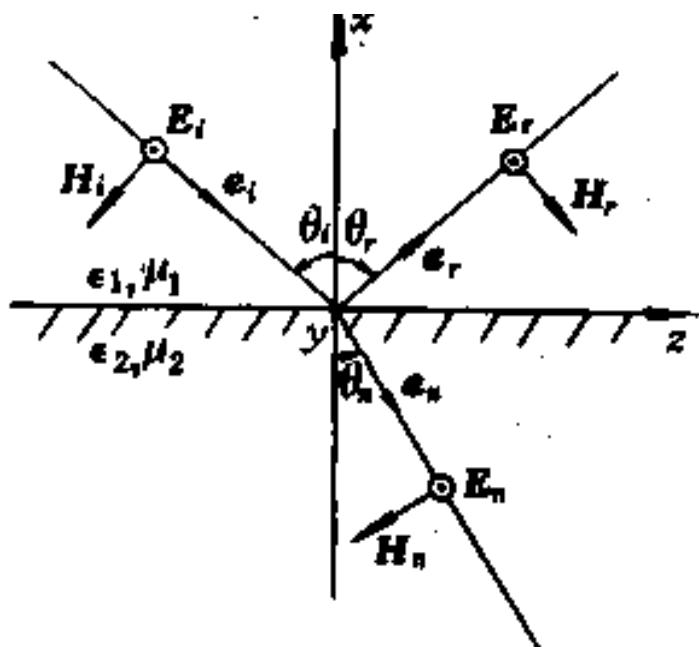




## 2 Fresnel公式

### (1) 电场与入射面垂直的情况

当入射波电场矢量与入射面垂直，应用边界条件



垂直入射

$$E_i + E_r = E_t$$

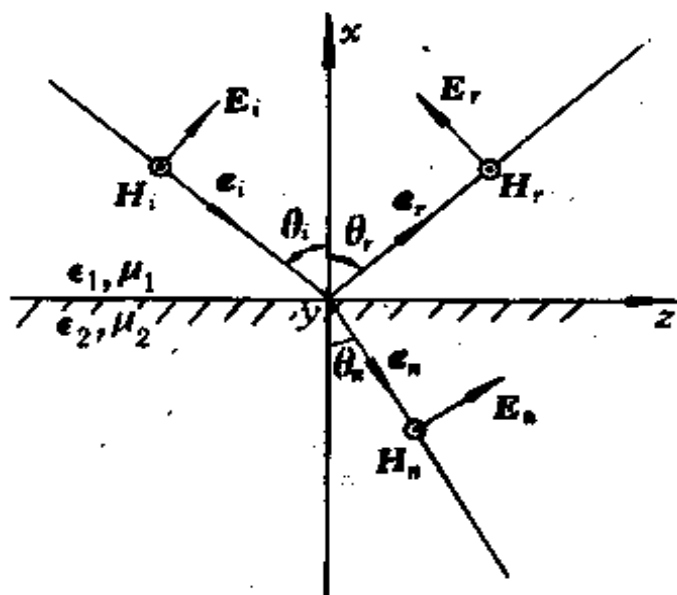
$$\eta_2 (E_i - E_r) \cos \theta_i = \eta_1 E_t \cos \theta_t$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ T_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \end{cases}$$

$$1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp}$$

## (2) 电场与入射面平行的情况

当入射波电场矢量与入射面平行，应用边界条件



$$\eta_2(E_i + E_r) = \eta_1 E_t$$

$$(E_i - E_r)\cos\theta_i = E_t\cos\theta_t$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \\ T_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

平行入射

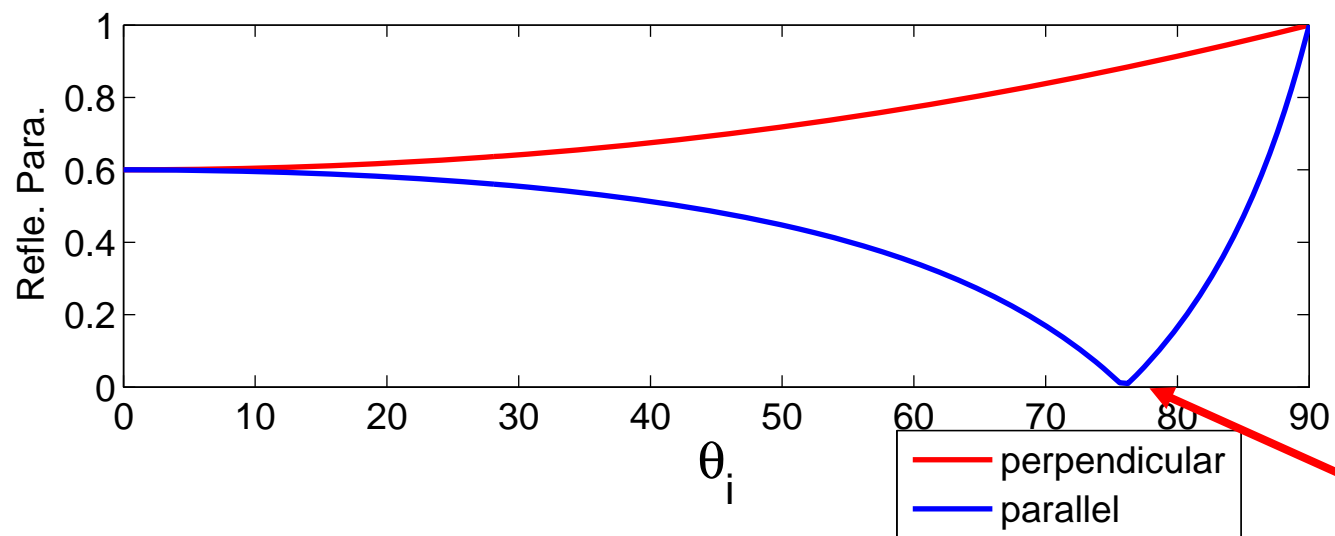
$$1 + \Gamma_{\parallel} = (\eta_1/\eta_2)T_{\parallel}$$

对于非铁磁性介质  $\mu \approx \mu_0, \eta_1/\eta_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n$

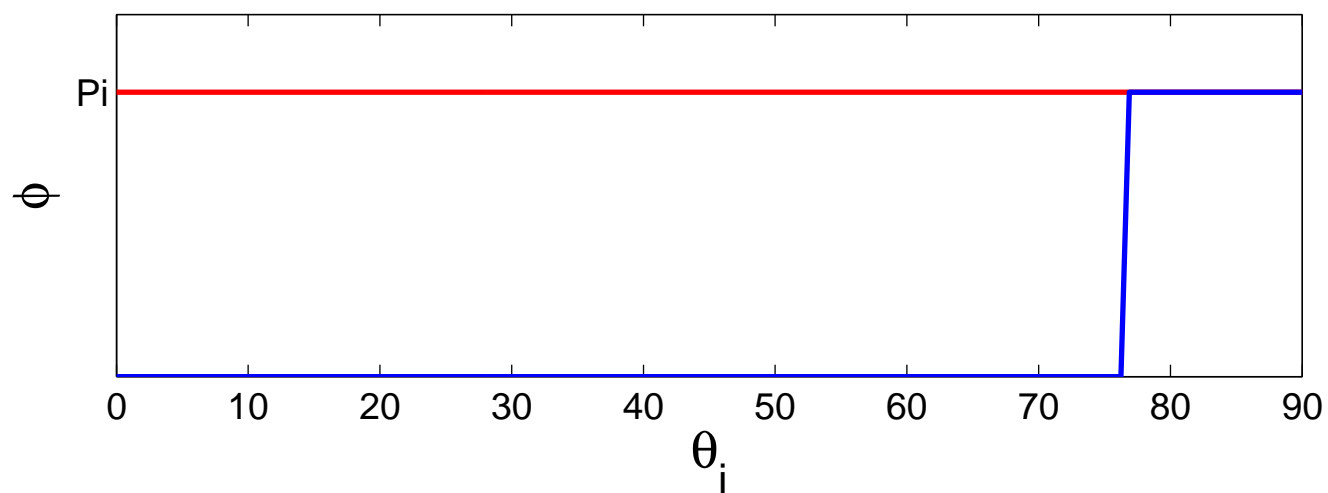
$$\begin{cases} \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |\Gamma_{\perp}| e^{j\varphi_{\perp}} \\ T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |T_{\perp}| e^{j\psi_{\perp}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |\Gamma_{\parallel}| e^{j\varphi_{\parallel}} \\ T_{\parallel} = \frac{2n \cos \theta_i}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |T_{\parallel}| e^{j\psi_{\parallel}} \end{cases}$$

# $n=4$ 时反射系数随入射角度变化曲线



Brewster角



- ① 垂直极化平面波入射时，反射系数的幅角保持定值  $\pi$  不变；模随波的入射角的增加而增大，但变化缓慢。
- ② 平行极化平面波入射时；当  $\theta_i \leq \theta_B$ ，反射系数的模随波的入射角的增加而减小，幅角为恒定值；当  $\theta_i = \theta_B$  时，反射系数的模变为零，幅角发生突变；当  $\theta_i > \theta_B$ ，反射系数的模随波的入射角的增加增大，幅角为恒定值。

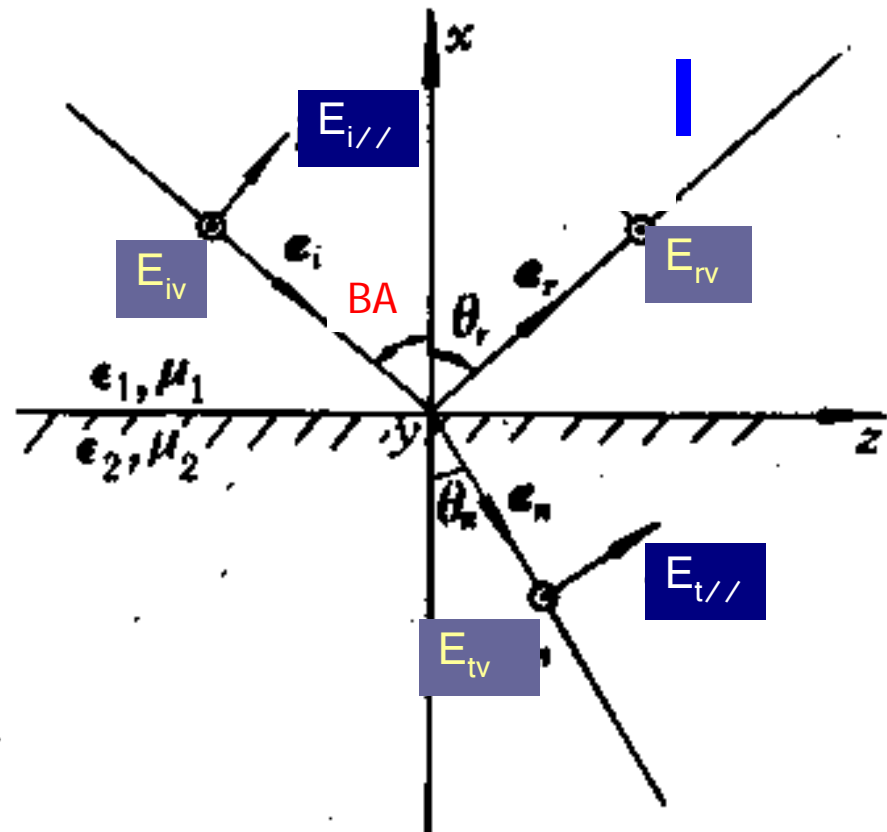
$$n^2 \cos \theta_B = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_B} \Rightarrow \theta_B = \sin^{-1} \sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}} = \operatorname{tg}^{-1} n$$

全折射现象只能发生在平行极化平面波入射时

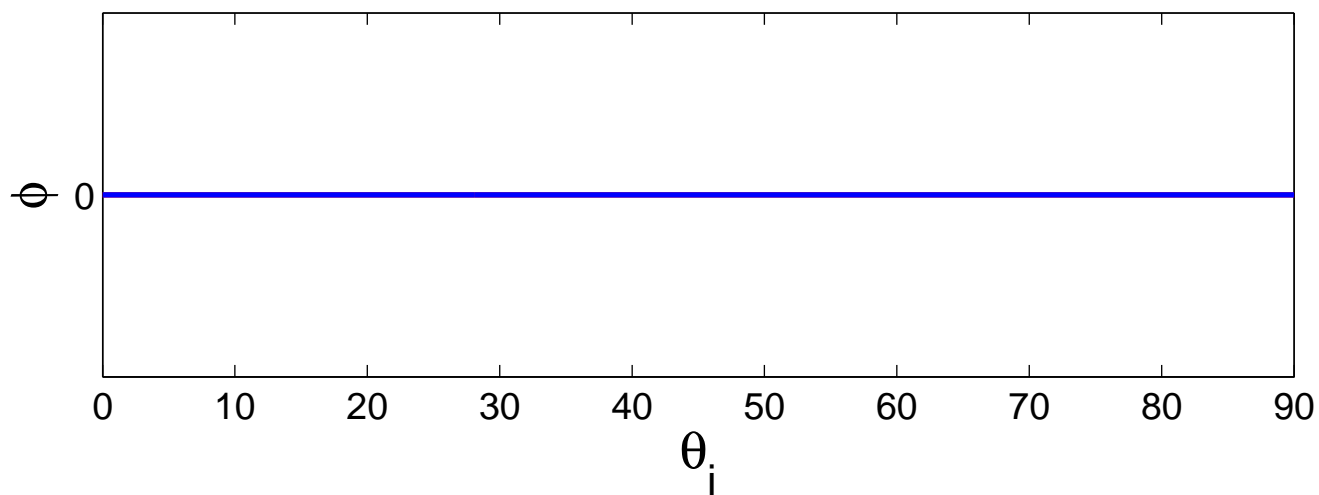
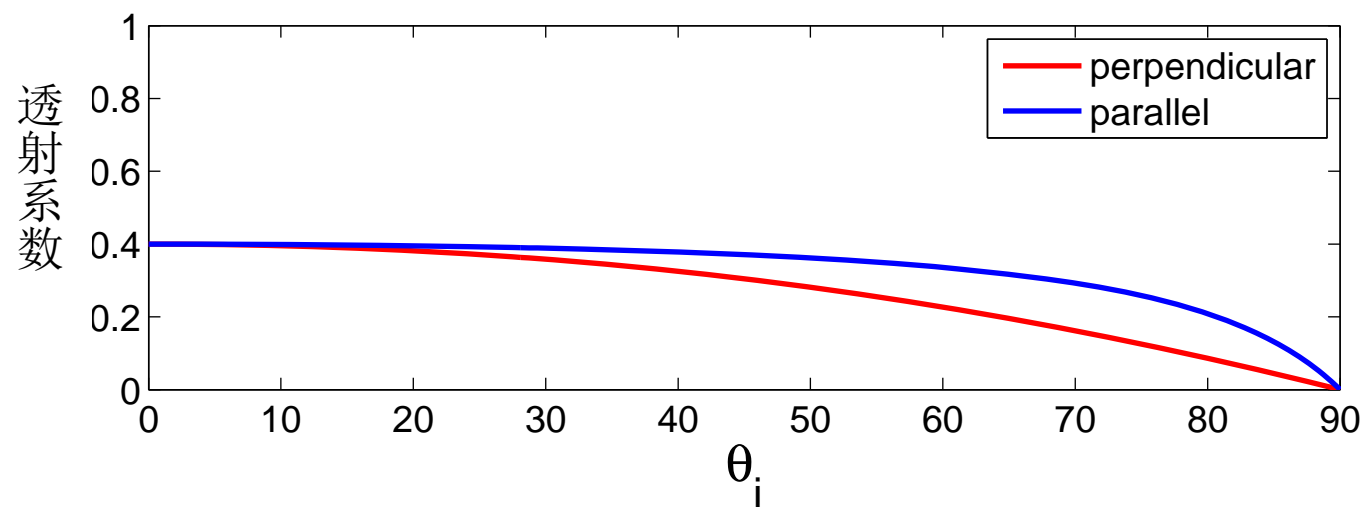
◆布儒斯特角，首先由英国物理学家D.布儒斯特于1815 年发现

