



## 第五讲 时变电磁场问题 (2)

---

# 电磁波的辐射

(第六章)



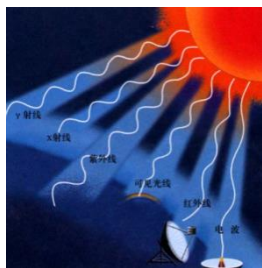
## 电磁辐射：

电磁激励系统以电磁波的形式  
通过空间传播电磁能量的物理现象

电荷（电流）

时变场

加速运动的电荷或时变  
电流向空间辐射电磁波



# 电磁波的辐射问题

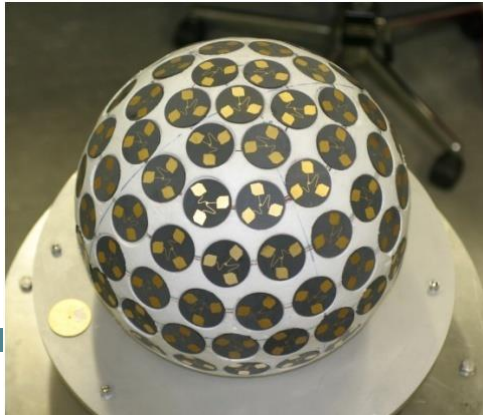
- 带电粒子热运动辐射
- 宇宙星体的电磁辐射
- 人类活动导致的电磁辐射
- 电磁波辐射装置——天线的辐射







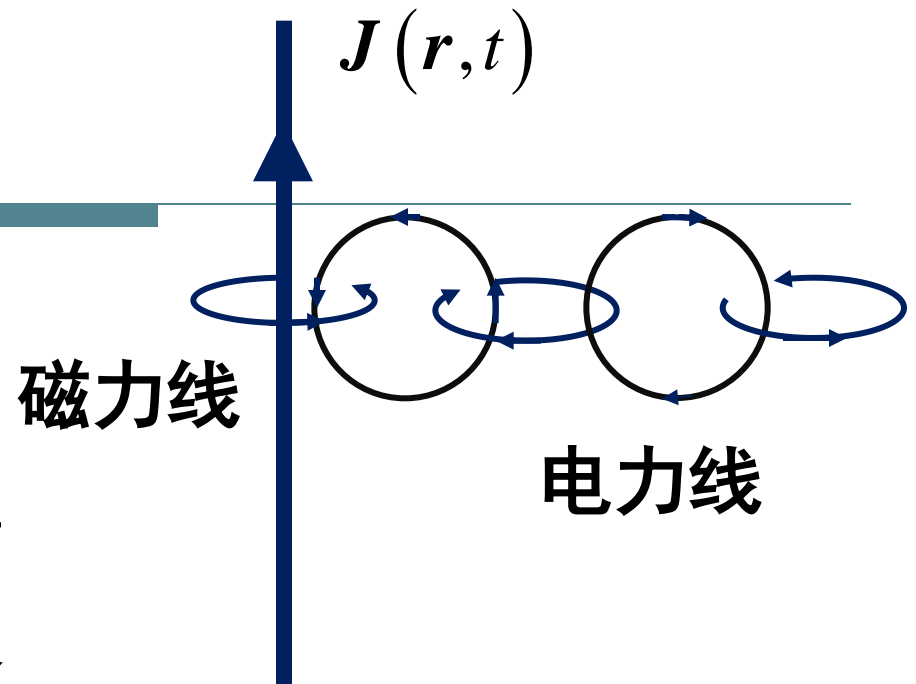






时变电流或加速运动的  
电荷向空间辐射电磁波

不同时变电流的空间分布  
将辐射不同分布的电磁波

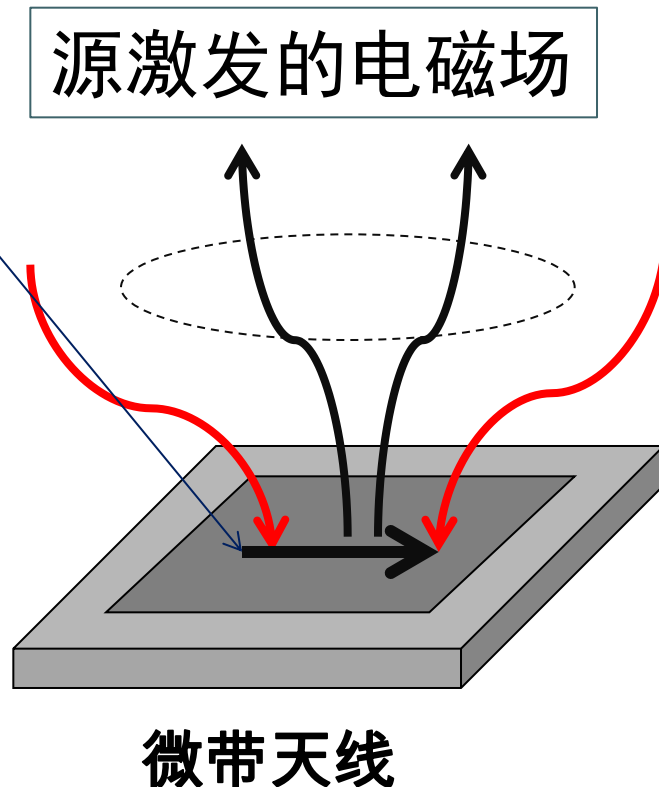


为获得各种不同应用要求的电磁波，需要设计  
不同时变电流的空间分布。这种用于产生或接  
受特殊要求的电磁波的装置称为——天线。



场作用于源，影响源的重新分布，进而影响辐射场

假定源分布，实际上是忽略场与源作用引起源的重新分布。这种忽略只能是场对源分布的影响较小时才能意义







## 本章主要内容：

- 电磁波的辐射及计算
- 基本辐射单元及特性
- 天线概念及主要参数
- 广义Maxwell方程组
- 能量传输方程及应用



# § 1 辐射场及计算公式

## 1. 电流激发辐射场的计算公式

在已知时变电流或电荷分布的前提下，源所激发的电磁场可通过势函数进行计算，其公式如下：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

$\phi(\mathbf{r}, t)$ : 电标势;  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ : 磁矢势



对时谐电磁场:

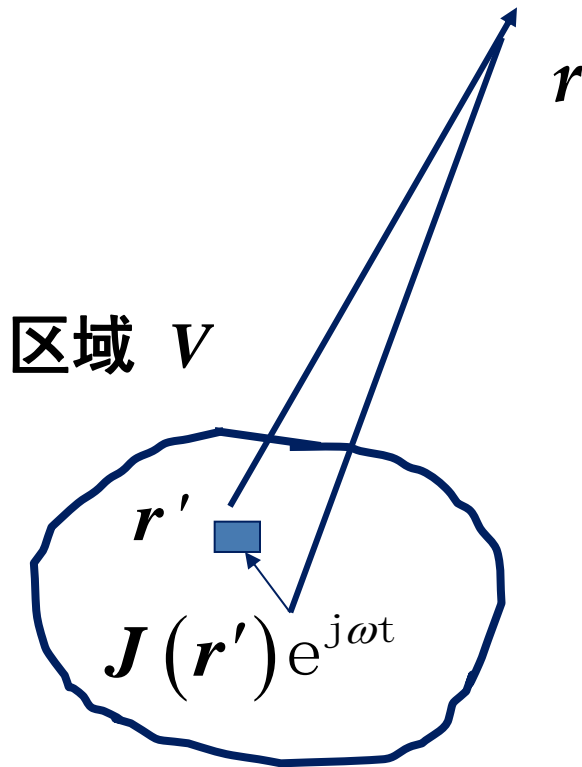
$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) - j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \varepsilon\mu j\omega\phi(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \nabla\phi = j\frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\omega\varepsilon\mu}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\left[\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{k^2}\right] \end{cases}, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$



## 区域 $V$ 上的谐变电流产生的势函数



$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{a}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= e^{j\omega t} \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \exp\left(-j\frac{\omega}{a}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = A(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

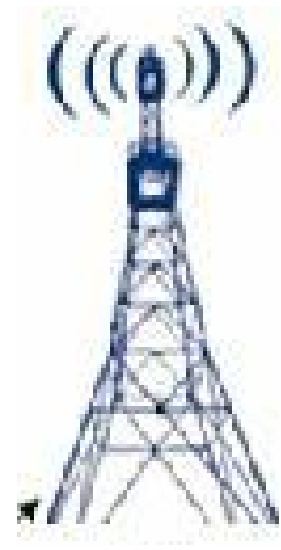
$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV'$$





$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$$



## 2. 源区外电磁场的组成特点

- 电荷和电流激发的电磁场（与源分布联系）
- 场相互激发的电磁场（与场变化率相联系）



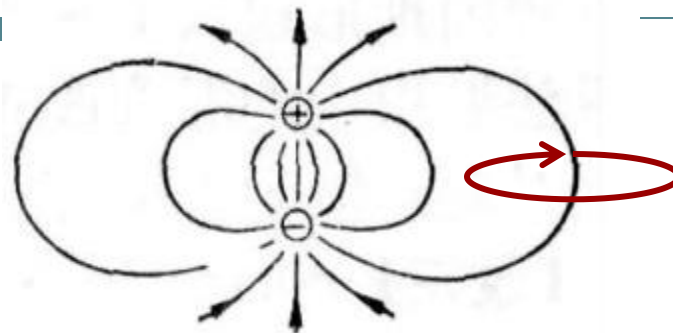
总场

=

天线体中电流  
或电荷直接激  
发的电场磁场

+

随时间变化电  
磁场互激发产  
生的电磁场



有静态场特点；场  
量与  $r^2$  成反比？

不同静态场特点，  
场量与  $r$  成反比？



$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

$$\therefore \oiint_{\Sigma} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \iint_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \cdot r^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega \neq 0$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] r^2 \neq 0 \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{H}) \rightarrow \frac{1}{r}$$



### 3. 天线外部空间场的三个区域

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV'$$

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \begin{cases} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \lambda \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \lambda \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda \end{cases}$$
A diagram illustrating the three regions of an antenna's external space field. It shows a vertical antenna structure with a horizontal dipole at the top. A large circle is centered on the dipole, representing the near-field region. A smaller blue circle is centered on the dipole, representing the reactive near-field region. Arrows point from the three cases in the equation to these regions: the first case ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \lambda$ ) points to the blue circle, the second case ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \lambda$ ) points to the boundary of the large circle, and the third case ( $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda$ ) points to the far-field region outside the large circle.





