第六章习题及解答

6-1　试求下列函数的z变换

(1)　$e(t)=a^{\frac{t}{T}}$

(2)　$e(t)=t^2e^{-3t}$

(3)　$E(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$

(4)　$E(s)=\dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$

解　（1）$E(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$

（2）$Z\left[t^2\right]=\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$

由移位定理：

$$Z\left[t^2e^{-3t}\right]=\frac{T^2ze^{3T}(ze^{3T}+1)}{(ze^{3T}-1)^3}=\frac{T^2ze^{-3T}(z+e^{-3T})}{(z-e^{-3T})^3}$$

（3）$E(s)=\dfrac{s+1}{s^2}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}$

$$E(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

（4）$E(s)=\dfrac{c_0}{s}+\dfrac{c_1}{s+1}+\dfrac{c_2}{s+2}$

$$c_0=\lim_{s\to 0}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{3}{2}$$

$$c_1=\lim_{s\to -1}\frac{s+3}{s(s+2)}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$c_2=\lim_{s\to -2}\frac{s+3}{s(s+1)}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3/2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

$$E(z)=\frac{3z}{2(z-1)}-\frac{2z}{z-e^{-T}}+\frac{z}{2(z-e^{-2T})}$$

6－2　试分别用部分分式法、幂级数法和反演积分法求下列函数的z反变换。

(1) $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$

(2) $E(z)=\dfrac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

解 （1）$E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$

① 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{-10}{(z-1)(z-2)}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

$$E(z)=\frac{-10z}{(z-1)}+\frac{10z}{(z-2)}$$

$$e(nT)=-10\times1+10\times2^n=10(2^n-1)$$

② 幂级数法：用长除法可得

$$E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}=\frac{10z}{z^2-3z+2}=10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+\cdots$$

$$e^*(t)=10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)+\cdots$$

③ 反演积分法

$$\mathrm{Re}\,s\left[E(z)\cdot z^{n-1}\right]_{z\to1}=\lim_{z\to1}\frac{10z^n}{z-2}=-10$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[E(z)\cdot z^{n-1}\right]_{z\to2}=\lim_{z\to2}\frac{10z^n}{z-1}=10\times2^n$$

$$e(nT)=-10\times1+10\times2^n=10(2^n-1)$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}10(2^n-1)\delta(t-nT)$$

（2） $E(z)=\dfrac{-3+z^{-1}}{1-2z+z^{-2}}=\dfrac{z(-3z+1)}{z^2-2z+1}=\dfrac{z(-3z+1)}{(z-1)^2}$

① 部分分式法

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{1-3z}{(z-1)^2}=\frac{-2}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-1}$$

$$E(z)=\frac{-2z}{(z-1)^2}-\frac{3z}{z-1}$$

$$e(t)=\frac{-2}{T}t-3\times1(t)$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-2}{T}nT-3\right]\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^{\infty}(-2n-3)\delta(t-nT)$$

② 幂级数法：用长除法可得

$$E(z)=\frac{-3z^2+z}{z^2-2z+1}=-3-5z^{-1}-7z^{-2}-9z^{-3}-\cdots$$

$$e^*(t)=-3\delta(t)-5\delta(t-T)-7\delta(t-2T)-9\delta(t-3T)-\cdots$$

③ 反演积分法

$$e(nT)=\mathrm{Re}\,s\left[E(z)\cdot z^{n-1}\right]_{z\to1}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to1}\frac{d}{dz}\left[(-3z^2+z)\cdot z^{n-1}\right]$$

$$=\lim_{s\to1}\left[-3(n+1)z^n+nz^{n-1}\right]=-2n-3$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-2n-3)\delta(t-nT)$$

6-3　试确定下列函数的终值

(1)　$E(z)=\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

(2)　$E(z)=\dfrac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$

解　（1）$e_{ss}=\lim\limits_{z\to1}(1-z^{-1})\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\infty$

（2）

$$e_{ss}=\lim_{z\to1}(z-1)E(z)$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{0.792z^2}{z^2-0.416z+0.208}=\frac{0.792}{1-0.416+0.208}=1$$

