第一章 矢量分析与场论基础

内容提要

1） 正交曲线坐标系：

设有三组互相正交的曲面族由下列方程定义：

$$q_1 = q_1(x,y,z) \quad q_2 = q_2(x,y,z) \quad q_3 = q_3(x,y,z)$$

在正交曲线坐标中的线元、面元、体元分别为

$$dl_i = h_i dq_i$$

$$\overrightarrow{dl_i} = \hat{q}_i h_i dq_i$$

$$\overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{dl_j} \times \overrightarrow{dl_k} = \hat{q}_i h_j h_k dq_j dq_k$$

$$dv = \overrightarrow{dl_i} \cdot \overrightarrow{dl_j} \times \overrightarrow{dl_k} = h_i h_j h_k dq_i dq_j dq_k$$

式中 i、j、k 代表循环量 1、2、3，$\hat{q}_i = \hat{q}_j \times \hat{q}_k$，$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j \times \hat{q}_k = 1$，

$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ 称拉梅系数。

三种坐标系中坐标单位矢量间的关系：

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

柱坐标与直角坐标

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\gamma \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

球坐标与柱坐标

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\gamma \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

球坐标与直角坐标

2） 矢量及其运算：

直角坐标中算符 ∇ 的定义：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z$$

一个标量函数u的梯度为：

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_z$$

梯度给出了一点上函数u随距离变化的最大速率，它指向u增大的方向。

一个矢量$\vec{F}$穿过一个曲面S的通量ψ为

$$\psi = \int_s \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

对一个闭合曲面而言，$\overrightarrow{ds}$向外为正。

直角坐标系中$\vec{F}$的散度

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

表示在这一点上每单位体积向外发散的$\vec{F}$的通量。

散度定理：

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

其中v是由s所包围的体积。

斯托克斯定理：

$$\int_s (\nabla \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_L \vec{F} \cdot dl$$

其中s是由l所包围的面积。

直角坐标系中$\vec{F}$的旋度

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

拉普拉辛是梯度的散度
在直角坐标系中：

$$\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

一个矢量的拉普拉辛定义为：

$$\nabla^2\vec{F}=\nabla^2 F_x\hat{e}_x+\nabla^2 F_y\hat{e}_y+\nabla^2 F_z\hat{e}_z$$

其它坐标也可写成：

$$\nabla^2 F_x=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times\nabla\times\vec{F}$$

柱坐标系中

$$\vec{r}=\rho\hat{e}_\rho+z\hat{e}_z$$

$$d\vec{r}=d\rho\hat{e}_\rho+ed\varphi\hat{e}_\varphi+dz\hat{e}_z$$

$$dv=\rho d\rho d\varphi dz$$

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\hat{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{F_\rho}{\rho}+\frac{\partial F_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{e}_\rho & \rho\hat{e}_\varphi & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

球坐标系中

$$\vec{r}=r\hat{e}_r$$

$$\overrightarrow{dr}=dr\hat{e}_r+rd\theta\hat{e}_\theta+r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$dv=r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\hat{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi})$$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{\hat{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\hat{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\hat{e}_\varphi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi\end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

3） 亥姆霍兹定理：

矢量场 $\vec{F}$ 可表示为一个无旋场分量和一个无散场分量之和

$$\vec{F}=\vec{F}_e+\vec{F}_l$$

其中

$$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}_l \qquad (\nabla\cdot\vec{F}_e=0)$$

$$\nabla\times\vec{F}=\nabla\times\vec{F}_e \qquad (\nabla\times\vec{F}_l=0)$$

因此一个矢量场要从散度和旋度两个方面去研究

4） δ 函数

定义：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\begin{cases}0 & (\vec{r}\neq\vec{r}')\\ \infty & (\vec{r}=\vec{r}')\end{cases}$$

$$\int_v\delta(\vec{r}-\vec{r}')dv=\begin{cases}0(\vec{r}'\text{在}v\text{外})\\ 1(\vec{r}'\text{在}v\text{内})\end{cases}$$

性质　a）偶函数：$\delta(x)=\delta(-x)$

b）取样性：$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$

有机会用到的表达式：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

1-1.　证明：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(\hat{e}_x9+\hat{e}_y2-\hat{e}_z6)\cdot(\hat{e}_x2+\hat{e}_y3+\hat{e}_z4)$$

=18+6-24

=0

说明 $\vec{A}$与$\vec{B}$ 相互垂直

1-2.　空白

1-3.　证明：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0$$

说明 $\vec{A}$与$\vec{B}$ 相互垂直

1-4.　解：

当坐标变量沿坐标轴由u_i增至u_i+du_i时，相应的线元矢量$\overrightarrow{dl_i}$ 为：

$$\overrightarrow{dl_i}=\vec{\gamma}(u_i+du_i)-\vec{\gamma}(u_i)$$

$$=\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial u_i}du_i$$

$$=\hat{u}_i\left|\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial u_i}\right|du_i$$

其中弧长　$\left|\overrightarrow{dl_i}\right|=dl_i=\left|\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial u_i}\right|du_i$

其中　$\vec{\gamma}=\hat{x}_1x_1+\hat{x}_2x_2+\hat{x}_3x_3=\sum_{j=1}^{3}\hat{x}_j\hat{y}_j$

$$\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\hat{x}_j$$

$$\left|\frac{\partial\vec{\gamma}}{\partial u_i}\right|=\sqrt{\sum_{j-1}^{3}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right)^2}$$

令 $h_i=\sqrt{\sum_{j-1}^{3}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right)^2}$

则 $dl_i=h_idu_i$

1-5.　解：

(1) 据∇算子的微分性质，并按乘积的微分法则，有

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\nabla(\vec{A}_c\cdot\vec{B})+\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}_c)$$

其中 $\vec{A}_c$、$\vec{B}_c$ 暂时视为常矢，再根据二重矢量积公式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})b-(\vec{a}\cdot\vec{b})c$$

将上式右端项的常矢轮换到 ∇ 的前面，使变矢都留在 ∇ 的后面

$$\vec{A}_c=\vec{a}\qquad \nabla(\vec{A}_c\cdot\vec{B})=\vec{A}_c\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}_c\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\vec{B}_c=\vec{a}\qquad \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}_c)=\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}_c\cdot\nabla)\vec{A}$$

则

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}_c\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}_c\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}_c\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}_c\cdot\nabla)\vec{A}$$

除去下标 c 即可

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

(2) 利用(1)式的结果即可。

(3) 据 ∇ 算子的微分性质，并按乘积的微分法则，有

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\nabla\cdot(\vec{E}_c\times\vec{H})+\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}_c)$$

再 ∇ 算子的矢量性，并据公式

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

将常矢轮换到 ∇ 的前面

$$\nabla\cdot(\vec{E}_c\times\vec{H})=-\vec{E}_c\cdot(\nabla\times\vec{H})\qquad \vec{E}_c=\vec{a}\qquad \nabla=\vec{b}\qquad \vec{H}=\vec{c}$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}_c)=\vec{H}_c\cdot(\nabla\times\vec{E})\qquad \vec{H}_c=\vec{a}\qquad \nabla=\vec{b}\qquad \vec{E}=\vec{c}$$

代入得：

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}_c\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}_c\cdot(\nabla\times\vec{H})$$

$$=\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})$$

1-6.

(1) 证：$\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$$=\frac{dA_x}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dA_y}{du}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dA_z}{du}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=\nabla u\cdot\frac{d\vec{A}}{du}$$

(2) 证： $\nabla\times\vec{A}(u)=\hat{e}_x(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\hat{e}_y(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\hat{e}_z(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$

右边第一项的 $\vec{x}$ 分量 $=\hat{e}_x(\frac{dA_z}{du}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{dA_y}{du}\frac{\partial u}{\partial z})=(\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du})\hat{e}_x$

同理 $\hat{e}_y(\frac{dA_x}{du}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{dA_z}{du}\frac{\partial u}{\partial x})=(\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du})\hat{e}_y$

$$\hat{e}_z(\frac{dA_y}{du}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dA_x}{du}\frac{\partial u}{\partial y})=(\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du})\hat{e}_z$$

则

$$\nabla\times\vec{A}(u)=\nabla u\times\frac{d\vec{A}}{du}$$

(3) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})=0$

1-7.

证：$\nabla R=\frac{\partial R}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z}\hat{e}_z$

$$=\frac{(x-x')}{R}\hat{e}_x+\frac{(y-y')}{R}\hat{e}_y+\frac{(z-z')}{R}\hat{e}_z=\frac{\vec{R}}{R}$$

$$\nabla' R=\frac{\partial R}{\partial x'}\hat{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y'}\hat{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z'}\hat{e}_z$$

$$=\frac{-(x-x')}{R}\hat{e}_x+\frac{-(y-y')}{R}\hat{e}_y+\frac{-(z-z')}{R}\hat{e}_z=-\frac{\vec{R}}{R}$$

所以 $\nabla R=-\nabla' R=\frac{\vec{R}}{R}$

据公式 $\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u$

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\nabla R=-\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\nabla' R=\frac{\vec{R}}{R^3}$$

所以 $\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}$

$$\nabla\times\frac{\vec{R}}{R^3}=-\nabla\times\nabla\frac{1}{R}=0$$ （梯度的旋度等于零）

$$\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\vec{R}+\vec{R}\cdot\nabla\frac{1}{R^3}$$

$$=\frac{3}{R^3}+\vec{R}\cdot(-3)\frac{1}{R^4}\nabla R$$

$$=\frac{3}{R^3}+\vec{R}\cdot\frac{-3\vec{R}}{R^5}=0 \qquad (R\neq 0)$$

同理

$$\nabla'\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=\frac{1}{R^3}\nabla'\cdot\vec{R}+\vec{R}\cdot\nabla'\frac{1}{R^3}$$

$$=\frac{-3}{R^3}+\vec{R}\cdot(-3)\frac{1}{R^4}\nabla' R$$

$$=\frac{-3}{R^3}+\vec{R}\cdot\frac{3\vec{R}}{R^5}=-\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=0 \qquad (R\neq 0)$$

1-8. 解：$\nabla\cdot\left[\vec{\mathrm{E}}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\right]=\vec{E}_0\cdot\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$

$$=\vec{E}_0\cdot\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$=\vec{E}_0\cdot(\vec{k}\cdot\nabla)\vec{r}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$=\vec{E}_0\cdot\vec{k}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$\nabla\times[\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})]=\nabla\sin(\vec{k}\cdot\vec{r})\times\vec{E}_0=\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})\vec{k}\times\vec{E}_0$$

1-9. 证： 用常矢量 $\vec{c}$ 点乘式子两边得

$$\vec{c}\cdot\int_v dv\nabla\times\vec{f}=\vec{c}\cdot\oint_s\overrightarrow{ds}\times\vec{f}=\oint_s\vec{c}\cdot(\vec{n}\times\vec{f})ds$$

上式左边： $\vec{c}\cdot\int_v dv\nabla\times\vec{f}=\int_v dv\vec{c}\cdot(\nabla\times\vec{f})$

利用矢量恒等式：

$$\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{c})=(\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\nabla\times\vec{f})$$

$$\int_v dv\vec{c}\cdot(\nabla\times\vec{f})=\int_v dv\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{c})$$

$$=\oint_s(\vec{f}\times\vec{c})\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_s(\vec{f}\times\vec{c})\cdot\vec{n}ds$$

$$=\oint_s\vec{c}\cdot(\vec{n}\times\vec{f})ds$$

因为 $\vec{c}$ 为任意常矢量，则

$$\int_v dv\nabla\times\vec{f}=\oint_s\overrightarrow{ds}\times f$$

设 $\vec{c}$ 为任意常矢量，令 $\vec{F}=\varphi\vec{c}$,代入 Stokes 定理

$$\int_s\nabla\times\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_L\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}$$

上式左边

$$\int_s\nabla\times(\varphi\vec{c})\cdot\overrightarrow{ds}=\int_s\nabla\varphi\times\vec{c}\cdot\overrightarrow{ds}=-\oint_s\vec{c}\times\nabla\varphi\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$=-\int_s\vec{c}\cdot\nabla\varphi\times\overrightarrow{ds}=\int_s\vec{c}\cdot\overrightarrow{ds}\times\nabla\varphi$$

$$=\vec{c}\cdot\int_s\overrightarrow{ds}\times\nabla\varphi$$

上面用到：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

右边

$$\oint_L\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}=\oint_L\varphi\vec{c}\cdot\overrightarrow{dl}=\vec{c}\cdot\oint_L\varphi\overrightarrow{dl}$$

则得：$\vec{c}\cdot\int_s\overrightarrow{ds}\times\nabla\varphi=\vec{c}\cdot\oint_L\varphi\overrightarrow{dl}$

因为 $\vec{c}$ 是任意的，所以

$$\int_s\overrightarrow{ds}\times\nabla\varphi=\oint_L\varphi\overrightarrow{dl}$$

1-10. 证：

据矢量场的散度定理

$$\int_V\nabla\cdot\vec{F}dv=\oint_s\vec{F}\cdot\vec{n}ds$$

令 $\vec{F}=\phi\nabla\psi$ ，ϕ 和 ψ 为空间区域中两个任意的标量函数

则

$$\int_v\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)dv=\oint_s\phi\nabla\psi\cdot\overrightarrow{ds}$$