① 源区附近

$$\begin{cases} k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1 \\ e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx e^{-j0} \approx 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV' \approx \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- 磁矢势近似为静态场的磁矢势
- 静态场远大于场相互激发的电磁场
- 静态场占主导，场量与  $r^2$  成反比



## ② 感应区（谐振区）

场点与源区的距离约为波长的数量级

$$\frac{1}{\lambda} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 1$$

- 静态场与波动场同时存在，量级上相当
- 既不能用静态场近似，也不能用波动场近似
- 感应区或谐振区为场与源之间的敏感区



③ 远场区  $\frac{|r-r'|}{\lambda} \gg 1$  ,  $|r| \gg |r'|$  ,  $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{|r|} \ll 1$

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J(r')}{|r-r'|} \exp(-jk|r-r'|) dV'$$

- 静态场远小变化电磁场相互激发的场
- 电磁场量应与  $r$  成反比，具有球面波特点
- 远区场为辐射场，波动干涉效应显著



### 3. 远场区磁矢势的多极矩展开

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x + \delta x} \exp[-jkx] \\ &= \frac{1}{x} \exp(-jkx) \left[ 1 - \frac{\delta x}{x} \right] \end{aligned}$$

振幅项微小变化  
导致误差的量级

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \exp[-jk(x + \delta x)] \\ &= \frac{1}{x} \exp(-jkx) [1 - jk\delta x] \end{aligned}$$

相位项微小变化  
导致误差的量级





对于远场区，振幅取零级近似，相位取一级近似

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}, \quad e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = e^{-jk\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} \approx e^{j(k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' - kr)}$$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} dV' \\ &= \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[ 1 + jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2!} (jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 + \dots \right] dV' \\ &= A^{(0)}(\mathbf{r}) + A^{(1)}(\mathbf{r}) + A^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned}$$



零级近似项: 
$$A^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \frac{j\omega\mu\mathbf{P}}{4\pi r} e^{-jkr}$$

导体中: 
$$\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \iiint_V \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \sum_i n_i(\mathbf{r}') q_i dV' = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = j\omega\mathbf{P}$$

一级近似项:

$$A^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{jk\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iiint_V \mathbf{J}[\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'] dV' = \frac{jk\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ -\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m} + j\omega \frac{1}{6} \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{D}} \right]$$

其中: 
$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad , \quad \vec{\mathbf{D}} = \iiint_V 3\rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r}' dV'$$



$$\begin{aligned}\because \quad & \iiint_V \mathbf{J} [\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'] dV' = \iiint_V [\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'] \mathbf{J} dV' \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \cdot [(\mathbf{r}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{r}') + (\mathbf{r}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{r}')] dV' \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \iiint_V \rho(\mathbf{r}') \left[ \left( \mathbf{r}' \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \mathbf{r}' \right) \right] dV' - \hat{\mathbf{r}} \times \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dV' \\ &= \frac{1}{6} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \iiint_V 3\rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \mathbf{r}' dV' - \hat{\mathbf{r}} \times \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dV' \\ &= \frac{1}{6} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m}\end{aligned}$$



上述结果说明：

源区外激励的电磁场为源区中不同电多极矩和磁多极矩激发电磁场的叠加。

同级电多极矩激发电磁场的能力高于磁多极矩。电四极矩与磁偶极矩激发电磁场的能力同量级。

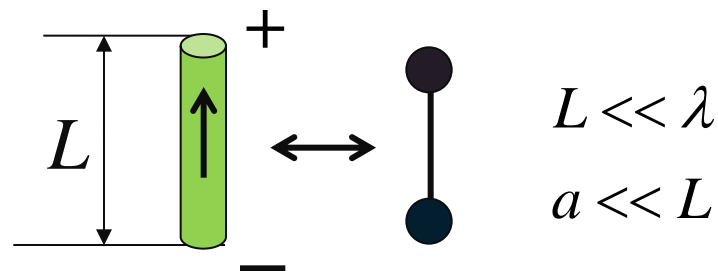
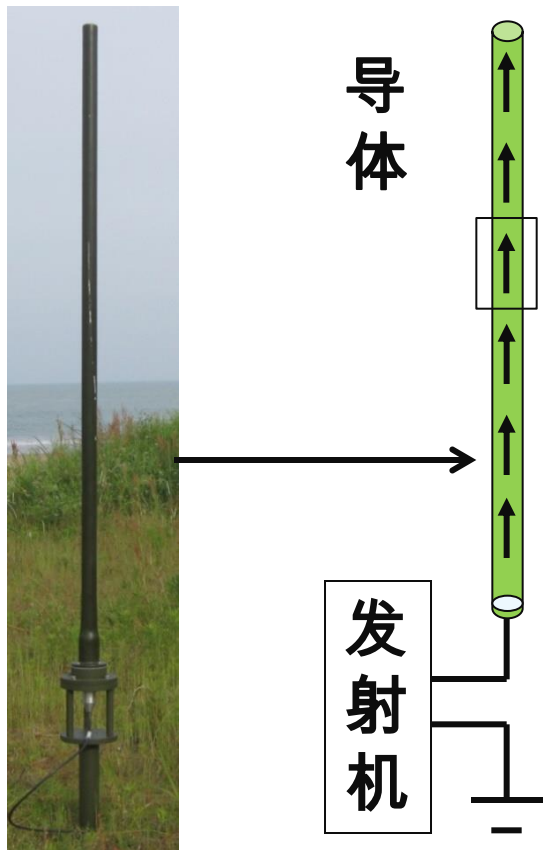
由磁矢势求得电流激发的电磁场，包含源直接激发的场和场相互激发的电磁场两部分组成。





## § 2 电偶极子天线

### 1. 天线结构及电流分布



$$J(\mathbf{r}) \quad J(z, t) = \begin{cases} \hat{e}_z I_0 \exp(j\omega t) & , |z| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & , |z| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

线段两端堆积数值相同符号相反的电荷—电偶极子



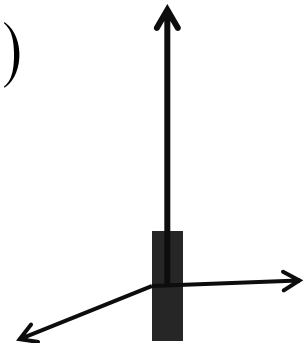
## 2. 电偶极子外部空间的场

作为近似，短线元上的电流可用  $\delta$  函数表示：

$$\mathbf{J}(z, t) = \begin{cases} \hat{e}_z I_0 \exp(j\omega t), & |z| \leq \frac{L}{2} \\ 0, & |z| > \frac{L}{2} \end{cases} \approx \hat{e}_z I_0 L \delta(z) \exp(j\omega t)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(z) = \hat{e}_z \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} \exp(-jkr) = \hat{e}_r A_z \cos \theta - \hat{e}_\theta A_z \sin \theta$$





$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\mu_0} = \frac{\hat{e}_r}{\mu_0 r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\hat{e}_\theta}{\mu_0 r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ &+ \frac{\hat{e}_\varphi}{\mu_0 r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \hat{e}_\varphi \frac{I_0 L k^2 \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] \exp[-jkr]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{e}_\theta \frac{2I_0 L k^3 \cos \theta}{4\pi\omega\epsilon_0} \left[ j + \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \frac{\exp[-jkr]}{kr} \\ &+ \hat{e}_r \frac{2I_0 L k^3 \cos \theta}{4\pi\omega\epsilon_0} \left[ \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \frac{\exp[-jkr]}{kr}\end{aligned}$$

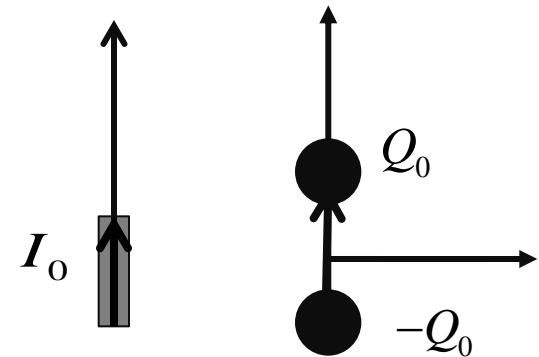


尽管电流元上的电流随时而变，它在近区激发的电磁场与静态电磁场形态完全相同

# ① 天线近区 $kr \ll 1, \exp(-jkr) \approx 1$

$$\begin{cases} E_r \approx -j \frac{2I_0 L \cos \theta}{\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{2P_{e0} \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta \approx -j \frac{I_0 L \sin \theta}{\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{P_{e0} \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ H_\phi \approx \frac{I_0 L \sin \theta}{4\pi r^2} = + \frac{I_0 L \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{e}_r \frac{2P_{e0} \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} + \hat{e}_\theta \frac{P_{e0} \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$



$$\mathbf{P}_{e0} = \hat{e}_z Q_0 L$$

$$\begin{cases} I(t) = \frac{d}{dt} Q_0 e^{j\omega t} = I_0 e^{j\omega t} \rightarrow Q_0 = -j \frac{I_0}{\omega} \\ \hat{e}_z I(t) L = \frac{d}{dt} \hat{e}_z Q(t) L = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_e(t) \\ \rightarrow \mathbf{P}_{e0} = \hat{z} Q_0 L \end{cases}$$



$$j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -j \frac{2I_0 L}{\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} (\hat{e}_r \cos \theta + \hat{e}_\theta \sin \theta) \\ \mathbf{H} = + \hat{e}_\varphi \frac{I_0 L \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

$$S_{av}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] = 0$$

在一个周期内，偶极子不向近区空间辐射能量。在某个瞬时，偶极子天线与近区空间的电磁场有能量的交换。





## ② 远区辐射场

远场:  $kr \gg 1$

$$\begin{cases} H_{\phi} \approx j \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \exp(-jkr) \\ E_{\theta} \approx j \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

