

## 第七章习题与解答

7-1 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统有几个平衡状态，分析平衡状态的稳定性，并画出系统的相轨迹。

解 令  $\dot{x} = 0$  得

$$-x + x^3 = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$$

系统平衡状态

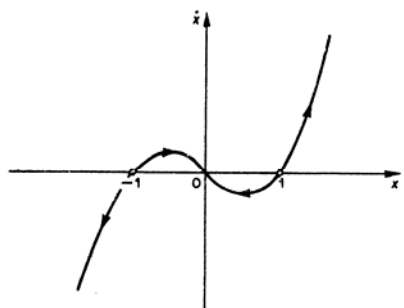
$$x_e = 0, -1, +1$$

其中：  $x_e = 0$  : 稳定的平衡状态；

$x_e = -1, +1$  : 不稳定平衡状态。

计算列表，画出相轨迹如图解7-1所示。

$x$	-2	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	2
$\dot{x}$	-6	0	0.385	0	-0.385	0	6
$\ddot{x}$	11	2	0	1	0	2	11



图解7-1 系统相轨迹

可见：当  $|x(0)| < 1$  时，系统最终收敛到稳定的平衡状态；当  $|x(0)| > 1$  时，系统发散；

$x(0) < -1$  时， $x(t) \rightarrow -\infty$ ； $x(0) > 1$  时， $x(t) \rightarrow \infty$ 。

注：系统为一阶，故其相轨迹只有一条，不可能在整个  $\dot{x} \sim x$  平面上任意分布。

7-2 试确定下列方程的奇点及其类型，并用等倾斜线法绘制相平面图。

(1)  $\ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$

(2) 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

解 (1) 系统方程为

$$\begin{cases} \text{I: } \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 & (x > 0) \\ \text{II: } \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 & (x < 0) \end{cases}$$

系统特征方程及特征根：

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + s + 1 = 0 & s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} & (\text{稳定的焦点}) \\ \text{II: } s^2 + s - 1 = 0 & s_{1,2} = -1.618, +0.618 & (\text{鞍点}) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -\dot{x} - |x|, \quad \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = -\dot{x} - |x|$$

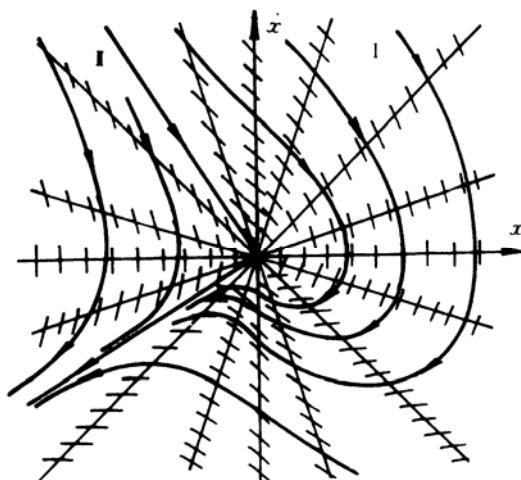
$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -1 - \frac{|x|}{\dot{x}}, \quad \dot{x} = \frac{-1}{1+\alpha}|x| = \beta|x|$$

$$\begin{cases} \text{I: } \alpha = -1 - \frac{1}{\beta} & (x > 0) \\ \text{II: } \alpha = \frac{1}{\beta} - 1 & (x < 0) \end{cases}$$

计算列表

$\beta$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$-1/3$	$0$	$1/3$	$1$	$3$	$\infty$
$x > 0: \alpha = -1 - 1/\beta$	$-1$	$-2/3$	$0$	$2$	$-\infty$	$-4$	$-2$	$-4/3$	$-1$
$x < 0: \alpha = -1 + 1/\beta$	$-1$	$-4/3$	$-2$	$-4$	$\infty$	$2$	$0$	$-2/3$	$-1$

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解7-2 (a) 所示。



图解7-2 (a) 系统相平面图

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

③

由式①:  $x_2 = \dot{x}_1 - x_1$

式③代入②:  $(\ddot{x}_1 - \dot{x}_1) = 2x_1 + (\dot{x}_1 - x_1)$

即  $\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0$  ④

令  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$

得平衡点:  $x_e = 0$

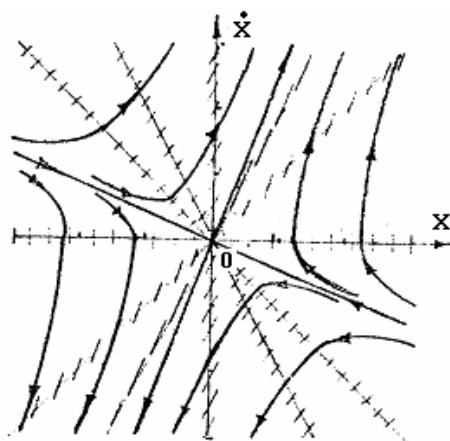
由式④得特征方程及特征根为

$$s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 2.414 \\ -0.414 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