6-4　已知差分方程为

$$c(k)-4c(k+1)+c(k+2)=0$$

初始条件：c(0)=0,c(1)=1。试用迭代法求输出序列c(k),k=0，1，2，3，4。

解　依题有

$$c(k+2)=4c(k+1)-c(k+2)$$

$$c(0)=0\,,\quad c(1)=1$$

$$c(2)=4\times1-0=4$$

$$c(3)=4\times4-1=15$$

$$c(4)=4\times15-4=56$$

6-5　试用z变换法求解下列差分方程：

(1)　$c(k+2)-6c(k+1)+8c(k)=r(k)$

$$r(k)=1(k),\quad c(k)=0\qquad(k\le0)$$

(2) $c(k+2)+2c(k+1)+c(k)=r(k)$

$c(0)=c(T)=0 \qquad r(n)=n, \qquad (n=0, \quad 1, \quad 2, \quad \cdots)$

(3) $c(k+3)+6c(k+2)+11c(k+1)+6c(k)=0$

$c(0)=c(1)=1, \quad c(2)=0$

(4) $c(k+2)+5c(k+1)+6c(k)=\cos(k\pi/2) \qquad c(0)=c(1)=0$

解

（1） 令 $t=-T$，代入原方程可得：$c(T)=0$。对差分方程两端取 z 变换，整理得

$$C(z)=\frac{1}{z^2-6z+8}R(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-4}$$

$$C(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{z}{z-4}$$

$$c(nT)=\frac{1}{3}\times 1^n-\frac{1}{2}\times 2^n+\frac{1}{6}\times 4^n$$

（2） 对差分方程两端取 z 变换，整理得

$$C(z)=\frac{1}{z^2+2z+1}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z+1)^2(z-1)^2}$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[C(z)\cdot z^{n-1}\right]_{z\to 1}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\cdot z^{n-1}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^n}{(z+1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}\left[nz^{n-1}(z+1)^{-2}-2(z+1)^{-3}\cdot z^n\right]$$

$$=n2^{-2}-2\cdot 2^{-3}=\frac{n-1}{4}$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[C(z)\cdot z^{n-1}\right]_{z\to 1}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\cdot z^{n-1}\right]$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^n}{(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to -1}\left[nz^{n-1}(z-1)^{-2}-2(z-1)^{-3}\cdot z^n\right]$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n-1}{4}$$

$$c(nT)=\frac{n-1}{4}\left[1+(-1)^{n-1}\right]$$

$$c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{n-1}{4}\left[1+(-1)^{n-1}\right]\right\}\delta(t-nT)$$

(3) 对差分方程两端取 z 变换得

$$\left[z^3C(z)-z^3c(0)-z^2c(1)-zc(2)\right]+6\left[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)\right]$$
$$+11\left[zC(z)-zc(0)\right]+6C(z)=0$$

代入初条件整理得

$$(z^3+6z^2+11z+6)\cdot C(z)=z^3+7z^2+17z$$

$$C(z)=\frac{z^3+7z^2+17z}{z^3+6z^2+11z+6}$$

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{z+1}-7\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2+3}$$

$$c(n)=\frac{11}{2}(-1)^n-7(-2)^n+\frac{5}{2}(-3)^n=(-1)^n\left[\frac{11}{2}-7\cdot 2^n+\frac{5}{2}\cdot 3^n\right]$$

（4） 由原方程可得

$$(z^2+5z+6)\cdot C(z)=\frac{z(z-\cos\frac{\pi}{2})}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1}=\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$C(z)=\frac{z^2}{(z^2+5z+6)(z^2+1)}=\frac{z^2}{(z+2)(z+3)(z^2+1)}$$

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{z}{(z+2)(z+3)(z^2+1)}=\frac{-2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{z-1}{z^2+1}$$

$$c(nT)=\frac{-2}{5}\cdot(-2)^n+\frac{3}{10}\cdot(-3)^n+\frac{1}{10}\left[\cos n\frac{\pi}{2}-\sin n\frac{\pi}{2}\right]$$
$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{5}\cdot 2^{n+1}-\frac{1}{10}\cdot 3^{n+1}\right]+\frac{1}{10}\left[\cos n\frac{\pi}{2}-\sin n\frac{\pi}{2}\right]$$

6-6 试由以下差分方程确定脉冲传递函数。

$$c(n+2)-(1+e^{-0.5T})\cdot c(n+1)+e^{-0.5T}c(n)=(1-e^{-0.5T})\cdot r(n+1)$$

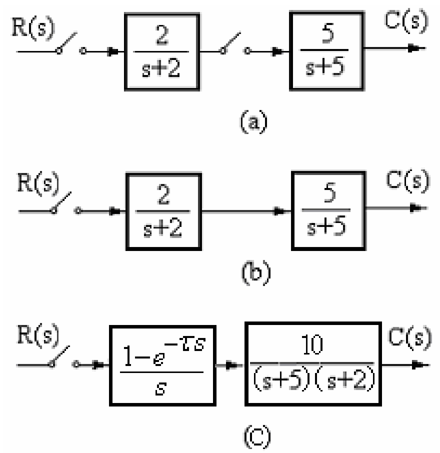
解 对上式实行 z 变换，并设所有初始条件为 0 得

$$z^2C(z)-(1+e^{-0.5T})zC(z)+e^{-0.5T}C(z)=(1-e^{-0.5T})z\cdot R(z)$$

根据定义有

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{z(1-e^{-0.5T})}{z^2-(1+e^{-0.5T})z+e^{-0.5T}}$$