近场:  $kr \ll 1$

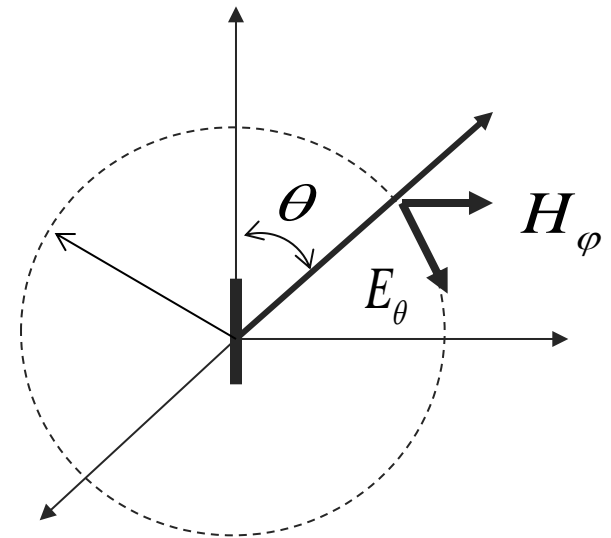
$$\begin{cases} E_r \approx -j \frac{2I_0 L \cos \theta}{\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_{\theta} \approx -j \frac{I_0 L \sin \theta}{\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} \\ H_{\phi} \approx + \frac{I_0 L \sin \theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$



### 3. 远区辐射场的特点

#### ① 辐射场为球面电磁波

$$\begin{cases} H_{\varphi} = \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \\ E_{\theta} = \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



沿球面半径向外传播的电磁波动  
空间等相位面方程为球面  $r = C$

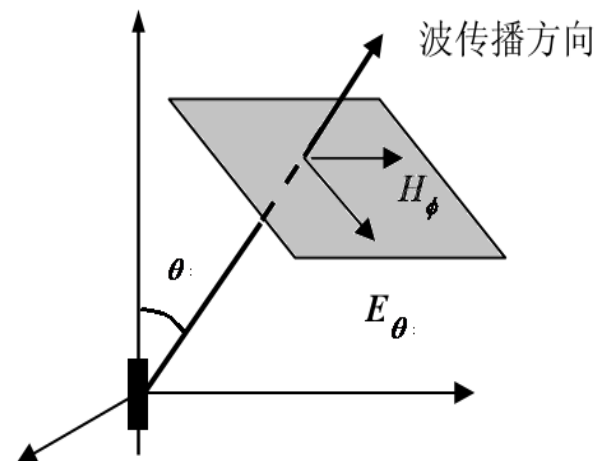
$$\text{相位传播速度: } v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$





② 辐射场为线极化球面TEM波在传播方向上既没有电场分量、也没有磁场分量，电场、磁场和传播方向相互垂直，为球面横电磁波。

③ 电场与磁场复振幅之比为空间介质电磁特性参数确定的常数——为波阻抗。



$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \text{传播方向}$   
称为横电磁波

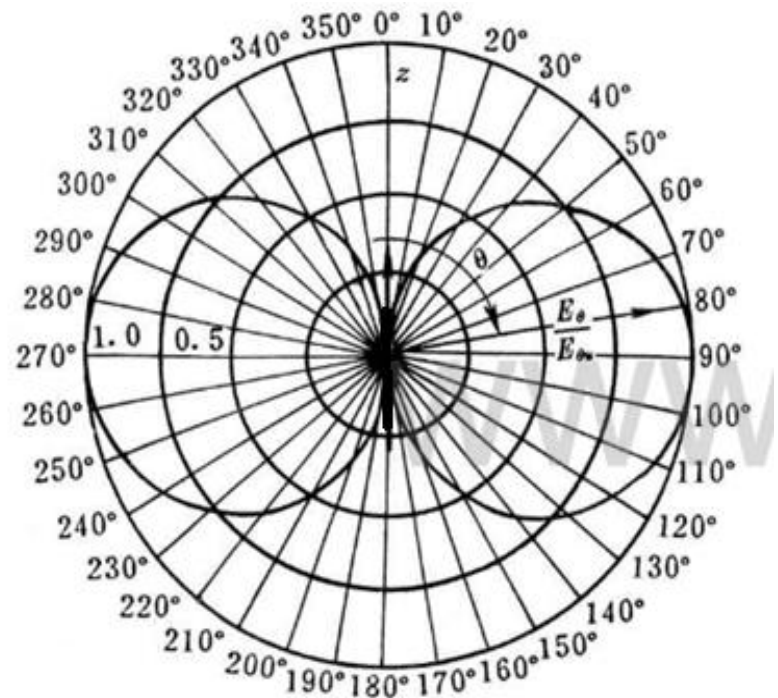
$$\eta = \frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$$



#### ④ 远区辐射场有方向性

在等相位球面上，不同方向辐射场的强度随方位变化，辐射场具有方向特性。用归一化场强随方向变化曲线（面）表示辐射场的方向性函数（图）

$$F(\theta, \varphi) = \left| \frac{E(\theta, \varphi)}{E_{\max}} \right| = \sin \theta$$



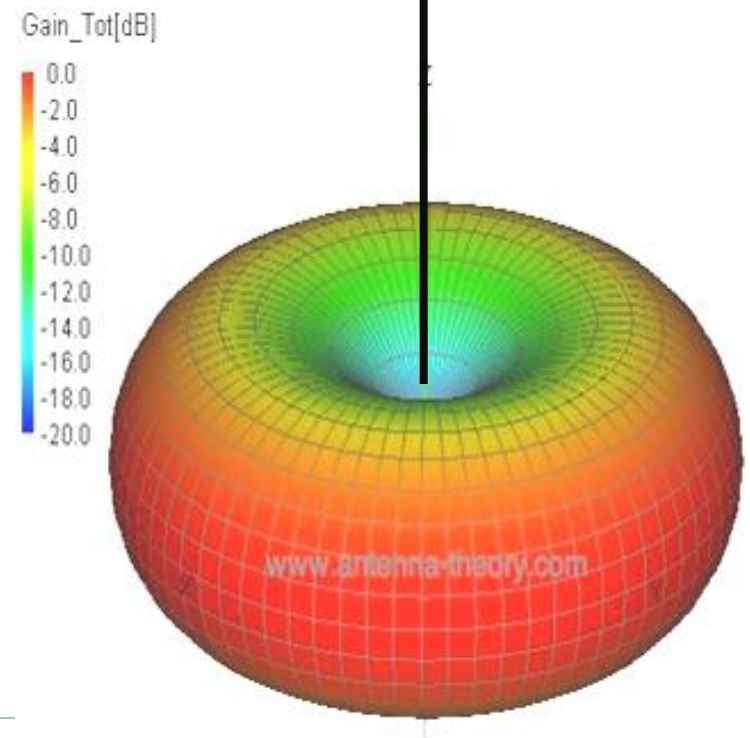


为什么电偶极子轴线方向没有辐射？

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{e}_\theta E_\theta \times \hat{e}_\varphi H_\varphi^*] = \frac{1}{2} \left( \frac{I_0}{2} \right)^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \eta_0 \sin^2 \theta \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$$

能量流沿球面径向传播，具有方向性，不同的方向能流密度不同，空间某些方向能流密度大，另一些方向上能流密度小，甚至为零。天线辐射电磁波能流有方向特性。

$$P(\theta, \varphi) = \left| \frac{S(\theta, \varphi)}{S_{\max}} \right| = F^2(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta$$





单位时间通过任意半径球面辐射电磁能：

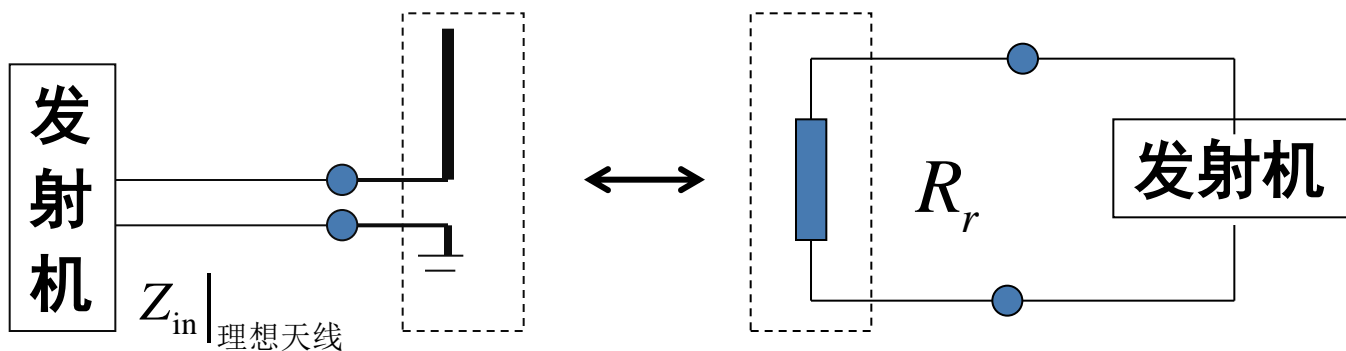
$$P = \oint\oint_S \mathbf{S}(r, \theta, \phi) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \oint\oint_S \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \eta_0 \sin^4 \theta d\phi d\theta = \frac{1}{2} I_0^2 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