上式左边

$$\int_v\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)dv=\int_v[\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\nabla\psi]dv$$

所以 $\int_v[\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\nabla\psi]dv=\oint_s\phi\nabla\psi\cdot\overrightarrow{ds}$

1-11. 函数 $\vec{F}$ 在 M 点的散度从它的定义推出

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \vec{F} \cdot ds}{\Delta V}$$

如图，考虑 $u_2 = c$ 的两个端面

左端面位于 u_2，右端面位于 $u_2 + du_2$

取曲面外法向为正，两个端面对

向外的通量的净贡献是

$$[\vec{F} \cdot \hat{u}_2 h_1 h_3 du_1 du_3]u_2 + du_2[\vec{F} \cdot \hat{u}_2 h_1 h_3 du_1 du_3]$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial u_2}(\vec{F} \cdot \hat{u}_2 h_1 h_3 du_1 du_2 du_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2 h_1 h_3) du_1 du_2 du_3$$

同理其余两对面分别是

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3) du_1 du_2 du_3$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2) du_1 du_2 du_3$$

即 $\oint_s \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = [\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2)] du_1 du_2 du_3$

上式除以 $\Delta V = dv = \sqrt{g} du_1 du_2 du_3$

并取极限 $du_1 \to 0, du_2 \to 0, du_3 \to 0$

则矢量 $\vec{F}$ 的散度是

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial u_I}(F_I h_J h_K)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \hat{u}_1 (\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1}) + \hat{u}_2 (\frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}) + \hat{u}_3 (\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3})$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \hat{u}_i$$

其中 $f = \nabla \cdot \vec{F}$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{g} \frac{1}{h_i^{\ 2}} \frac{\partial f}{\partial u_i})$$

第二章　宏观电磁场的基本规律

内容提要：

1. 真空中的静电场

库仑定律：实验得出，点电荷 q_1 对点电荷 q_2 施加的力是

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}^3}\vec{R}_{12}$$

式中 R_{12} 是两个点电荷之间的距离，$\vec{R}_{12}$ 是从 q_1 指向 q_2 的单位矢量。将 q_1 视为试探电荷，其上所受的力为 $\vec{F}_{12}$，则定义电场强度为

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_{12}}{q_1}$$

根据叠加原理：点电荷系及连续分布电荷的电场分别为：

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i\vec{R}_i}{4\pi\varepsilon_0R_i^3}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{R}}{R^3}dq'$$

其中 dq' 为连续分布电荷的电荷元。对体、面、线电荷分别为：

$$dq'=\begin{cases}\rho dv'\\ \rho_s ds'\\ \rho_l dl'\end{cases}$$

静电场的基本方程：

微分方程：$\nabla\times\vec{E}=0$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

积分方程：$\oint_l\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=0$

$$\oint_s\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

因此 $\vec{E}=-\nabla\phi$

其中 $\phi_P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_P^Q \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}$

2. 真空中的恒定电流的磁场

安培定律：闭合电流回路 1 的磁场作用在闭合回路 2 上的磁力是

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\overrightarrow{dl_2}\times(\overrightarrow{dl_1}\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

其中 $\vec{R}_{12}$ 是从线元 $\overrightarrow{dl_1}$ 指向 $\overrightarrow{dl_2}$ 的单位矢量。则电流 I_1 产生的磁感应强度是

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\overrightarrow{dl}\times\vec{R}}{R^3}$$

上式是毕奥–萨伐尔定律。对于连续的电流分布

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{\tau}dv'\times\vec{R}}{R^3}$$

洛仑兹力：

在磁场 $\vec{B}$ 中，一个速度为 $\vec{V}$ 的电荷 q 受到的磁力是

$$q\vec{V}\times\vec{B}$$

如果还同时存在电场 $\vec{E}$，则总的力是

$$q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$$

恒定磁场的基本方程：

微分方程：$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

积分方程：$\oint_s \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} = 0$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 I = \mu_0\int_s \vec{J}\cdot\overrightarrow{ds}$$

因此 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

其中 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \dfrac{I\overrightarrow{dl}}{r}$

是失势。这个线积分是对通有电流 I 的回路所作的

3. 电介质中的静电场

介质中的静电特性可用极化强度 $\vec{p}$ 描述。极化产生了真实的电荷聚集。由 $\vec{p}$ 可确定体与面束缚电荷密度

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{p}$$

$$\rho_{sp} = -\hat{n} \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$$

其中单位矢量 $\hat{n}$ 与介质的表面垂直，指向外方。

介质中静电场的基本方程：

微分方程：$\nabla \cdot \vec{D} = \vec{p}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (\vec{E} + \vec{p})$$

积分方程：$\oint_s \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_v \rho dv$

$$\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

说明静电场是有源无旋场。

4. 磁介质中的恒定磁场

磁化强度 $\vec{M}$ 是与电介质中的极化强度 $\vec{p}$ 相对应的量。磁化产生一等效面电流密度和等效体电流密度。其中

$$\vec{J}_{SM} = \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

等效电流与传导电流在产生磁场方面是等价的。

磁介质中恒定磁场的基本方程：

微分方程：$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

积分方程：$\oint_l \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_s \vec{J} \overrightarrow{ds}$

$$\oint_s \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

说明恒定磁场是有旋无源场。

5. 几个定律

法拉第感应定律：

微分形式：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{p}$

积分形式：$\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$

说明变化的磁场要产生电场，这个感应电场为有旋场。

欧姆定律：

在导电媒质中，传导电流密度与外加电场关系为：

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$

电荷守恒定律：

自由电荷是守恒的，$\nabla \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

束缚电荷也是守恒的，$\nabla \cdot \vec{J}_m = -\dfrac{\partial \rho_t}{\partial t}$

其中：$\vec{J}_m = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$ 是物质电荷的流动引起的电流，$\vec{J}$ 是自由电流密度，$\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ 是极化电流密度，$\nabla \times \vec{M}$ 是磁化物质中等效电流密度。$\rho_t = \rho + \rho_m$，ρ 是自由电荷密度，ρ_m 是束缚电荷密度，$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{p}$。还有第四种电流，即使在真空中亦存在，相应的电流密度为 $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$。且

$$\frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

总的体电流密度

$$\begin{aligned} \vec{J}_t &= \vec{J} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \\ &= \vec{J} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}) \\ &= \vec{J} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

其中为位移电流密度。

6. 麦克斯韦方程组

介质中的麦克斯韦方程组

微分形式：$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

积分形式：$\oint_s \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_v \rho dv$

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_s [\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}] \cdot \overrightarrow{ds}$$

真空中的麦克斯韦方程组

在上述方程中，用 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$， $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ 代入即可得真空中的麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组都适用于非均匀、非线形和非各向同性介质。

7. 电磁场的边界条件

在两种介质交界面上，场矢量满足

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

其中单位矢量由介质 1 指向介质 2。若是两种理想介质，则分界面上 $\rho_s = 0$，$\vec{J}_s = 0$。若介质 1 为理想介质，则 $\vec{D}_1 = \vec{E}_1 = \vec{H}_1 = \vec{B}_1 = 0$。

2-1. 这题的解放在第四章中

2-2. 据高斯定理

$r < r_1$ $\oint \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{ds} = 0$

$$\vec{E}_1 = 0$$

$r_1 < r < r_2$ $\oint \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{ds} = \rho_f \dfrac{4}{3\varepsilon}\pi(r^3 - r_1^3)$

$$4\pi r^2 E_2 = \rho_f \frac{4}{3\varepsilon}\pi(r^3 - r_1^3)$$

$$E_2 = \frac{\rho_f}{3\varepsilon r^2}(r^3 - r_1^3)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_f}{3\varepsilon}(r^3 - r_1^3)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$r > r_2$ $\oint \vec{E}_3 \cdot \overrightarrow{ds} = \rho_f \dfrac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)\dfrac{1}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_3 = \frac{\rho_f}{3\varepsilon_0}(r_2^3 - r_1^3)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

极化体密度：

据 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{p} = -\nabla \cdot (1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}$

$$= (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\nabla \cdot \vec{D}$$

可得:

$\rho_p = (\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\rho_f$ $r_1 < r < r_2$

$\rho_p = 0$ $r < r_1$，$r > r_2$

极化面电荷密度：

据 $\sigma_p = -\vec{n} \cdot (\vec{p}_2 - p_1)$

$r = r_1$ $\vec{E}_1 = 0$

$$\sigma_p = 0$$

$r = r_2$

$$\sigma_p = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3r_2^2}(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

2-3. 证：
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_v \rho(\vec{r}',t)\vec{r}'dv'$$
$$= \int_v \frac{d}{dt}[\rho(\vec{r}',t)\vec{r}']dv'$$
$$= \int_v \frac{\partial\rho(\vec{r}',t)}{\partial t}\vec{r}'dv'$$
$$= -\int \nabla'\cdot\vec{J}\cdot\vec{r}'dv'$$
$$= -\int_v(\nabla'\cdot\vec{J})x'dv'\vec{e}_x - \int_v(\nabla'\cdot\vec{J})y'dv'\vec{e}_y - \int_v(\nabla'\cdot\vec{J})z'dv'\vec{e}_z$$

$\vec{e}_x$ 分量：
$$\int_v(\nabla'\cdot\vec{J})x'dv' = \int_v[\nabla'\cdot(x'\vec{J}) - (\nabla'x')\cdot\vec{J}]dv$$
$$= \oint_s x'\vec{J}\overrightarrow{ds'} - \int_v J_x dv'$$

上式第一项为封闭曲面，即边界面。边界面上无电流流出，故$\oint_s x'\vec{J}\cdot\overrightarrow{ds'} = 0$。则
$$\int_v(\nabla'\cdot\vec{J})x'dv' = -\int_v J_x dv'$$
同理
$$\int_v(\nabla'\cdot\vec{J})y'dv' = -\int_v J_y dv'$$
$$\int_v(\nabla'\cdot\vec{J})z'dv' = -\int_v J_z dv'$$
因此
$$\frac{dp}{dt} = \int_v J_x dv'\vec{e}_x + \int_v J_y dv'\vec{e}_y + \int_v J_z dv'\vec{e}_z = \int_v \vec{J}dv'$$

2-4. 解：由安培环路定理：

$r < r_1$ $\quad \oint_L \vec{B}_1\cdot\overrightarrow{dl} = 0$
$$\vec{B}_1 = 0$$

$r_1 < r < r_2$ $\quad \oint_L \vec{B}_2\cdot\overrightarrow{dl} = \mu J_f \pi(r^2 - r_1^2)$
$$2\pi r B_2 = \mu J_f \pi(r^2 - r_1^2)$$
$$B_2 = \frac{\mu(r^2 - r_1^2)}{2r}J_f$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu(r^2 - r_1^2)}{2r^2}\vec{J}_f \times \vec{r}$$

$r > r_2$ $$\oint_L \vec{B}_3 \cdot \overrightarrow{dl} = \mu J_f \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$2\pi r B_3 = \mu J_f \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu(r_2^2 - r_1^2)}{2r^2}\vec{J}_f \times \vec{r}$$

磁化电流：

由 $\vec{\tau}_M = \nabla \times \vec{M}$ $$\vec{M} = (\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu})\vec{B} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{H}_0 - \vec{H}$$

$r_1 < r < r_2$ $$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\vec{B}_2) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\nabla \times \vec{B}_2$$

$$= \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0}\mu\vec{J}_f$$

$$= (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\vec{J}_f$$

$r < r_1, r > r_2$ $$\vec{J}_M = 0$$

磁化面电流密度：

$$\vec{J}_{SM} = \vec{n}(\vec{M}_1 - \vec{M}_2)$$

$r = r_1$ $$\vec{J}_M = 0$$

$r = r_2$ $$\vec{J}_{SM} = -\vec{n} \times \vec{M}_1 = -\vec{n} \times (\frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0})\vec{B}_2$$

$$= -(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2^2})(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{J}_f \times \frac{\vec{r}}{r})$$

$$= -(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2})\vec{\tau}_f$$

2-5. $$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{p} = -\nabla \cdot [(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}] = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla \cdot \vec{D} = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

2-7. 由 $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$ $\qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H} - \vec{J}) = -\nabla \cdot \vec{J}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

2-9. 证： 证明的思路是从其中两个方程出发可导出另外两个方程。我们从两个旋度方出发，导出两个散度方程

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{…………………（1）}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{………...……（2）}$$

$\nabla \cdot (1)$ 设：$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$

$$\nabla \cdot \vec{B} = C(x.y.z)$$

C 相对时间 t 而言是常数，由初始条件确定。

假设初始时刻 $\vec{B} = 0$ 或 $\vec{B} =$ 常矢（稳恒场）

则 $\quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad C(x.y.z) = 0$

$\nabla \cdot (2)$ 设：$\nabla \times \vec{H} = \nabla \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D})$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D})$$

由电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

得：$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

波动方程的推导

对（1）式两边求旋

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times (\mu \vec{H})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

$$\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\nabla\frac{\rho}{\varepsilon}+\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

以上推导中利用了矢量恒等式及其$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$， $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

同理可推出关于磁场满足的方程

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{H})=\nabla\times\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{D})=\nabla\times\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$$

$$-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2})$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