6-7 设开环离散系统如题6-7图所示，试求开环脉冲传递函数 $G(z)$ 。



题6-7图 开环离散系统

解 （a）$Z\left[\dfrac{2}{s+2}\right]=\dfrac{2z}{z-e^{-2T}}$

$$Z\left[\frac{5}{s+5}\right]=\frac{5z}{z-e^{-5T}}$$

$$G(z)=Z\left[\frac{2}{s+2}\right]\cdot Z\left[\frac{5}{s+5}\right]=\frac{10z^2}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

（b）$Z\left[\dfrac{2}{s+2}\cdot\dfrac{5}{s+5}\right]=Z\left[\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{1}{s+5}\right]=\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{z(e^{-2T}-e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$

$$G(z)=Z\left[\frac{2}{s+2}\cdot\frac{5}{s+5}\right]=\frac{10}{3}\cdot\frac{z(e^{-2T}-e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

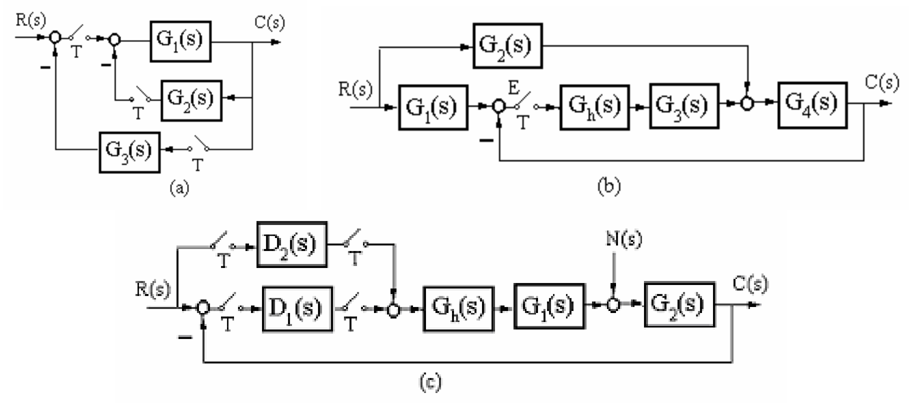
（c）$Z\left[\dfrac{(1-e^{-\tau s})}{s}\cdot\dfrac{10}{(s+2)(s+5)}\right]=10(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{1}{s(s+2)(s+5)}\right]$

$$=\frac{10(z-1)}{z}Z\left[\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{s+5}\right]$$

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{5}{3}\frac{z}{z-e^{-2T}}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-e^{-5T}}\right]=1-\frac{5}{3}\frac{z-1}{z-e^{-2T}}+\frac{2}{3}\frac{z-1}{z-e^{-5T}}$$

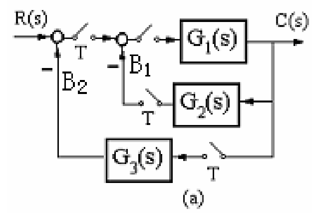
$$=\frac{(1-\frac{5}{3}e^{-2T}+\frac{2}{3}e^{-5T})z+\frac{2}{3}e^{-2T}+\frac{5}{3}e^{-5T}+e^{-7T}}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

6－8　试求下列闭环离散系统的脉冲传递函数$\Phi(z)$或输出z变换$C(z)$。



题6-8图　离散系统结构图

解（a）将原系统结构图等效变换为图解6-8(a)所示



图解6-8(a)

$$G(z)=G_1(z)\left[E(z)-B_1(z)\right]$$

$$B_1(z)=G_1G_2(z)\left[E(z)-B_1(z)\right]$$

$$\left[1+G_1G_2(z)\right]\cdot B_1(z)=G_1G_2(z)E(z)$$

$$\therefore\quad B_1(z)=\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}E(z)$$

$$=G_1(z)\left[1-\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}\right]\cdot E(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}E(z)$$

$$E(z)=R(z)-B_2(z)$$

$$B_2(z)=G_3(z)\cdot C(z)$$

$$=R(z)-G_3(z)\cdot C(z)$$

$$C(z)=\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}\cdot\left[R(z)-G_3(z)\cdot C(z)\right]$$

$$\left[1+G_1G_2(z)\right]C(z)=G_1(z)\cdot\left[R(z)-G_3(z)\cdot C(z)\right]$$

$$\left[1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)\right]C(z)=G_1(z)\cdot R(z)$$