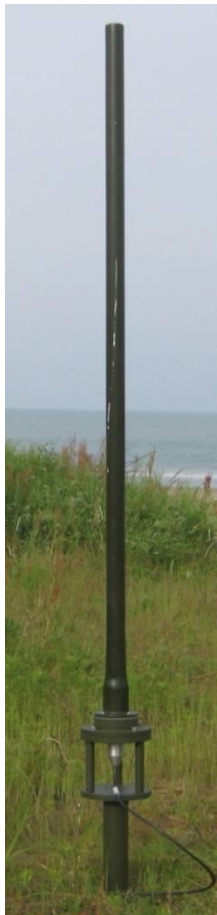
$P$  是一个与球面半径无关的常数，即在单位时间通过任意半径球面向外传输的能量（功率）是相同的。根据能量守恒定律，这部分能量的确是天线以电磁波的形式所辐射。



## 4. 天线辐射电阻与天线阻抗

将天线等效为二端网络，其辐射电磁波能力可用二端网络的等效电阻  $Z_{in}$  表征，称为天线的辐射阻抗，是衡量天线辐射电磁波能力的重要参量。





$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R_r \rightarrow Z_{\text{in}} \Big|_{\text{理想天线}} = \frac{U_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} = R_r = \frac{2P}{I_0^2} = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$$

$$1. \quad L = 0.25\lambda \quad , \quad R_r \approx 50(\Omega)$$

$$2. \quad L = 0.025\lambda \quad , \quad R_r \approx 0.5(\Omega)$$

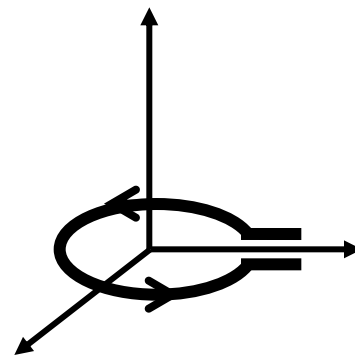
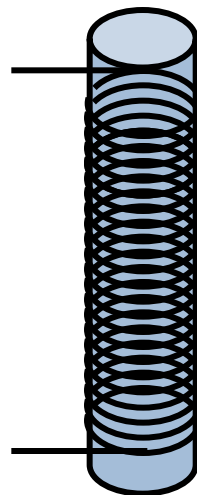
$$\text{实际天线输入阻抗: } Z_{\text{in}} \Big|_{\text{实际天线}} = \frac{U_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} = R_r + R_L + jX$$

$R_L$  : 天线体的损耗     $X$  : 天线近区场能量交换



## § 3 小电流环——磁偶极子天线

### 1. 小电流环天线结构（环尺度远小于波长）



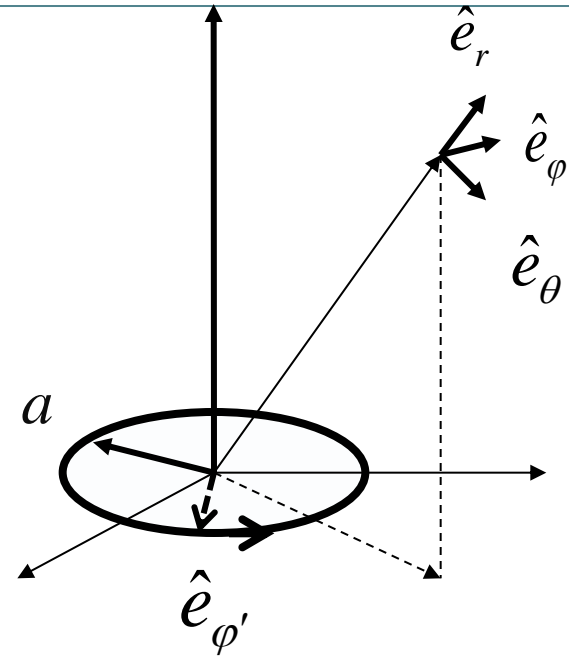
电流环通有谐变的电流，电流的振幅为恒量





如果电流环半径很小，考虑到  
电流随空间位置而变，将其在  
球坐标系中表示，即

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}') &= \hat{e}_\varphi I_0 \delta(z') \delta(\rho' - a) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{e}_r \sin \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ + \hat{e}_\theta \cos \theta \sin(\varphi - \varphi') \\ + \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \end{bmatrix} I_0 \delta(z') \delta(\rho' - a) \end{aligned}$$





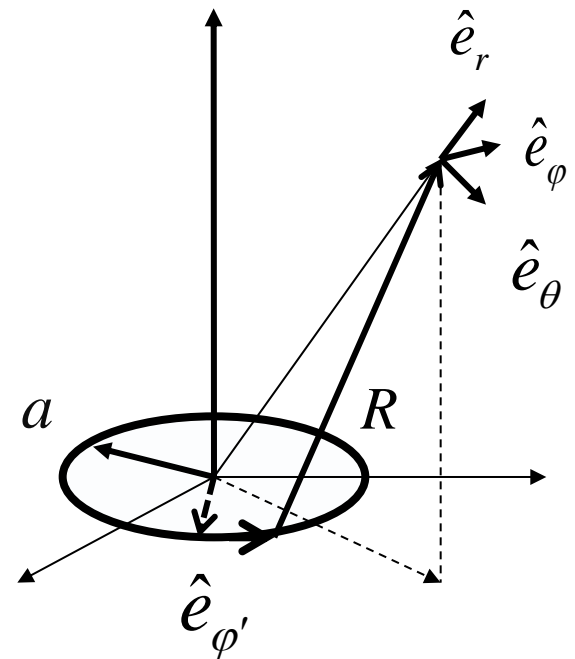
## 2. 电流环的磁矢位与辐射场

$$A(r, \theta, \phi)$$

$$= \frac{I_0 a \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \begin{aligned} &\hat{e}_r \sin \theta \sin(\varphi - \varphi') + \\ &\hat{e}_\theta \cos \theta \sin(\varphi - \varphi') + \\ &\hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \end{aligned} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi'$$

$$= \frac{I_0 a \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi'$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')}$$





小电流环:  $a \ll \lambda$  ,  $a \ll r$

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} + a \left[ \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-jkr} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') + \dots$$

$$\begin{aligned} A(r, \theta, \varphi) &= A^{(0)} + A^{(1)} + \dots = A^{(1)}(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{I_0 a \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \hat{e}_\varphi \cos(\varphi - \varphi') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' \\ &= \hat{e}_\varphi \frac{I_0 \pi a^2 \mu_0}{4\pi} e^{-jkr} \left[ \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta = \hat{e}_\varphi A_\varphi^{(1)}(r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$



$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hat{e}_r}{\mu_0 r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\hat{e}_\theta}{\mu_0 r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\ &+ \frac{\hat{e}_\varphi}{\mu_0 r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \frac{\hat{e}_r}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\hat{e}_\theta}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ &+ \frac{\hat{e}_\varphi}{\mu_0 r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H_r = j \frac{I_0 k \pi a^2 \cos \theta}{2 \pi r^2} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] \\ H_\theta = - \frac{I_0 k^2 \pi a^2 \sin \theta}{4 \pi r} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \end{cases}$$



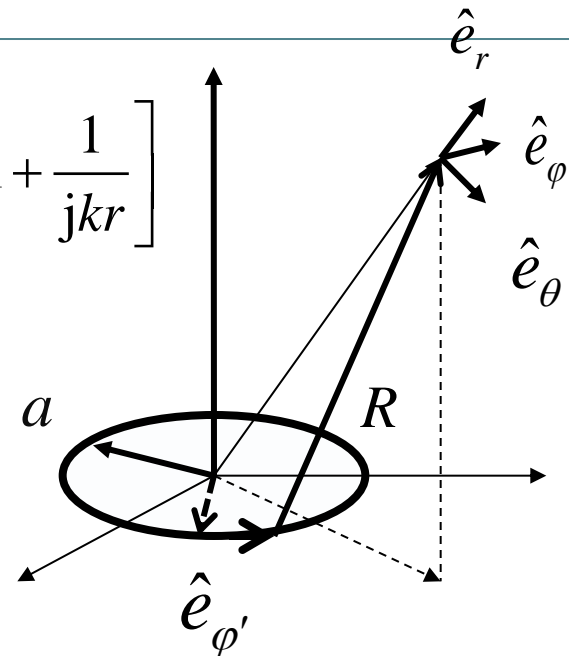
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \rightarrow \begin{cases} E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0 k^2 \pi a^2 \sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right] \\ E_r = E_\theta = 0 \end{cases}$$

近区:  $kr \ll 1, \exp(-jkr) \approx 1$

$$H_r \approx \frac{2I_0 \pi a^2 \cos\theta}{4\pi r^3}$$

$$H_\theta \approx \frac{I_0 \pi a^2 \sin\theta}{4\pi r^3}$$

$$E_\varphi \approx -j \frac{I_0 k \pi a^2 \sin\theta}{4\pi r^2}$$



$$\mathbf{m} = \hat{e}_z I_0 \pi a^2$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi r^3} (2\hat{e}_r \cos\theta + \hat{e}_\theta \sin\theta)$$



远区：  $kr \gg 1, r \gg \lambda$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\varphi} = \frac{I_0 \pi a^2 k^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_{\theta} = -\frac{I_0 \pi a^2 k^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{array} \right.$$