◆电磁波在介质界面上反射和折射时，一般情况下反射和折射波椭圆（或圆）偏振

◆当入射角为布儒斯特角时，反射波为线偏振波，其振动方向与入射面垂直此规律称为布儒斯特定律



# $n=4$ 时透射系数随入射角度变化曲线

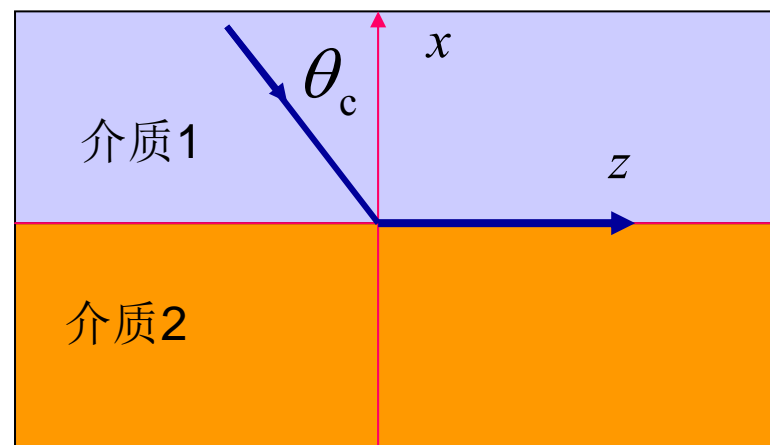
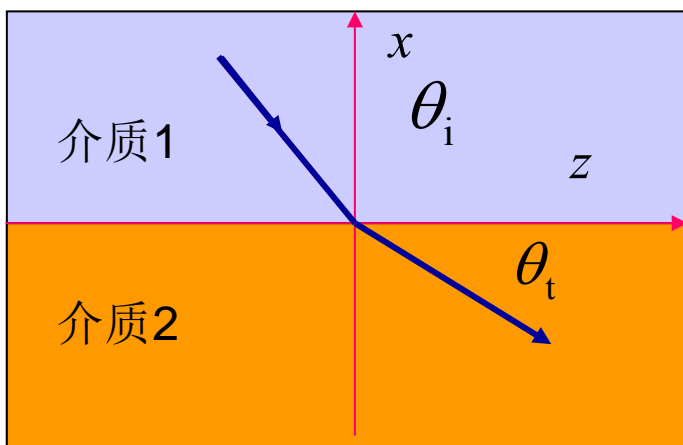


### 3 全反射现象与表面电磁波

对于非铁磁性介质 ( $\mu \rightarrow \mu_0$ ) , 根据透射角公式

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t \Rightarrow \sin \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sin \theta_t = n \sin \theta_t$$

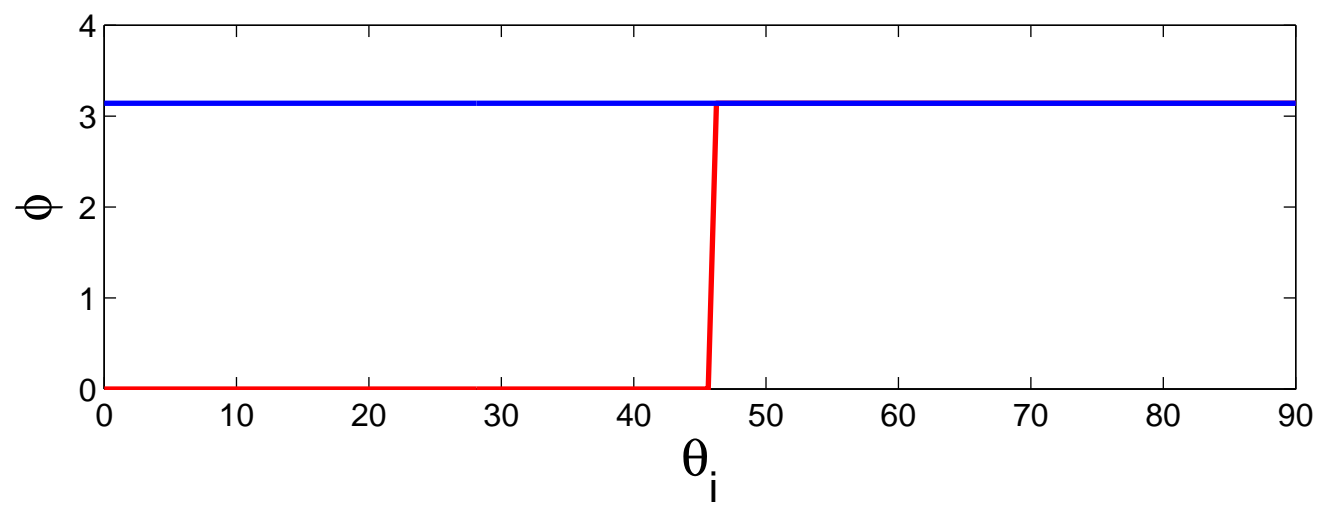
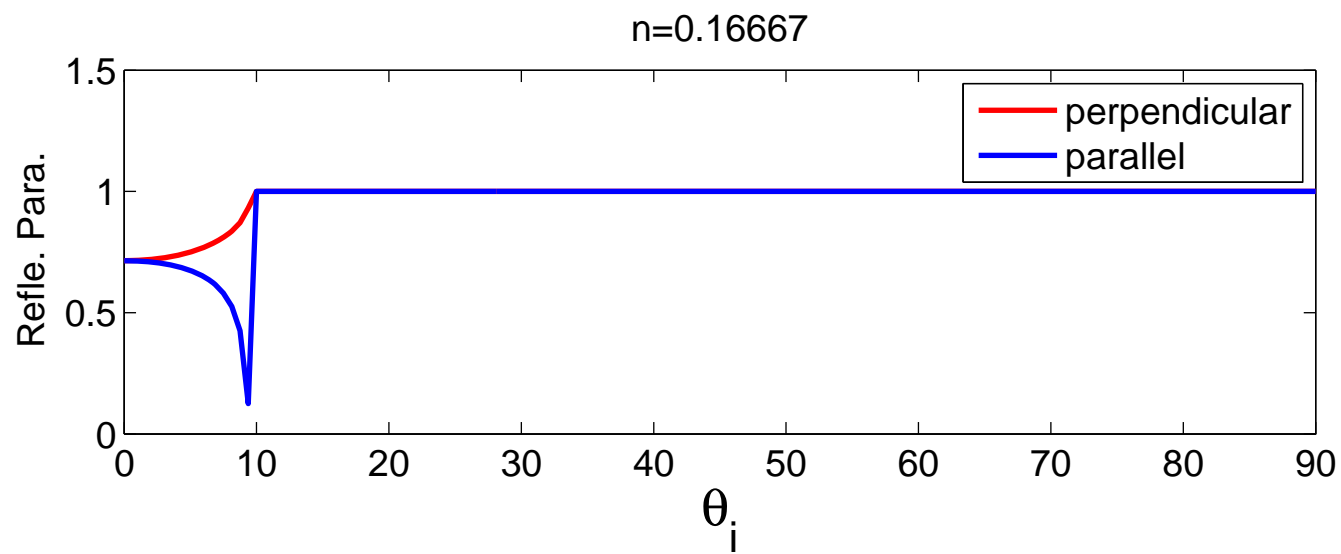
如果:  $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n < 1 \Rightarrow \theta_i < \theta_t$   $\theta_c = \sin^{-1}(n)$





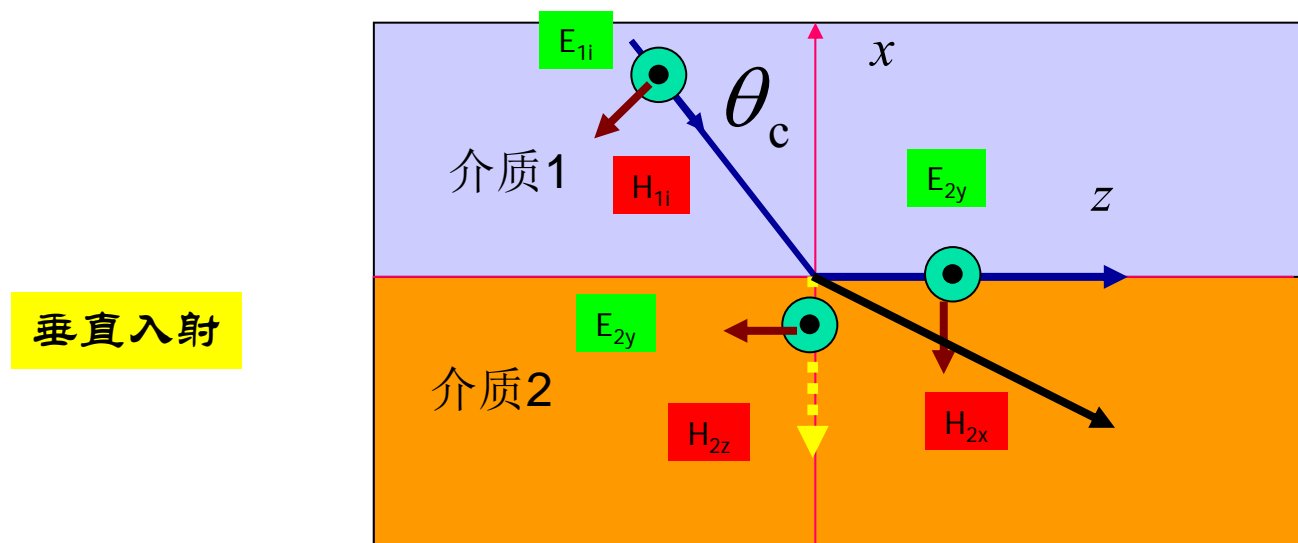
$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i + j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = e^{-2j\delta_{\perp}} \\ \Gamma_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_i - j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i + j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = e^{-2j\delta_{\parallel}} \end{array} \right.$$

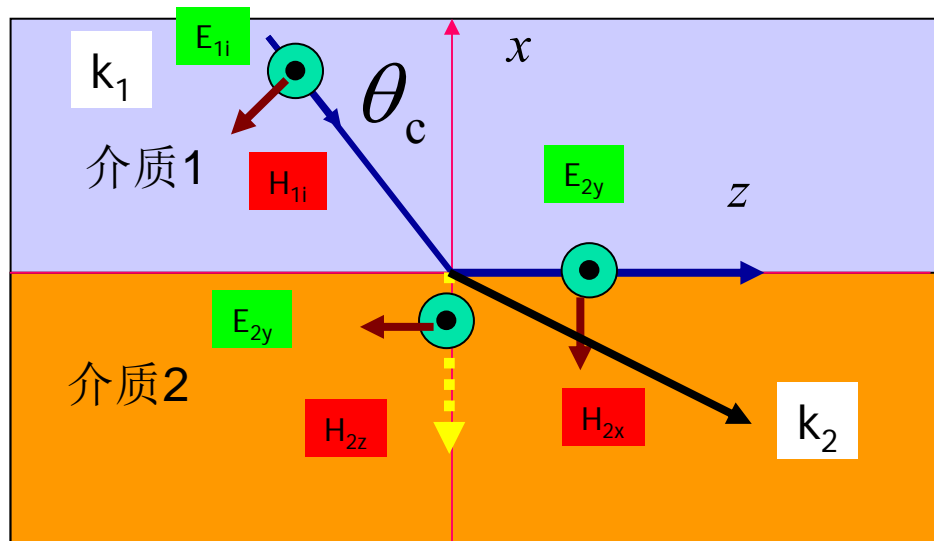
其中  $\delta_{\perp} = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i} \right]$  ,  $\delta_{\parallel} = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i} \right]$



由于介质1和介质2分别是均匀介质，在介质1中均匀平面电磁波入射的情况下，介质2中的电磁波也应该是平面电磁波，否则在介质的界面上，电磁波的边界条件不可能满足。介质2中的电磁波的解应具有平面波形式，即：

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20} \exp[-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \mathbf{E}_{20} \exp[-j(k_{2z}z + k_{2x}|x|)]$$





根据界面相位  
匹配原则得到

$$\begin{cases} k_{2z} = k_{1z} = k_1 \sin \theta_i \\ k_{2x} = \sqrt{k_2^2 - k_{2z}^2} = -jk_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} \end{cases}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} k_1 = n k_1$$

$$\mu \approx \mu_0, \eta_1 / \eta_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = n$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{20} \exp[-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = \mathbf{E}_{20} \exp[-j(k_{2z}z + k_{2x}|x|)]$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = E_{20} \hat{e}_y \exp\left(-jk_1 \sin \theta_i z - k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} |x|\right) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \left[ \hat{e}_z j \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} - \hat{e}_x \sin \theta_i \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_2} \hat{e}_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$$

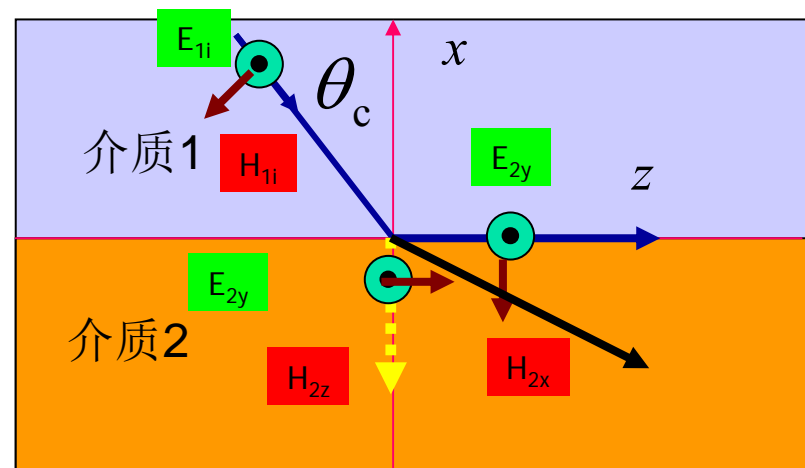
沿介质表面仍然存在沿z轴传播电磁波称为表面电磁波。

透射波为x方向上的指数衰减波，不能在介质中传播。

$$H_{2x} = -\bar{e}_x \frac{1}{\eta_1} \sin \theta_i E_2$$

$$H_{2z} = \bar{e}_z j \frac{1}{\eta_1} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} E_2$$

介质2中的电磁波为沿与介质表面垂直的衰减波



Poynting矢量为：

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{e}_x E_y H_z^* - \vec{e}_z E_y H_x^*] = \vec{e}_x S_x + \vec{e}_z S_z$$

$$S_x = \frac{1}{2} \text{Re}\left[E \left(j \frac{1}{\eta} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} E^*\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\eta} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} \text{Re}[j E^* E] = 0 \quad \text{沿} x \text{的负向的能流密度为零}$$

$$S_z = \frac{1}{2\eta_1} \sin \theta_1 |E_{20}|^2 \exp\left(-2k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n^2} |x|\right)$$

表明当入射角度大于临界角时，介质2中的电磁波为沿与介质表面垂直的衰减波；

透射波磁场 $z$ 分量超前电场 $y$ 分量 $\pi/2$ 的相位，沿 $x$ 的负向的能流密度为零；

因此介质2的电磁波能量不沿 $x$ 负向传播，而被反射回介质1中。



## 7.3 导电介质中电波传播

---

### 1 导电介质及其电荷的分布

存在可以移动带电粒子的介质称为**导电介质**。在电磁场的作用下，这些可以移动的带电粒子形成传导电流，传导电流导致**焦耳热损耗**，促使导电介质中电磁波的能量在传播过程中不断损耗。而均匀理想介质中不存在可以移动的带电粒子，其中也不可能存在传导电流，波在传播过程中能量不损耗。因此导电介质中电磁波的传播更复杂。



在静电情形下，导电介质内不存在自由电荷分布。自由电荷只分布在导体的表面。在时变电磁场中，导电介质中是否存在自由电荷分布呢？

为此设导电介质内有自由电荷分布，密度为  $\rho$ 。利用电场的Gauss定理和Ohm定律  $J = \sigma E$  得到电荷与传导电流之间满足如下方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad \xrightarrow{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) = \rho_0 \exp(-\tau t)$$

该结果表明，导电介质中自由电荷密度随时间按指数规律衰减，与电磁波的形式和变化规律无关，只与导电媒质本身电磁特性参数（ $\varepsilon$ ， $\sigma$ ）有关。由于初始时导电介质内电荷密度一般为零，因此导电介质中不存在自由电荷。

## 2 导电介质中的电磁波

由于导电介质中可以存在传导电流，其密度矢量由 Ohm 定律给出，于是导电介质中的麦克斯韦方程为：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} = j\omega\varepsilon'\mathbf{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