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)}$$

（b）由系统结构图

$$C(z)=RG_2G_4(z)+E(z)G_hG_3G_4(z)$$

$$E(z)=RG_1(z)-C(z)$$

$$=RG_2G_4(z)+G_hG_3G_4(z)\left[RG_1(z)-C(z)\right]$$

$$\therefore \quad C(z)=\frac{RG_2G_4(z)+G_hG_3G_4(z)RG_1(z)}{1+G_hG_3G_4(z)}$$

（c）由系统结构图

$$C(z)=NG_2(z)+R(z)\cdot D_2(z)\cdot G_hG_1G_2(z)+E(z)\cdot D_1(z)\cdot G_hG_1G_2(z)$$

$$E(z)=R(z)-C(z)$$

$$=NG_2(z)+R(z)\cdot D_2(z)\cdot G_hG_1G_2(z)+D_1(z)\cdot G_hG_1G_2(z)\cdot\left[R(z)-C(z)\right]$$

$$C(z)=\frac{NG_2(z)+R(z)\cdot D_2(z)\cdot G_hG_1G_2(z)+D_1(z)\cdot G_hG_1G_2(z)\cdot R(z)}{1+D_1(z)\cdot G_hG_1G_2(z)}$$

$$=\frac{NG_2(Z)+\left[D_1(z)+D_2(z)\right]\cdot G_hG_1G_2(z)\cdot R(Z)}{1+D_1(z)\cdot G_hG_1G_2(Z)}$$

6—9　设有单位反馈误差采样的离散系统，连续部分传递函数

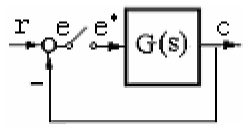
$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+5)}$$

输入$r(t)=1(t)$，采样周期$T=1s$。试求：

（1）输出 z 变换$C(z)$；

（2）采样瞬时的输出响应$c^*(t)$；

（3）输出响应的终值$c(\infty)$。



图解6-9

解　（1）依据题意画出系统结构图如图解6-9所示

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s^2(s+5)}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z(1-e^{-5})}{5(z-1)(z-e^{-5})}\right]$$

$$=\frac{\left[(4+e^{-5})z+1-6e^{-5}\right]z}{25(z-1)^2(z-e^{-5})}$$

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{(4+e^{-5})z^2+(1-6e^{-5})z}{25(z-1)^2(z-e^{-5})+(4+e^{-5})z^2+(1-6e^{-5})z}$$

$$=\frac{3.9933z^2+0.9596z}{25z^3-46.1747z^2+26.2966z-0.1684}$$

$$C(z)=\Phi(z)R(z)=\Phi(z)\frac{z}{z-1}$$
$$=\frac{(0.1597z+0.03838)z^2}{z^4-2.847z^3+2.899z^2-1.0586z+0.006736}$$
$$=0.1597z^{-1}+0.4585z^{-2}+0.842z^{-3}+1.235z^{-4}+\cdots$$

∴ （2）

$$c^*(t)=0.1597\delta(t-T)+0.4585\delta(t-2T)+0.842\delta(t-3T)+1.235\delta(t-4T)+\cdots$$

（3）判断系统稳定性

$$D(z)=25z^3-46.1747z^2+26.2966z-0.1684$$
$$n=3 \qquad (\text{奇数})$$
$$D(1)=4.9533>0\text{，}\quad D(-1)=-97.6397<0$$

列朱利表

	z_0	z_1	z_2	z_3
1	-0.1684	26.2966	-46.1747	25
2	25	-14.1747	26.2966	-0.1684
3	-624.97	1149.94	-649.64	

$$|a_0|=0.1684<a_3=25$$
$$|b_0|=624.97<|b_2|=649.64 \qquad (\text{不稳定})$$

闭环系统不稳定，求终值无意义。

6-10　试判断下列系统的稳定性

（1）已知离散系统的特征方程为

$$D(z)=(z+1)(z+0.5)(z+2)=0$$

（2）已知闭环离散系统的特征方程为

$$D(z)=z^4+0.2z^3+z^2+0.36z+0.8=0$$

（注：要求用朱利判据）

（3）已知误差采样的单位反馈离散系统，采样周期T=1(s)，开环传递函数

$$G(s)=\frac{22.57}{s^2(s+1)}$$

解　（1）系统特征根幅值

$$|\lambda_1|=|-1|=1\text{，}\qquad |\lambda_2|=|-0.5|=0.5\text{，}\qquad |\lambda_3|=|-2|=2>1$$