有类似电偶极子辐射场（极化方向互换）特性

- 辐射场为球面电磁波
- 线极化TEM波
- 电与磁场振幅之比为空间波阻抗
- 辐射场与能流密度具有方向特性



小电流环（磁偶极子）辐射电阻：  $\Delta S$  : 小环面积

$$R_r = \frac{2P}{I_0^2} = \frac{1}{I_0^2} \int_0^\pi \text{Re}[-E_\varphi H_\theta^*] 2\pi r^2 \sin\theta d\theta = 320\pi^4 \left( \frac{\Delta S}{\lambda^2} \right)^2$$

【例】 导线长1米，求制作成圆环和电偶极子天线的辐射电阻。信号源频率为1MHz

电偶极子

$$R_r = 0.88 \times 10^{-2}$$



小圆环

$$R_r = 2.44 \times 10^{-8}$$





同样长度的导线制作成小电流环天线的辐射阻抗远小于制作电偶极子天线的辐射阻抗。这说明小电流环天线辐射电磁波的能力远小于电偶极子天线，原因？





### 3. 小电流环与磁偶极子等效

磁偶极子的磁矢势〔参考（6-1-12）〕为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{jk\mu_0\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{m}}{4\pi r} e^{-jkr} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{jk\mu_0 m}{4\pi r} e^{-jkr} \quad \mathbf{m} = \hat{\mathbf{e}}_z I_0 \Delta s$$

远区辐射场：

$$\begin{cases} E_\phi = \frac{mk^2 \sin\theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_\theta = -\frac{mk^2 \sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{cases}$$

小电流环远区辐射场：

$$\begin{cases} E_\phi = \frac{I_0 \Delta s k^2 \sin\theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_\theta = -\frac{I_0 \Delta s k^2 \sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{cases}$$



$$\text{令: } I_{m0}L = j\omega I_0 \Delta s \mu_0$$

电偶极子:

电流环——磁偶极子:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\varphi} \approx j \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \\ E_{\theta} \approx j \frac{I_0}{2} \frac{L}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{\varphi} \approx -j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \\ H_{\theta} \approx j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \end{array} \right.$$

■ 电（磁）偶极子天线相类似的辐射场结构

有场远区辐射场为球面TEM波

电场与磁场振幅之比为波阻抗

辐射场线极化且具有方向性

■ 电（磁）偶极子辐射电（磁）场互为对偶量



## § 4 广义Maxwell方程组

### 1. Maxwell方程组的对偶性质

无源区中Maxwell方程组，按如下方式组合

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{l} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E} \\ \epsilon \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \epsilon \end{array} \right) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

通过变量相互替换从一组方程得到另一组方程

称两组方程互为对偶方程，对应的量称为对偶量

两组互为对偶的方程，其解具有对偶性



## 有源空间区域Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

因没有与电荷、电流相对偶的激励源，  
有源空间Maxwell方程不具有对偶性。



## 2. 广义Maxwell方程

能否通过假想“磁荷”和“磁流”引入，并使其激发电磁场与电荷和电流激发的电磁场相互对偶，从而使得源区Maxwell方程具有对偶性？

引入假想磁荷和磁流，磁荷运动形成磁流，且满足守恒定律：

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_m(\mathbf{r}, t) = 0$$



# 基于磁荷、磁流激发电磁场与电荷和电流激发电磁场的相互对偶关系假设

磁荷库伦定律:

$$\mathbf{F} = \frac{q_{1m} q_{2m} \mathbf{R}_{12}}{4\pi\mu R_{12}^3}$$

磁荷激发磁场:

$$\mathbf{H}_m = \lim_{q_{m0} \rightarrow 0} \frac{q_m q_{m0} \mathbf{R}_{12}}{4\pi\mu R_{12}^3} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H}_m = \frac{\rho_m}{\mu}$$

磁流元安培定律:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{I_{1m} d\mathbf{L}_1 \times I_{2m} d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

磁流激发电场:

$$-\mathbf{D}_m = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_m \times \mathbf{R}}{R^3} dV \rightarrow -\nabla \times \mathbf{E}_m = \mathbf{J}_m$$



## 将Maxwell方程推广到磁荷、磁流

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_m = \frac{\rho_m}{\mu} \\ \nabla \times \mathbf{H}_m = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ -\oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s} + \mu \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{s} \\ \oiint_S \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\mu} \iiint_V \rho_m dV \\ \oint_L \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{s} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{m2} - \mathbf{D}_{m1}) &= 0, & \hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] &= -\mathbf{J}_{ms} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{m2} - \mathbf{B}_{m1}) &= \rho_{ms}, & \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] &= 0 \end{aligned}$$





引入假想磁荷和磁流，空间电磁场为电荷、电流与磁荷、磁流共同激发的结果

广义麦克斯韦方程组：  $(\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_e dV \\ \oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \iiint_V \rho_m dV \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_S \left[ \mathbf{J}_m + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \left[ \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$



### 3. 广义Maxwell方程的对偶性

#### 广义麦克斯韦微分方程组的对偶性

$$(\rho_e \rightleftharpoons \rho_m, \mathbf{J}_e \rightleftharpoons \mathbf{J}_m, \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \mu \rightleftharpoons \varepsilon, \mathbf{E}_e \rightleftharpoons \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_e \rightleftharpoons -\mathbf{E}_m)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_e &= \frac{\rho_e}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E}_e &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_e &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_e &= \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} \end{aligned} \right\} \rightleftharpoons \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_m &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_m &= -\mathbf{J}_m - \mu \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_m &= \frac{\rho_m}{\mu} \\ \nabla \times \mathbf{H}_m &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \end{aligned} \right.$$



## 广义Maxwell积分方程组的对偶性

$$(\rho_e \rightleftharpoons \rho_m, \mathbf{J}_e \rightleftharpoons \mathbf{J}_m, \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \mu \rightleftharpoons \varepsilon, \mathbf{E}_e \rightleftharpoons \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_e \rightleftharpoons -\mathbf{E}_m)$$

$$\left. \begin{aligned} \oiint_S \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_e dV \\ \oiint_S \mathbf{H}_e \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_L \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{L} &= -\iint_S \left[ \mu \frac{\partial \mathbf{H}_e}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H}_e \cdot d\mathbf{L} &= \iint_S \left[ \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right\} \rightleftharpoons \left\{ \begin{aligned} \oiint_S \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oiint_S \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu} \iiint_V \rho_m dV \\ \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} &= -\iint_S \left[ \mathbf{J}_m + \mu \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{L} &= \iint_S \left[ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right.$$



## 广义边界条件的对偶性

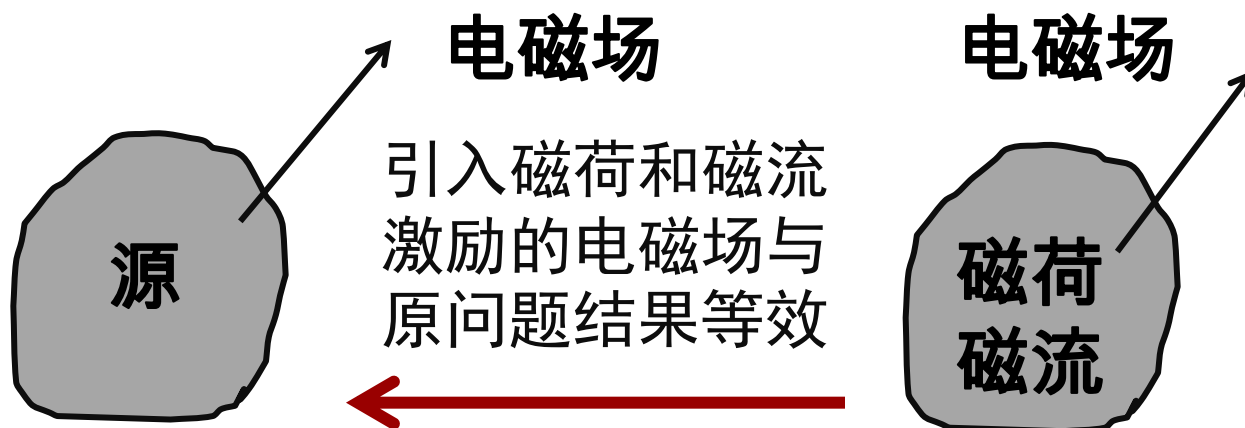
$$(\rho_e \rightleftharpoons \rho_m, \mathbf{J}_e \rightleftharpoons \mathbf{J}_m, \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \mu \rightleftharpoons \varepsilon, \mathbf{E}_e \rightleftharpoons \mathbf{H}_m, \mathbf{H}_e \rightleftharpoons -\mathbf{E}_m)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{e2} - \mathbf{D}_{e1}) &= \rho_{es} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{e2} - \mathbf{B}_{e1}) &= 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{E}_{e2} - \mathbf{E}_{e1}] &= 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{e2} - \mathbf{H}_{e1}] &= \mathbf{J}_{es} \end{aligned} \right\} \rightleftharpoons \left\{ \begin{aligned} \hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] &= -\mathbf{J}_{ms} \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{m2} - \mathbf{D}_{m1}) &= 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{m2} - \mathbf{B}_{m1}) &= \rho_{ms} \end{aligned} \right.$$



#### 4. “磁荷”和“磁流”引入原则与实例

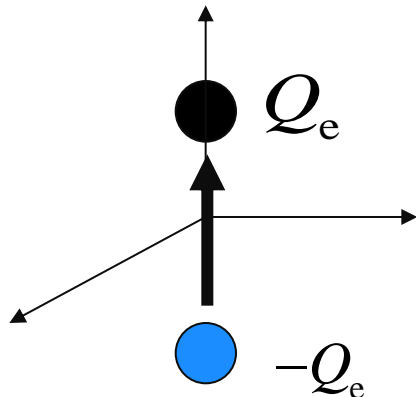
磁荷和磁流的引入可以简化电磁场问题的求解，但不能随意引入，须建立在等效理论基础之上。