其中 
$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} \right)$$

称为复介电常数，复介电常数的引入，使得导电介质中场的方程与理想介质场的方程形式上完全一致

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} \right)$$

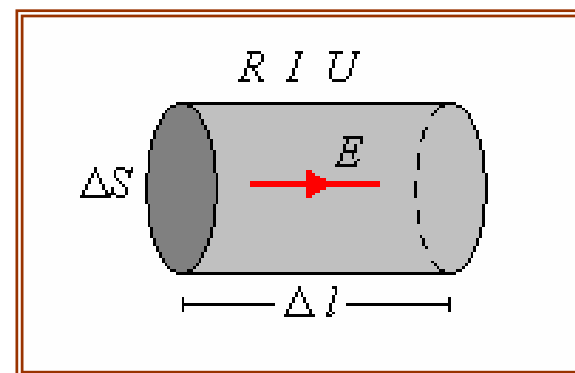
实部代表位移电流对磁场的贡献率

虚部是传导电流对磁场的贡献率

位移电流与电场有 $90^\circ$ 的相位差，它不引起电磁波能量的耗散。传导电流与电场相位相同，它引起电磁波能量在传播过程中的耗散。可以预言导电介质中电磁波振幅将随传播距离增加而减小。

## 耗散功率密度

考虑最简单情形：长度为 $\Delta l$ ，横截面为 $\Delta S$ 的一段导体，电阻为 $R$ ，内部电场为 $E$ ，电流为 $I$ ，两端电压为 $U$ ，电流密度为 $J$ ，则单位时间的焦耳热损耗



$$Q = I^2 R = IU = IE\Delta l = J\Delta S E\Delta l = JE\Delta S\Delta l$$

单位体积单位时间的焦耳热损耗为  $\frac{Q}{\Delta S\Delta l} = JE$

当 $J$ 和 $E$ 方向不一致时，应改写为  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ ，它适用于一般情形。

利用复介电常数，**导电介质**与**理想介质**中谐变电磁场满足相同形式的场方程；因而导电介质中电磁波的基本解与理想介质具有相同的形式：

### 理想介质空间

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j \frac{1}{\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k\eta} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

### 导电介质空间

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j \frac{1}{\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k\tilde{\eta}} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

为方便讨论，设电磁波沿 $z$ 方向传播，由波数为复数，设  $k = \hat{e}_z(\beta - j\alpha)$ ，得到导电介质空间中的电磁波为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = |\tilde{\eta}|^{-1} e^{-j\phi} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

电磁场的瞬时值是：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{H}(z, t) = |\tilde{\eta}|^{-1} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \phi) \end{cases}$$

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\beta = \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right) \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ 2\alpha\beta = \omega \sigma \mu \end{cases}$$

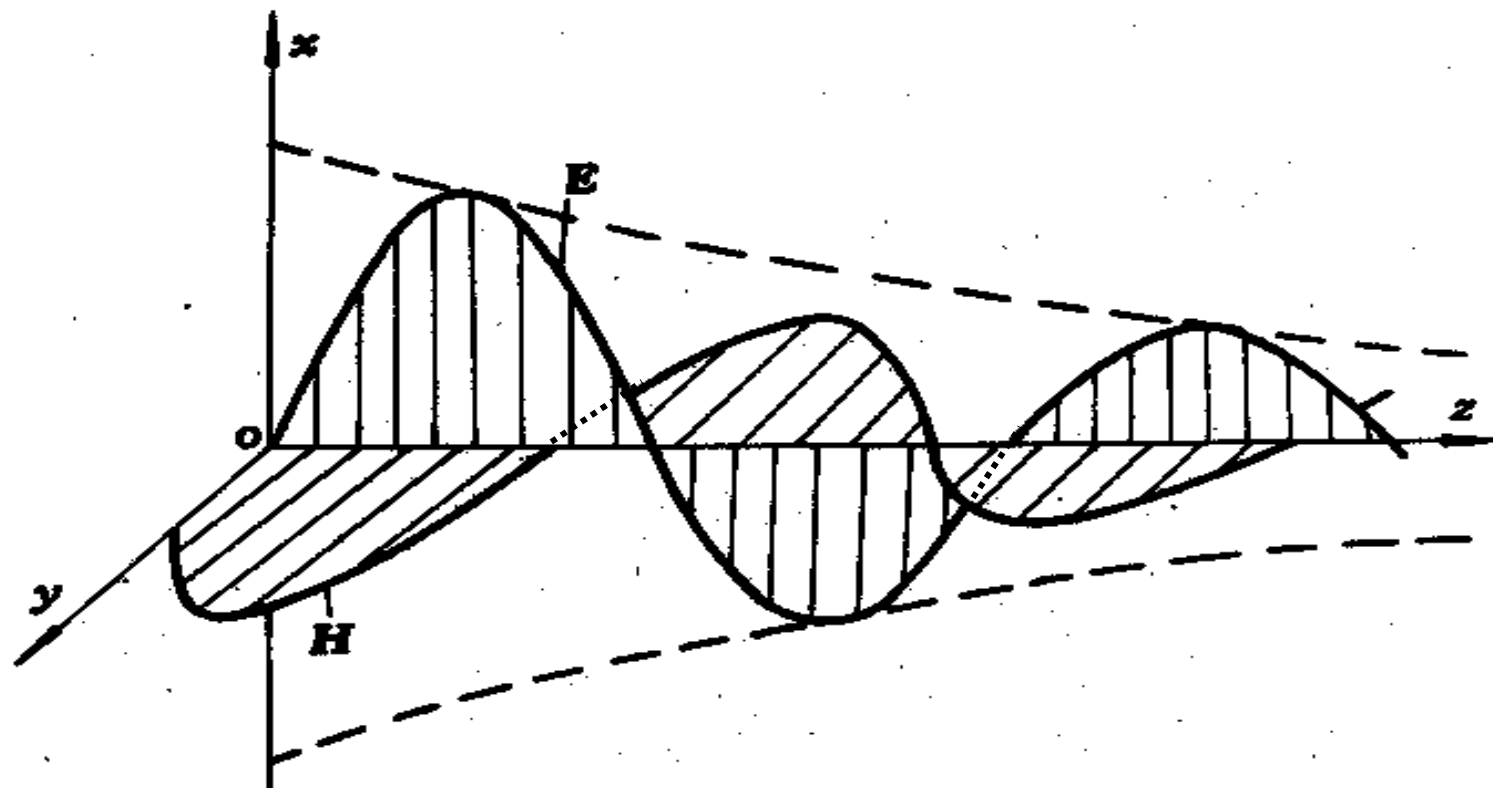
$$\begin{cases} \beta = \left(\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = \left(\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{\eta} = |\tilde{\eta}| e^{j\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(j \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)\right) \end{cases}$$

Poynting矢量  $\mathbf{S}$  为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{\hat{e}_z}{2|\tilde{\eta}|} |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\alpha|z|} \cos\phi \\ w_e = \frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\alpha|z|} \\ w_m = w_e \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq w_e \end{array} \right.$$



导电介质空间电磁波的波形为：



## 主要结果：

- ① 波矢量 $k = \beta - j\alpha$ 为复数， $\alpha$ 称为衰减常数，表示电磁波沿传播方向衰减快慢的程度物理量； $\beta$ 称为相位常数，与理想介质中波数有相同的意义。
- ② 导电介质空间电磁波的基本解仍为平面电磁波，但电磁波振幅随波传播距离的增加而指数衰减。
- ③ 电场与磁场复振幅之比仍为波阻抗，但为复数。其幅角表示电场与磁场的相位差。
- ④ 导电介质中电场能量密度小于磁场能量密度。

### 3 良导体中的电磁波

为了定量描述导电介质的导电强弱的程度，考察导电介质中传导电流与位移电流之比

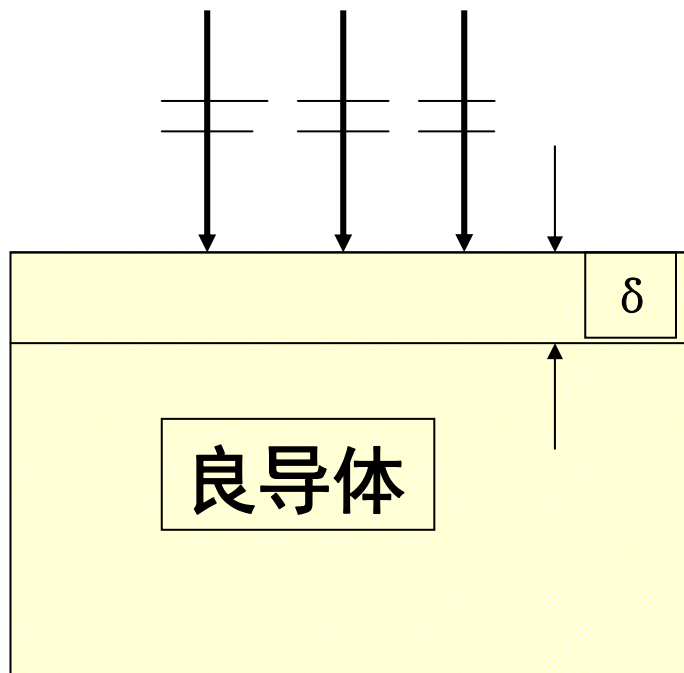
$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}} = \left| \frac{\sigma E}{\omega \varepsilon E} \right| = \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$$

$$\left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) = \begin{cases} \ll 1 & \text{[传导电流远小于位移电流]} & \text{弱导电介质} \\ \sim 1 & \text{[传导电流远接近位移电流]} & \text{半导体} \\ \gg 1 & \text{[传导电流远大于位移电流]} & \text{良导体} \end{cases}$$

对于良导体：

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left( \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \gg 1 \\ \beta = \left( \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \gg 1 \\ \tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left( j \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \right) = \sqrt{\frac{\mu \omega}{\sigma}} \exp(j45^\circ) \end{array} \right.$$

当  $\alpha$  很大，导体内电磁波衰减很快，电磁波在导体内传播的距离很小。为了描述电磁波在良导体中传播的距离的大小，将场的幅度衰减  $e^{-1}$  所传播的距离定义为良导体中电磁波的**穿透深度**  $\delta$ 。



$$\left| \frac{\mathbf{E}(z)}{\mathbf{E}_0} \right| = e^{-\alpha z} = e^{-1}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

良导体的电导率  $\sigma$  很大（金属一般为  $10^7$ /欧·米），所以良导体中的电磁波只存在于导体表面的薄层中，这一现象被称之为**趋肤效应**。

**【例1】** 计算频率100Hz, 1MHz, 10GHz的电磁波在金属铜中的穿透深度。

解：金属铜的电导率  $\sigma = 5.8 \times 10^7$ /欧·米

$$\delta_1 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6.6(\text{mm})$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 66(\mu\text{m})$$

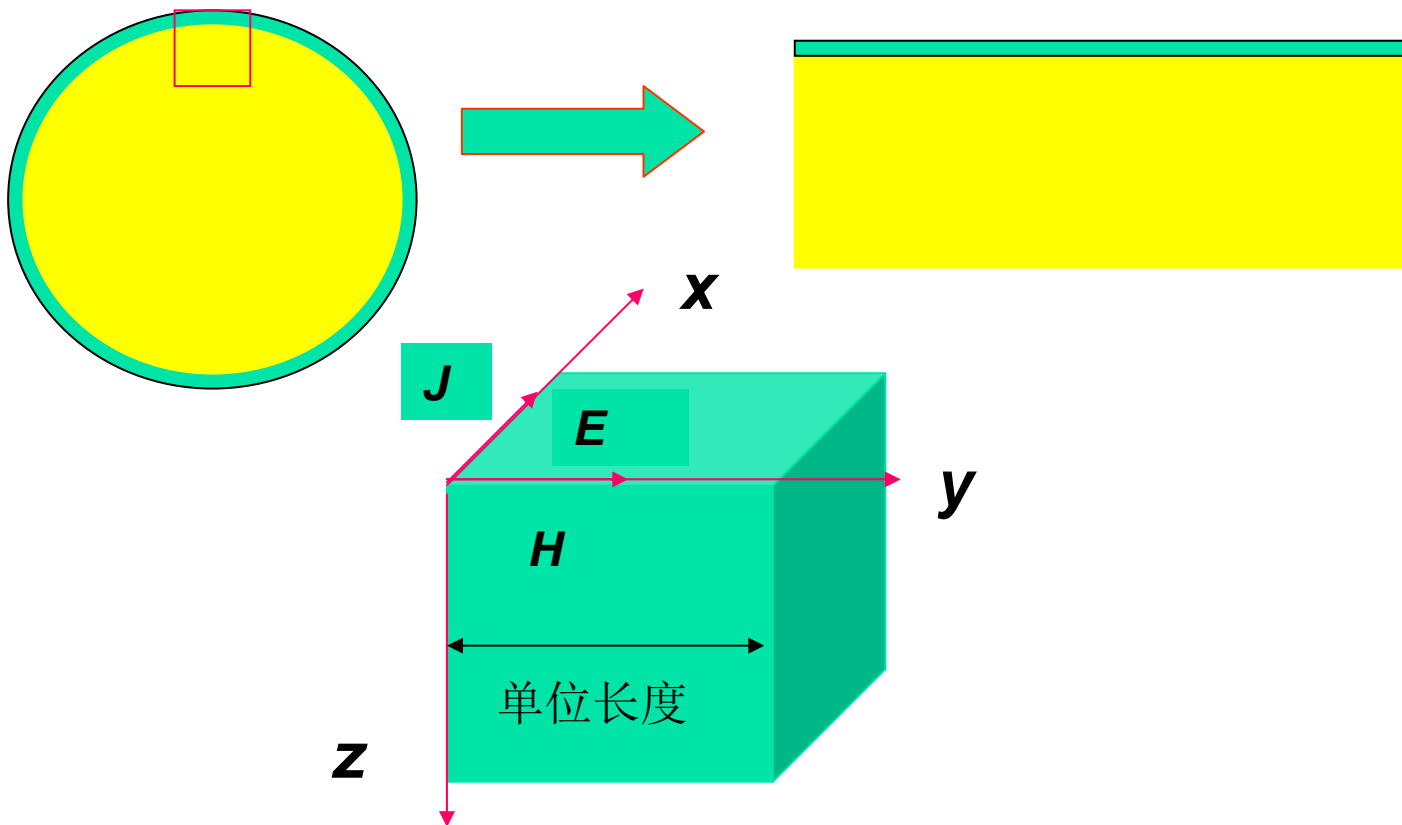
$$\delta_3 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^{10} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6600(\text{\AA})$$

由于导体的趋肤效应，导体中高频电流集中于表面，内部的电流则随深度的增加而迅速减小。尽管导体的截面很大，但真正用于电流传输的**有效面积**则很小。导致导体的**高频电阻必然大于低频或直流电阻**。



传输恒定电流时，传输电流的横截面积为圆柱导体的横截面积

传输时变电流时，传输电流的横截面积仅为圆柱导体横截面的很小一部分





$$I_x = \iint_s J_x ds = \int_0^\infty \sigma E_0 \exp(-\alpha z - j\beta z) dz = \frac{\sigma E_0}{\alpha + j\beta}$$

定义电流方向上单位长度电压复振幅（电场）与单位宽度电流的比值为导体的阻抗率

$$Z_s = \frac{U}{I_x} = \frac{E_0}{I_x} = R_s + jx_s = \frac{\alpha + j\beta}{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j) = \frac{1}{\delta} \frac{(1 + j)}{\sigma}$$

直流电阻率：  $\frac{1}{\sigma}$

高频电流电阻率：  $\frac{1}{\delta} \frac{1}{\sigma}$

## 4 电磁波在导体表面的反射

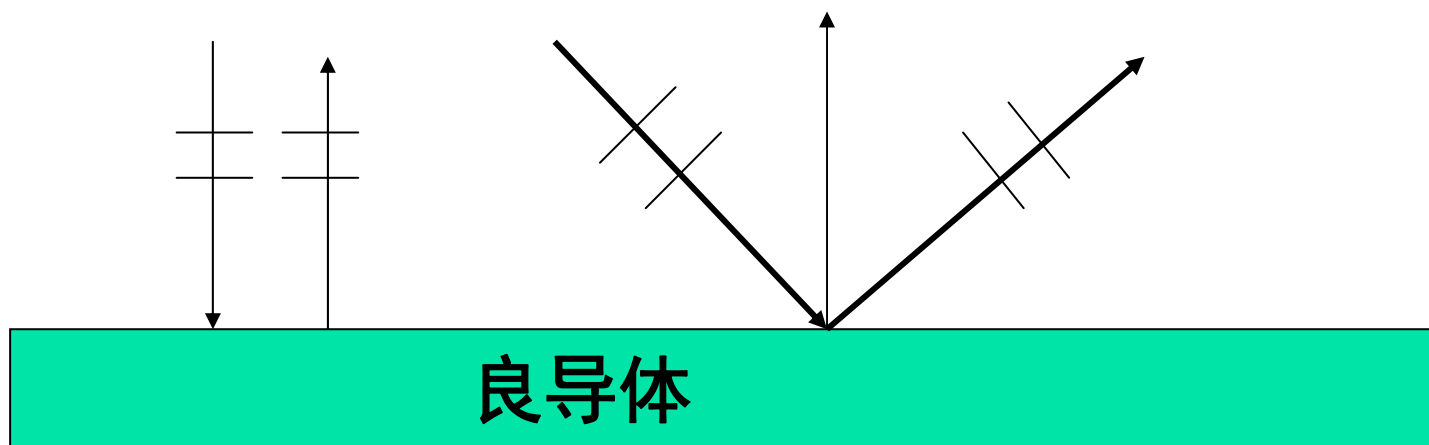
为了方便问题的讨论，设平面电磁波垂直入射到导体表面，在导体界面上产生反射电磁波和进入导体内部的透射电磁波，在导体表面上满足如下边界条件：

$$\begin{cases} E + E' = E'' \\ H - H' = H'' \end{cases}$$
$$H(\mathbf{r}) = j \frac{1}{\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\tilde{\eta}} \hat{z} \times \mathbf{E}$$
$$E - E' = E'' \frac{\eta}{\tilde{\eta}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} (1 + j) E''$$