有特征根落在单位圆之外，系统不稳定。

（2）　　$D(z)=z^4+0.2z^3+z^2+0.36z+0.8=0$

用朱利稳定判据（$n=4$）

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
1	0.8	0.36	1	0.2	1
2	1	0.2	1	0.36	0.8
3	-0.36	0.088	-0.2	-0.2	
4	-0.2	-0.2	0.088	-0.36	
5	0.0896	-0.07168	0.0896		

$$D(z) = 3.36 > 0\,, \qquad D(-1) = 2.24 > 0$$
$$|a_0| = 0.8 < |a_4| = 1\,, \qquad |b_0| = 0.36 < |b_3| = 0.2$$
$$|c_0| = 0.896 = |c_2| = 0.0896$$

所以，系统不稳定。

（3）$G(z) = z\left[\dfrac{22.57}{s^2(s+1)}\right] = z\left[\dfrac{22.57}{s^2} - \dfrac{22.57}{s} + \dfrac{22.57}{s+1}\right]$

$$= 22.57\left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}}\right] = \frac{22.57z\left[e^{-1}z + (1-2e^{-1})\right]}{(z-1)^2(1-e^{-1})}$$

$$D(z) = (z-1)^2(z-e^{-1}) + 22.57z\left[e^{-1}z + (1-2e^{-1})\right]$$
$$= z^3 + 5.9z^2 + 7.9z - 0.368$$

用朱利稳定判据（$n=3$）

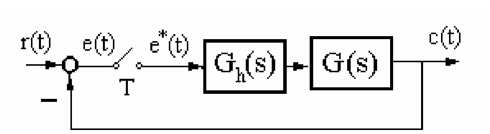
	z_0	z_1	z_2	z_3
1	-0.368	7.9	5.9	1
2	1	5.9	7.9	-0.368
3	-0.865	8.81	10.07	

$$D(1) = 14.432 > 0\,, \qquad D(-1) = -3.368 < 0$$
$$|a_0| = 0.368 < |a_3| = 1$$
$$|b_0| = 0.865 < |b_2| = 10.07 \qquad (\text{系统不稳定})$$

6-11 设离散系统如题6-11图所示，采样周期T=1(s)，$G_h(s)$为零阶保持器，而

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$$

要求：



题6-11图 离散系统

（1）当K=5时，分别在w域和z域中分析系统的稳定性；

（2）确定使系统稳定的K值范围。

解 （1）

$$G_hG(z)=(1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{K}{s^2(0.2s+1)}\right]=K\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-5T})}{5(z-1)(1-e^{-5T})}\right]$$

$$=K\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1-e^{-5T}}{5(z-e^{-5T})}\right]=K\left[\frac{\frac{4+e^{-5T}}{5}z+\frac{1+e^{-5T}}{5}-e^{-5T}}{(z-1)(z-e^{-5T})}\right]$$

$$D(z)=(z-1)(z-e^{-5T})+K\left[\frac{4+e^{-5T}}{5}z+\frac{1+e^{-5T}}{5}-e^{-5T}\right]$$

$$=z^2+\left[-(1+e^{-5T})+K(\frac{4+e^{-5T}}{5})\right]z+\left[e^{-5T}+K\frac{1-6e^{-5T}}{5}\right]$$

当$K=5$时

$$D(z)=z^2+3z+0.9663=0$$

解根得 $\lambda_1=-2.633$， $\lambda_2=-0.367$ (系统不稳定)

以$z=\dfrac{w+1}{w-1}$代入并整理得

$$D(w)=w^2+0.01357w-0.208$$

$D(w)$中有系数小于零，不满足系统稳定的必要条件。

（2）当K为变量时

$$D(z)=z^2+(0.80135K-1.006738)z+(0.1919K+0.006738)$$

以$z=\dfrac{w+1}{w-1}$代入并整理得

$$D(w)=0.9933Kw^2+(1.9865-0.3838K)w+(2.0135-0.60945K)$$

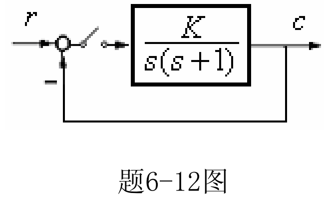
由劳斯判据可得系统稳定的K值范围为：

$$0<K<3.304$$

6-12 利用劳思判据分析题6-12图所示二阶离散系统在改变K和采样周期T的影响。

解 根据已知的$G(s)$可以求出开环脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{KZ(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$



题6-12图

闭环特征方程为：

$$1+G(z)=1+\frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}=0$$

即 $$z^2+[K(1-e^{-T})-(1+e^{-T})]z+e^{-T}=0$$

令 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$，进行 w 变换，得

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2+\left[K(1-e^{-T})-(1+e^{-T})\right]\frac{1+w}{1-w}+e^{-T}=0$$