# (1) 小电流环等效的磁偶极子

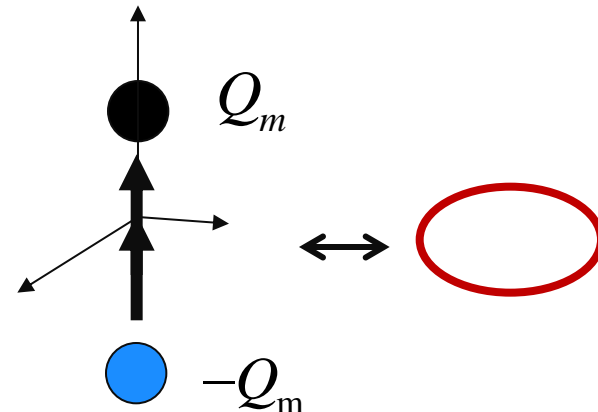
物理模型



$$P_e = \hat{e}_z Q_e L$$

$$E = \hat{e}_r \frac{2P_e \cos \theta}{4\pi\epsilon r^3} + \hat{e}_\theta \frac{P_e \sin \theta}{4\pi\epsilon r^3}$$

等效模型



$$P_m = \hat{e}_z \mu I_0 \Delta s = \hat{e}_z Q_m L$$

$$H = \hat{e}_r \frac{2P_m \cos \theta}{4\pi\mu r^3} + \hat{e}_\theta \frac{P_m \sin \theta}{4\pi\mu r^3}$$

物理模型



## 坐标原点 $z$ 向电偶极子的辐射场为

$$I_{e0}L(=j\omega LQ_{e0}) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta} \approx j \frac{I_{e0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \exp(-jkr) \\ H_{\phi} \approx j \frac{I_{e0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \exp(-jkr) \end{array} \right.$$

对偶量替换，得坐标原点  $z$  向磁偶极子辐射场为：

$$I_{m0}L(=j\omega LQ_{m0}) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\phi} \approx -j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \exp(-jkr) \\ H_{\theta} \approx j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin\theta}{r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} I_{m0}L &\rightarrow j\omega LQ_{m0} \\ &\rightarrow j\omega\mu I_0\Delta s \end{aligned}$$

小电流环辐射场  
(环面积  $\Delta s$  )

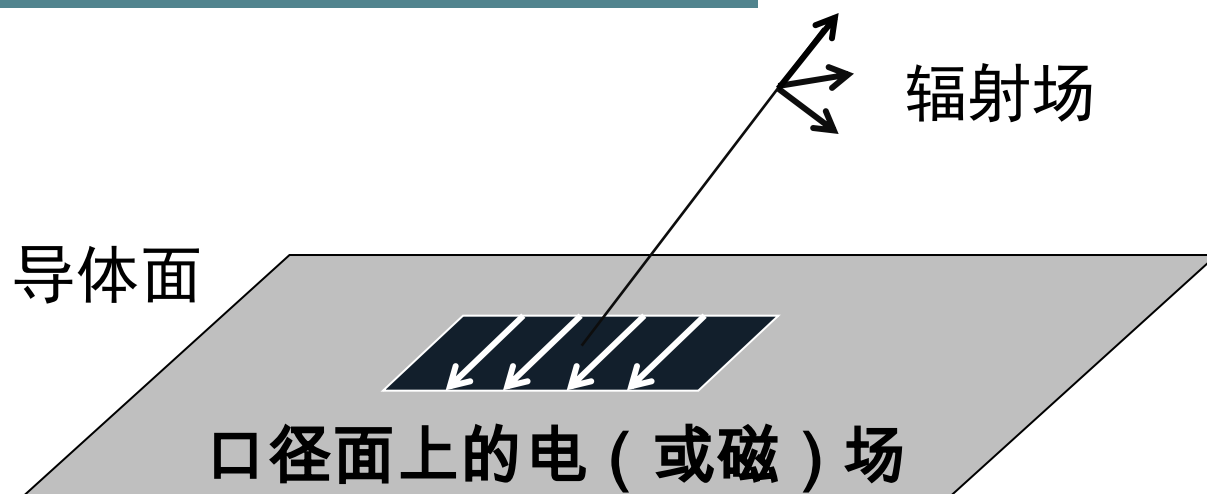
$$\begin{cases} E_{\varphi} \approx -j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \exp(-jkr) \\ H_{\theta} \approx j \frac{I_{m0}}{2} \frac{L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \exp(-jkr) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\varphi} = \frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jkr} \\ H_{\theta} = -\frac{I_0 \Delta s k^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \end{cases}$$





## (2) 口径场等效的电与磁偶极子



口径天线是航天与航空经常使用的共形天线形式  
上半空间的辐射场为理想导体面开口处的辐射  
将口径辐射等效为导体面上的电或磁流振子辐射



# 将广义Maxwell方程组应用于口径辐射

口径面上  
切向磁场  
可等效为  
电流振子

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times [\mathbf{E}_{e2} - \mathbf{E}_{e1}] = 0 \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{e2} - \mathbf{H}_{e1}] = \mathbf{J}_{es} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{e2} - \mathbf{D}_{e1}) = \rho_{es} \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{e2} - \mathbf{B}_{e1}) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] = -\mathbf{J}_{ms} \\ \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] = 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{D}_{m2} - \mathbf{D}_{m1}) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\mathbf{B}_{m2} - \mathbf{B}_{m1}) = \rho_{ms} \end{array} \right.$$

口径面上  
切向电场  
可等效为  
磁流振子

导体面

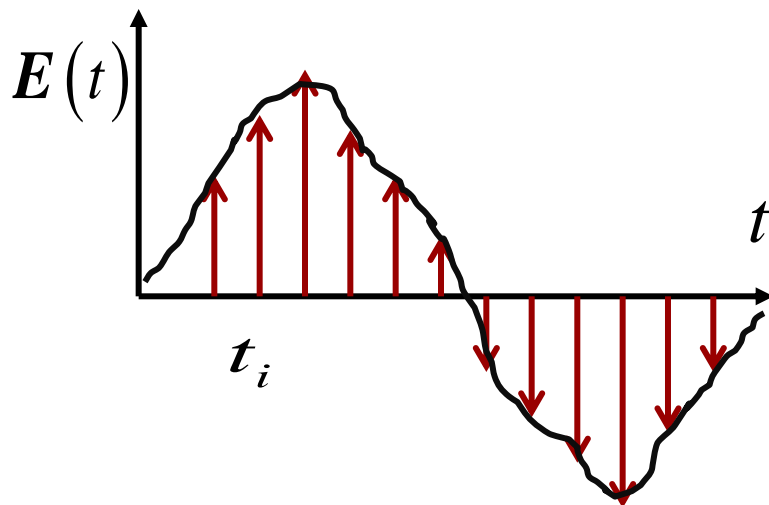


口径面上的电（或磁）场



## 5. 时变电磁场的镜像原理

镜像方法是求解静态电磁场十分有效的方法，  
当电磁场是时变的，镜像原理是否仍然有效？



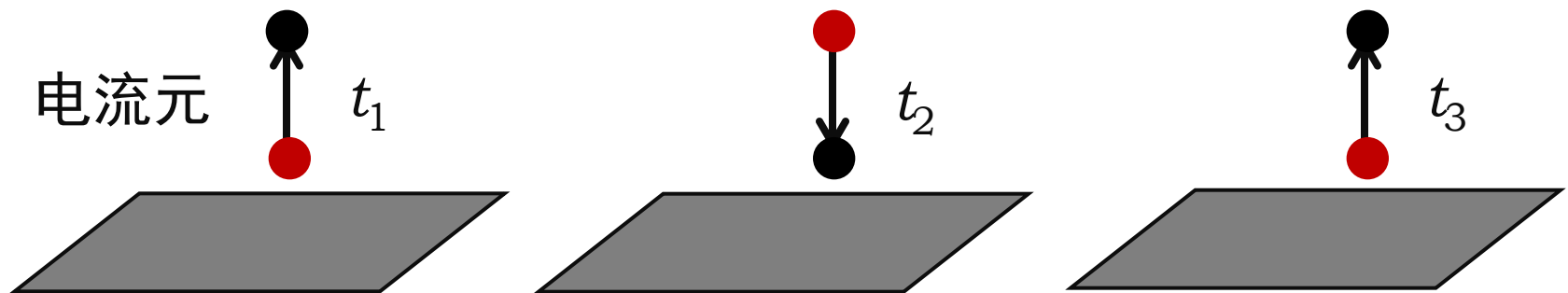
每一瞬时电磁场为静态场  
静态场的镜像方法应有效

将时变电磁场在  
时间上离散，对  
每个离散的小时  
间间隔中，场的  
变化很小，可视  
为不变电磁场



把时变电磁场分解为由不同瞬时电磁场的序列  
时间连续的变化分解为多个静态的序列的组合  
时间序列中每一瞬时电磁场取值为静态电磁场  
静态场中的镜像方法完全可以应用