2-11. 据边界条件：

$D_{1n}=D_{2n}$ $\qquad$ $E_{1t}=E_{2t}$

$\varepsilon_1E_1\cos\theta_1=\varepsilon_2E_2\cos\theta_2$ $\qquad$ $E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2$

两式之比

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

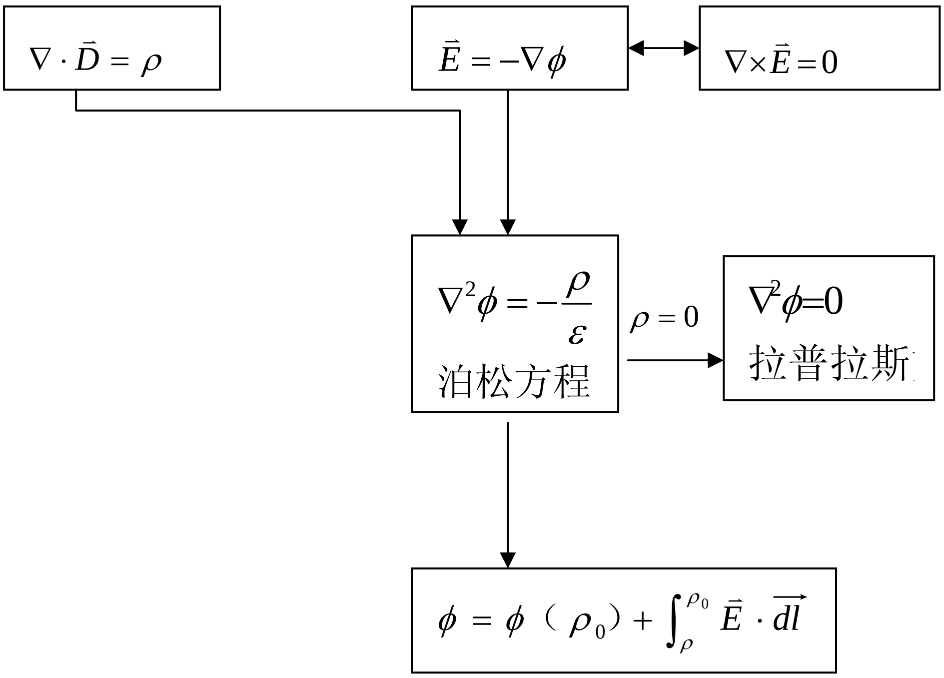
2-12. $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\qquad$ $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$\nabla\times\vec{E}=-\vec{J}_m-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\nabla\cdot\vec{B}=\rho_m$

第三章 静态电磁场

1. 静电场中，电位函数满足的方程及其边界条件

电位函数的引入及其方程的推导过程。我们以图解的方式表示



关于ϕ，一方面它有确切的物理含义，即表示空间任意两点的电势差，等于将单位电荷在电场$\vec{E}$中从一点p移到另一点p_0所作的功。另一方面在计算上它又带来极大的方便。通常计算标量比计算矢量容易得多，这就是在计算静电场时经常从计算ϕ入手的原因。

电位ϕ满足的边界条件：

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\rho_s$$

3 种情况下电位满足的边界条件：

介质 1，2 均为理想介质

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\rho_s$$

介质 1 为导体，介质 2 为理想介质

$$\phi = \phi_0(\text{常数})$$

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\rho_s$$

介质 1，2 均为导电介质，在恒定电流情况

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0$$

2. 静电场的能量，能密度；导体上的静电力

与一个电荷分布相联系的势能可写成：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \rho \phi dv$$

或 $W_e = \frac{1}{2}\int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv$

其中第一个积分中的 v 包含所有的电荷分布，第二式则包含所有 $\vec{E}$ 不为零的空间。

能量密度为：$W_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$

当 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 时：$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

导体上的静电力分两种情况：

$$\vec{F} = \nabla W_e \Big|_{\phi=\text{常}}$$

$$\vec{F} = -\nabla W_e \Big|_{q=\text{常}}$$

3. 恒定电场的方程和边界条件

微分方程：$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$

$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$

积分方程：$\oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$

$$\oint_s \vec{J}\cdot\overrightarrow{ds}=0$$

其中 $\vec{K}$ 表示电源作用在单位正电荷上的非静电力。

电位 ϕ 所满足的方程

$$\nabla^2\phi=\begin{cases}0(\text{电源外部})\\ \nabla\cdot\vec{K}(\text{电源内部})\end{cases}$$

在两导体交界面上的边界条件：

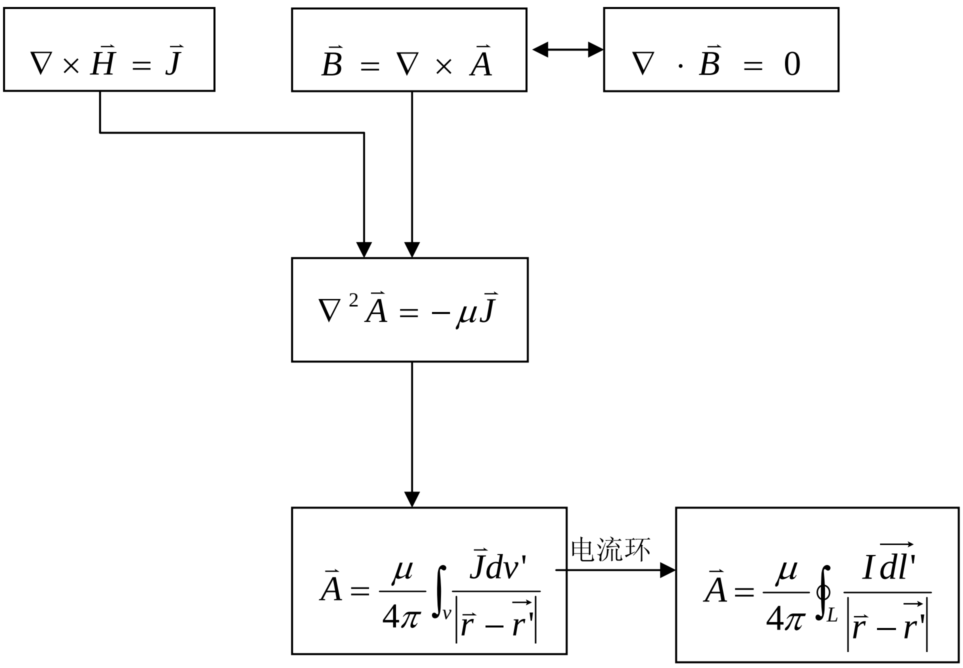
$$\phi_1=\phi_2$$

$$\sigma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$$

4. 恒定电流的磁场

磁失势所满足的方程及边界条件

磁失势的引入及方程的推导过程我们以图解的方式表示

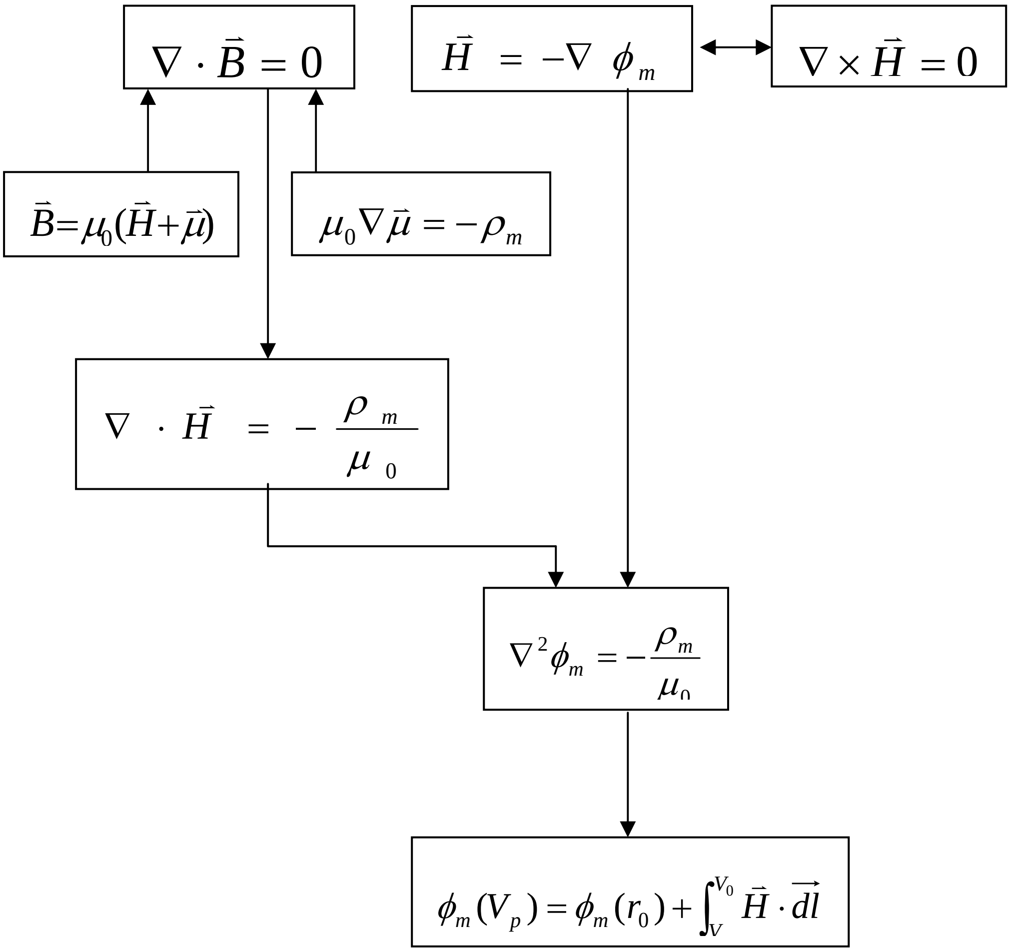


磁失势满足的边界条件：

$$A_2=A_1$$

$$\hat{n}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1\right)=\vec{\tau}_s$$

磁失势所满足的方程及边界条件：
磁失势的引入及方程的推导过程我们以图解的方式表示



其中 ϕ_m 引入的条件是无传导电流的单连通区域

如电流是环形分布的，磁标势适合的区域只能是挖去环形电流所围成的壳形之后剩下的区域。否则对于空间同一点，ϕ_m 值就不是单值的。例如，我们讨论一个环形电流附近区域（电流环除外）。该区域由于无传导电流，据条件 1）可用 ϕ_m 描述。利用

$$\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl}=I$$

其中 L 是穿过电流环的。所以 I 。另外

$$\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl}=-\oint_L \nabla\phi_m\cdot\vec{dl}=-\oint_L d\phi_m=\phi_{m2}-\phi_{m1}=I$$

ϕ_{m2}、ϕ_{m1} 是闭合线积分始点与终点的值。这说明对空间同一点，ϕ_m 不是单值的。若要

求 ϕ_m 单值，对上述积分路径应有限制，即积分路径不允许旁边以电流环为边界的任意曲面。

引入磁标势和磁荷的概念在于我们可借助于静电学中的方法使之简化计算。

磁标势 ϕ_m 满足的边界条件：

$$\phi_{m1} = \phi_{m2}$$

$$\mu_1 \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial n}$$

5. 磁场的能量与能密度

磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{J} \cdot \vec{A} dv$$

$$\text{或} W_m = \frac{1}{2}\int_v \vec{H} \cdot \vec{B} dv$$

其中第一个积分式中的 v 包含所有不为零的区域，第二式则包含所有 $\vec{B}$ 不为零的空间。

3-2. 解：

电场分布：设同轴线内导体上电荷面密度为 ρ_s，利用高斯定理，

$$a < r < b \qquad \oint_s \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = 2\pi r l D = 2\pi a l \rho_s$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_s a}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon r} \frac{\vec{r}}{r}$$

内外导体的电势差

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$\rho_s = \frac{\varepsilon V}{a \ln(b/a)}$$

则

$$\vec{E}=\frac{V}{r\ln(b/a)}\frac{\vec{r}}{r}$$

磁场分布：根据安培环路定理，

$a<r<b$ $$\oint_L \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl}=I$$

$$2\pi rH=I$$

$$H=\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$$

能流密度矢量

$a<r<b$ $$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{IV}{2\pi r^2\ln(b/a)}\vec{e}_z$$

3-3. 在无电荷区域，

若介质为均匀介质，电势ϕ满足拉普拉斯方程$\nabla^2\phi=0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

若ϕ为极大，则：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}<0$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}<0$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}<0$

这不满足拉普拉斯方程，即ϕ不能有极大值；

若ϕ为极小，则：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}>0$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}>0$，$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}>0$

不满足拉普拉斯方程，即ϕ不能有极小值。

若介质为非均匀介质

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=\vec{E}\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=-\nabla\phi\cdot\nabla\varepsilon-\varepsilon\nabla^2\phi=0$$

$$\nabla^2\phi=\frac{-1}{\varepsilon}\nabla\phi\cdot\nabla\varepsilon$$

取直角坐标：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-\frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z})$$

若ϕ为极大或极小值，则

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0$$

依前分析，ϕ 既不能达到极大值，也不能达到极小值。

3-4. 解：

① 介质界面上：　$D_{1n}=D_{2n}$　　$\rho_{sf}=0$

电容器内 $\vec{E}$ 与 $\vec{D}$ 只有法向分量：$\varepsilon_1 E_1=\varepsilon_2 E_2$　$E_2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1$