化简整理后得

$$[2(1+e^{-T})-K(1-e^{-T})]w^2+2(1-e^{-T})w+K(1-e^{-T})=0$$

可得如下劳思表：

$$\begin{array}{lll} w^2 & 2(1+e^{-T})-K(1-e^{-T}) & K(1-e^{-T}) \\ w^1 & 2(1-e^{-T}) & \\ w^0 & K(1-e^{-T}) & \end{array}$$

得系统稳定的条件

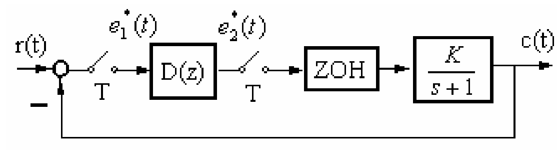
$$\begin{cases} 2(1+e^{-T})-K(1-e^{-T})>0 \\ K(1-e^{-T})>0 \\ K>0 \end{cases}$$

解得 $$0<K<\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}$$

6-13　题6-13图所示采样系统周期 $T=1(s)$

$$e_2(k)=e_2(k-1)+e_1(k)$$

试确定系统稳定时的 K 值范围。



题6-13图　离散系统

解　由于

$$e_2(k)=e_2(k-1)+e_1(k)$$
$$E_2(z)=z^{-1}E_2(z)+E_1(z)$$

则 $$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

广义对象脉冲传递函数

$$G(z)=Z\left[\frac{(1-e^{-Ts})K}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-1})Kz}{(z-1)(z-e^{-1})}\right]=\frac{0.632K}{z-0.368}$$

开环脉冲传递函数为

$$D(z)G(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{0.632K}{z-0.368}=\frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环特征方程

$$1+D(z)G(z)=z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

进行w变换，令$z=\dfrac{1+w}{1-w}$，化简后得

$$(2.736-0632)w^2+1.264w+0.632K=0$$

列出劳斯表如下

w^2	$2.736-0.632K$	$0.632K$
w^1	1.264	0
w^0	$0.632K$	

若系统稳定，必须满足$2.736-0.632K>0$， $K>0$

即 $$0<K<4.329$$

6-14 如题6-12图所示的采样控制系统，要求在$r(t)=t$作用下的稳态误差$e_{ss}=0.25T$，试确定放大系数K及系统稳定时T的取值范围。

解 $$G(z)=Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=KZ\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=K\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=\frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

因为 $$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)=\frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

所以 $$e_{ss}=\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=0.25T$$

由上式求得$K=4$。

该系统的特征方程为

$$1+G(z)=(z-1)(z-e^{-T})+4z(1-e^{-T})=0$$

即

$$z^2+(3-5e^{-T})z+e^{-T}=0$$

令$z=\dfrac{1+w}{1-w}$代入上式得

$$4(1-e^{-T})w^2+2(1-e^{-T})w+6e^{-T}-2=0$$

列出劳斯表如下

$$
\begin{array}{lll}
w^2 & 4(1-e^{-T}) & 6e^{-T}-2 \\
w^1 & 2(1-e^{-T}) & 0 \\
w^0 & 6e^{-T}-2 &
\end{array}
$$

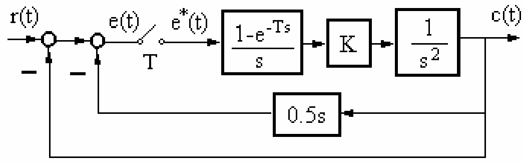
系统若要稳定，则劳斯表得第一列系数必须全部为正值，即有

$$1-e^{-T}>0, \qquad T>0$$

$$6e^{-T}-2>0, \qquad T<\ln 3$$

由此得出$0<T<\ln 3$时，该系统是稳定的。

6-15 设离散系统如题6-15图所示，其中采样周期 $T=0.2(s)$, $K=10$, $r(t)=1+t+t^2/2$,试用终值定理计算系统的稳态误差$e(\infty)$。



题6-15图 闭环离散系统

解 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right]$$

$$=(1-z^{-1})\left[\frac{5T^2(z+1)z}{(z-1)^3}+\frac{5Tz}{(z-1)^2}\right]$$

将$T=0.2$代入并整理得

$$G(z)=\frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}$$

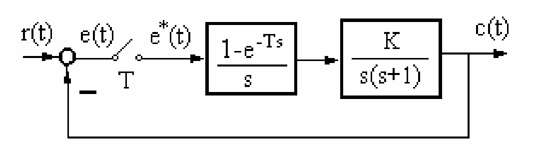
$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}=\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+1.2z-0.8}=\frac{z^2-2z+1}{z^2-0.8z+0.2}$$

$$R(z)=Z\left[1+t+\frac{t^2}{2}\right]=\left[\frac{z}{z-1}+\frac{0.2z}{(z-1)^2}+\frac{0.04z(z+1)}{2(z-1)^3}\right]$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[1+\frac{0.2}{z-1}+\frac{0.04(z+1)}{2(z-1)}\right]\left[\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}\right]=0.1$$