画相轨迹, 由④式

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dx} = \dot{x}_1 \alpha = 2\dot{x}_1 + x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{\alpha - 2}$$



图解7-2 (b)

计算列表

$\alpha$	2	2.5	3	$\infty$	1	1.5	2
$\beta=1/(\alpha-2)$	$\infty$	2	1	0	-1	-2	$\infty$

用等倾斜线法绘制系统相平面图如图解7-2 (b) 所示。

**7-3** 已知系统运动方程为  $\ddot{x} + \sin x = 0$ , 试确定奇点及其类型, 并用等倾斜线法绘制相平面图。

**解** 求平衡点, 令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  得

$$\sin x = 0$$

平衡点  $x_e = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

将原方程在平衡点附近展开为台劳级数, 取线性项。

设  $F(x) = \ddot{x} + \sin x = 0$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right|_{\ddot{x}_e} \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} \Delta x = 0$$

$$\Delta \ddot{x} + \cos x_e \cdot \Delta x = 0$$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x} + \Delta x = 0 & x_e = k\pi \quad (k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ \Delta \ddot{x} - \Delta x = 0 & x_e = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \end{cases}$$

特征方程及特征根：

$$k \text{ 为偶数时 } s^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

$$k \text{ 为奇数时 } s^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad (\text{鞍点})$$

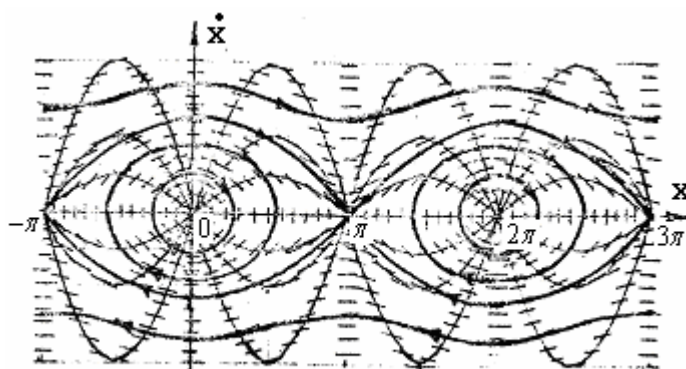
用等倾斜线法作相平面

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \sin x = \dot{x} \cdot \alpha + \sin x = 0$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha} \sin x$$

$\alpha$	-2	-1	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	1	2
$-1/\alpha$	1/2	1	2	4	$\infty$	-4	-2	-1	-1/2

作出系统相平面图如图解7-3所示。



图解7-3

7-4 若非线性系统的微分方程为

$$(1) \quad \ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$$

试求系统的奇点，并概略绘制奇点附近的相轨迹图。

解 (1) 由原方程得

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) = -(3\dot{x} - 0.5)\dot{x} - x - x^2 = -3\dot{x}^2 + 0.5\dot{x} - x - x^2$$

$$\text{令} \quad \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$$

$$\text{得} \quad x + x^2 = x(x+1) = 0$$

解出奇点  $x_e = 0, -1$

在奇点处线性化处理。

在  $x_e = 0$  处:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=0 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} = -x + 0.5\dot{x}\end{aligned}$$

即  $\ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$

特征方程及特征根

$$s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4}}{2} = 0.25 \pm j0.984 \quad (\text{不稳定的焦点})$$

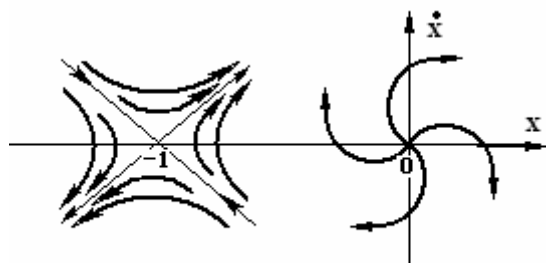
在  $x_e = -1$  处

$$\ddot{x} = (-1 - 2x) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{\substack{x=-1 \\ \dot{x}=0}} \cdot \dot{x} = x + 0.5\dot{x}$$

即  $\ddot{x} - 0.5\dot{x} - x = 0$

特征根  $s_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}}{2} = \begin{cases} 1.218 \\ -0.718 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$

概略画出奇点附近的相轨迹如图解7-4 (1) 所示:



图解7-4 (1)

(2) 由原方程

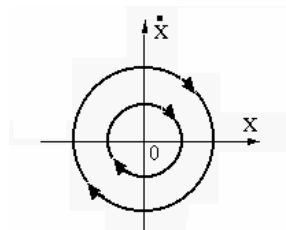
$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -x\dot{x} - x$$

令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$  得奇点  $x_e = 0$ , 在奇点处线性化

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\dot{x}=0} \cdot x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x} \\ &= (-\dot{x} - 1) \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot x - x \Big|_{x=\dot{x}=0} \cdot \dot{x}\end{aligned}$$