电容器极板上：$D_{1n}=\rho_{sf1}$

$D_{2n}=-\rho_{sf2}$

$$\xi=E_1 l_1+E_2 l_2=D_1(\frac{l_1}{\varepsilon_1}+\frac{l_2}{\varepsilon_2})=(\frac{l_1}{\varepsilon_1}+\frac{l_2}{\varepsilon_2})\rho_{sf1}$$

$$\rho_{sf1}=\xi\Big/(\frac{l_1}{\varepsilon_1}+\frac{l_2}{\varepsilon_2})=-\rho_{sf2}$$

② 介质分界面上：　$D_{1n}=D_{2n}$

$$-\rho_{sp}=P_{2n}-P_{1n}=D_{2n}(1-\varepsilon_0/\varepsilon_2)-D_{1n}(1-\varepsilon_0/\varepsilon_1)$$

$$=\varepsilon_0(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2})D_n$$

$$=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\xi}{\varepsilon_2 l_1+\varepsilon_1 l_2}$$

③ 若介质漏电：$\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$J_{1n}=J_{2n}=J$　　$\sigma_1 E_{1n}=\sigma_2 E_{2n}$

$$\xi=E_1 l_1+E_2 l_2=\frac{J_{1n}}{\sigma_1}l_1+\frac{J_{2n}}{\sigma_2}l_2=(\frac{l_1}{\sigma_1}+\frac{l_2}{\sigma_2})\tau$$

$$J=\xi\sigma_1\sigma_2/(\sigma_1 l_2+\sigma_2 l_1)$$

$$E_1=\frac{J}{\sigma_1}=\xi\sigma_2/(\sigma_1 l_2+\sigma_2 l_1)$$

$$E_2 = \frac{J}{\sigma_2} = \xi\sigma_1 \Big/ (\sigma_1 l_2 + \sigma_2 l_1)$$

据 $\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \rho_{sf}$ 得：

$$\rho_{sf1} = D_{1n} = \xi\varepsilon_1\sigma_2 \Big/ (\sigma_1 l_2 + \sigma_2 l_1)$$

$$\rho_{sf2} = D_{2n} = -\xi\sigma_1\varepsilon_2 \Big/ (\sigma_1 l_2 + \sigma_2 l_1)$$

$$\rho_{sf3} = D_{2n} - D_{1n} = \xi(\varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2) \Big/ (\sigma_1 l_2 + \sigma_2 l_1)$$

介质漏电，介质分界面上

$$-\rho_{sp} = P_{2n} - P_{1n} = D_{2n}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}) - D_{1n}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1})$$

$$= \xi[\sigma_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) - \sigma_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)] \Big/ (\sigma_1 l_2 + \sigma_2 l_1)$$

3-6. 解：

据高斯定理：

$$\oint_s \vec{D}\cdot\overrightarrow{ds} = \rho_l l$$

$$2\pi r l D = \rho_l l = \frac{Q}{L} l$$

$$D = \frac{Q}{2\pi r l}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\frac{\vec{r}}{r}$$

电容器的电容：

内外导体的电位差 $\varphi = \int_a^b \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln(b/a)$

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

介质所受到的作用力 $\vec{F}$ ：

电容器所储存的能量 $W = \frac{1}{2}qV$

$$= \frac{1}{2}CV^2$$

其中 C 由两部分的电容并联而成；

设介质被抽出的一段长为 x， C 便等于无介质部分的电容 C_1 与有介质部分的电容

C_2 的迭加，即

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(b/a)} + \frac{2\pi\varepsilon(L-x)}{\ln(b/a)}$$

$$= \frac{2\pi}{\ln(b/a)}[\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x]$$

则 $W = \dfrac{V^2}{2}C$

$$= \frac{V^2}{2}\frac{2\pi}{\ln(b/a)}[\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x]$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{\substack{\hat{e}_x \\ \varphi=常}} = \frac{\pi V^2}{\ln(b/a)}(\varepsilon - \varepsilon_0)\hat{e}_x$$

3-7. 据 $E_{1t} = E_{2t}$

$J_{1n} = J_{2n}$ $\qquad \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

$$tg\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}}$$

$$tg\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{E_{1n}}{E_{1t}}\frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$= \frac{E_{1n}}{E_{2n}}$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

3-8. 解：

据边界条件：$D_{2n} - D_{1n} = \rho_{sf}$

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \rho_{sf}$$

在界面两侧，当$h \to 0$时

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

在面偶极层两侧：

$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

偶极层间电场 $E_n = -\frac{\rho_{sf}}{\varepsilon_0}, \vec{E} = -\vec{n}\frac{\rho_{sf}}{\varepsilon_0}$

$$\rho_{sf} \to \infty, h \to 0$$

则$\phi_2 - \phi_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{n} \cdot \vec{p}$

利用$\oint_s \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = Q, D_{2n} - D_{1n} = 0$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0$$

3-9. 解：$B_x = B_y = 0, B_z = B_0$

由$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

得：$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$$

可得一解为： $A_z = A_y = 0$ $A_x = -B_0 y$

还可得另一解为：$A_x = A_z = 0$ $A_y = B_0 x$

还存在其它解。

两者之差的旋度：

$$\nabla\times(A_y\hat{e}_y-A_x\hat{e}_x)=\nabla\times(B_0x\hat{e}_y+B_0y\hat{e}_x)=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_0y & B_0x & 0\end{vmatrix}=0$$

3-10. 证明：设线圈中的电流分别为 $I_{1,}I_2$

线圈 1 对线圈 2 的作用力为

$$f_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{I_2\overrightarrow{dl_2}\times(I_1\overrightarrow{dl_1}\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\overrightarrow{dl_2}\times(\overrightarrow{dl_1}\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}[\frac{(\overrightarrow{dl_2}\cdot\vec{r}_{12})\overrightarrow{dl_1}}{r_{12}^3}-\frac{(\overrightarrow{dl_1}\cdot\overrightarrow{dl_2})r_{12}}{r_{12}^3}]$$

其中：

$$\oint_{L_2}\frac{\overrightarrow{dl_2}\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}=-\oint_{L_2}\overrightarrow{dl_2}\cdot\nabla\frac{1}{r_{12}}=-\int_s\nabla\times(\nabla\frac{1}{r_{12}})\cdot\overrightarrow{ds}=0$$

$$f_{12}=\frac{-\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\overrightarrow{dl_1}\cdot\overrightarrow{dl_2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

同理可证：

$$f_{21}=\frac{-\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\overrightarrow{dl_1}\cdot\overrightarrow{dl_2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{21}$$

其中：$\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$

$r_{12}^3=r_{21}^3$

则：$f_{12}=-f_{21}$

3-11. 证明：选柱坐标：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$$=(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z})\vec{e}_r+(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r})\vec{e}_\phi+[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}]\vec{e}_z$$

因为：$\vec{A}=\dfrac{r}{2}B_0\vec{e}_\phi$

$\vec{B}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\vec{e}_z=B_0$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

第四章 静电场的求解方法

1. 静电场的唯一性定理

   根据这个定理，对给定的电荷分布及边界条件，只存在一种可能的电场。这个定理在实际应用中的重要性在于：无论我们用什么方法，只要求出一个既满足方程又符合边界条件的电位 $\phi(\bar{r})$，我们就确定它是正确的电位。

2. 分离变量法

   在求满足边界条件下拉普拉斯方程的解时，一般采用分离变量法。下面给出三种坐标系中拉普拉斯方程的通解形式。

   直角坐标系中 ϕ 的通解形式：

$$\phi=\begin{cases}(a_0+ax_1)(b_0+bx_2)(c_0+c_1x_3) & (m=0,n=0)\\ \sum_{m,n}(A_m\cos k_mx_1+A_{m1}\sin k_mx_1)(B_m\cos k_nx_2+B_{m1}\sin k_nx_2)(\\ C_{mn}ch\sqrt{k_m^2+k_n^2}x_3+C_{mn1}sh\sqrt{k_m^2+k_n^2}x_3) & (m,n\neq 0)\end{cases}$$

   式中 x_1、x_2、x_3 可与 x、y、z 的任意排列相对应。

   若 ϕ 只与 x_1、x_2 有关：

$$\phi=\begin{cases}(a_0+ax_1)(b_0+bx_2) & (m=0)\\ \sum_{m,n}(A_m\cos k_mx_1+A_{m1}\sin k_mx_1)(B_mchk_mx_2+B_{m1}shk_{m1}x_2) & (m\neq 0)\end{cases}$$

   柱坐标系中的通解形式：

   若 ϕ 与 z 无关：

$$\phi=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)(C_nr^n+D_nr^{-n})$$

   其中 $0\leq\varphi\leq 2\pi$，n 是正整数

   若 $0\leq\varphi\leq\varphi_0(\varphi_0\neq 2\pi)$

$$\phi=(A_0+B_0\ln r)(C_0+D_0\varphi)+\sum_{\nu}(A_\nu r^\nu+B_\nu r^{-\nu})[C_\nu\cos(\nu\varphi)+D_\nu\sin(\nu\varphi)]$$

   其中 $\nu\neq 0$，是非整数。

   球坐标系中的通解形式：

   若 ϕ 具有轴对称性，即 ϕ 与 φ 无关：

$$\phi=\sum_{l=0}^{\infty}[A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}]p_l(\cos\theta)$$

若讨论的区域$0 \le \theta \le \pi$，则l必须取零或正整数。

$p_l(\cos\theta)$为l次勒让德多项式。

3. 镜像法

镜像法是求解边值问题的一种特殊解法。其理论依据是唯一性定理和叠加原理，其基本思想是用假想的集中电荷（镜像电荷）来等效得代替分界面上的分布电荷对场的贡献，而无需求出方程的通解，只需求解像电荷和区域内给定电荷共同产生的电位。这里要求引入的像电荷一方面不改变原问题所满足的方程（应放在求解区域外），另一方面也满足所给的边界条件。下面给出三种特殊情况下像电荷的位置与大小。

平面镜像

无限大介质界面：若点电荷Q置于平面上方h处设上半空间、下半空间分别为 1、2 介质。

上半空间：镜像电荷Q'位于与Q位置相对界面对称的位置上，大小

$$-Q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q$$

下半空间：镜像电荷Q''位于Q位置上，大小$Q''=\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q$

若原电荷不是点电荷，而是与分界面平行的线密度为λ的线电荷，则有相应的像电荷分布。

若介质 2 是理想导体，则像电荷Q'的位置不变，大小$Q'=-Q$

球面镜像

一点电荷Q置于半径为a的接地导体球外，距球心为d_1处，则像电荷位置在球心与点电荷Q的连线上，位于球内，与球心相距为d_2，其位置与大小为：

$$d_2=\frac{a^2}{d_1} \qquad Q'=-\frac{a}{d_1}$$

若导体球不接地，在球心处还有一像电荷$Q''=-Q'$。

格林函数法

格林函数法是通过格林公式将静电边值问题化为求解相应的格林函数问题，也就是将非齐次边界条件下泊松方程的求解问题简化为齐次边界条件（第二类格林函数除外）下点源激励的泊松方程求解，即格林函数的求解问题。格林函数的边界条件也分为三类：

第一类格林函数：

$$G(\bar{r},\vec{r'})$$

$$\nabla^2 G=-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\bar{r}-\vec{r'})$$

$$G\big|_S=0$$

第一类静电边值问题的解：

$$\phi(\bar{r})=\int_v\rho(\vec{r'})G(\bar{r},\vec{r'})dv'-\varepsilon\oint_s\phi(\vec{r'})\frac{\partial}{\partial n'}G(\bar{r},\vec{r'})\overrightarrow{ds}$$

第二类格林函数：

$$\nabla^2 G=-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\bar{r}-\vec{r'})$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\bigg|_s=-\frac{1}{s\varepsilon}$$

第二类静电边值问题的解：

$$\phi(\bar{r})=\int_v\rho(\vec{r'})G(\bar{r},\vec{r'})dv'+\varepsilon\oint G(\bar{r},\vec{r'})\frac{\partial\phi(\vec{r'})}{\partial n'}ds'+<\phi>_s$$

其中$<\phi>_s$为ϕ在边界面s上的平均值。若所讨论区域的边界面是无穷大，则

$<\phi>_s=0$。这是因为：

$$<\phi>_s=\frac{1}{s}\oint\phi ds'\propto\frac{1}{r}$$

第三类格林函数

$$G(\bar{r},\vec{r'})$$

$$\nabla^2 G=-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\bar{r}-\vec{r'})$$

$$(\alpha G+\beta G)_s=0$$

其中α、β为已知常数。

第三类静电边值问题的解

$$\phi(\bar{r})=\int_v\rho(\vec{r'})G(\bar{r},\vec{r'})dv'+\varepsilon\oint_s\frac{f(\vec{r'})G(\bar{r},\vec{r'})}{\alpha}ds'$$

其中$f(\vec{r'})$为：$(\alpha\varphi+\beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial n})_s=f$

简单边界的格林函数

格林函数法的关键在于找到所求问题的格林函数，而求格林函数本身并不容易。下面给出简单边界形状下第一类静电边值问题的格林函数。

无界空间的格林函数：

$$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon\left|\bar{r}-\vec{r}'\right|}$$

三维无界空间的格林函数：

$$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{-1}{2\pi\varepsilon}\ln\left|\bar{r}-\vec{r}'\right|+C$$