6-16　设离散系统如题6-16图所示，其中$T=0.1(s)$，$K=1$，$t(t)=t$，试求静态误差系数K_p、K_v、K_α，并求系统在$r(t)=t$作用下的稳态误差$e(\infty)$。



题6-16图　闭环离散系统

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

将$T=0.1$代入并整理得

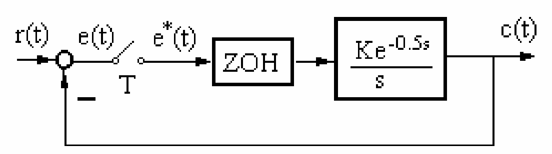
$$G(z)=\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$$

$$K_p=\lim_{z\to1}[1+G(z)]=\lim_{z\to1}\left[1+\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right]=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}=0.1$$

$$e(\infty)=\frac{1}{K_p}+\frac{T}{K_v}=1$$

6-17　已知离散系统如题6-17图所示，其中ZOH为零阶保持器，$T=0.25(s)$. 当$r(t)=2+t$时，欲使稳态误差小于0.1，试求K值。



题6-17图　闭环离散系统

解　首先验证系统的稳定性

$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{Ke^{-0.5s}}{s}=\frac{K(1-e^{-Ts})e^{-2Ts}}{s^2}$$

$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{Ke^{-2Ts}}{s^2}\right]=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{KTz}{(z-1)^2}z^{-2}=\frac{KTz^{-2}}{z-1}$$

$$\Phi(z)=\frac{KTz^{-2}}{z-1+KTz^{-2}}=\frac{KT}{z^3-z^2+KT}$$

$$D(z)=^3-z^2+KT$$

Jurry： $D(1)=1-1+KT>0\Rightarrow K>0$ ①

$D(-1)=-1-1+KT<0\Rightarrow K<\dfrac{2}{T}<8$ ②

w^3	KT	0	−1	1
w^2	1	−1	0	KT
w^1	$1-K^2T^2$	−1	KT	
w^0	KT	−1	$1-K^2T^2$	

$$\begin{cases}KT<1\Rightarrow K<\dfrac{1}{T}=4 \\ 1-K^2T^2>KT\end{cases}$$

③

$K^2T^2+KT-1<0$ 解 出 $-1.618<K<0.618$

④

综合①②③④，K 稳定的范围为

$$0<K<0.618$$

使稳态误差为0.1时的 K 值：

$$R(z)=Z\left[2\cdot 1(t)+t\right]=\frac{2z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

系统是Ⅰ型系统，阶跃输入下的稳态误差为零，斜坡输入下的稳态误差为常值

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=KT$$

$$e_{ss}=\frac{T}{K_v}=\frac{1}{K}<0.1$$

$\therefore$ $K>10$

$\therefore$ $K>10$ 时不稳定，不能使 $e_{ss}<0.1$

6-18 试分别求出题6-15图和题6-16图所示系统的单位阶跃响应 $c(nT)$ 。

解（a）

$$\Phi(z)=\frac{Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{K}{s^2}\right]}{1+Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{K}{s^2}(1+0.5s)\right]}=\frac{\frac{T^2K}{2}(z+1)}{(z-1)^2+K\left[\frac{T^2(z+1)}{2}+0.5T(z-1)\right]}$$

将$K=10,\quad T=0.2$代入得

$$\Phi(z)=\frac{0.2(z+1)}{z^2-0.8z+0.2}$$

$$C(z)=\Phi(z)\cdot R(z)=\frac{0.2(z+1)}{z^2-0.8z+0.2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{0.2(z^2+z)}{z^3-1.8z^2+0.808z-0.2}$$

$$=0.2z^{-1}+0.56z^{-2}+0.808z^{-3}+0.934z^{-4}+0.986z^{-5}+1.002z^{-6}+\cdots$$

$$c^*(t)=0.2\delta(t-T)+0.56\delta(t-2T)+0.808\delta(t-3T)+0.934\delta(t-4T)$$
$$+0.986\delta(t-5T)+1.002\delta(t-6T)+\cdots$$