得  $\ddot{x} = -x$

即  $\ddot{x} + x = 0$

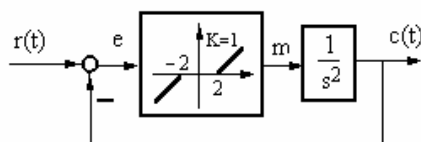


图解7-4 (2)

特征根  $s_{1,2} = \pm j$ 。奇点  $x_e = 0$  (中心点) 处的相轨迹如图解7-4(2) 所示。

7-5 非线性系统的结构图如题7-5图所示。

系统开始是静止的, 输入信号  $r(t) = 4 \cdot 1(t)$ , 试写出开关线方程, 确定奇点的位置和类型, 作出该系统的相平面图, 并分析系统的运动特点。



题7-5图 非线性系统

解 由结构图, 线性部分传递函数为

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{1}{s^2}$$

得

$$\ddot{c}(t) = m(t) \quad (1)$$

由非线性环节有

$$m(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 & \text{I} \\ e(t) - 2 & e > 2 & \text{II} \\ e(t) + 2 & e < -2 & \text{III} \end{cases} \quad (2)$$

由综合点得

$$c(t) = r(t) - e(t) = 4 - e(t) \quad (3)$$

将③、②代入①得

$$\ddot{e}(t) = \begin{cases} 0 & |e| \leq 2 & \text{I} \\ 2 - e(t) & e > 2 & \text{II} \\ -2 - e(t) & e < -2 & \text{III} \end{cases}$$

开关线方程为  $e(t) = \pm 2$

I:  $\ddot{e}(t) = 0 \quad \dot{e} = c$  (常数)

II:  $\ddot{e} + e - 2 = 0$

令  $\ddot{e} = \dot{e} = 0$  得奇点  $e_0^{\text{II}} = 2$

特征方程及特征根

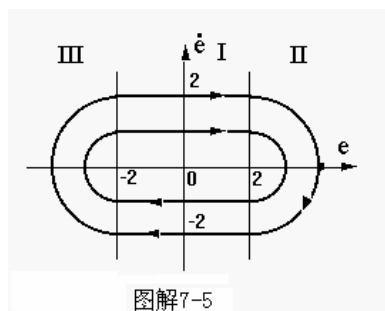
$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$

III:  $\ddot{e} + e + 2 = 0$

令  $\ddot{e} = \dot{e} = 0$  得奇点  $e_0^{\text{III}} = -2$

特征方程及特征根

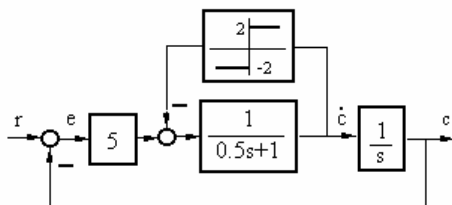
$$s^2 + 1 = 0, \quad s_{1,2} = \pm j \quad (\text{中心点})$$



图解7-5

绘出系统相轨迹如图解7-5所示，可看出系统运动呈现周期振荡状态。

7-6 题7-6图所示为一带有库仑摩擦的二阶系统，试用相平面法讨论库仑摩擦对系统单位阶跃响应的影响。



题7-6图 有库仑摩擦的二阶系统

解 由系统结构图有

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{5}{s} \cdot \frac{1}{0.5s+1 \pm 2} \quad \begin{cases} +: & \dot{c} > 0 \\ -: & \dot{c} < 0 \end{cases}$$

$$s(0.5s+1 \pm 2)C(s) = 5E(s)$$

$$\begin{cases} 0.5\ddot{c} + 3\dot{c} = 5e & \dot{c} > 0 & \text{I} \\ 0.5\ddot{c} - \dot{c} = 5e & \dot{c} < 0 & \text{II} \end{cases} \quad (1)$$

因为

$$c = r - e = 1 - e \quad (2)$$

②代入①式有

$$\begin{cases} \ddot{e} + 6\dot{e} + 10e = 0 & \dot{e} < 0 & \text{I} \\ \ddot{e} - 2\dot{e} + 10e = 0 & \dot{e} > 0 & \text{II} \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} \text{I: } s^2 + 6s + 10 = 0 & s_{1,2} = -3 \pm j & (\text{稳定的焦点}) \\ \text{II: } s^2 - 2s + 10 = 0 & s_{1,2} = 1 \pm j3 & (\text{不稳定的焦点}) \end{cases}$$