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1 + j - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + j + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \approx -1$$

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \left| -\frac{1 + j - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + j + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \right|^2 \cong 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \cong 1$$

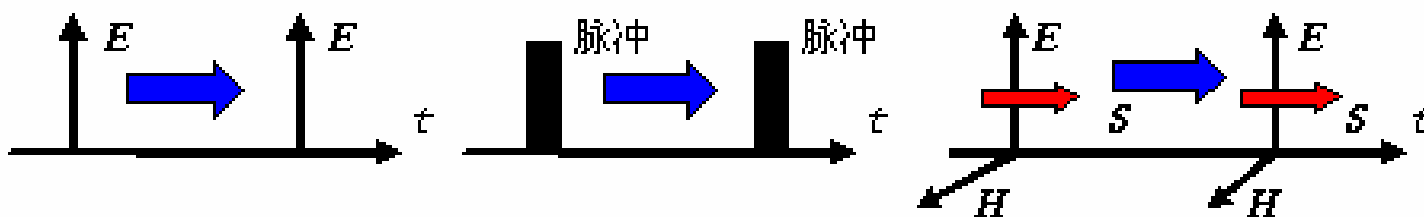
对于良导体，电磁波仅能存在于导体表面很薄的层中，**绝大部分能量被反射回来**。因此在高频时，导体可以看成是理想导体而作为电磁场的边界。



## 7.4 电磁波的速度与介质的色散

### 1 电磁波的速度

变化的电场和磁场相互激发在空间传递的速度可视为电磁波的速度。但对于波动而言，存在着不同物理量的传播速度。如：**波动相位**、**波动能量**和电磁波**信号传播速度**。他们之间存在什么样的联系和差别。



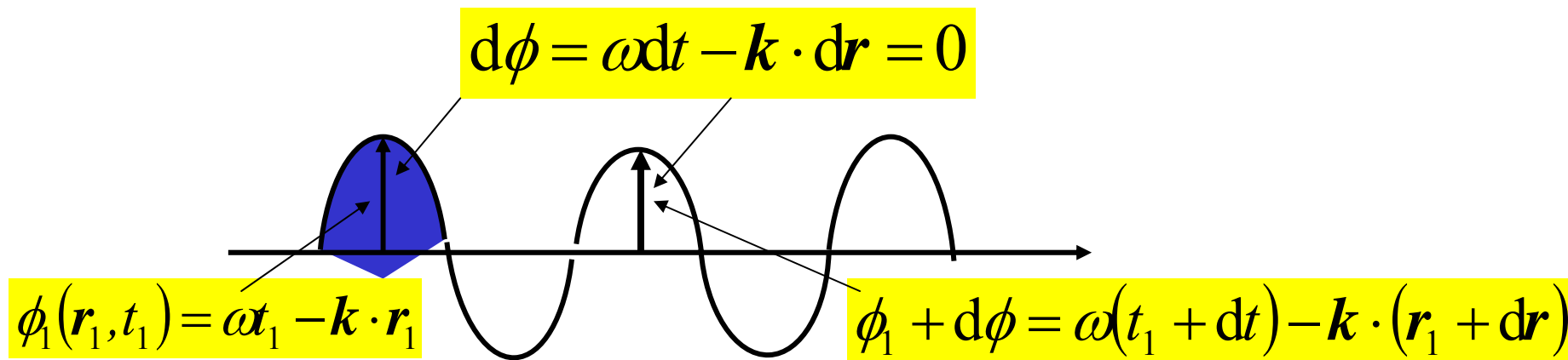
(a) 相位的传播速度； (b) 信号的传播速度； (c) 能量的传播速度

## 2 相速度

以谐变平面波为例，电磁场的瞬时表达式为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$



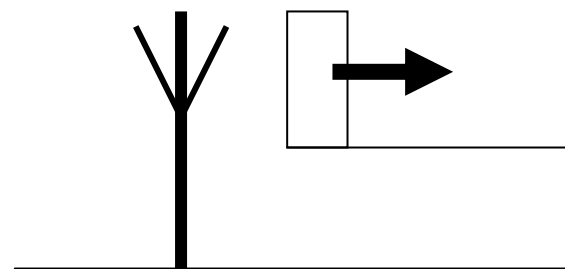
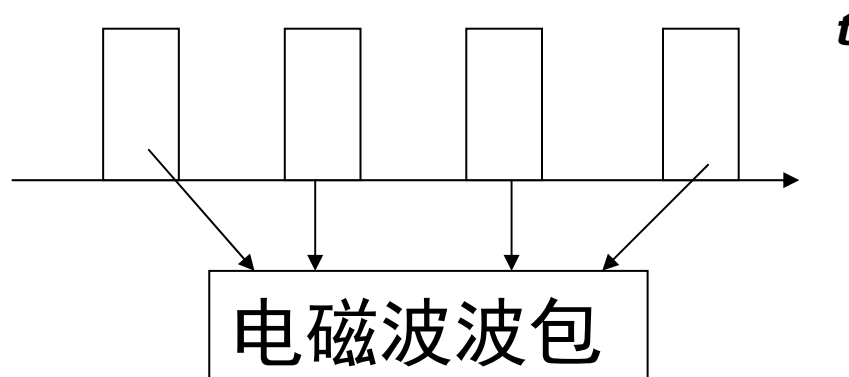
$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$

一般情况下相速度是频率的函数



### 3 群速度

严格意义上的谐变平面电磁波(单频率)不存在,同时一个时间和空间上无限延伸的谐变平面电磁波不能传递任何信息。所以实际应用中并不是谐变平面电磁波,而是电磁波包。如雷达利用脉冲电磁波进行目标的探测和定位。



为简单起见, 我们考虑由两列波组成的“波包”。设两列波分别为

$$\begin{cases} U_1(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x), \\ U_2(x, t) = A \cos(\omega_2 t - k_2 x). \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= (\omega_1 - \omega_2)/2, & \omega_0 &= (\omega_1 + \omega_2)/2, \\ \Delta k &= (k_1 - k_2)/2, & k_0 &= (k_1 + k_2)/2. \end{aligned}$$

并设

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0, \quad |\Delta k| \ll k_0,$$

即两波的频率(或波长)很接近, 它们合成的波列为

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= U_1(x, t) + U_2(x, t) \\
 &= \underbrace{2A \cos(\Delta\omega t - \Delta kx)}_{\text{低频包络}} \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{\text{高频波}}
 \end{aligned}$$

此波的瞬时图像如图 3-1 所示，是振幅受到低频调制的高频波

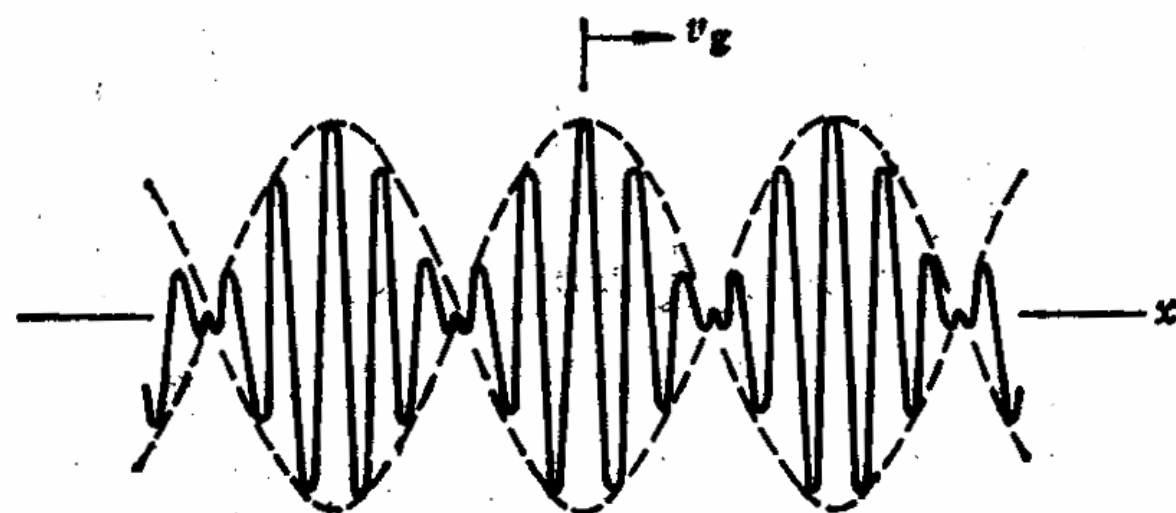


图 3-1 相速与群速



根据Fourier理论，任何电磁波包中的电场或磁场可表示为不同频率、不同振幅和不同初相位的谐变电场或磁场的叠加：

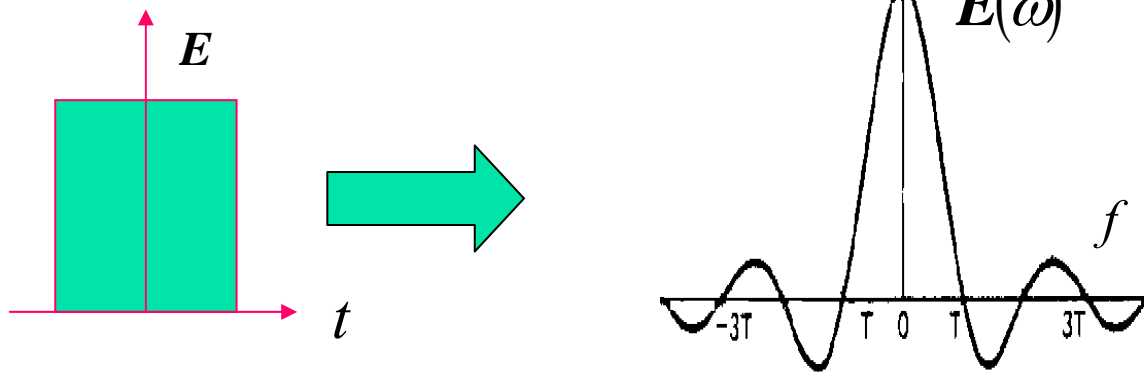
$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt$$

波包在空间传播是波包中不同振幅、不同频率和不同初相位的谐变平面波在空间传播叠加的结果

空间  $r$  点  $t$  时刻的电场是波包中所有频率对应平面波在该点的叠加，即：

$$E(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \exp[j(\omega t - k \cdot r)] d\omega$$

实际中  $\tilde{E}(\omega)$  是定义在有限频率范围内的函数。如方波脉冲



$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_0 e^{j\omega t} dt = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

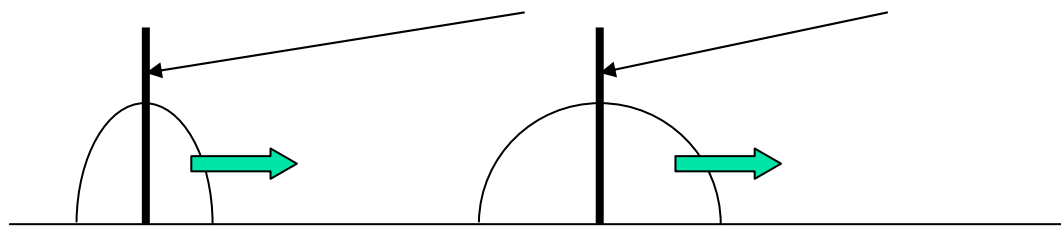
$$E(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \tilde{E}(\omega) \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega = \underbrace{E_0(\omega_0)}_{\text{波包的幅度}} \exp[j(\underbrace{\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}_{\text{波包的相位}})]$$

$$E_0(\omega_0) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} E(\omega) \exp[j((\omega - \omega_0)t - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r})] d\omega$$

波包幅度不再是常矢量，而是在空间一定区域范围内分布集结，并以波动形式在空间运动的矢量包

---

该波包的中心由方程  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega_0)t = 0$  确定。



波包中心传播的速度：

$$\mathbf{v}_g = \nabla \omega(\mathbf{k}) \Big|_{\omega_0} = \hat{e}_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + \hat{e}_y \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \hat{e}_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$$

称为群速度

## 4 群速度与能流传播速度

利用Poynting矢量的定义式，得到电磁波包能流密度矢量为：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*}{k\eta} \right) = \frac{\hat{k}}{2\eta} |\mathbf{E}_0(\omega_0)|^2$$

显然，其传播速度由电场幅度（波包）中心确定。由此可见群速度与电磁波包的能量传播速度一致。从能量角度看，稳态情形下的任何**信号的传输**必然以**能量的传输**为信号的传输，因此电磁波信号传播的速度必然是能量的传播速度。

## 5 群速度与相速度的关系

群速度是多个频率的平面波叠加形成的波包在空间传播的速度，相速度是单频的平面电磁波的等相位面在空间传播的速度。如果  $\mu$ ， $\varepsilon$  与频率无关，相速度与群速度相等。

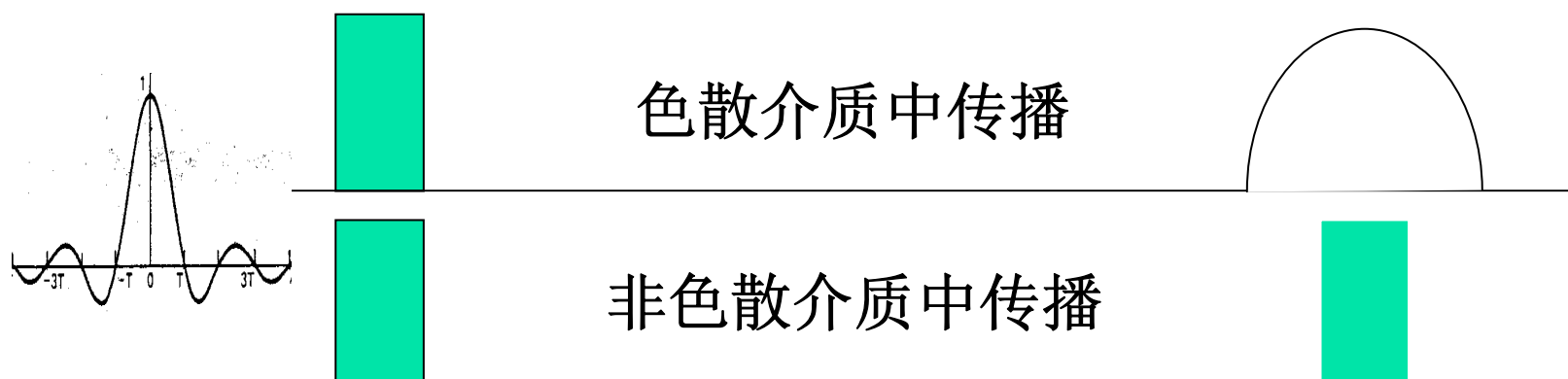
$$\omega = k v_p \Rightarrow \mathbf{v}_g = \frac{\hat{e}_k}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \mathbf{v}_p$$