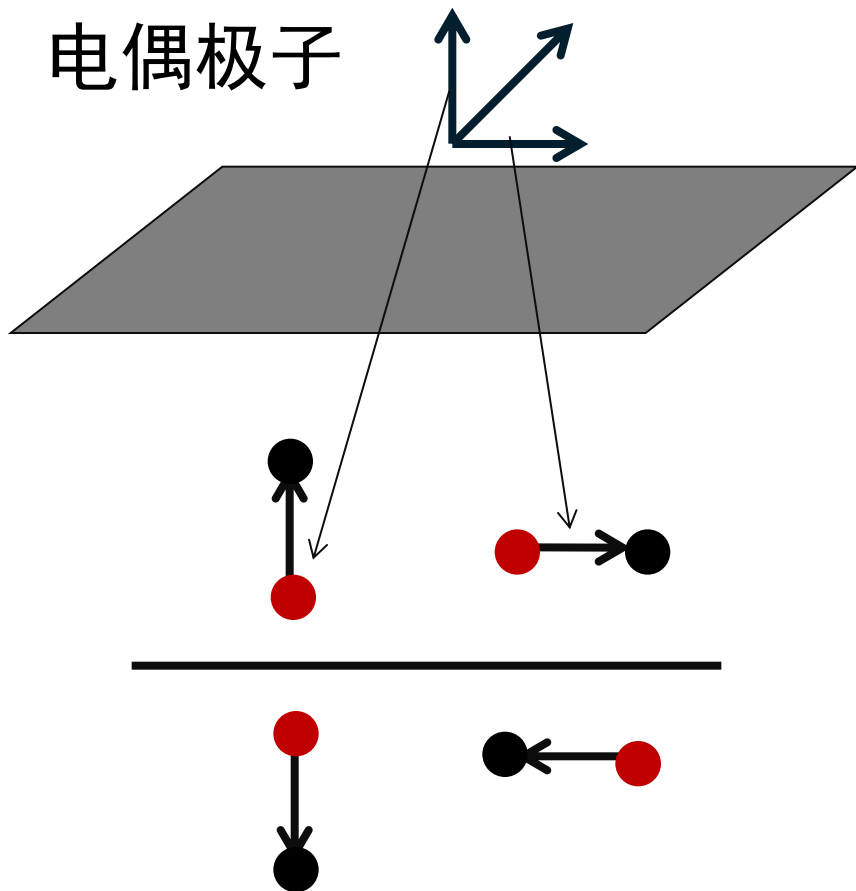
只要导体或介质面感应电荷或电流即时响应



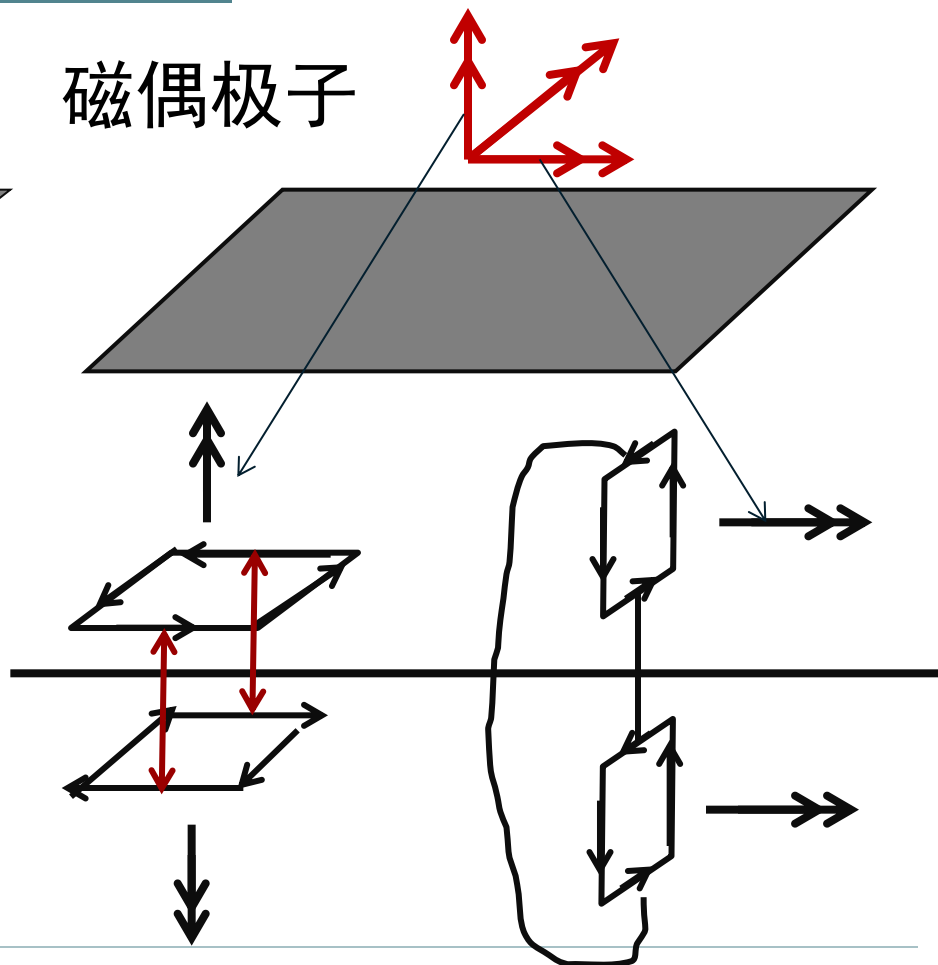


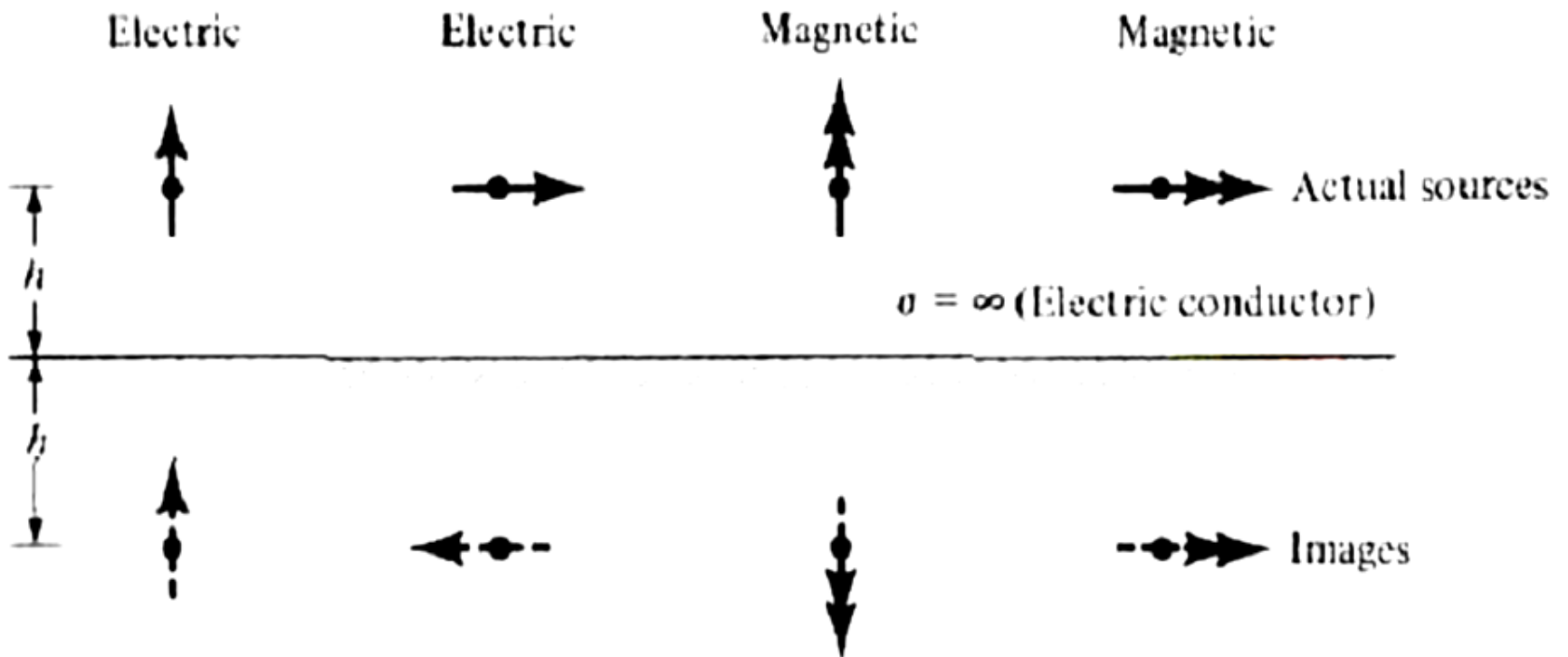
磁偶极子为小电流矩形环，矩形电流环为首尾相接的四个电偶极子系

电偶极子



磁偶极子





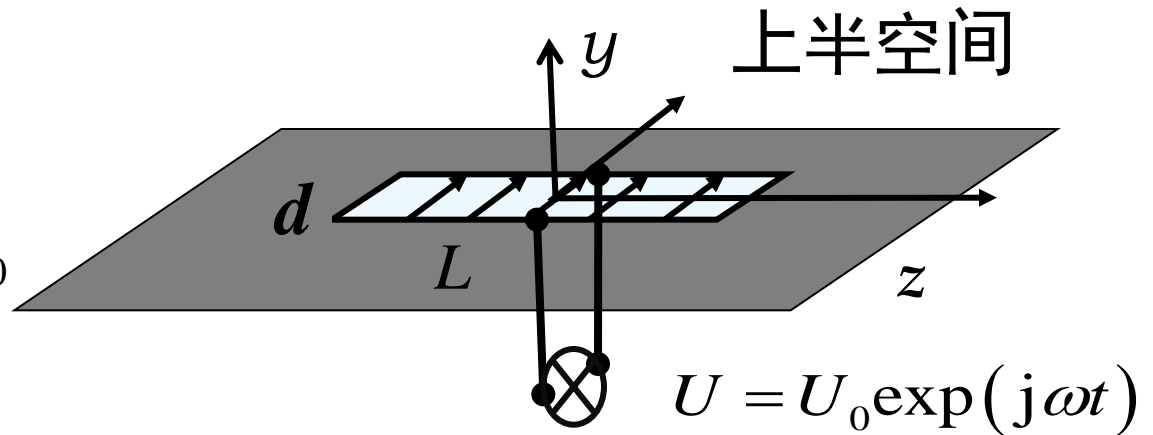
(a) Electric conductor



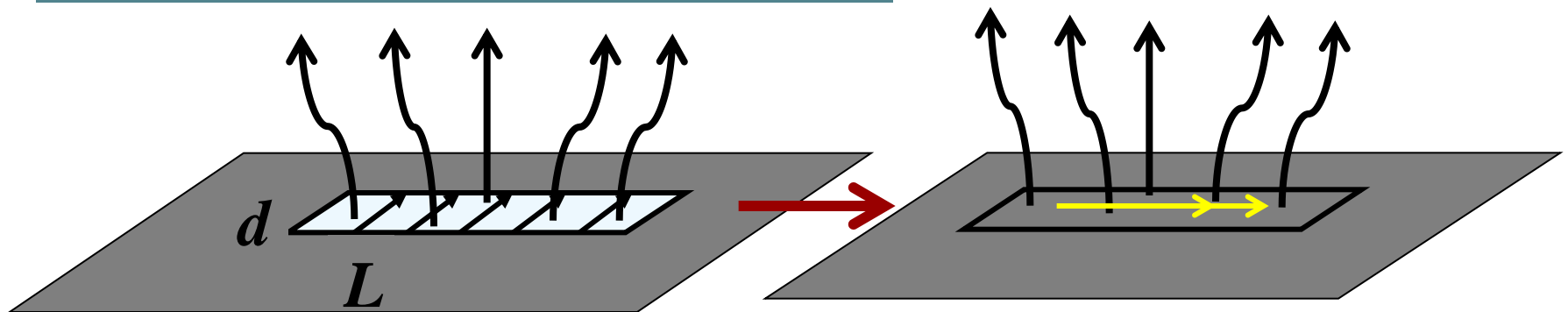
## 5. 缝隙天线

$$L \gg d, \quad E_0 d = U_0$$

$$\mathbf{E} = \hat{e}_x E_0 \exp(j\omega t)$$



$$\hat{n} \times \mathbf{E} = \begin{cases} 0 & , y = 0, |x| > \frac{d}{2}, |z| > \frac{L}{2} \\ -\hat{e}_z \frac{U_0}{d}, y = 0, |x| \leq \frac{d}{2}, |z| \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

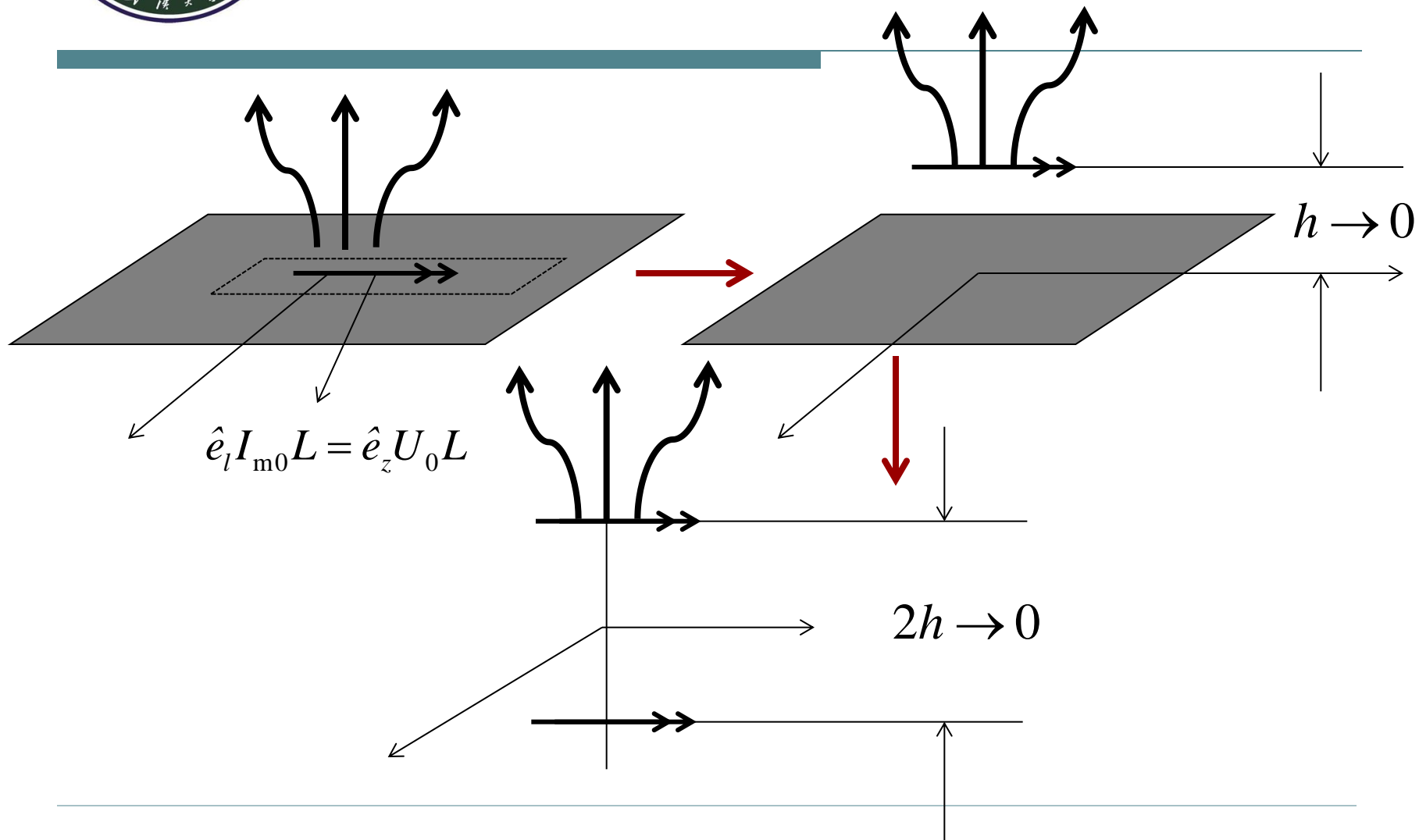


$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{E}_m = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_m \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_m = 0 & , \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_m \end{cases} \quad y > 0$$