其中C是常数，取决于电位参考点的选取。

上半空间$z>0$的格林函数：

$$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$$

式中：$R_1=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$

$R_2=[(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2]^{1/2}$

三维半空间$(y>0)$的格林函数：

$$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

式中：$R_1=[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}$

$R_2=[(x-x')^2+(y+y')^2]^{1/2}$

球内、外空间的格林函数

球外：$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1}-\frac{a}{d_1}\frac{1}{R_2})$

式中：$R_1=[r^2+d_1^2-2rd_1\cos\theta]^{1/2}$

$R_2=[r^2+d_2^2-2rd_2\cos\theta]^{1/2}$

$d_2=\frac{a^2}{d_1}$

球内：$G(\bar{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1}-\frac{a}{d_1}\frac{1}{R_2})$

式中 d_1 是 $Q=1$ 的点电荷到球心的距离。

4. 多极矩阵法

如果我们要计算分布于小区域上的源在远区产生的场可采用多极矩阵近似法。下面我们给出两类源（源是电荷分布，源是电流分布）的势函数多极矩阵展开。

电势的多极矩阵展开：

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v \rho(\vec{r}')[\frac{1}{r} - \vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}\vec{r}'\vec{r}'\cdot\nabla\nabla\frac{1}{r} + \cdots]dv'$$

$$= \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots$$

其中第一项是点电荷的势，相当于 V 内电荷都集中在 0 点时在远区 p 点所产生的势。点电荷为：

$$Q = \int_v \rho(\vec{r}')dv'$$

第二项是偶极子的势，体系的偶极矩阵为：

$$\bar{p} = \int_v \vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

第三项是四极子的势，体系的四极矩阵为：

$$\bar{D} = \int_v 3\vec{r}'\vec{r}'\rho(\vec{r}')dv'$$

多极子个数取得愈多，近似程度就愈高，计算的误差就愈小。

多极矩阵展开的一条普通定理

定理：任何电荷分布的最低阶非零的多极矩阵的值与坐标原点的选取无关，只有更高阶的多极矩阵才依赖于坐标原点的位置。

例如，当体系的总电量 $Q=0$ 时，体系的电偶矩阵的值与坐标原点的选取无关。又如，

当体系的总电量 $Q=0$，总的电偶矩阵也为零，体系的电四矩阵与坐标原点的选取无关。

多极矩阵的几个特性：

一个体系的电荷分布

〈1〉 以坐标原点对称，其电偶极矩为零；

〈2〉 以球面对称，其电偶极矩和电四极矩都为零；

〈3〉 以轴对称，其电偶极矩只有轴向分量，电四极矩中 $D_{ij}=0(i\neq j)$；

〈4〉 对原点反对称，其总电荷为零，电四极矩为零。

失势的多极矩阵展开

$$A = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \bar{J}(\vec{r}')[\frac{1}{r} - \vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}\vec{r}'\vec{r}'\cdot\nabla\nabla\frac{1}{r} + \cdots]dv'$$

$$= A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots$$

其中第一项 $A^{(0)}=0$

因为稳定电流构成闭合回路 $\int_v \vec{J} dv' = 0$

第二项 $A^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_v \vec{r'} \times \vec{J}(\vec{r'})dv'$$

为体系的磁偶极矩对环形的闭合电流：

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_L \vec{r'} \times \overrightarrow{dl'} = IS$$

式中 S 是电流回路的面积。由此可知 $A^{(1)}$ 为磁偶极子产生的磁失势。

4-1. 设 $\vec{B}$ 具有轴对称，即

$$\vec{B}_1 = A\frac{\vec{r}}{r^2} \qquad (Z > 0)$$

$$\vec{B}_2 = A\frac{\vec{r}}{r^2} \qquad (Z < 0)$$

A, C 为待定常数

在边界上： $B_{1n} = B_{2n} = 0$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_0} = \frac{B_{2t}}{\mu}$$

$$C = \frac{\mu}{\mu_0}A$$

则： $\vec{B}_1 = A\frac{\vec{r}}{r^2} \qquad (Z > 0)$

$$\vec{B}_2 = A\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\vec{r}}{r^2} \qquad (Z < 0)$$

据环路定理：$\oint \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = I$

$$H 2\pi r = I$$

$$\vec{H} = I\frac{\vec{r}}{2\pi r^2}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 = I\frac{\vec{r}}{2\pi r^2} = \frac{A}{\mu_0}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$A=\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu I}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^2}$$

磁化面电流密度：$Z>0$. 真空 $\vec{M}_1=0$

$$Z=0 \quad \vec{J}_{SM}=-\vec{n}\times\vec{M}_2$$

$$=\vec{M}_2\times\vec{n}=\vec{M}_2\times\hat{e}_z$$

$$=(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0}-\vec{H})\times\hat{e}_z$$

$$=\frac{I}{2\pi r}(1-\frac{\mu}{\mu_0})\hat{e}_\varphi$$

$$Z<0 \quad \vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}_2=0$$

4-3. 解：

球外：$\nabla^2\phi=0$

以球心为原点，通过原点平行 $\vec{E}$ 的方向为极轴，取球坐标，则问题具有轴对称性，$\phi=\phi(r,\theta)$。方程的解为：

$$r\ge a;\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}})p_l(\cos\theta)$$

边界条件：①: $r\to\infty;\phi=-E_0 r\cos\theta+\varphi_0$

②: $r=a;\phi=\phi_0$

其中 φ_0 是一常数，它等于未放入导体球时，电场 $\vec{E}_0$ 在原点的电势。由题意可知 $\varphi_0=0$。

将边界条件①代入解中：

$$r\to\infty \qquad \phi=-E_0 r\cos\theta=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l p_l(\cos\theta)$$

比较等式两边得出

$$A_0 = 0; A_1 = -E_0; A_l = 0(l \geq 2)$$

于是得：

$$\phi = -E_0 r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} p_l(\cos\theta)$$

将边界条件②代入上式

$$r = a \qquad \phi = \phi_0 = -E_0 a \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} p_l(\cos\theta)$$

比较等式两边得出

$$B_0 = a\phi_0 \qquad B_1 = E_0 a^3 \qquad B_l = 0(l \geq 2)$$

最后得：

$$r \geq a \qquad \phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{a\phi_0}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$$

若导体球上带总电荷 Q

则 1). $r \to \infty; \phi = -E_0 r \cos\theta$

2). $r = a; \oint_s \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = Q$

可设球外电势来自三部分贡献

$$\phi = -E_0 r \cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{A}{r}$$

外场：$-E_0 r \cos\theta$

球面感应电荷：$\dfrac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$

带电导体球：$\dfrac{A}{r}$

则球上电荷面密度：

$$r = a; \rho_s = D_n = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_r$$

其中：$E_r = -\dfrac{\partial\phi}{\partial r} = E_0 \cos\theta + \dfrac{2E_0 a^3}{r^3}\cos\theta + \dfrac{A}{r^2}$

$$r = 0; \rho_s = \varepsilon_0 3E_0 \cos\theta + A\frac{\varepsilon_0}{r^2}$$

球面上总电荷量：$Q=\int_0^{\pi}\rho_s 2\pi a^2\sin\theta d\theta=4\pi\varepsilon_0 A$

$$A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

代入的表达式：$\phi=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

4-4. 解：

这是一个稳恒电场，$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，$\vec{E}=-\nabla\phi$。因此首先要求。以球心为原点，通过原点，平行$\vec{E}$的方向为极轴，取球坐标，则球内、外ϕ所满足的方程：

$$r<a;\nabla^2\phi_1=0$$

$$r>a;\nabla^2\phi_2=0$$

边界条件：1）$r\to\infty;\phi_2=-E_0 r\cos\theta(\vec{J}_{fo}=\sigma_2\vec{E}_0)$

2）$r=a;\phi_1=\phi_2$

3）$r=a;\sigma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial r}=\sigma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial r}(J_{1n}=J_{2n})$

4）$r=0;\phi_1$有限

则：

据1）得：$\phi_2=-\frac{J_{0f}}{\sigma_2}r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}p_l(\cos\theta)$

据4）得：$\phi_1=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l p_l(\cos\theta)$

据2）得：$\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l p_l(\cos\theta)=-\frac{J_{0f}}{\sigma_2}a\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{a^{l+1}}p_l(\cos\theta)$

据3）得：

$$\sigma_1\sum_{l=0}^{\infty}lA_l a^{l-1}p_l(\cos\theta)=\sigma_2[-\frac{J_{0f}}{\sigma_2}\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{B_l}{a^{l+2}}p_l(\cos\theta)]$$

比较上两式两边的系数得：

$l=1$时　　$A_1=-\frac{3J_{0f}}{\sigma_1+2\sigma_2}$

$$B_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \frac{J_{0f} a^3}{\sigma_2}$$

$l \neq 1$ 时 $\quad A_l = 0$

$$B_l = 0$$

则：

$$\phi_1 = -\frac{3J_{0f}}{\sigma_1 + 2\sigma_2} r\cos\theta = -\frac{3}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \vec{J}_{0f} \cdot \vec{r}$$

$$\phi_2 = -\frac{J_{0f} r\cos\theta}{\sigma_2} + -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \frac{a^3}{\sigma_2} \frac{J_{0f} \cos\theta}{r^2}$$

$$= -\frac{1}{\sigma_2} \vec{J}_{0f} \cdot \vec{r} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \frac{a^3}{\sigma_2} \frac{J_{0f} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

球内电流密度：$\quad \vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1 = -\sigma_1 \nabla \phi_1 = \frac{3\sigma_1}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \nabla(\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r})$

$$= \frac{3\sigma_1}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \vec{J}_{0f}$$

$$\vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2 = -\sigma_2 \nabla \phi_2$$

$$= \nabla(\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r}) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \frac{\sigma_2 a^3}{\sigma_2} \nabla(\frac{\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r}}{r^3})$$

$$= \vec{J}_{0f} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} a^3 [\frac{1}{r^3} \nabla(\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r}) + \nabla \frac{1}{r^3} (\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r})]$$

$$= \vec{J}_{0f} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} a^3 [\frac{3(\vec{J}_{0f} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{J}_{0f}}{r^3}]$$

面电荷密度：$(r = a), \rho_s = \vec{e}_r \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)$

$$= \vec{e}_r \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_1)$$

$$= \varepsilon_0 \vec{e}_r \cdot (\frac{\vec{J}_2}{\sigma_2} = \frac{\vec{J}_1}{\sigma_1})$$

$$= \frac{3(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_2} J_{0f} \cos\theta$$

注意：导体中，稳恒电流情况下$\varepsilon=\varepsilon_0$

$\because$导体内 $\vec{p}=0$

$$\vec{p}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=0$$

稳恒电流时，$\vec{E}\neq 0$，则得$\varepsilon=\varepsilon_0$

讨论

1）$\sigma_1 >> \sigma_2$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx 1$$

$$\frac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx 3$$

$$\vec{J}_1\approx 3\vec{J}_{0f}$$

$$\vec{J}_2\approx \vec{J}_{of}+a^3[\frac{3(\vec{J}_{0f}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{J}_{0f}}{r^3}]$$

2）$\sigma_1 << \sigma_2$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx 0$$

$$\vec{\tau}_1\approx 0$$

$$\vec{\tau}_2\approx \vec{J}_{of}+\frac{a^3}{2}[\frac{3(\vec{J}_{0f}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{J}_{0f}}{r^3}]$$

4-5. 解：

由镜像法知，镜像电荷有三个：

q对球面的：$q_1=-\frac{a}{b}q$　　$b'=\frac{a^2}{b}$

q对平面的：$q_3=-q$

q_1对平面的：$q_2 = -q_1 = \frac{a}{b}q$

则上半圆间任意点的电位为：

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_3} + \frac{a/b}{R_2} - \frac{a/b}{R_1}\right)$$

其中：$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{a^2}{b})^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{a^2}{b})^2}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+b)^2}$$

4-6. 解：

以圆锥顶点为原点，锥轴为极轴，取球坐标。由对称性可知，电势ϕ与方位角无关。

由题目所给边界条件，无论r为何值，电势ϕ只与θ有关，与r无关，即$\phi = \phi(\theta)$。

在求解区域内满足的方程：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\sin\theta - \frac{d\phi}{d\theta}] = 0$$

即 $\frac{d}{d\theta}[\sin\theta - \frac{d\phi}{d\theta}] = 0$

边界条件：1）$\theta = \theta_1; \phi = v_0$

2）$\theta = \theta_2; \phi = 0$

方程的解：

直接积分，并利用公式 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln(tg\frac{x}{2}) + c$

得：

$$\phi = A\ln(tg\frac{\theta}{2}) + B$$

其中、为积分常数。利用边界条件确定常数

$$\theta = \theta_1 \qquad v_0 = A\ln(tg\frac{\theta_1}{2}) + B$$

$$\theta = \theta_2 \qquad 0 = A\ln(tg\frac{\theta_2}{2}) + B$$

由上两式联立解得：

$$A = v_0 \Big/ \left[\ln(tg\frac{\theta_1}{2}) - \ln(tg\frac{\theta_2}{2})\right]$$

$$B = -v_0 \ln(tg\frac{\theta_2}{2}) \Big/ \left[\ln(tg\frac{\theta_1}{2}) - \ln(tg\frac{\theta_2}{2})\right]$$

$$\phi = \frac{v_0 \ln(tg\frac{\theta}{2}) - v_0 \ln(tg\frac{\theta_2}{2})}{\ln(tg\frac{\theta_1}{2}) - \ln(tg\frac{\theta_2}{2})}$$

$$= v_0 \ln\left(\frac{tg\frac{\theta}{2}}{tg\frac{\theta_2}{2}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{tg\frac{\theta_1}{2}}{tg\frac{\theta_2}{2}}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