依题意

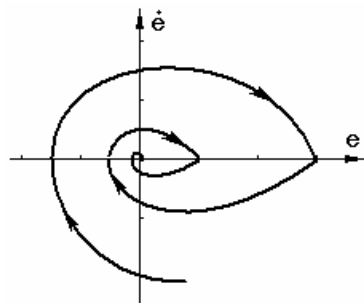
$$c(0) = 0, \dot{c}(0) = 0$$

可得

$$e(0) = 1 - c(0) = 1$$

$$\dot{e}(0) = \dot{c}(0) = 0$$

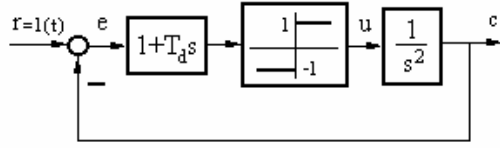
以(1, 0)为起点概略作出系统相轨迹。可见系统阶跃响应过程是振荡收敛的。



图解7-6

7-7 已知具有理想继电器的非线性系统如题7-7

图所示。



题7-7图 具有理想继电器的非线性系统

试用相平面法分析：

- (1)  $T_d = 0$  时系统的运动；
- (2)  $T_d = 0.5$  时系统的运动，并说明比例微分控制对改善系统性能的作用；
- (3)  $T_d = 2$  时系统的运动特点。

**解** 依结构图，线性部分微分方程为

$$\ddot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} 1 & e + T_d \dot{e} > 0 \quad \text{I} \\ -1 & e + T_d \dot{e} < 0 \quad \text{II} \end{cases} \quad (2)$$

开关线方程：

$$\dot{e} = \frac{-1}{T_d} e$$

由综合口：

$$c = r - e = 1 - e \quad (3)$$

③、②代入①并整理得

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1 & e + T_d \dot{e} > 0 \quad \text{I} \\ +1 & e + T_d \dot{e} < 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

在 I 区：

$$\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -1$$

解出：

$$\dot{e}^2 = -2e \quad (e > 0) \quad (\text{抛物线})$$

同理在 II 区可得：

$$\dot{e}^2 = 2e \quad (e < 0) \quad (\text{抛物线})$$

开关线方程分别为

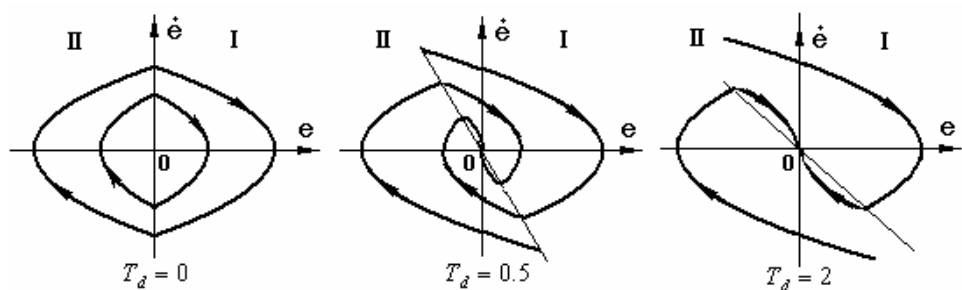
$$T_d = 0 \text{ 时, } e = 0;$$

$$T_d = 0.5 \text{ 时, } \dot{e} = -2e;$$

$$T_d = 2 \text{ 时, } \dot{e} = -0.5e.$$

概略作出相平面图如图解7-7所示。





图解7-7

由相平面图可见：加入比例微分控制可以改善系统的稳定性；当微分作用增强时，系统振荡性减小，响应加快。

7-8 具有饱和和非线性特性的控制系统如题7-8图所示，试用相平面法分析系统的阶跃响应。

解 非线性特性的数学表达式为

$$y = \begin{cases} e & |e| < a \quad \text{I} \\ M & e > a \quad \text{II 线} \\ -M & e < -a \quad \text{III} \end{cases}$$

性部分的微分方程为

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Ky$$

考虑到  $r - c = e$ ，上式又可以写成

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = T\ddot{r} + \dot{r}$$

输入信号为阶跃函数，在  $t > 0$  时有， $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ ，因此有

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = 0$$

根据已知的非线性特性，系统可分为三个线性区域。

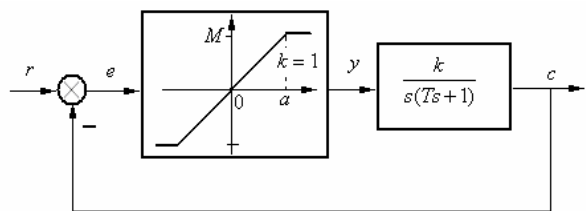
I 区：系统的微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad (|e| < a)$$

按前面确定奇点的方法，可知系统在该区有一个奇点  $(0, 0)$ ，奇点的类型为稳定焦点。图解7-8 (a) 为 I 区的相轨迹，它们是一簇趋向于原点的螺旋线。

II 区：系统的微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM = 0 \quad (e > a)$$