如果  $\mu$ ， $\varepsilon$  与频率有关：

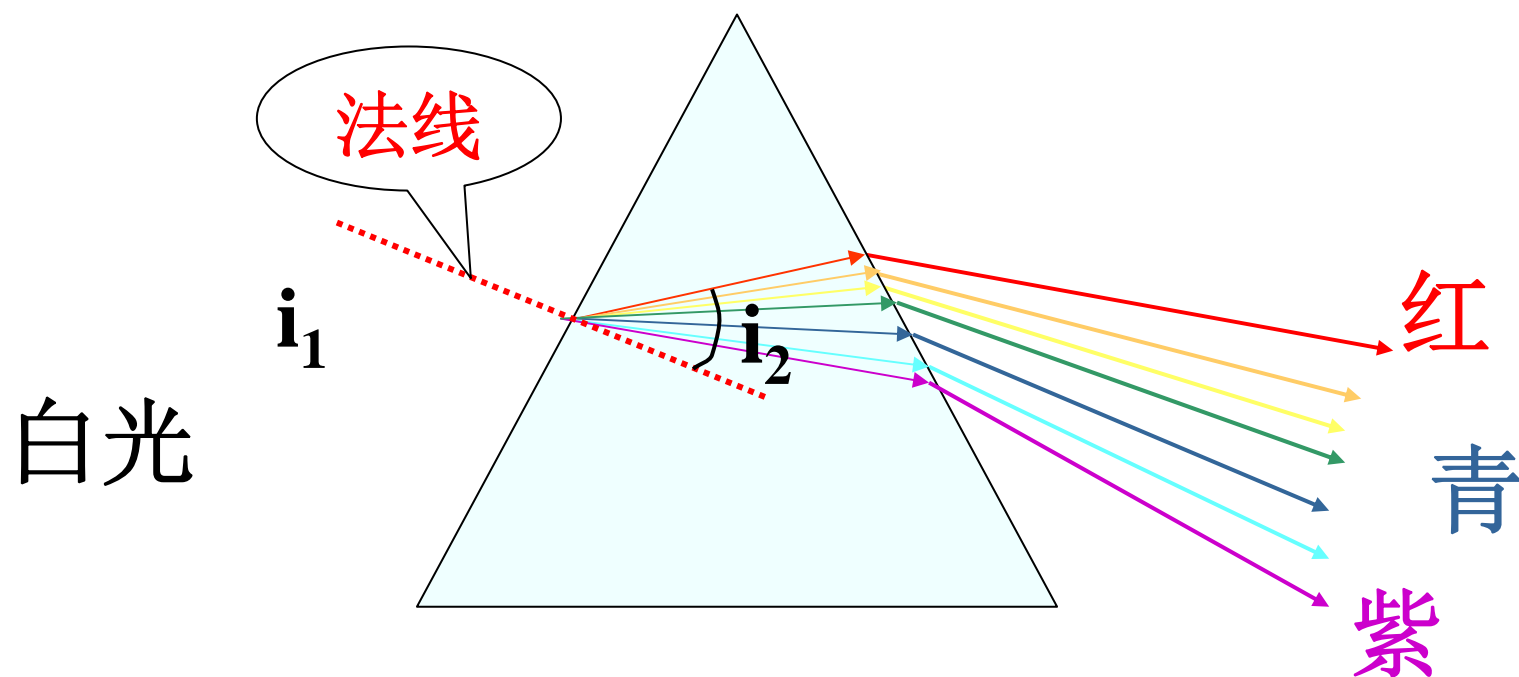
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_p)}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$$

## 6 色散现象与它带来的问题

介质的电磁特性参数  $\mu$ ,  $\varepsilon$  随频率而变的介质称为色散介质。利用Fourier分析的方法, 色散介质又是时变介质。不同频率的电磁波信号在色散介质中传播具有不同的相速度, 这将导致电磁波波包在传播过程中发生形状的变化, 即信号失真。



# 牛顿用三棱镜把白光分解为彩色光带的实验



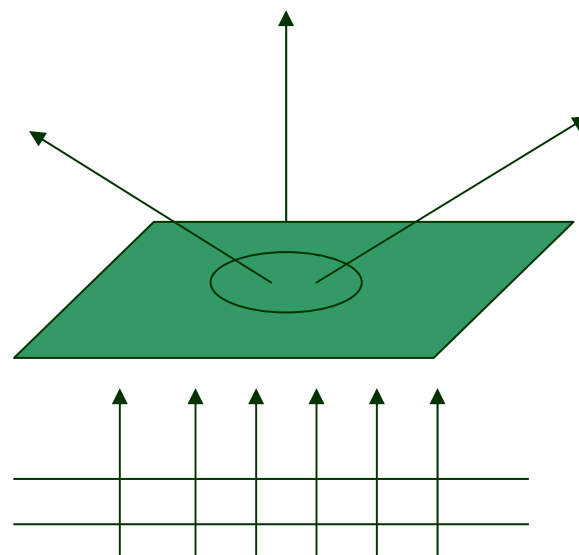
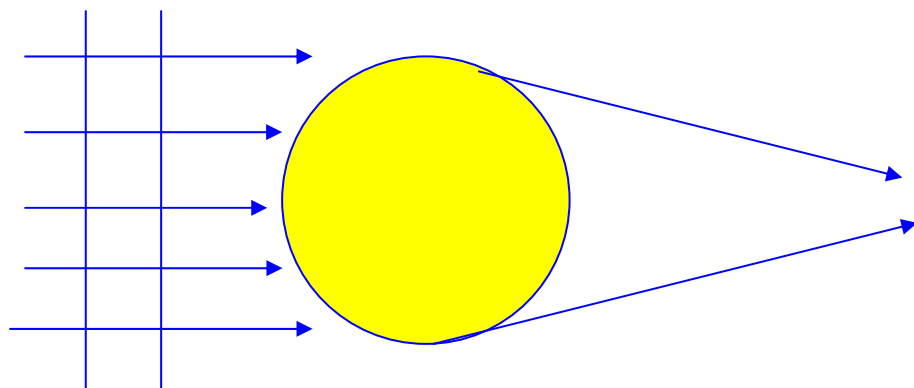
单棱镜的色散



## 7.5 电磁波的衍射

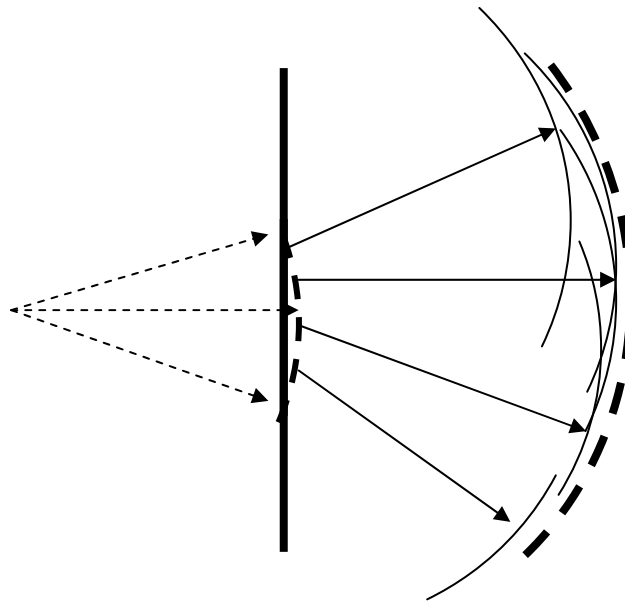
### 1 电磁波的衍射现象

当电磁波在传播过程中遇到障碍物或透过屏幕上的小孔时，由于波动特性，电磁波不按直线传播的现象称为电磁波的衍射，它是波动的一个基本的特征。



## 2 Huygens-Fresnel原理

**Huygens**在研究波动现象时指出：波在传播过程中，波阵面上的每一点都是产生球面子波的次波源，而波阵面上各点发出的许多次波所形成的包络面是原波面在一定时间内所传播到的新波面。



Fresnel在研究Huygens原理的基础上认为：

波在传播过程中，波阵面上的每一点都是产生球面子波的次波源，空间其它点任意时刻的波动是波阵面上的所有次级波源发射子波的干涉叠加，进一步完善了Huygens原理，称为Huygens-Fresnel原理。

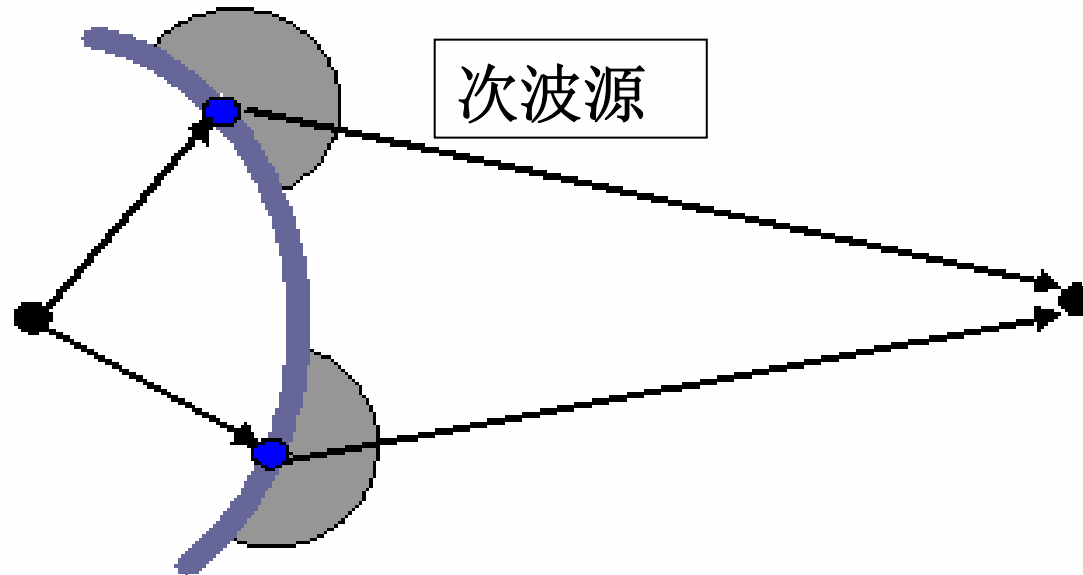


图 7-16 Huygens-Fresnel 原理

以标量场为例，无源空间中标量波满足方程：

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

应用Green函数方法，空间标量波函数解为

$$\phi(\mathbf{r}) = \oint_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot d\mathbf{S}'$$

其中  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为无界空间波动方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

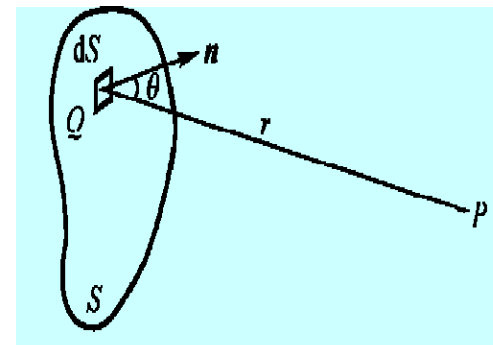
的解，求解得到：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

$$\phi(\vec{r}) = \oint_{S'} [G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot d\vec{S}'$$

空间标量波函数为：

球面波幅度因子



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[ \nabla' \phi(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \phi(\mathbf{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot dS'$$

积分表示界面  
所有次波叠加

球面波因子，表示发自  
边界面上 $\mathbf{r}'$ 点的球面波

这正是Huygens-Fresnel原理的数学表达式。它表示区域内任意点  $\mathbf{r}$  的场是界面上所有次波源发出次波在该点干涉叠加的结果。

## 2 辐射条件

如果  $R \rightarrow \infty$  ,  $ds' = \hat{R} R^2 d\Omega$   $\nabla' \phi(\mathbf{r}') = \hat{R} \frac{\partial \phi}{\partial R}$

$$\phi(\mathbf{r}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \oint_S R \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial R} + jk \phi(\mathbf{r}') \right) d\Omega e^{-jkR} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') d\Omega e^{-jkR}$$

表示无穷远边界上次波源在空间内 $\mathbf{r}$ 点辐射场的叠加，其结果必为零。否则有限区域内电磁场因与无穷远边界上电磁场有关而具有多值特性。即：

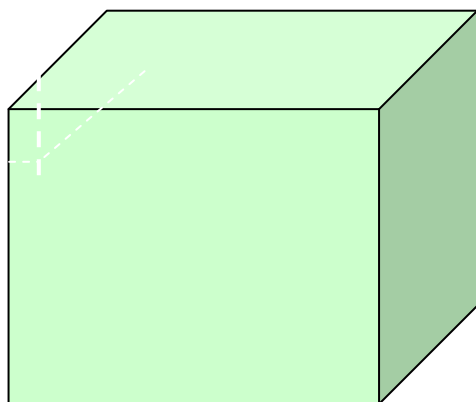
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} + jk \phi(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad \text{称为辐射条件}$$

## 7.6 各向异性介质中的电波传播

### 1 各向异性介质

如果介质的极化、磁化或传导特性与外加电磁场方向相关的介质，称为**各向异性介质**。如晶体介质的极化常数一般为：



$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \varepsilon_0 \hat{e}_x (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z) \\ & + \varepsilon_0 \hat{e}_y (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \\ & + \varepsilon_0 \hat{e}_z (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 (\hat{e}_x E_x + \hat{e}_y E_y + \hat{e}_z E_z) \\ &+ \varepsilon_0 \hat{e}_x (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z) \\ &+ \varepsilon_0 \hat{e}_y (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \\ &+ \varepsilon_0 \hat{e}_z (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \\ &= \hat{e}_x (\varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z) \\ &+ \hat{e}_y (\varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z) \\ &+ \hat{e}_z (\varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z) \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{D} = \vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$$

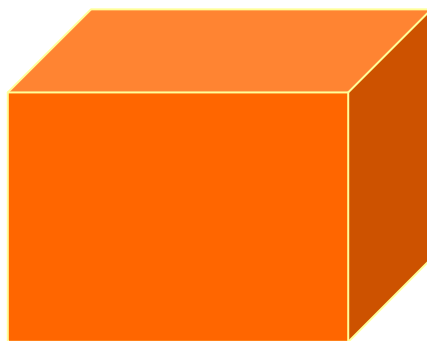
$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

称为张量介电常数



又如置于外磁场 $H_0$ 之中的铁氧体（由 $\text{Fe}_2\text{O}_3$ 和其它金属氧化物混合经高温烧结而成）；对时变电磁场的磁导率是各向异性的，即