4-7. 证明：$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_v \frac{\vec{p}(\vec{r'})\cdot\vec{r}}{r^3}dv'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \vec{p}(\vec{r'})\cdot\nabla'\frac{1}{r}dv'$$

利用矢量恒等式

$$\nabla'\cdot(\frac{1}{r}\vec{p}) = \frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{p} + \nabla'\frac{1}{r}\cdot\vec{p}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \nabla'\cdot(\frac{\vec{p}}{r})dv' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\nabla'\cdot\vec{p}}{r}dv'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s \frac{\vec{p}}{r}\cdot\vec{ds} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\nabla'\cdot\vec{p}}{r}dv'$$

其中利用了离散散度定理。

4-8. 证明：

由格林公式：

$$\int_v (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)dv = \oint_s (\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n})ds$$

其中ϕ满足方程：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}，\quad \nabla^2\psi = \nabla^2 G = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

$\psi = G(\bar{r}, \bar{r}')$为格林函数，且$G(\bar{r}, \bar{r}') = G(\bar{r}', \bar{r})$

将格林公式中的积分变量$\bar{r}$改为$\bar{r}'$，G中的$\bar{r}$与$\bar{r}'$互换得

$$\int_v [G(\bar{r}', \bar{r})\nabla^2\phi(\bar{r}') - \phi(\bar{r}')\nabla'^2 G(\bar{r}', \bar{r})]dv'$$

$$= \oint_s [G(\bar{r}', \bar{r})\frac{\partial\phi(\bar{r}')}{\partial n'} - \phi(\bar{r}')\frac{\partial G(\bar{r}', \bar{r})}{\partial n'}]ds'$$

上式左边第二项为

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int\phi(\bar{r}')\delta(\bar{r}' - \bar{r})dv' = \frac{1}{\varepsilon_0}\phi(\bar{r})$$

将ϕ所满足的方程代入即得

$$\phi(\bar{r}) = \int_v G(\bar{r}', \bar{r})\rho(\bar{r}')dv' + \varepsilon_0\oint_s [G(\bar{r}', \bar{r})\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(\bar{r}')\frac{\partial G(\bar{r}', \bar{r})}{\partial n'}]ds'$$

从上式可见，ϕ的贡献来自两个积分项，体积分表示源对场的贡献，面积分表示边界对场的贡献。

4-9. 解：

根据静电屏蔽，$r > R$，空间电势为 0，只要求$r < R$的空间电势。设镜像电荷$\rho_f{}'$与圆柱轴线平行，与柱轴距离a'，$a' > R$。则任意点电势为

$$\phi = -\frac{\rho_f}{2\pi\varepsilon_0}\ln r - \frac{\rho_f{}'}{2\pi\varepsilon_0}\ln r' + C$$

据边界条件，$r = R$处，$\phi = 0$。则有

$$-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta) - \frac{\rho_f{}'}{4\pi\varepsilon_0}\ln(R^2 + a'^2 - 2a'R\cos\theta) + C = 0$$

上式对任意θ都成立。柱面是等位面，在柱面上任一点$E_t = 0$，上式对θ求导。

$$\rho_f a(R^2 + a'^2 - 2Ra'\cos\theta) + \rho_f' a'(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta) = 0$$

比较项的系数得：

$$\rho_f a(a'^2 + R^2) = -\rho_f' a'(a^2 + R^2)$$

$$\rho_f' = -\rho_f$$

则可解得：

$$\rho_f' = -\rho_f \qquad a' = \frac{R^2}{a}$$

$$\rho_f' = -\rho_f \qquad a' = a \quad (舍去)$$

圆柱内任一点电位：

$$\phi = \frac{\rho_f}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{r} + C$$

常数 C 仍由边界条件定

$\theta = 0, r = R$ 时　$\phi = 0 = \dfrac{-\rho_f}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a}{R} + C$

$$C = \frac{\rho_f}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{R}$$

$$\phi = \frac{\rho_f}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{ar'}{Rr}$$

4-10. 解：

根据静电屏蔽，$r > R_1$，空间电势为零。感应电荷分布在导体内表面，即 $Q' = -Q$ 。

据镜像法，$r > R_1$，$Q' = -\dfrac{R_1}{a}Q$ 。

它到球心 O 的距离

$$a' = \frac{R_1^{\ 2}}{a}$$

球内电势 ϕ 为：

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{a}\frac{1}{r'}\right)$$

4-12. 解：

用镜像法求解。因为导体平面电位为零，则设电偶极矩的像 $\vec{p}'$，则电偶极矩 $\vec{p}$ 所受到的力就由电偶极子 $\vec{p}$ 在外场 $\vec{E}'$ 的受力公式计算，$\vec{p}'$ 在 $\vec{p}$ 处所产生的电场为：

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla(\frac{\vec{p}'\cdot\vec{r}}{r^3}) = \frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})\vec{r} - r^3\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}'$ （这式子后面将予以证明）

$$= (\vec{p}\cdot\nabla)[\frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0 r^5}]$$

$$= \frac{3\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\vec{p}\cdot\nabla)(\vec{p}'\cdot\vec{r}) + \frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{r} + \frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\vec{p}\cdot\nabla)$$

$$-\frac{\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\vec{p}\cdot\nabla)$$

$$= \frac{3\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(\vec{p}\cdot\vec{p}') + \frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{p} - \frac{3(\vec{p}'\cdot\vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^7}$$

$$+\frac{\vec{p}'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}$$

$$= \frac{3p^2\cos 2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{r} + \frac{3p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\vec{p} - \frac{15p^2\cos^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{r}$$

$$+\frac{3p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\vec{p}+\vec{p}')$$

$$= \frac{3p^2(2\cos^2\alpha - 1)}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{r} - \frac{15p^2\cos^2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{r} + \frac{3p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\vec{p}+\vec{p}')$$

因为 $\vec{p}+\vec{p}' = 2p\cos\alpha\vec{n}$，$r = 2\alpha$，$\vec{r} = \vec{n}$。

$$\vec{F} = -\frac{3p^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0 a^4}\vec{n}$$

下面证明，在静电场中电偶极子的受力为：

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) \qquad (\vec{p} = q\overrightarrow{dl})$$

证明：电偶极子是一种电荷系统，在电场中它所受到的库仑力为：

$$\vec{F} = \vec{F}_+(\vec{r}_+) + \vec{F}_-(\vec{r}_-)$$

$$=q\vec{E}(\vec{r}+\frac{\overrightarrow{dl}}{2})-q\vec{E}(\vec{r}-\frac{\overrightarrow{dl}}{2})$$

在直角坐标中：$\vec{F}=\vec{e}_xF_x+\vec{e}_yF_y+\vec{e}_zF_z$

$$F_x=q\vec{E}_x(\vec{r}+\frac{\overrightarrow{dl}}{2})-q\vec{E}_x(\vec{r}-\frac{\overrightarrow{dl}}{2})$$

其中$\overrightarrow{dl}$很小（$\overrightarrow{dl}$是两正负电荷之间的距离），则在$\frac{dl}{2}$附近展开。

$$\vec{E}_x(\vec{r}+\frac{\overrightarrow{dl}}{2})\approx q[E_x(\vec{r})+\frac{1}{2}\overrightarrow{dl}\cdot\nabla E_x(\vec{r})]$$

$$\vec{E}_x(\vec{r}-\frac{\overrightarrow{dl}}{2})\approx q[E_x(\vec{r})-\frac{1}{2}\overrightarrow{dl}\cdot\nabla E_x(\vec{r})]$$

将$\vec{p}=q\overrightarrow{dl}$代入

$$\vec{F}_x=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_x(\vec{r})$$

$$F_x=\vec{e}_x(\vec{p}\cdot\nabla E_x)+\vec{e}_y(\vec{p}\cdot\nabla E_y)+\vec{e}_z(\vec{p}\cdot\nabla E_z)$$

$$=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r})$$

$$=\nabla[\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})]$$

4-13. 解：

取球坐标。通过球心（原点）平行于$\vec{H}_0$的轴为极轴Z，在全空间所满足的方程：

$$\nabla^2\phi_m=0$$

边界条件：$r=R_1$处，$\phi_1=\phi_2$…………………（1）

$$\mu_0\frac{\partial\phi_1}{\partial r}=\mu\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\text{………………..（2）}$$

$r=R_2$处，$\phi_2=\phi_3$…………………（3）

$$\mu\frac{\partial\phi_2}{\partial r}=\mu_0\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\text{………………..（4）}$$

$r=0$　　ϕ_1有限

$$r \to \infty \quad \phi_3 = -H_0 r\cos\theta$$

通解形式：

$r < R_1$，ϕ_1有限，$B_n = 0$

$$\phi_1 = \sum A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$R_1 < r < R_2$

$$\phi_2 = \sum [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

$r > R_2$

$r \to \infty$，$\phi_3 = -H_0 r\cos\theta$，则

$$\phi_3 = -H_0 r\cos\theta + \sum \frac{B_n'}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

据边界条件确定系数：

由条件（1）、（2）、（3）、（4）得

$$\sum A_n R_1^n P_n(\cos\theta) = \sum [C_n R_1^n + \frac{D_n}{R_1^{n+1}}] P_n(\cos\theta)$$

$$\mu_0 \sum A_n n R_1^{n-1} P_n(\cos\theta) = \sum [n C_n R_1^{n-1} - (n+1)\frac{D_n}{R_1^{n+2}}] P_n(\cos\theta)\mu$$

$$\sum [C_n R_2^n + \frac{D_n}{R_2^{n+1}}] P_n(\cos\theta) = \sum \frac{B_n'}{R_2^{n+1}} P(\cos\theta) - H_0 R_2 \cos\theta$$

$$\mu \sum [n C_n R_2^{n-1} - (n+1)\frac{D_n}{R_2^{n+2}}] P_n(\cos\theta) = \mu_0 \sum [-(n+1)\frac{B_n'}{R_2^{n+2}} P_n(\cos\theta) - H_0\cos\theta]$$

联立解得：　$A_n = B_n' = C_n = D_n = 0 \qquad (n \neq 1)$

$$A_1 = \frac{-9B_0\mu}{(2\mu_0+\mu)(\mu_0+2\mu) - 2\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3 (\mu_0-\mu)^2}$$

$$C_1 = \frac{-3B_0(\mu_0+2\mu)}{(2\mu_0+\mu)(\mu_0+2\mu) - 2\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3 (\mu_0-\mu)^2}$$

$$D_1 = \frac{3B_0(\mu_0-\mu)R_1^3}{(2\mu_0+\mu)(\mu_0+2\mu)-2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3(\mu_0-\mu)^2}$$

$$B_1' = \frac{(\mu-\mu_0)(\mu_0+2\mu)(R_2^3-R_1^3)H_0}{(2\mu_0+\mu)(\mu_0+2\mu)-2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3(\mu_0-\mu)^2}$$

得球内磁场

$$\vec{H}_1 = -\nabla\phi_1 = -\nabla(A_1 r\cos\theta) = -\nabla(A_1 Z) = -A_1\hat{e}_z$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0\vec{H}_1 = -\mu_0 A_1\hat{e}_z$$

讨论：当 $\mu \to \infty$ 时

球层中：$\mu\phi_2 \approx -\frac{3B_0}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}\left(\frac{R_1^3}{2r}+r\right)$

$\vec{B}_2 = -\nabla(\mu\phi_2)$　是不等于零

而 $\vec{H}_2$ 趋于零。因为 $\mu \to \infty$ 时，$b_1 \to 0$，$c_1 \to 0$。

在球层内：$\mu \to \infty$ 时

$$B_1 \approx \frac{-9B_0}{2\mu\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]} \approx 0$$

对于一定的 μ 和一定的 R_1（内体积），R_2 愈大即层愈厚，其屏蔽越好。

第五章时变电磁场

内容提要：

1. 电磁场的波动方程

对于线性均匀各面同性介质。电磁场所满足的波动方程为：

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+D\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

对于时諧电磁场。波动方程为

$$\nabla^2\vec{E}(\bar{r})+k^2\vec{E}(\bar{r})=j\omega\mu(\bar{r})+\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$\nabla^2\vec{H}(\bar{r})+k^2\vec{H}(\bar{r})=-\nabla\times\vec{J}(\bar{r})$$

其中$k^2=\omega^2\varepsilon\mu$

2. 电磁场矢势与标势的微分方程。

电磁场波动方程中源的形式复杂。不易解出。故仍像稳恒场一样引人势涵数。

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

这样求解有源电磁场$\vec{E},\vec{B}$的问题就转化成求势涵数$\vec{A},\phi$中的问题。

洛伦兹规范：　$\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

达朗贝尔方程：$(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2})\begin{cases}\vec{A}\\ \phi\end{cases}=\begin{cases}-\mu\vec{J}\\ -\frac{1}{\varepsilon}\rho\end{cases}$