(b)

$$G(z)=(1-z^{-1})K\cdot Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=K\left[\frac{T}{z-1}-\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]\overset{\substack{T=0.1\\K=1}}{=}\frac{0.00484(z+0.9667)}{(z-1)(z+0.905)}$$

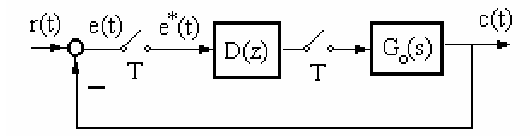
$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}\overset{\substack{T=0.1\\K=1}}{=}\frac{0.00484(z+0.9667)}{z^2-1.9z+0.901}$$

$$C(z)=\Phi(z)\cdot R(z)=\frac{0.00484(z+0.9667)}{z^2-1.9z+0.901}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{0.00484(z^2+0.9667z)}{z^3-2.9z^2+2.801z-0.901}$$

$$=0.00484z^{-1}+0.0187z^{-2}+0.0407z^{-3}+0.07z^{-4}+0.106z^{-5}+0.148z^{-6}+\cdots$$

$$c^*(t)=0.00484\delta(t-T)+0.0187\delta(t-2T)+0.0407\delta(t-3T)+0.07\delta(t-4T)$$
$$+0.106\delta(t-5T)+0.148\delta(t-6T)+\cdots$$

6-19　已知离散系统如题6-19图所示



题6-19图　离散系统

其中采样周期$T=1(s)$，连续部分传递函数

$$G_0(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

试求当$r(t)=1(t)$时，系统无稳态误差，过渡过程在最少拍内结束的数字控制器$D(z)$。

解

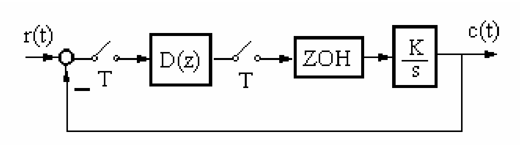
$$Z[G_0(s)]=Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}=\frac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}$$

$$r(t)=1(t)$$

查教材中表6-4有：

$$D(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})G(z)}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})\dfrac{0.63z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.37z^{-1})}}=\frac{1-0.37z^{-1}}{0.63}$$

6-20　设离散系统如题6-20图所示



题6-20图　离散系统

其中采样周期$T=1(s)$，试求当$r(t)=R_0 1(t)+R_1 t$时，系统无稳态误差、过渡过程在最少拍内结束的$D(z)$。

解　系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{K}{s^2}\right]=\frac{K}{z-1}$$

$$R(z)=\frac{R_0 z}{z-1}+\frac{R_1 z}{(z-1)^2}$$

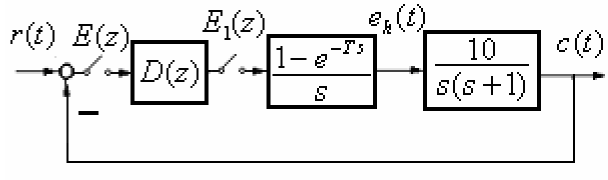
令　$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)\left[\frac{R_0 z}{z-1}+\frac{R_1 z}{(z-)^2}\right]=0$$

可取得　$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$$

则　$$\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}=\frac{(2-z^{-1})z^{-1}}{\dfrac{Kz-1}{1-z^{-1}}-(1-z^{-1})^2}=\frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$$

6-21 已知采样系统如题6-21图所示，其中采样周期$T=1(s)$，要求设计一个数字控制器$D(z)$，使系统在斜坡输入下，调节时间为最短，并且在采样时刻没有稳态误差。



题6-21图　具有数字控制器的采样系统

题6-21表　最少拍无静差系统设计结果

输入信号$r(t)$	要求的$\Phi_e(z)$	要求的$\Phi(z)$	消除偏差所需时间t_s
$1(t)$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	T
t	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$2T$
$t^2/2$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$3T$

解　根据题6-21表，对于斜坡输入信号，最少拍系统闭环脉冲传递函数应该为

$$\Phi(z)=2z^{-1}-z^{-2}=z^{-1}(2-z^{-1})$$

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$$

广义对象的脉冲传递函数为

$$G(z)=Z\left[\frac{10(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)}\right]=\frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

根据$D(z)$可实现性对$\Phi(z)$及$\Phi_e(z)$的约束条件，$D(z)$中$z=1$的极点应包含在$\Phi_e(z)$的零点之中，这一点$\Phi_e(z)$已满足，不必改变，$C(z)$中包含的延迟因子z^{-1}，也已包含在$\Phi(z)$之中，且$n-m=2-1=1$，所以按题6-21表设计的$D(z)$是可以实现的。即

$$D(z)=\frac{0.543(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$