$H$



$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

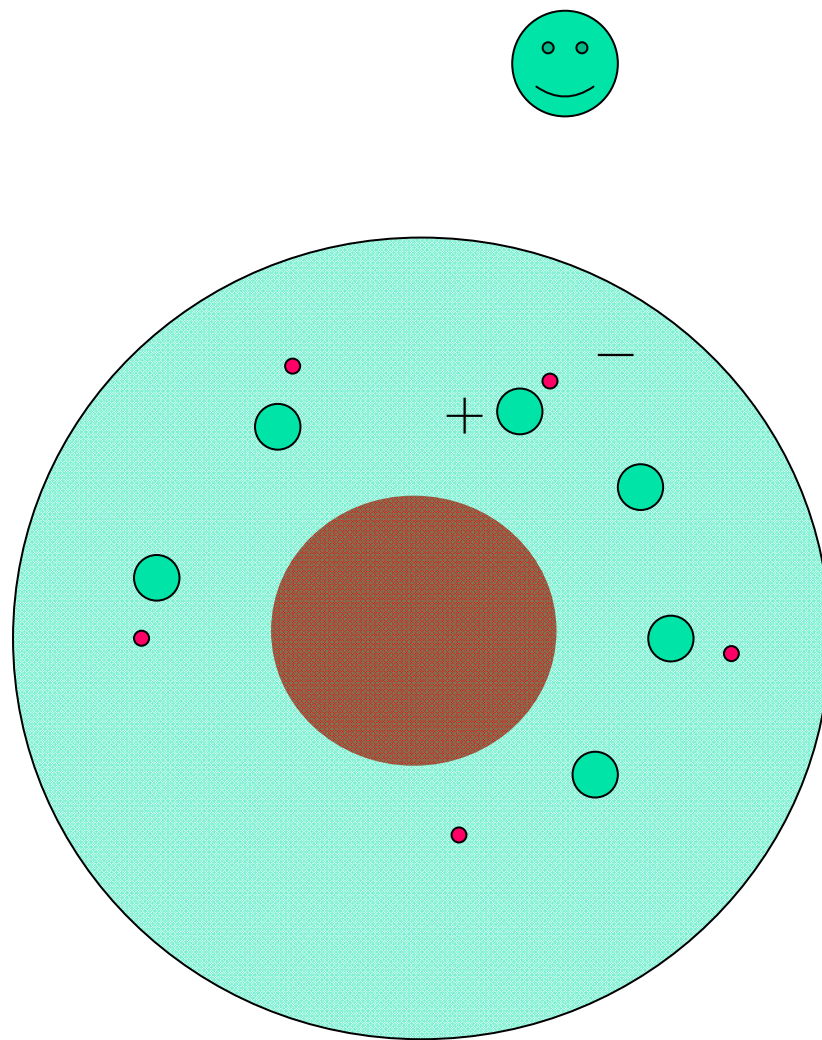
称为磁导率张量。

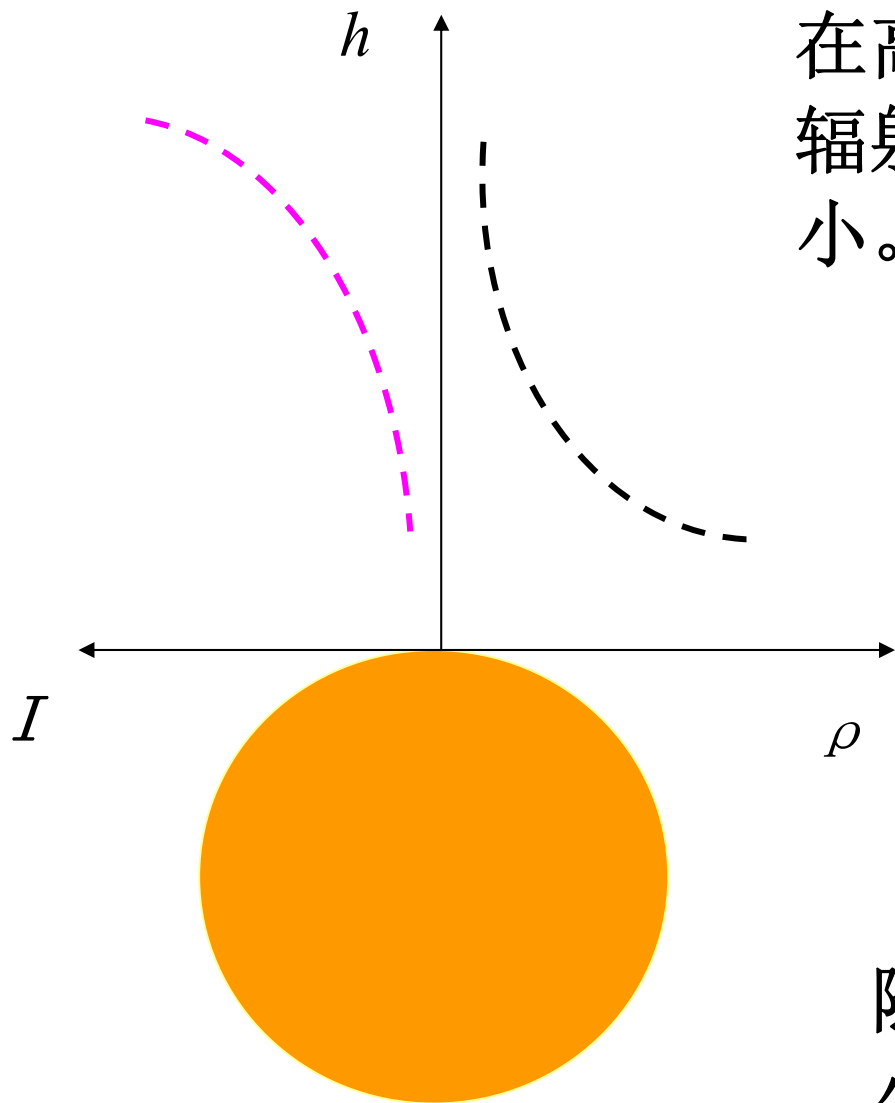
## 2 磁化等离子体(电离层)的介电张量

当物质温度升高或受到其它激发，组成物质的原子或分子电离，形成由电子、离子和部分未电离的中性分子组成的混合体，称为**等离子体**。等离子体中总的正、负电荷量相等，对外显中性，其中的电子类似于金属中的电子，但密度小得多。

等离子体类似于金属导体，理论和实验证明等离子体的磁导率与自由空间磁导率常数差别很小。但电导率参数表现出复杂的特性。这主要是因为等离子体中的电子运动非常复杂。

太阳光中的紫外线或高速粒子使高空大气电离，形成环绕地球的高空电离层，它是我们人类拥有的最大的天然等离子体，对人类的生成和发展有重要的作用。



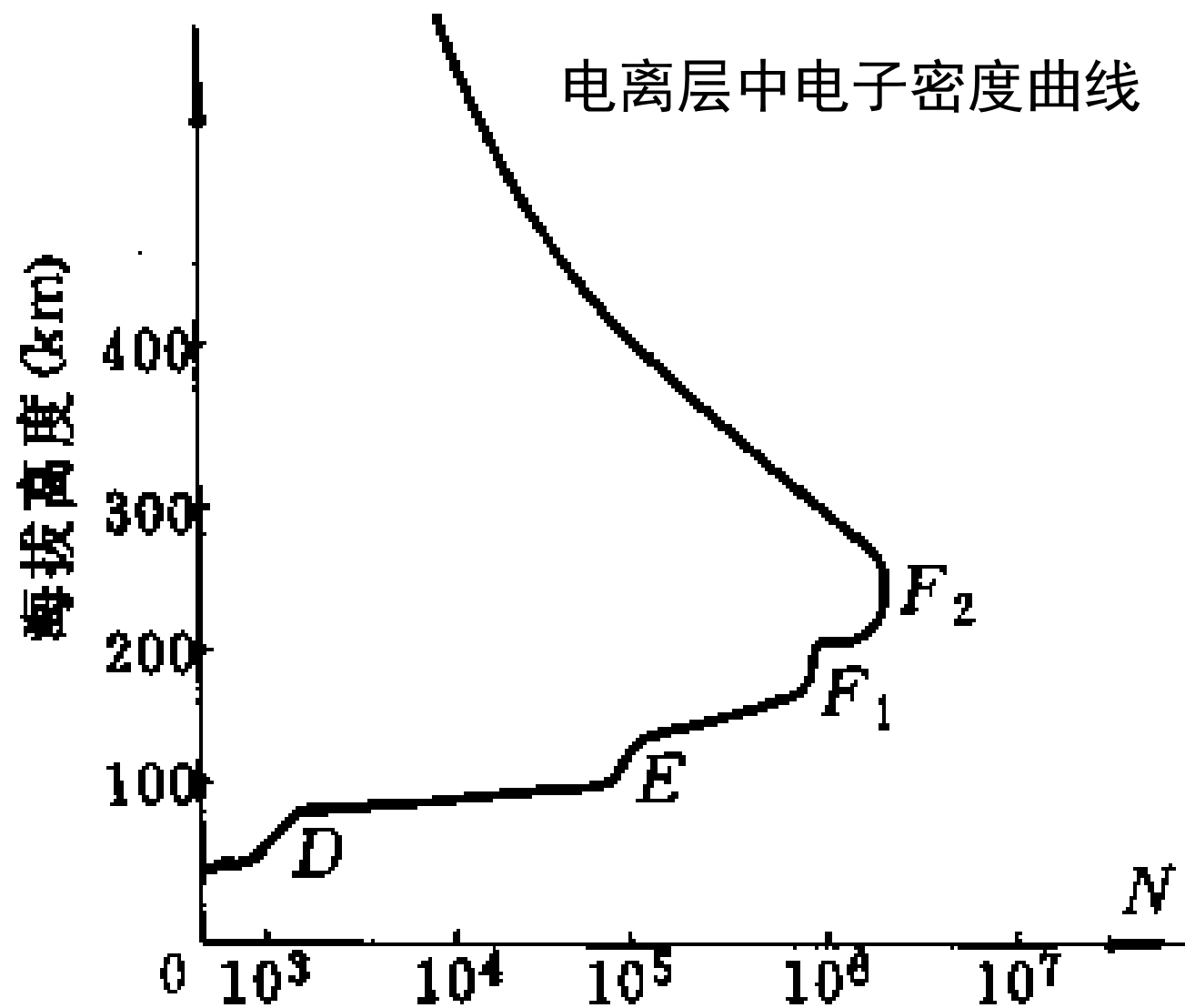


在高空，大气密度很小，太阳辐射使大气电离，但电离密度小。电离使太阳光能量减小。

随着离地球距离的减小，大气密度增加，太阳电离大气密度增加。太阳光能量迅速减小。

随着离地球距离的进一步减小，大气密度增加，太阳光能量很小。电离密度减小。

电离层中电子密度曲线



为了突出电子的运动的主要特点，忽略等离子体中电子与离子之间的碰撞，称为**冷等离子体**。此外，地球外部空间的电离层受恒定地磁场的作用，通常把恒定磁场中的等离子体称为**磁化等离子体**。因此作为一种理想模型，电离层中的电波传播可以近似为**磁化冷等离子体中的电波传播问题**。

电离层中电子受到的作用力及运动方程为：

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{H})] \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \end{cases}$$

$m$ ： 电子的质量；

$e$ ： 电子的电荷量；

$\mathbf{B}_0$ ： 恒定地磁场；

$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ： 在电离层中传播的时变电磁场；

一般情况下，地磁场远大于在电离层中传播的时变化电磁场的磁场，所以有近似关系

$$|\mu_0 \mathbf{H}| \ll |\mathbf{B}_0| \quad |e\mathbf{E}|/|e\mathbf{v}\mu_0 \mathbf{H}| = \left| \frac{c}{v} \right| \gg 1$$

电子受到的作用力可近似为：

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{H})] \approx -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \end{cases}$$



对于时谐电磁场，电子的运动也应该是时谐运动，  
因此电子的运动方程为：

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = j\omega\mathbf{v}$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \Longrightarrow -j\left(\frac{m}{e}\right)\omega\mathbf{v} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \left(\frac{e}{m}\right) \begin{bmatrix} \frac{-j\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{-j\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{j}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\omega_g = \frac{e}{mB_0}$$

电子的回  
旋频率

磁化等离子体中传导电流密度为  $\mathbf{J}_f = \rho \mathbf{v} = -eN\mathbf{v}$

磁化等离子体中的Maxwell为：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\vec{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & j\varepsilon_2 & 0 \\ -j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

电离层的张量介电常数

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} \\ \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{cases}, \quad \underline{\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

对上述结果稍作分析得到：

- ① 当  $\omega \rightarrow \omega_g$  时，电磁波的圆频率与电子自旋频率相同，电磁波能量被电离层中电子极大的吸收而处于磁旋共振状态，导致电磁波能量极大被损耗。如果

$$B_0 = 5 \times 10^{-5} (\text{韦伯/平方米}) \quad f_g = 1.4 \text{ MHz}$$

这说明当频率为1.4MHz的电磁波入射电离层时吸收最大。这是短波通信应该尽量回避的频率。

- ② 对于  $B_0=0$  的非磁化等离子体，张量介电常数退化为各向同性的标量介电常数，即：

$$\vec{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \epsilon_3$$

等离子体电磁波满足的波动方程与各向同性介质中的方程相同。

## 在等离子体中传播的电磁波的波数

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_3}$$

当  $\omega < \omega_p$  ,  $\varepsilon_3 < 0$  ,  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_3}$  为纯虚数

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\omega \left| \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_3} \right| r} e^{j\omega t}$$

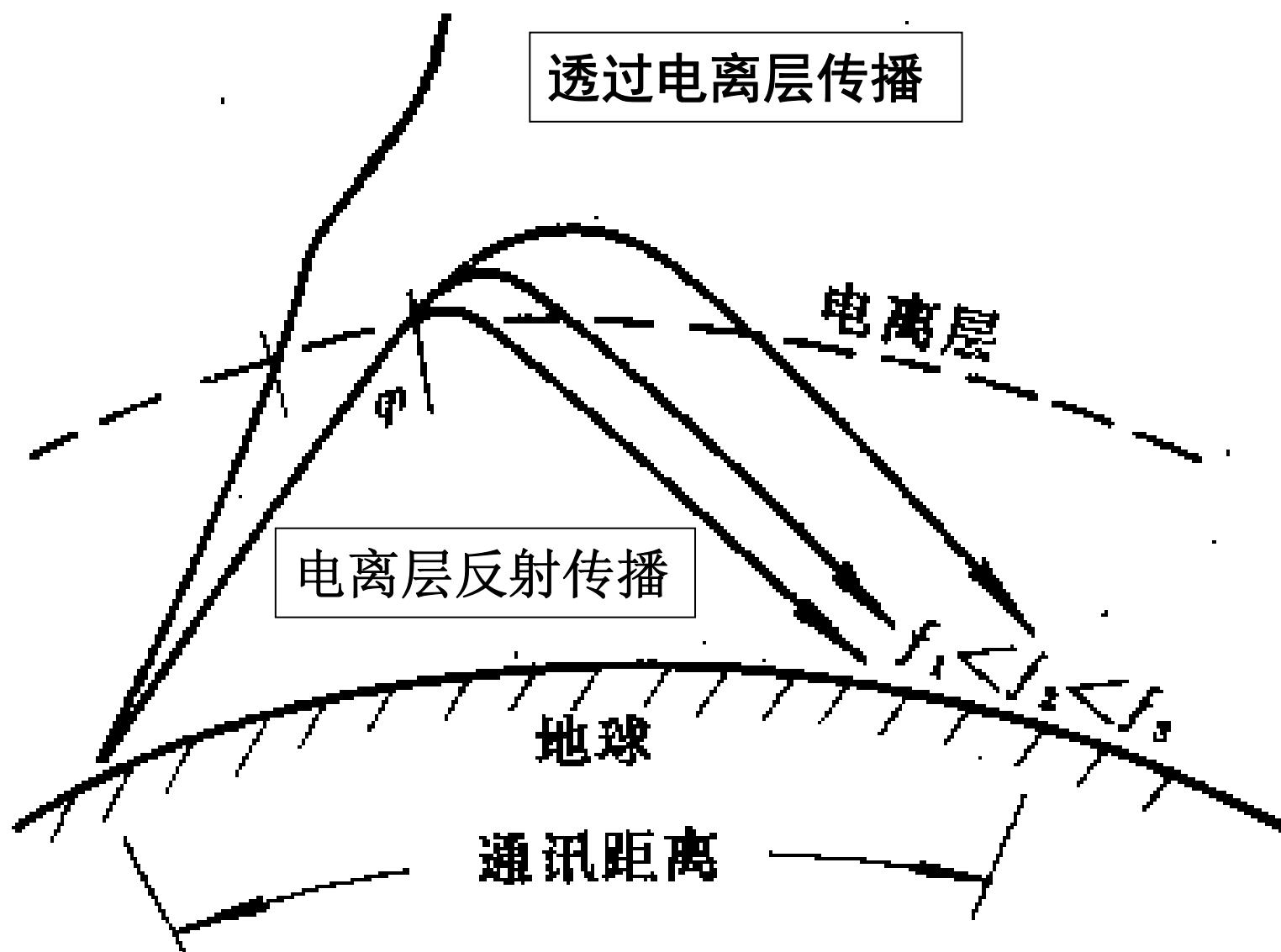
电磁波随传播距离增加而按指数规律衰减，不再具有电磁波特点。所以  $\omega_p$  称为**等离子体临界频率**，与等离子体电子密度有关。

对于地球上空的电离层，其电子密度随海拔高度变化而变化，密度最大值大约为：

$$1 \sim 2 \times 10^6 / \text{cm}^3$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \approx 13\text{MHz}$$

因此，为了实现地球与卫星之间的通信，其频率必须高于电离层最大临界频率，否则信号将不能穿过电离层。另一方面，小于临界频率的电磁波不能穿透在电离层，必然被反射到地面





### 3. 电离层中的平面波

---

为了突出电离层中的电磁波的传播问题，假设电离层是无耗、均匀、线性的充满整个空间。其最简单的平面电磁波是：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \exp(-j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 \exp(-j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \end{cases}$$

上述平面电磁波在电离层中能否存在？如果存在，该平面波具有那些基本特性？



将平面电磁波可能解代入Maxwell方程组

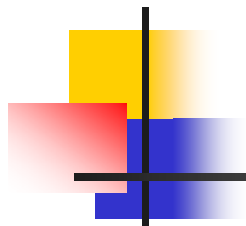
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}, & \nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, & \nabla \times \mathbf{H} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{H} \end{cases}$$

得到电场满足的方程是：

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = -k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E}_0$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{k} - \vec{I}k^2] \cdot \mathbf{E}_0 = -k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E}_0$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$



矩阵方程是一个关于波数  $k$  的代数方程，称为 Appleton—Hartree 方程。 $k$  每个取值与电离层中可存在的平面电磁波模式相互对应。

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x}$$

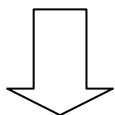
特例一： 设  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{B}_0$