题7-8图 非线性系统结构图

设一般情况下，初始条件为  $e(0) = e_0$ ,  $\dot{e}(0) = \dot{e}_0$ 。则上式的解为

$$e(t) = e_0 + (\dot{e}_0 + KM)T - (\dot{e}_0 + KM)Te^{-t/T} - KMt$$

对上式求一次导数，得

$$\dot{e}(t) = (\dot{e}_0 + KM)e^{-t/T} - KM$$

故当初始条件  $e'_0 = -KM$  时，相轨迹方程为  $e' = -KM$ 。

$$\text{当 } e'_0 \neq -KM \text{ 时，相轨迹方程为 } e = e_0 + (\dot{e}_0 - \dot{e})T + KMT \ln \left| \frac{\dot{e} + KM}{\dot{e}_0 + KM} \right|$$

由此可作出该区的相轨迹，如图解7-8(b)所示，相轨迹渐近于直线  $\dot{e} = -KM$ 。

III区：此时系统的微分方程为

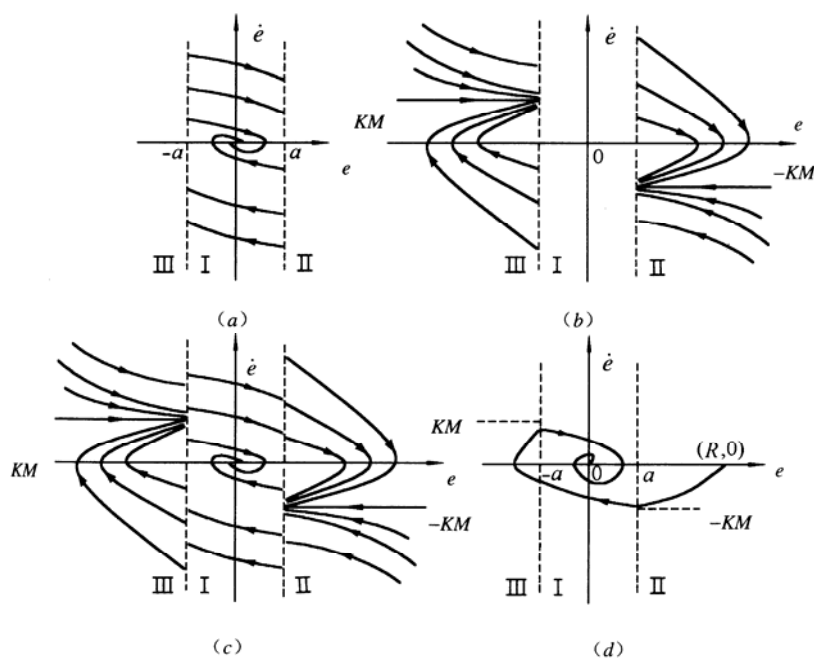
$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM = 0 \quad (e < -a)$$

将II区相轨迹方程中的  $KM$  改变符号，即得III区的相轨迹方程

$$\begin{cases} \dot{e} = KM & (\dot{e}_0 = KM) \\ e = e_0 + (\dot{e}_0 - \dot{e})T - KMT \ln \left| \frac{\dot{e} + KM}{\dot{e}_0 + KM} \right| & (\dot{e}_0 \neq KM) \end{cases}$$

该区的相轨迹如图解7-8(b)所示。

将以上各区的相轨迹连接起来，便是系统的整个相平面图，如图解7-8(c)所示。



图解7-8 非线性系统的相平面图

假使系统原来处于静止状态，则在阶跃输入作用时，相轨迹的起始点应为  $e(0) = R$ ,  $\dot{e}(0) = 0$ 。此时的系统的相平面图如图解7-8 (d) 所示。由图可知，系统在阶跃输入作用时，系统是稳定的，其稳态误差为零。动态过程具有衰减振荡性质，最大超调量可从图中量得。

7-9 试推导非线性特性  $y = x^3$  的描述函数。

解  $y(t) = A^3 \sin^3 \omega t$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \omega t \cdot d\omega t = \frac{4A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\omega t)^2 \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\omega t + \cos^2 2\omega t) \cdot d\omega t = \frac{A^3}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \right] - \frac{A^3}{\pi} [\sin 2\omega t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{A^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\omega t + 1}{2} \cdot d\omega t \\ &= \frac{A^3}{2} - 0 + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\omega t \cdot d\omega t + \frac{A^3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega t = \frac{3A^3}{4} \\ N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} = \frac{3A^2}{4} \end{aligned}$$

7-10 三个非线性系统的非线性环节一样，线性部分分别为

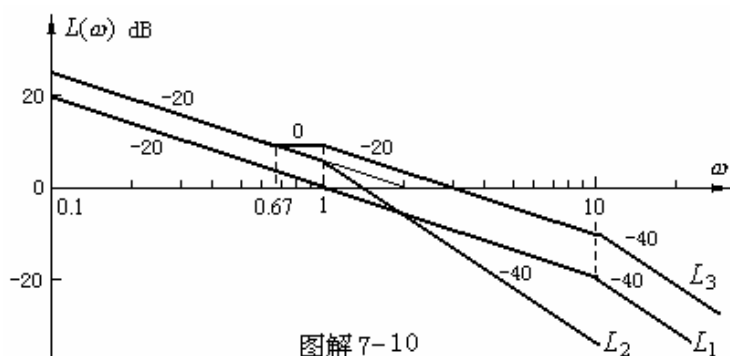
$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