库仑规范：　$\nabla\cdot\vec{A}=0$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu[\vec{J}-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)]$$

相应的方程：　$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$

对于时谐场

洛伦兹规范：　$\nabla\cdot\vec{A}(\bar{r})+j\varepsilon\mu\omega\phi(\bar{r})=0$

相应的方程：　$$\nabla^2+k^2\begin{cases}\vec{A}(\bar{r})\\ \phi(\bar{r})\end{cases}=\begin{cases}-\mu\vec{J}(\bar{r})\\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\bar{r})\end{cases}$$

库仑规范：　$\nabla\cdot\vec{A}=0$

相应的方程：　$$\nabla^2\vec{A}(\bar{r})+k^2\vec{A}(\bar{r})=-\mu\bar{\tau}+\mu j\omega\nabla\phi(\bar{r})$$

$$\nabla^2\phi(\bar{r})=-\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon}$$

达朗贝方程在自由空间的解

$$\vec{A}(\bar{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_v\frac{\bar{\tau}(\vec{r}',t-\frac{|\bar{r}-\vec{r}'|}{v})}{|\bar{r}-\vec{r}'|}dv'$$

上式表明 $\vec{r}'$ 处 $t-\dfrac{|\bar{r}-\vec{r}'|}{v}$ 时刻的电荷电流产生的场要经过推迟时间 $\dfrac{|\bar{r}-\vec{r}'|}{v}$ 才能到达观才能到达察点 $\bar{r}$ 。所以上式代表的势称为推迟势。

对于时谐场

$$\vec{A}(\bar{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_v\frac{\bar{\tau}(\vec{r}')}{|\bar{r}-\vec{r}'|}e^{-jk|\bar{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$$\phi(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v\frac{\rho(\vec{r}')}{|\bar{r}-\vec{r}'|}e^{-jk|\bar{r}-\vec{r}'|}dv$$

3. 电磁场的能量及坡印延定理

表示电磁场能量守恒与转换关系的是坡印延定理。

定理的积分形式：　$$-\oint_s\vec{E}\times\vec{H}\cdot\vec{ds}=\frac{\partial}{\partial t}\int_v(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}-\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D})dv+\int_v\vec{E}\cdot\bar{\tau}dv$$

微分形式：　$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D})-\vec{J}\cdot\vec{E}$$

其中坡印延矢量：　$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

电能密度：　$w_e=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

磁能密度：　$w_m=\dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

单位体积内焦耳热损耗：　$\vec{E}\cdot\vec{J}=\sigma E^2$

对于时谐场，复坡印延定理的积分形式

$$-\oint_s (\frac{1}{2}\vec{E}\times\overrightarrow{H^*})\cdot\overrightarrow{ds} = \int_v \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{J^*}dv + j2\omega\int_v (\frac{1}{4}\vec{B}\cdot\overrightarrow{H^*} + \frac{1}{4}\vec{E}\cdot\overrightarrow{D^*})dv$$

其中平均坡印延矢量 $\overrightarrow{S_{av}} = \frac{1}{2}R_e(\vec{E}\times\overrightarrow{H^*})$

平均电能密度： $W_e = \frac{1}{2}R_e(\vec{E}\cdot\overrightarrow{D^*})$

平均磁能密度： $W_m = \frac{1}{4}R_e(\vec{B}\cdot\overrightarrow{H^*})$

平均单位体积内焦耳热损耗： $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{J^*} = \frac{1}{2}\sigma\vec{E}\cdot\overrightarrow{E^*}$

时变电磁场的唯一性定理

一般的时变场问题是有方程（5-1-4），（5-1-5）的求解问题，则问题可分为三类。

1）混合问题，即有初始条件，又有边介条件的问题。

2）边值问题或无初始条件问题，这类问题有两种可能，（1）恒定场（或静态场）问题，这就是泊松方程（或拉普拉斯方程 ）的边值问题。 （2）问题所处的时间距初始状态的时间足够长致使初始状态对的影响可忽略这就是稳态，简谐的变姆霍兹方程问题。

3）初值问题或无边介条件问题，即问题所涉及的区域边介足够远致使边介影响可忽略我们主要研究的是有边介问题，其中第二类中（1）的唯一性定理前面已讲，本章研究的是混合问题的唯一性定理。

亥姆霍兹方程边值的唯一性定理

定理表述：处处给定闭合在区域v内，源密度处处给定，在区域边介上电场的切向分量或磁场的切向分量处处给定。则区域v内麦克斯韦方程或亥姆霍兹方程的解是唯一的。以上定理也包括无源问题。

4. 均匀平面电磁波

在无源、无界、均匀、各向同性、线性、静止的媒介中

波动方程：

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \qquad (\nabla\cdot\vec{E} = 0)$$

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \qquad (\nabla\cdot\vec{H} = 0)$$

其中 $k^2\varepsilon\mu\omega^2$

波动方程解的最简单形式：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (\vec{E}_0 = \text{常矢})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jkz} \quad (\text{仅沿 z方向传播})$$

平面波的特点：1） $\vec{E}\perp\vec{H}$,都是横向. $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ 指向波的传播方向；

2）$E/H = \omega\mu/k$（振幅比），是一无衰减的等幅行波；

3）$\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}$为实数，$\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 同相

4）$W_{eav} = W_{mav} = \dfrac{1}{4}\varepsilon E_0^2 = \dfrac{1}{4}\mu H_0^2$

$\overrightarrow{S_{av}} = \hat{k} v W_{av}$

$W_{av} = \hat{k} v W_{av} \qquad W_{av} = \dfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2 = \dfrac{1}{2}\mu H_0^2, v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

5. 平面电磁波的极化

线极化波的矢量：$\vec{E} = \hat{n}_1 E_0 e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

是垂直传播方向的横截面内任一方向上的单位矢量。

圆极化波的电矢量：$\vec{E} = (\hat{n}_1 \pm j\hat{n}_2) E_0 e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$\hat{n}_1$、$\hat{n}_2$ 是横截面内一对相互垂直的单位矢量，与 $\hat{k}$ 的方向关系 $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \hat{k}$ 。沿传播方向观察，"+"、"−" 号分别表示左、右旋圆极化波，即 $\vec{E}_2$ 超前或滞后 $\vec{E}_1$。

椭圆极化波的电矢量：

$\vec{E} = (\hat{n}_1 E_1 e^{j\varphi_1} + \hat{n}_2 E_2 e^{j\varphi_2}) e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

同理，$\vec{E}_2$ 超前或滞后 $\vec{E}_1$ 分别表示左、右旋椭圆极化波。

第六章 电磁波的辐射

内容提要：

1. 磁失势的多极矩展开

   当我们研究随时间变化的电流或电荷分布于空间一很小区域内的辐射问题时，可作多极展开。

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi r}e^{-jlr}\int_v \vec{J}(\vec{r'})\left[1+jk\hat{r}\cdot\vec{r'}+\frac{1}{2!}(jk\hat{r}\cdot\vec{r'})^2+\cdots\right]dv'$$

$$=\vec{A}^{(0)}(\vec{r})+\vec{A}^{(2)}(\vec{r})+\vec{A}^{(2)}(\vec{r})+\cdots$$

第一项：$\vec{A}^{(0)}=\frac{\mu}{4\pi}e^{-jkr}\int_v \vec{J}(\vec{r'})dv'$

为电偶极子的势，其中$\int_v \vec{J}(\vec{r'})dv'=j\omega\vec{p}$，$\vec{p}$ 为电荷分布的电偶极矩。

第二项：$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi}e^{-jkr}\int_v (jk)^2\vec{J}(\vec{r'})(\hat{r}\cdot\vec{r'})^2 dv'$

$$=\frac{jk\mu}{4\pi r}e^{-jkr}[-\vec{r}\times\vec{m}+j\omega\frac{1}{6}\vec{r}\cdot\vec{D}]$$

$$=\vec{A}_m^{(1)}+\vec{A}_e^{(1)}$$

$\vec{A}_m^{(1)}$、$\vec{A}_e^{(1)}$ 为磁矩，电四极矩的贡献。其中磁偶极矩电四极矩为：

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int_v \vec{r'}\times\vec{J}(\vec{r'})dv'$$

$$\vec{D}=\int_v 3\rho(\vec{r'})\vec{r'}\vec{r'}dv'$$

2. 电偶极子和磁偶极子辐射

   偶极子辐射是一种重要且简单的辐射形式。下面我们将其主要公式表示于表格中

	电偶极子	磁偶极子
失势 $\vec{A}$	$\vec{A}=\hat{e}_z\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r}e^{-jkr}$	$A_\varphi=\hat{e}_z\frac{jk\mu_0 Is}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr}$
辐射电场	$\vec{E}_\theta\approx j\frac{I_0 L}{2\lambda r}\sin\theta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-jkr}$	$E_\varphi=\frac{I_0\nabla sk^2}{4\pi r}\sin\theta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-jkr}$
辐射磁场	$H_\varphi\approx j\frac{I_0 L}{2\lambda r}\sin\theta e^{-jkr}$	$H_\theta=-\frac{I_0\nabla sk^2}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr}$

平均坡印廷矢量	$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}(\frac{I_0L}{2\lambda r})^2\sin\theta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\hat{r}$	$\vec{S}_{av}=j\frac{I_0^2\nabla s^2}{2(4\pi r)^2}k^4\sin^2\theta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\hat{r}$
辐射功率	$p=\frac{1}{2}I_0^2 80\pi^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$	$p=160I_0^2\pi^6\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (\nabla s=\pi a^2)$
辐射电阻	$R_r=80\pi^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$	$R_r=320I_0^2\pi^4\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$
强度均一化函数	$F(\theta)=\sin\theta$	$F(\theta)=\sin\theta$

3. 线天线辐射

半波天线：长度为$\frac{\lambda}{2}$，中心馈电的直线状天线

电流分布 $I(z)=I_0\cos kz \qquad |z|\le\frac{\lambda}{4}$

辐射场 $\vec{E}_\theta=j\eta_0 I_0\frac{\cos(\frac{\pi\sin\theta}{2})}{2\pi r\sin\theta}e^{-jkr}$

$$H_\varphi=jI_0\frac{\cos(\frac{\pi\sin\theta}{2})}{2\pi r\sin\theta}e^{-jkr}$$

平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}=\frac{\eta_0 I_0^2}{2(2\pi r)^2}\frac{\cos^2(\frac{\pi\sin\theta}{2})}{\sin^2\theta}\hat{r}$

辐射功率 $p=1.22\eta_0\frac{I_0^2}{4\pi}$

辐射电阻 $R_r=\frac{\eta_0}{4\pi}\approx 73(\Omega)$

强度均一化函数 $F(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\cos\theta(\frac{\pi\sin\theta}{2})$

天线阵（相控阵天线）

特例：N 个天线单元沿极轴等距排列，相邻天线距离为 d，相邻天线在φ方向的相位差为$\delta=kd\sin\varphi$，单元天线的电场为$\vec{E}_0$。则天线阵的辐射场为：

$$\vec{E}(\bar{r}) = \vec{E}_0(\bar{r})\frac{\sin(\frac{N}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{j(\frac{N-1}{2}x)}$$

其中 $x = \frac{\pi}{2\lambda}d\sin - \phi_0$

ϕ_0 为相邻天线的初相位差（可控制的）

归一化方向性因子： $f(\varphi) = \frac{\sin(N\frac{x}{2})}{N\sin(\frac{x}{2})}$

最大辐射条件： $\frac{df}{dx} = 0$.即 $\phi_0 = 0$ 可得

$$\sin\varphi = \sin\phi_0 = \frac{\phi_0}{kd}$$

由此可见改变 ϕ_0，就可改变最大辐射方向。这就是相控阵天线的工作原理。

4. 天线的电参数

天线方向性函数 D：

定义：$D(\theta,\varphi) = \frac{dp/d\Omega}{p/4\pi} = \kappa F^2(\theta,\varphi)$

其中，$dp/d\Omega$ 为天线单位立体角所辐射的功率

$p/4\pi$ 为单位立体角平均辐射功率

$\kappa = \frac{4\pi}{\oint_s F^2(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi}$ 为方向性系数

$F(\theta,\varphi) = \frac{|E(\theta,\varphi)|}{|E_{\max}|}$ 为场强度的归一化函数或方向图因子

天线的波束宽度 $\Delta\varphi_{0.5}$

定义：主波束两侧最大值一半的两点（即半功率点或场强下降为最大值的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ）之间的夹角为波束宽度。

天线的效率η

定义：$\eta = \dfrac{p}{p_{in}}$

其中， p 为天线的辐射功率， p_{in} 为输入到天线的功率。

天线的增盖函数G

定义：$G(\theta,\varphi) = \dfrac{dp/d\Omega}{p_{in}/4\pi} = \eta D(\theta,\varphi)$