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x}, \mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

$$\mathbf{B}_0$$

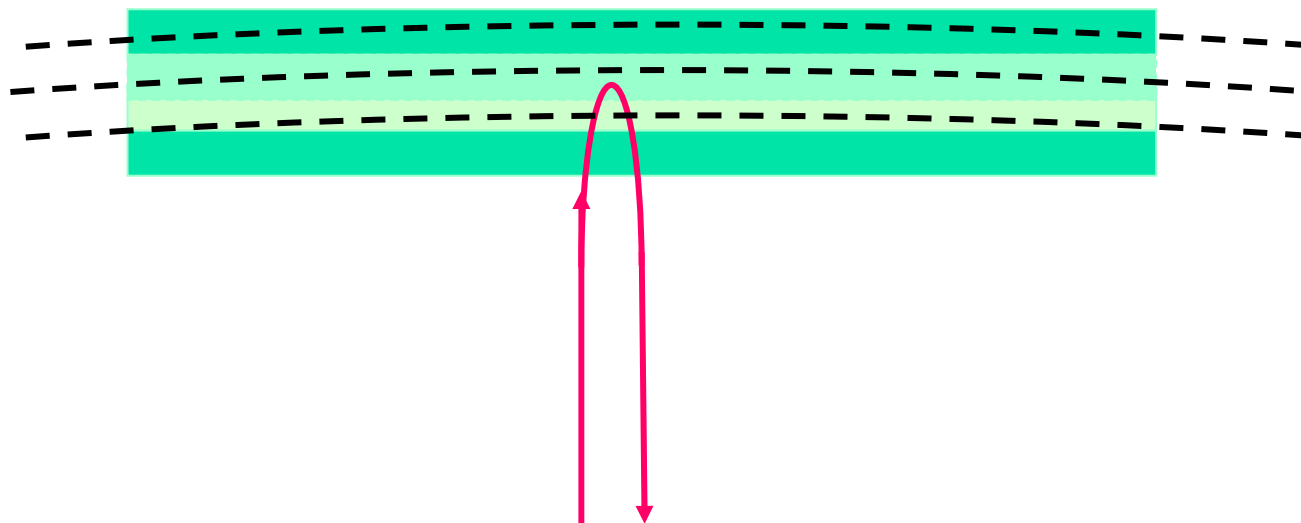
$$\mathbf{E}_0$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{bmatrix} = 0 \implies k = k_0 \sqrt{\varepsilon_3}$$

由于电场矢量与恒定外加磁场方向平行，等离子体中的电子在电场力作用下，其运动方向与恒定外加磁场方向相同，恒定外加磁场对运动电子没有力的作用。其结果同非磁化等离子体完全相同。



电离层电子浓度的垂测

特例二： 设  $k \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$

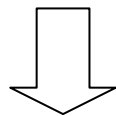
$\mathbf{B}_0$

$$k = k_x \hat{x}, E_0 = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2$$

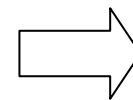
$$\mathbf{E}_0$$

$$k = k_x \hat{x}$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$



$$\begin{cases} k = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}} \\ \frac{E_2}{E_1} = -j \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{cases}$$

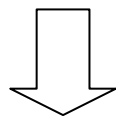
特例三： 设  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$

$$\mathbf{k} = k_z \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{B}_0$$

$$k = k\hat{\mathbf{z}} \quad , E_0 = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2$$

$$\mathbf{E}_0$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$



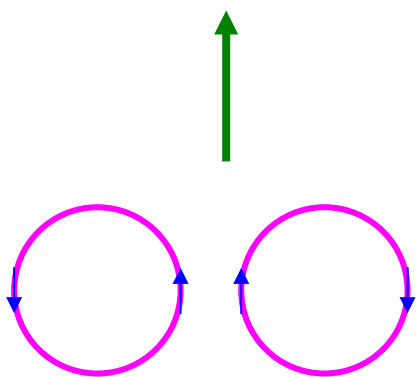
$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}} \\ k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} \end{cases}$$

如果  $k = k_1$   $E_2 = -jE_1$  其解为右旋圆极化波；

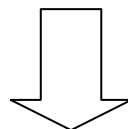
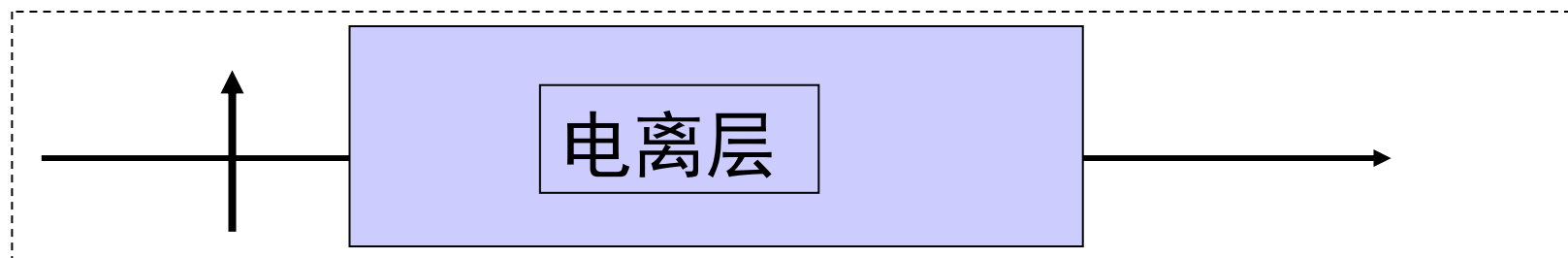
如果  $k = k_2$   $E_2 = jE_1$  其解为左旋圆极化波；

即：

$$E_1(r) = E_0(\hat{x} \mp j\hat{y})\exp\left(-jk_1 z\right)$$



$$\begin{aligned} E(0) &= E_0 \hat{x} \\ &= \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) + \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} - j\hat{y}) \end{aligned}$$



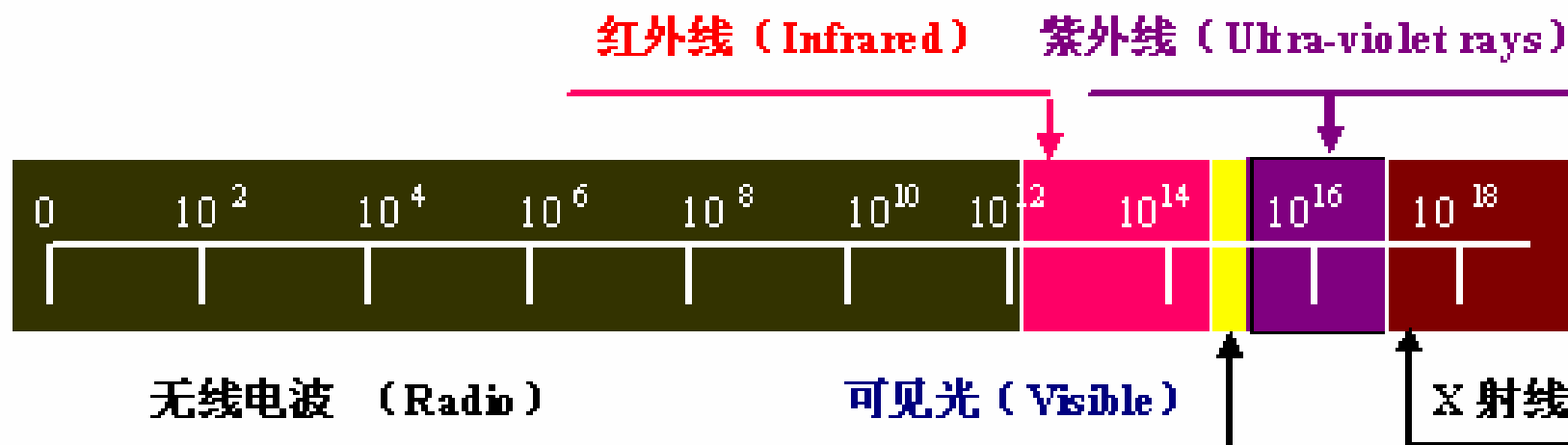
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(L) &= \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) \exp(-jk_2 L) + \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} - j\hat{y}) \exp(-jk_1 L) \\
 &= E_0 \exp\left(j \frac{k_1 + k_2}{2} L\right) \left[ \hat{x} \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} L\right) + \hat{y} \sin\left(\frac{k_2 - k_1}{2} L\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan \phi &= \frac{E_y}{E_x} \\
 &= \tan \frac{k_2 - k_1}{2} L
 \end{aligned}$$

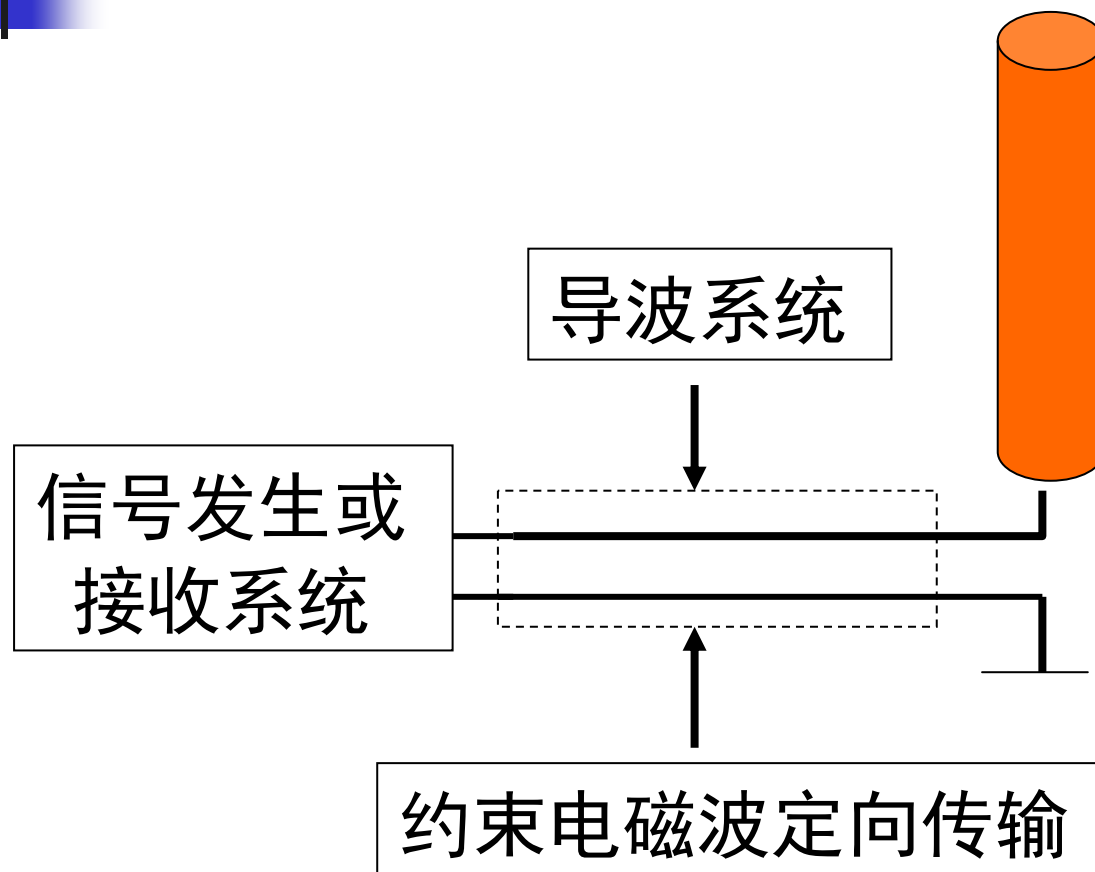


## 7.7 电磁波的频谱

自从Hertz应用电磁振荡方法产生电磁波以来，大量实验证明了光是一类频率很高的电磁波，1895年德国科学家Rontgen发现的X射线等，电磁波频谱进一步得到拓展。



## 7.8 导行电磁波系统简介

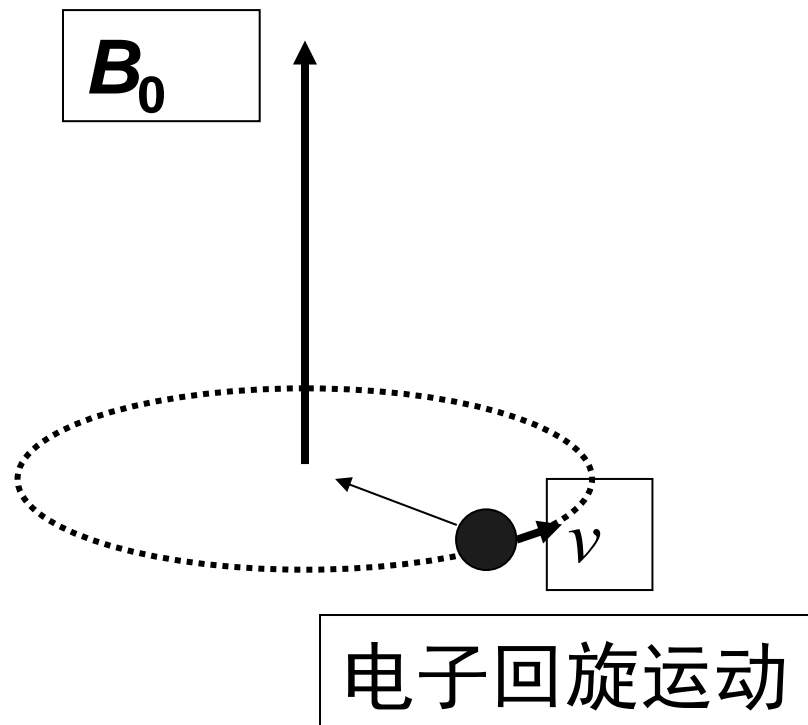




导波系统须满足如下的基本要求：

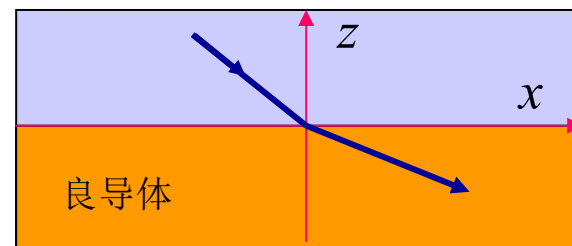
---

- ①系统内允许电磁波存在且处于行波状态。
- ②系统有约束将电磁波能量能力，损耗小。
- ③传输系统须有一定的带宽。
- ④传输系统容易与收发系统实现阻抗匹配。



【例2】证明对于良导体，在非垂直入射时有

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad \beta_x \ll \beta_z$$



对良导体  $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1 \Rightarrow \frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$

导体内波矢  $k^2 = \omega^2 \mu \left( \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \approx i \omega \mu \sigma$  而  $\vec{k} = \vec{\beta} - j \vec{\alpha}$   
 $k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - j 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

选入射面为xz面  $\beta^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \approx \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \gg \frac{1}{2} k_0^2 \quad (\varepsilon \text{ 与 } \varepsilon_0 \text{ 同级}, \mu \approx \mu_0)$$

又  $k_0^2 = k_{x0}^2 + k_{z0}^2 = \beta_x^2 + k_{z0}^2 \Rightarrow \beta_x \ll \beta_z$

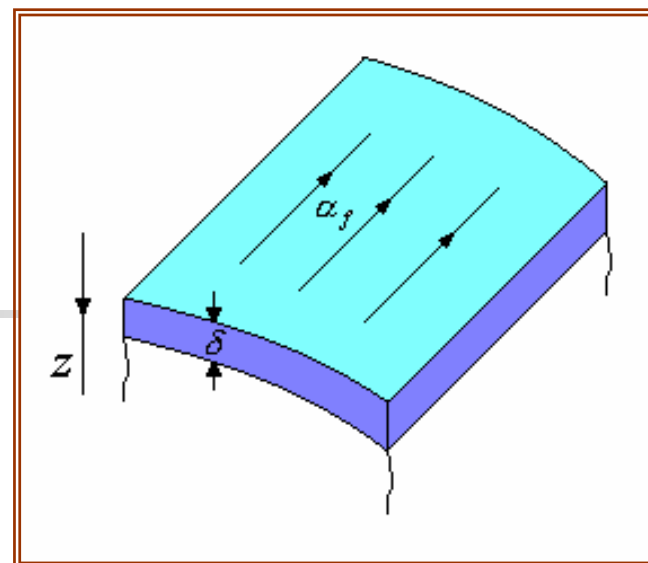
略去  $\beta_x^2 \Rightarrow \alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$  且  $\beta_x \ll \beta_z$