试问用描述函数法分析时，哪个系统分析的准确度高？

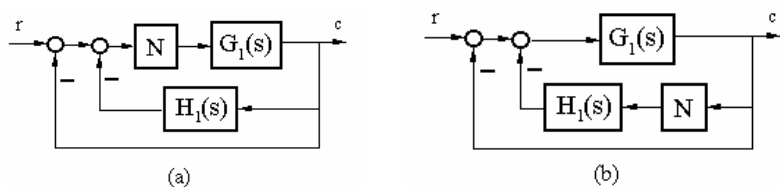
解 线性部分低通滤波特性越好，描述函数法分析结果的准确程度越高。分别作出三个系统线性部分的对数幅频特性曲线如图解7-9所示。



图解 7-10

由对数幅频特性曲线可见， $L_2$ 的高频段衰减较快，低通滤波特性较好，所以系统（2）的描述函数法分析结果的准确程度较高。

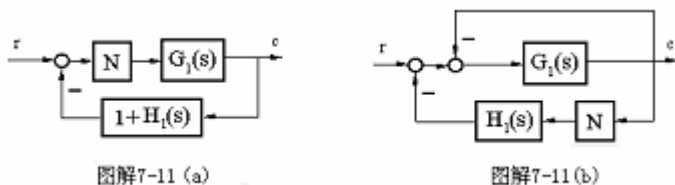
7-11 将题7-11图所示非线性系统简化成环节串联的典型结构图形式，并写出线性部分的传递函数。



题7-11图 非线性系统结构图

解（a）将系统结构图等效变换为图解7-11（a）的形式。

$$G(s) = G_1(s)[1 + H_1(s)]$$



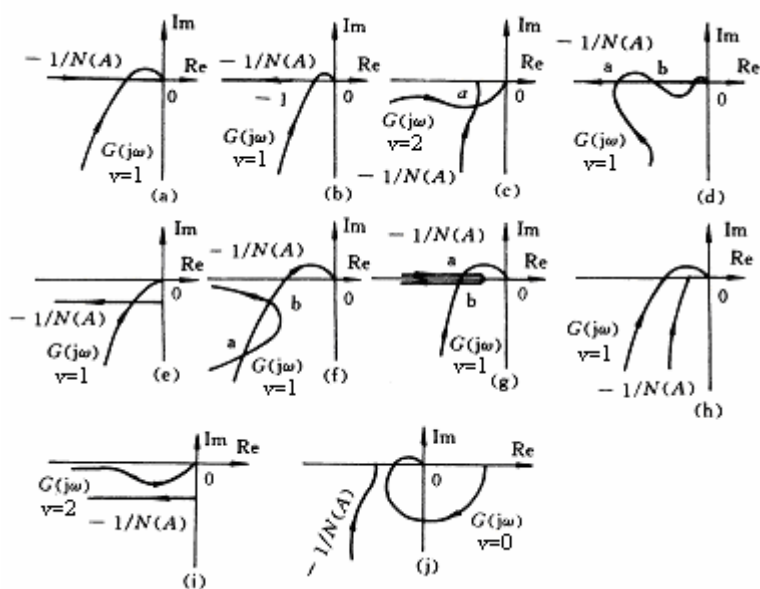
图解7-11 (a)

图解7-11 (b)

(b) 将系统结构图等效变换为图解7-11 (b) 的形式。

$$G(s) = H_1(s) \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

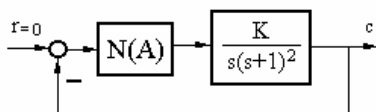
7-12 判断题7-12图中各系统是否稳定； $-1/N(A)$ 与 $G(j\omega)$ 的交点是否为自振点。



题7-12图 自振分析

- 解 (a) 不是  
 (b) 是  
 (c) 是  
 (d)  $a$ 、 $c$  点是,  $b$  点不是  
 (e) 是  
 (f)  $a$  点不是,  $b$  点是  
 (g)  $a$  点不是,  $b$  点是  
 (h) 系统不稳定  
 (i) 系统不稳定  
 (j) 系统稳定

7-13 已知非线性系统的结构图如题7-13图所示



题7-13图 非线性系统

图中非线性环节的描述函数,  $N(A) = \frac{A+6}{A+2}$  ( $A > 0$ )。试用描述函数法确定:

- (1) 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时, 线性部分的  $K$  值范围;
- (2) 判断周期运动的稳定性, 并计算稳定周期运动的振幅和频率。

解 (1)