$$\mathbf{J}_{ms} = -\hat{n} \times [\mathbf{E}_{m2} - \mathbf{E}_{m1}] \quad , \quad \hat{n} \times [\mathbf{H}_{m2} - \mathbf{H}_{m1}] = 0$$

$$\hat{e}_l I_{m0} = \hat{e}_l J_{m0} d = -\hat{e}_y \times \hat{e}_x E_x d = \hat{e}_z U_0$$

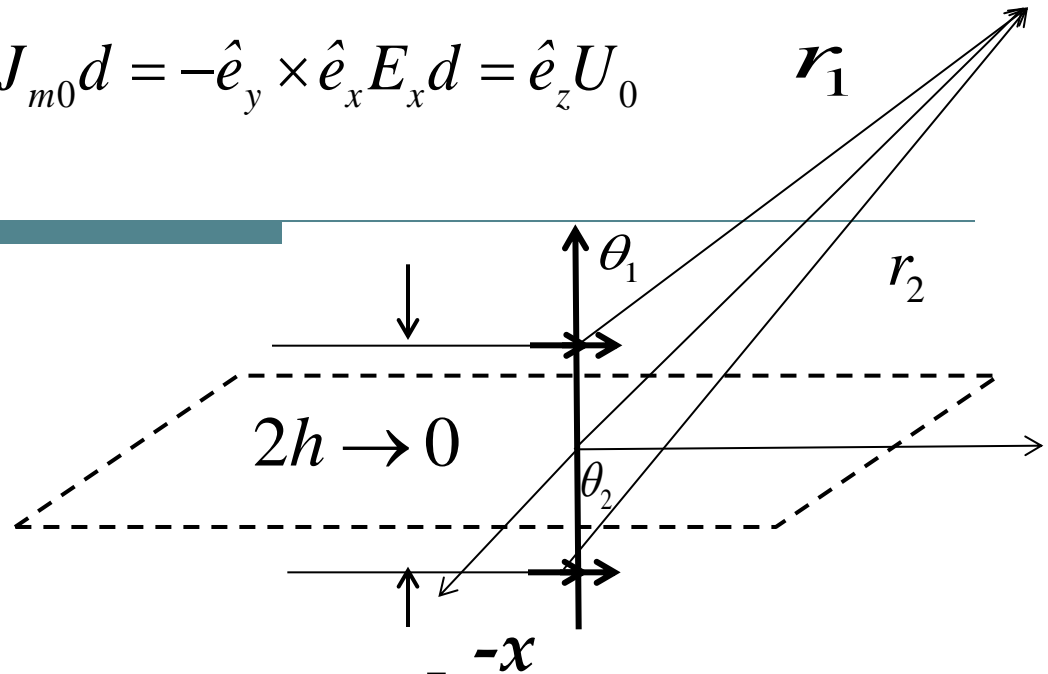






$$\hat{e}_l I_{m0} = \hat{e}_l J_{m0} d = -\hat{e}_y \times \hat{e}_x E_x d = \hat{e}_z U_0$$

$$h \rightarrow 0, \begin{cases} r_1 = r_2 = r \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} E_\varphi \approx -j \frac{I_{m0} L}{2\lambda} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \theta_1}{r_1} \exp(-jkr_1) + \frac{\sin \theta_2}{r_2} \exp(-jkr_2) \right] = -j \frac{U_0 L}{\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \exp(-jkr) \\ H_\theta \approx j \frac{I_{m0} L}{2\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \theta_1}{r_1} \exp(-jkr_1) + \frac{\sin \theta_2}{r_2} \exp(-jkr_2) \right] = -\frac{E_\varphi}{\eta_0} \end{cases}$$

导体面使置于其面上的偶极子辐射场的强度增加一倍