$\vec{\alpha}$  垂直于表面,  $\vec{\beta}$  接近法线方向, 穿透深度由  $\frac{1}{\alpha_z}$  给出。

### 【例3】高频下良导体的表面电阻。

趋肤效应使电流分布于表面薄层，这样的电流分布可看成面电流分布（把薄层压缩到导体表面），用电流密度描述电流面分布。

线电流密度  $\vec{\alpha}_f$  定义为：通过单位横截线的电流。



$\vec{\alpha}_f$  与电流密度的关系  $\vec{\alpha}_f = \int_0^\infty \vec{J} dz$

考虑垂直入射，导体内电磁波  $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{-\alpha z}e^{i(\beta z - \omega t)}$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_f &= \int_0^\infty \sigma \vec{E} dz = \int_0^\infty \sigma \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} dz = \sigma \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty e^{-\alpha z + i\beta z} dz = \sigma \vec{E}_0 \frac{1}{\alpha - i\beta} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - i \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)} e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

$$\text{令 } \cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow \sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_f = \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i(\phi - \omega t)} = \vec{\alpha}_{f0} e^{i(\phi - \omega t)} \quad \text{其中 } \vec{\alpha}_{f0} = \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\text{平均损耗功率密度} \quad \overline{w_d} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{J}^* \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

$$\text{平均损耗功率面密度} \quad P_L = \int_0^\infty \overline{w_d} dz = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha\sigma} \alpha_{f0}^2$$

$$\text{对于良导体} \quad \alpha \approx \beta \approx \frac{1}{\delta} \Rightarrow P_L = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f0}^2$$

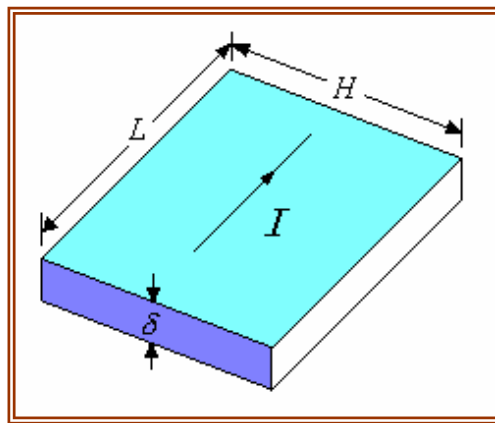
良导体在高频下的电阻相当于厚度为  $\delta$  的薄层直流电阻。

说明:

$$\text{右图为一薄层直流电阻} \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{H\delta}$$

考虑一简谐变化的面电流，其线密度

$$\alpha_f = \alpha_{f0} e^{-i\omega t} \Rightarrow I = \alpha_f H = \alpha_{f0} H e^{-i\omega t}$$



耗散功率（单位时间的焦耳热损耗）  $W_d = I^2 R$

平均耗散功率  $\overline{W_d} = \frac{R}{2} \text{Re}(I^* I) = \frac{1}{2} R H^2 \alpha_{f0}^2$

表面平均损耗功率面密度

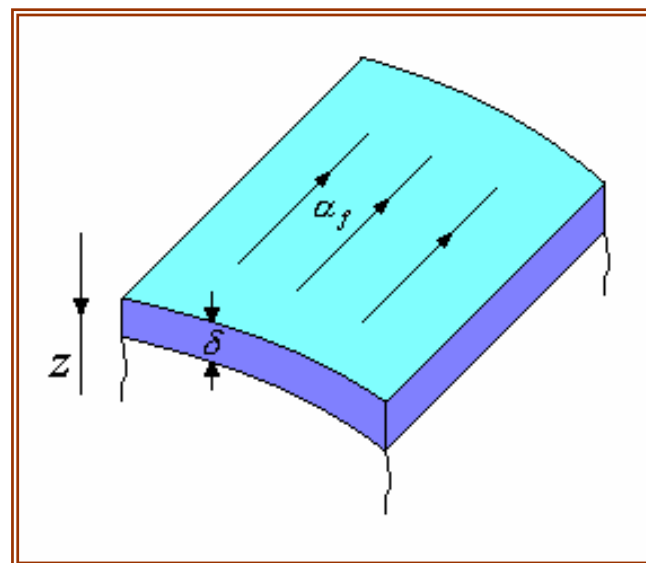
$$P_L = \frac{\overline{W_d}}{LH} = \frac{1}{2} \frac{H}{L} R \alpha_{f0}^2 = \frac{1}{2} \frac{H}{L} \frac{1}{\sigma} \frac{L}{H\delta} \alpha_{f0}^2 = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f0}^2$$



### 【例3】高频下良导体的表面电阻。

趋肤效应使电流分布于表面薄层，这样的电流分布可看成面电流分布（把薄层压缩到导体表面），用线电流密度描述电流面分布。

线电流密度  $\vec{\alpha}_f$  定义为：通过单位横截线的电流。



$\vec{\alpha}_f$  与电流密度的关系  $\vec{\alpha}_f = \int_0^\infty \vec{J} dz$

考虑垂直入射，导体内电磁波  $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)e^{-\alpha z}e^{i(\beta z - \omega t)}$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_f &= \int_0^\infty \sigma \vec{E} dz = \int_0^\infty \sigma \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} dz = \sigma \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty e^{-\alpha z + i\beta z} dz = \sigma \vec{E}_0 \frac{1}{\alpha - i\beta} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - i \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)} e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

$$\text{令 } \cos \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow \sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_f = \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i(\phi - \omega t)} = \vec{\alpha}_{f0} e^{i(\phi - \omega t)} \quad \text{其中 } \vec{\alpha}_{f0} = \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\text{平均损耗功率密度} \quad \overline{w_d} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{J}^* \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

$$\text{平均损耗功率面密度} \quad P_L = \int_0^\infty \overline{w_d} dz = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha\sigma} \alpha_{f0}^2$$

$$\text{对于良导体} \quad \alpha \approx \beta \approx \frac{1}{\delta} \Rightarrow P_L = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f0}^2$$

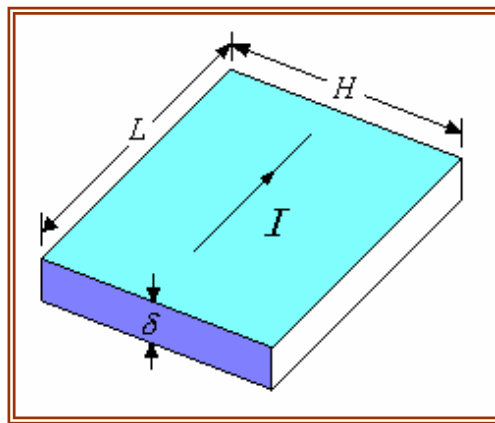
良导体在高频下的电阻相当于厚度为  $\delta$  的薄层直流电阻。

说明:

$$\text{右图为一薄层直流电阻} \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{H\delta}$$

考虑一简谐变化的面电流，其线密度

$$\alpha_f = \alpha_{f0} e^{-i\omega t} \Rightarrow I = \alpha_f H = \alpha_{f0} H e^{-i\omega t}$$



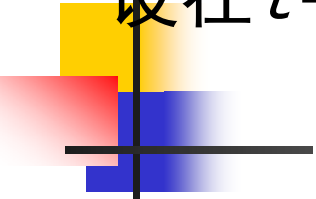
耗散功率（单位时间的焦耳热损耗）  $W_d = I^2 R$

平均耗散功率  $\overline{W_d} = \frac{R}{2} \text{Re}(I^* I) = \frac{1}{2} R H^2 \alpha_{f0}^2$

表面平均损耗功率面密度

$$P_L = \frac{\overline{W_d}}{LH} = \frac{1}{2} \frac{H}{L} R \alpha_{f0}^2 = \frac{1}{2} \frac{H}{L} \frac{1}{\sigma} \frac{L}{H\delta} \alpha_{f0}^2 = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f0}^2$$

设在  $t=0$  时  $z=0$  处磁脉冲的电场矢量的波形为：


$$E(0, t) = \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \right]$$

该脉冲信号在介质中传播一段距离  $L$  以后为，电场矢量的形状为：

$$\begin{aligned} E(L, t) &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j(\omega t - kL)] d\omega \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j(\omega T)] d\omega \right], \quad \begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\epsilon\mu} \\ T &= t - L \sqrt{\epsilon\mu} \end{aligned} \end{aligned}$$

如果介质电磁特性参数与频率无关,  $T = t - L\sqrt{\epsilon\mu}$  与频率无关, 积分结果将使 $L$ 处与 $Z=0$ 处脉冲的形状完全相同, 即:

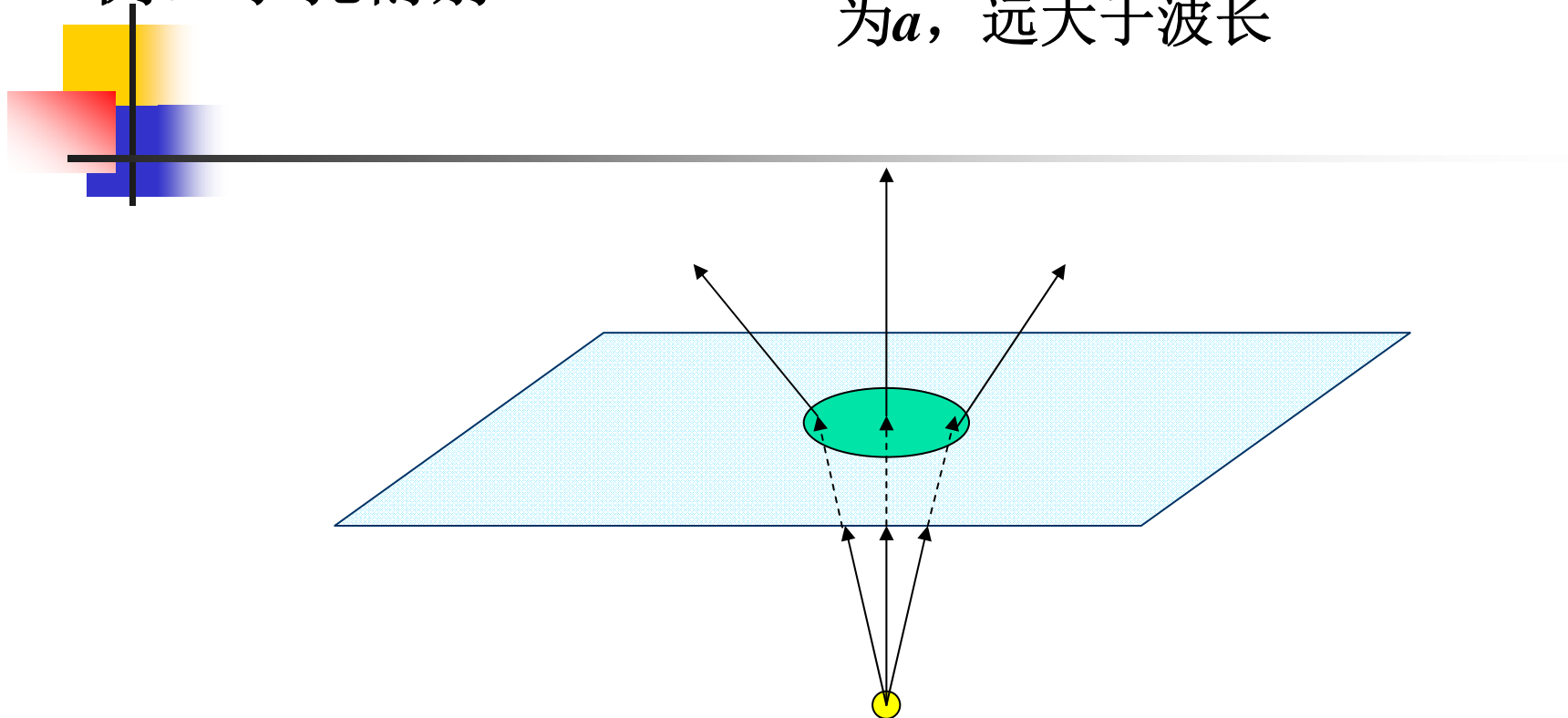


如果介质电磁特性参数与频率有关,  $T(\omega) = t - L\sqrt{\epsilon\mu}$  与频率有关, 积分结果将使 $L$ 与 $Z=0$ 处脉冲的形状发生改变。



例：小孔衍射

圆形小孔的半径  
为 $a$ ，远大于波长



应用Kirchhoff公式，必须知道屏幕上  $\nabla' \phi(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$

假设：

(1) 在小孔上， $\nabla' \phi(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$  为点光源的直射场，  
即假设屏幕不对入射波产生影响。

(2) 在小孔以外的屏幕上， $\nabla' \phi(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$  恒为零。

在上述假设下，在屏幕小孔上

$$\phi(\mathbf{r}') = \frac{A}{R_0} \exp(-jkR_0)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$$

$$\nabla' \phi(\mathbf{r}') = - \left( jk + \frac{1}{R_0} \right) \frac{1}{R_0} \exp(-jkR_0) \hat{\mathbf{R}}_0$$

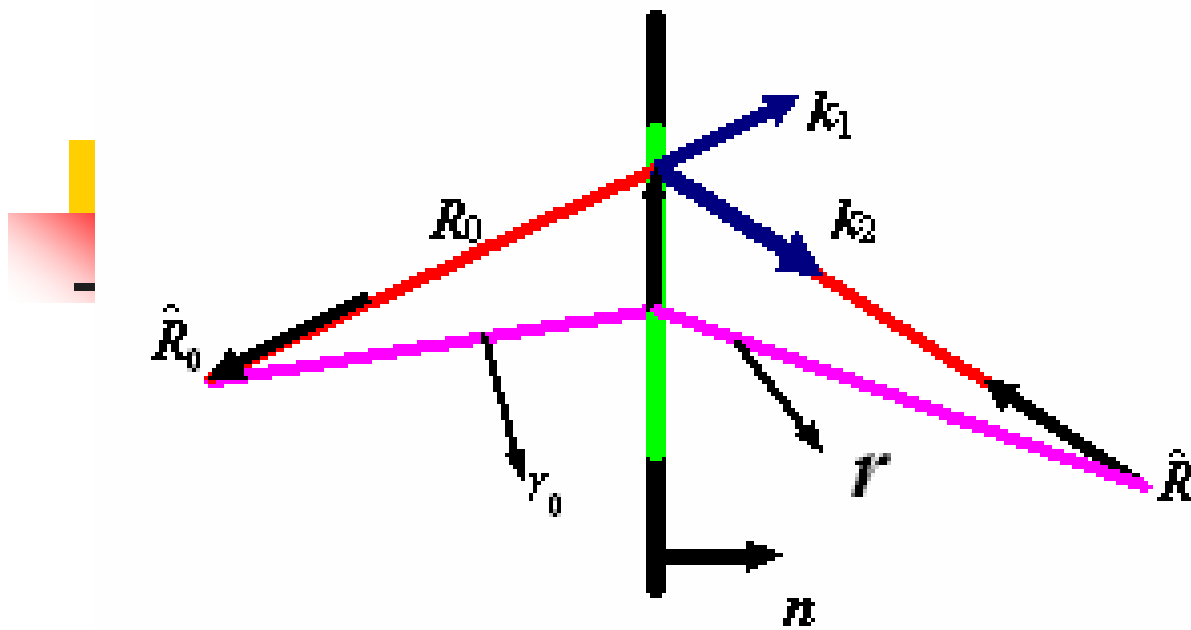
应用Huygens-Fresnel公式，面积分应该由两个部分组成，即屏幕和半无穷大空间的边界。半无穷大边界面上的积分为零，得到：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-A}{4\pi} \iint_{S_a} \left[ \hat{\mathbf{R}}_0 \left( jk + \frac{1}{R_0} \right) + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{S}'$$

对于振幅因子，忽略 $R$ ， $R_0$ 因屏幕上不同点带来的微小差别，并略去高阶项

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-jkA}{4\pi R_0 R} \iint_{S_a} [\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n}] e^{-jk(R+R_0)} d\mathbf{S}'$$





$$\hat{R}_0 = -\hat{k}_1$$

$$\hat{R} = -\hat{k}_2$$

$$kR_0 = kr_0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'$$

$$kR = kr - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}'$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-jkA}{4\pi R_0 R} \iint_{S_a} [\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n}] e^{-jk(R+R_0)} dS'$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{jA}{4\pi} \frac{\exp[-jk(r+r_0)]}{r_0 r} \iint_{S_a} [\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}] \exp[j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}'] dS'$$

# 小孔衍射图