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-(A+2)}{A+6}$$

$$\frac{-1}{N(0)} = \frac{-1}{3}, \quad \frac{-1}{N(\infty)} = -1$$

$$\frac{dN(A)}{dA} = \frac{-4}{(A+2)^2} < 0$$

$N(A)$  单调降,  $-1/N(A)$  也为单调降函数。画出负倒描述函数曲线  $-1/N(A)$  和  $G(j\omega)$  曲线如图解7-13所示, 可看出, 当  $K$  从小到大变化时, 系统会由稳定变为自振, 最终不稳定。

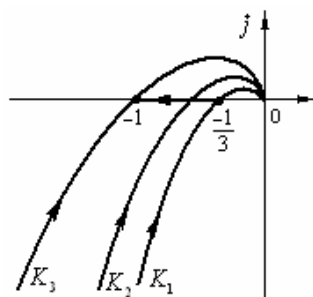
求使  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$  的  $\omega$  值:

令  $\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctg\omega = -180^\circ$

得  $\arctg\omega = 45^\circ, \quad \omega = 1$

令  $|G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} \Big|_{\omega=1}$

$$= \frac{K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \\ 1 & \rightarrow K_3 = 2 \end{cases}$$



图解7-13

可得出  $K$  值与系统特性之间的关系:

$$K: \quad 0 \longrightarrow 2/3 \longrightarrow 2 \longrightarrow \infty$$

稳定      自振    不稳定

(2) 由图解7-13可见, 当  $-1/N(A)$  和  $G(j\omega)$  相交时, 系统一定会自振。由自振条件

$$N(A)G(j\omega) \Big|_{\omega=1} = \frac{A+6}{A+2} \cdot \frac{-K}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

$$(A+6)K = 2A+4$$

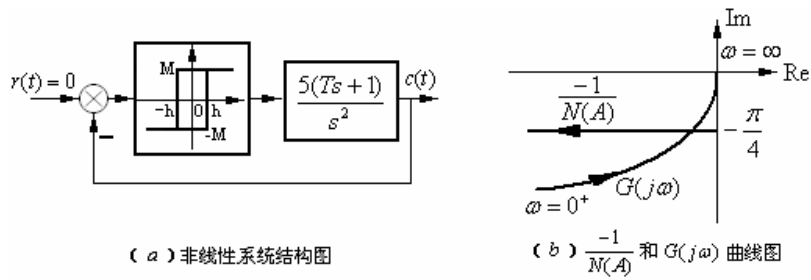
解出  $\begin{cases} A = \frac{6K-4}{2-K} \\ \omega = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3} < K < 2\right)$

7-14 具有滞环继电特性的非线性控制系统如题7-14图 (a) 所示, 其中  $M = 1, h = 1$

。

(1) 当  $T = 0.5$  时, 分析系统的稳定性, 若存在自振, 确定自振参数;

(2) 讨论  $T$  对自振的影响。



题7-14图

解 具有滞环继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4hM}{\pi A^2}, \quad A > h$$

代入  $M = 1$ ,  $h = 1$ , 有

$$N(A) = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} - j \frac{4}{\pi A^2}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A (\sqrt{1 - (\frac{1}{A})^2} + j \frac{1}{A})}{4 (\sqrt{1 - (\frac{1}{A})^2} - j \frac{1}{A}) (\sqrt{1 - (\frac{1}{A})^2} + j \frac{1}{A})} = -\frac{\pi}{4} \sqrt{A^2 - 1} - j \frac{\pi}{4}$$

其负倒描述函数  $-1/N(A)$  曲线如题7-14图 (b) 所示,  $G(j\omega)$  曲线位于第四象限, 两曲线必然有交点。

$$G(s) = \frac{5(Ts+1)}{s^2}$$

$$G(j\omega) = -\frac{5}{\omega^2} - j \frac{5T}{\omega}$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

根据虚部相等, 有

$$-j \frac{5T}{\omega} = -j \frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \frac{20T}{\pi}$$

自振角频率随  $T$  增大而增大, 当  $T = 0.5$  时,  $\omega = 3.18$ 。

根据实部相等, 有

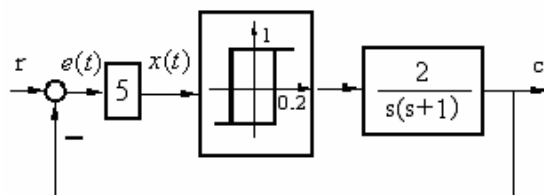
$$-\frac{5}{\left(\frac{20T}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi}{4}\sqrt{A^2-1}$$

解出非线性输入端振幅为

$$A = \sqrt{\frac{\pi^2}{400T^4} + 1}$$

当  $T = 0.5$  时,  $A = 1.18$ 。自振振幅随  $T$  增大而减小。

7-15 非线性系统如题7-15图所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号振荡的振幅和频率。

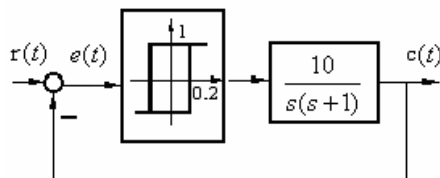


题 7-15 图 非线性系统

解 将系统结构图等效变换为图解7-15。

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega(\omega^2+1)}$$

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{4 \times 0.2}{\pi A^2} \\ &= \frac{4}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A} \right] \end{aligned}$$



图解 7-15

$$\frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2}{A}} = \frac{-\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2} - j \frac{0.2\pi}{A}$$

令  $G(j\omega)$  与  $-1/N(A)$  的实部、虚部分别相等得

$$\frac{10}{\omega^2+1} = \frac{\pi A}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A}\right)^2}$$

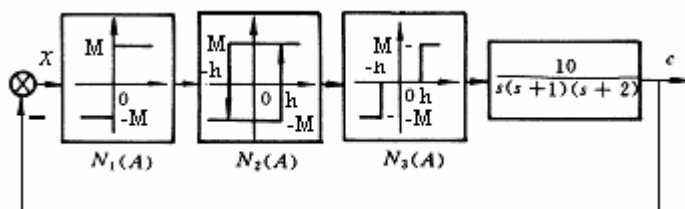


$$\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)} = \frac{0.2\pi}{4} = 0.157$$

两式联立求解得  $\omega = 3.91$ ,  $A = 0.806$ 。

由题7-15图,  $r(t) = 0$  时, 有  $c(t) = -e(t) = \frac{1}{5}x(t)$ , 所以  $c(t)$  的振幅为  $\frac{0.806}{5} = 0.161$ 。

7-16 用描述函数法分析题7-16图所示系统的稳定性, 并判断系统是否存在自振。若存在自振, 求出自振振幅和自振频率 ( $M > h$ )。



题7-16图 非线性系统结构图

解 因为  $M > h$ , 所以当  $x = -c > 0$  时  $N_1(A)$  环节输出为  $M > h$ ,  $N_2(A)$  环节输出也为  $M > h$ 。同样  $N_3(A)$  输出也是  $M$ ; 当  $x < 0$  时情况类似。所以实际上  $N_2(A)$  和  $N_3(A)$  不起作用, 系统可等效为如图解7-16 (a) 的形式。

画出  $-1/N(A)$  和  $G(j\omega)$  曲线如图解7-16 (b) 所示。可见系统一定自振。由自振条件

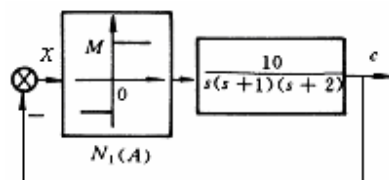
$$N_1(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

即 
$$\frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = -1$$

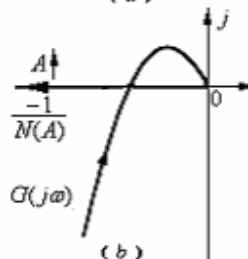
$$\frac{40M}{\pi A} = -j\omega(1+j\omega)(2+j\omega) = 3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)$$

比较实部、虚部有 
$$\begin{cases} \frac{40M}{\pi A} = 3\omega^2 \\ \omega(2-\omega^2) = 0 \end{cases}$$

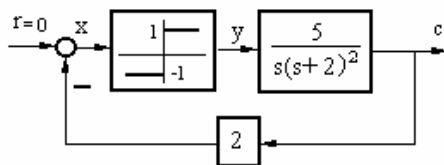
解出 
$$\begin{cases} A = 2.12M \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases}$$



(a)



7-17 试用描述函数法说明题7-17图所示系统必然存在自振，并确定输出信号  $c$  的自振振幅和频率，分别画出信号  $c$ 、 $x$ 、 $y$  的稳态波形。



题7-17图 非线性系统

解

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}, \quad \frac{-1}{N(A)} = \frac{-\pi A}{4}$$

绘出  $-1/N(A)$  和  $G(j\omega)$  曲线如图解7-17(a)所示，可见  $D$  点是自振点，系统一定会自振。由自振条件可得

$$N(A) = \frac{-1}{G(j\omega)}$$

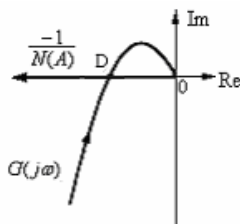
$$\text{即} \quad -\frac{4}{\pi A} = \frac{-j\omega(j\omega+2)^2}{10} = \frac{-4\omega^2}{10} + \frac{j\omega(4-\omega^2)}{10}$$

令虚部为零解出  $\omega=2$ ，代入实部

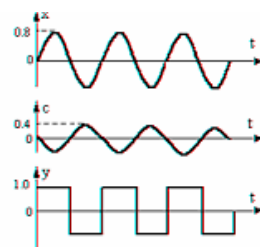
得  $A=0.796$ 。最后得出自振参数：

$$A = 0.796, \quad \omega = 2。$$

画出  $c$ 、 $x$ 、 $y$  点的信号波形如图解7-15(b)所示。



图解7-17(a)



图解7-17(b)