其中, $p_{in}/4\pi$ 为单位立体角平均输入功率。

天线的输入阻抗Z_A

定义：$Z_A = \dfrac{V_{in}}{I_{in}} = R_A + jX_A$

下面给出电偶极子与半波天线的$F(\theta,\varphi)$、κ、$\Delta\varphi_{0.5}$与R_r

	电偶极子	半波天线
场强度归一化函数$F(\theta,\varphi)$	$\lvert\sin\theta\rvert$	$\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta)}{\sin\theta}$
方向性系数κ	$\dfrac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi} = 1.5$	1.64
波束宽度$\Delta\varphi_{0.5}$	$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Delta\varphi_{0.5} = 2\varphi_{0.5} = 90^0$	$\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Delta\varphi_{0.5} = 2\varphi_{0.5} = 78^0$
辐射电阻R_r	$p_r = \int_\sigma \vec{S}_{av}\cdot d\sigma$ $= \int_0^{\pi} s2\pi r^2\sin\theta d\theta$ $= \dfrac{2\eta_0\pi^2 I_0^2}{3}\left(\dfrac{L}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\dfrac{L}{\lambda}\right)^2$	$p_r = \dfrac{I_0^2\eta_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}d\theta$ $= 1.218\dfrac{I_0^2\eta_0}{4\pi}$

	$R_r = \frac{2p_r}{I_0^2} = 80\pi^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$	$R_r \approx 73\Omega$

5. 对偶定理

在麦克斯韦方程中引入等效磁荷与等效电流后，仅由电荷、电流作为源激发的电磁场和仅由等效磁荷、等效磁流作为源激发的电磁场，如按下列方式进行变量调换，其场方程是对偶的。

$$\nabla\times\vec{E}_e = j\omega\mu\vec{H}_e \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}_e \leftrightarrow \vec{H}_m \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times\vec{H}_m = j\omega\varepsilon\vec{E}_m$$

$$\nabla\times\vec{E}_e = j\omega\varepsilon\vec{H}_e + \vec{J}_e \qquad \vec{H}_e \leftrightarrow -\vec{E}_m \qquad \nabla\times\vec{E}_m = -j\omega\mu\vec{H}_m - \vec{J}_m$$

$$\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_e = \rho_e \qquad \vec{J}_e \leftrightarrow \vec{J}_m \qquad \nabla\cdot\mu\vec{H}_m = \rho_m$$

$$\nabla\cdot\mu\vec{H}_e = 0 \qquad \Leftarrow \qquad \rho_e \leftrightarrow e_m \qquad \Leftarrow \qquad \nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_m = 0$$

$$\varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\mu \leftrightarrow \varepsilon$$

因此，只要求出其中一组方程的解，就可根据对偶原理得到在同样条件下另一组方程的解。

另一方面，仅由面电荷、面电流构成 的边界条件与银由面磁荷、面磁流构成的边界条件同样是对偶的。

$$\hat{n}\times(\vec{E}_{e2} - \vec{E}_{e1}) = 0 \qquad \hat{n}\times(\vec{H}_{m2} - \vec{H}_{m1}) = 0$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_{e2} - \vec{H}_{e1}) = \vec{J}_{es} \qquad \hat{n}\times(\vec{E}_{m2} - \vec{E}_{m1}) = -\vec{J}_{ms}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_{e2} - \vec{D}_{e1}) = \rho_{es} \qquad \hat{n}\cdot(\vec{B}_{m2} - \vec{B}_{m1}) = \rho_{ms}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_{e2} - \vec{B}_{e1}) = 0 \qquad \hat{n}\cdot(\vec{D}_{m2} - \vec{D}_{m1}) = 0$$

注意：应用对偶定理于边值问题时，要求方程与边界条件都必须是对偶的。如在理想导体表面附近的电偶极子与杂理想磁体表面附近的磁偶极子两者在边界上才具有对偶性。

6. 时变电磁场的镜像原理

当界面为理想导体时，静态电磁场的镜像原理也适用于时变电磁场。

第七章 电磁波传播的理论基础

内容提要：

1. 平面波反射与折射的基本规律

平面波在传播过程中如遇到媒质界面，则产生反射与折射，入射波与反射波迭加所形成界面一侧的场与界面另一侧的折射波应满足边界条件。因此可推出关于波的方向关系，即反射定律与折射定律；波的振幅关系，即菲涅尔公式。

反射定律、折射定律：

入射波、反射波与折射波共面、同频，且

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{V_{p1}}{V_{p2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

菲涅尔公式：

$$\Gamma_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$T_\perp = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta 1_2\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$$

$$T_{11} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$$

对于非磁性电介质， $\mu_1 = \mu_2, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, n_{21} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_\perp = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}} = \frac{2\sin\theta_t\sin\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{n_{21}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{21}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}} = \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_{11} = \frac{2n_{21}\cos\theta_i}{n_{21}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta_i}}$$

对于磁性介质，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \mu_1 \neq \mu_2, n_{21} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\sqrt{\mu_2}\cos\theta_i - \sqrt{\mu_1}\cos\theta_t}{\sqrt{\mu_2}\cos\theta_i + \sqrt{\mu_1}\cos\theta_t}$$

$$T_{\perp} = \frac{2\sqrt{\mu_2}\cos\theta_i}{\sqrt{\mu_2}\cos\theta_i + \sqrt{\mu_1}\cos\theta_t}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_i - \sqrt{\mu_2}\cos\theta_t}{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_i + \sqrt{\mu_2}\cos\theta_t}$$

$$T_{11} = \frac{2\sqrt{\mu_2}\cos\theta_i}{\sqrt{\mu_1}\cos\theta_i + \sqrt{\mu_2}\cos\theta_t}$$

全反射与全透射

全反射：

对非磁性介质$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，如果$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，$\sin\theta_t \geq 1$时，$\Gamma = 1$发生全反射，则临界角

全透射：

对非磁性介质，当平行极化波以布鲁斯特角$\theta_B = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = tg^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$入射时，

$\Gamma_{11} = 0$，发生全透射。

如果是导电媒质，用$\varepsilon' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$代替$\varepsilon$，则反射定律、折射定律及菲涅尔公式仍可应用。

2. 导电介质中的均匀平面波

波动方程：$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0$$

其中　$k^2=\omega^2\mu\varepsilon'=\omega^2\mu(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega})$

$\vec{k}=\vec{\beta}-j\vec{\alpha}=(\beta-j\alpha)\vec{n}$

上式中取 $\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha}$ 同方向，α 与 β 的具体表示是教材中（7-3-9）式。

平面波的解：

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0e^{-\alpha\vec{n}\cdot\vec{r}}e^{-j\beta\vec{n}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\tilde{\eta}}\vec{n}\times\vec{E}$$

其中 $\tilde{\eta}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$

波的特点：a) 电磁波为 TEM 波。$\vec{E}$ 、$\vec{H}$ 、$\vec{K}$ 相互垂直，服从右手螺旋关系; b) $\tilde{\eta}$ 为复数。$\vec{E}$ 、$\vec{H}$ 间存在相位差; c) 相速 $V_p=\frac{\omega}{\beta}$ 与频率有关，损耗媒质为色散媒质; d) 电磁波是一衰减的行波，起穿透深度 $\delta=\frac{1}{\alpha}$ 。

特例：良导体 $\sigma>>\omega\varepsilon$

$$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\qquad\delta=\frac{1}{\alpha}\qquad\tilde{\eta}=(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^0}$$

$$V_p=\frac{\omega}{\beta}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

群速 V_p ：群速即波色移动的速度。

三维：$V_p=\nabla\omega(k)\Big|_{\omega_0}=\hat{e}_x\frac{\partial\omega}{\partial k_x}+\hat{e}_y\frac{\partial\omega}{\partial k_y}+\hat{e}_z\frac{\partial\omega}{\partial k_z}$

一维：$V_p=\frac{d\omega}{dk}=V_p+k\frac{dV_p}{dk}$

3. 电磁波的衍射

在衍射孔尺寸 $>>\lambda$ 时，忽略电磁在孔边缘上偏振性质的影响，即忽略电磁场的矢量性，而用标量理论求解，从标量波动方程得到的 Kirchhoff 公式为：

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_s [\nabla'\phi(\vec{r'}) + \hat{k}(jk + \frac{1}{k})\phi(\vec{r'})]\frac{e^{-jkR}}{k} \cdot \overrightarrow{ds'}$$

特例：小孔衍射。在基尔霍夫所作的两个假设条件下

a）小孔上 ϕ 与 $\nabla'\phi$ 与 λ 入射波相同

b）小孔以外不透明屏上 $\phi = 0$ ，$\nabla'\phi = 0$

可得求解区域中任意一点 p 处的场振幅为：

$$\phi(\bar{r}) = \frac{-jkA}{4\pi}\int_{S_a}(\hat{R}_0 + \hat{R})e^{-jk(R+R_0)} \cdot \overrightarrow{ds'}$$

其中 $\phi(\vec{r'}) = \dfrac{A}{R_0}e^{-jkR_0}$ ，$\hat{R}_0$ 、$\hat{R}$ 分别是光源与场点指向屏的单位矢量。S_a 为孔面积。

4. 各向异性介质中的电波传播

若 $\bar{D}$ 与 $\bar{E}$ 的方向不一致，且各方向的极化率不同，即极化率是张量。这种媒质是各向异性媒质。同理，$\vec{H}$ 与 $\vec{B}$ 的方向不一致，且各方向磁化率不同，即磁化率是张量，是磁各向异性媒质。

各向异性介质本构关系：

$$\bar{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{E}$$

$$\bar{B} = \bar{\mu} \cdot \bar{H}$$

其中 $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}$ 为张量：

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

特例：磁化等离子体的本构关系：

$$\bar{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$$

其中 $\bar{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & j\varepsilon_2 & 0 \\ -j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$

当外加恒定磁场 $\vec{B}_0=0$ 时

$$\bar{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}=\varepsilon_3 \qquad \text{（标量、等离子体呈各向同性）}$$

其中

$$\varepsilon_1=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}$$

$$\varepsilon_2=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_3=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

电离层中平面波波动方程：

$$(k^2\bar{I}-\vec{k}\vec{k}-k_0^2\bar{\varepsilon}_r)\cdot\vec{E}_0=0$$

$$(k^2\bar{I}-\vec{k}\vec{k}-k_0^2\bar{\mu}_r)\cdot\vec{H}_0=0$$

其中

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} k^2-\varepsilon_1k_0^2-k_x^2 & -j\varepsilon_2k_0^2-k_xk_y & -k_xk_y \\ j\varepsilon_2k_0^2-k_yk_x & k^2-\varepsilon_1k_0^2-k_y^2 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k^2-\varepsilon_3k_0^3-k_z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}=0$$

解此方程可以得到波矢 $\vec{k}$ 的表达式。

3 种特例：

a） $\vec{K}\perp\vec{B}_0$，横向传播。$\vec{E}_0 11\vec{B}_0$。得 $\vec{K}=k_x\hat{x}$，$\vec{E}_0=E_0\hat{z}$，解得波数为：

$$k=k_0\sqrt{\varepsilon_3}$$

b） $\vec{K} \perp \vec{B}_0$， $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$。得 $\vec{K} = k_x \hat{x}$， $\vec{E}_0 = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2$，解得波数为

$$k = -j\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

c） $\vec{K}11\vec{B}_0$，纵向传播 $\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$。得 $\vec{K} = k_0 \hat{z}$， $\vec{E}_0 = \hat{x}E_1 + yE_2$，解得波数为

$$k_1 = k_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega g)}}$$

$$k_2 = k_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega g)}}$$

上式分别对应于右旋、左旋圆极化波。由于传播速度不同，$V_1 = \dfrac{\omega}{k_1}$，$V_2 = \dfrac{\omega}{k_2}$。当线极化波在等离子体中沿传播时，其偏振方向会发生旋转，这种现象称法拉第旋转效应，其旋转角由关系式：

$$\frac{E_x}{E_x} = tg(\frac{k_2 - k_1}{2}L) = tg\phi$$

$$\phi = \frac{(k_2 - k_1)}{2}L$$

其中 L 表示在等离子体中传播的距离。

第八章 导行电磁波的基本原理

内容提要：

1. 纵向场法

对于沿 z 轴正方向传播的正弦电磁波

$$\vec{E}=\vec{E}(x,y)e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}=\vec{H}(x,y)e^{-jk_z z}$$

将 $\vec{E}(x,y),\vec{H}(x,y)$ 分解为横向和纵向两部分

$$\vec{E}(x,y)=\vec{E}_{\perp}+E_z\hat{e}_z$$

$$\vec{H}(x,y)=\vec{H}_{\perp}+H_z\hat{e}_z$$

在直角坐标系中，$\vec{E}_{\perp}$ 与 $E_z\hat{e}_z$ 的关系为：

$$E_x=-j\frac{1}{k_c^2}[k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+k\eta\frac{\partial H_z}{\partial y}]$$

$$E_y=-j\frac{1}{k_c^2}[k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}+k\eta\frac{\partial H_z}{\partial x}]$$

$$H_x=-j\frac{1}{k_c^2}[k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{k}{\eta}\frac{\partial E_z}{\partial y}]$$

$$H_y=-j\frac{1}{k_c^2}[k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}+\frac{k}{\eta}\frac{\partial E_z}{\partial x}]$$

由此可见，只要求解纵向场分量、满足的波动方程，即可得到全部场分量。

如果 $H_z=0$，叫 TM 波。则

$$E_x=-j\frac{1}{k_c^2}k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_y=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_x=j\frac{1}{k_c^2}\frac{k}{\eta}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_y = -j\frac{1}{k_c^2}\frac{k}{\eta}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

如果$E_z = 0$，叫TE 波。则

$$E_x = -j\frac{k\eta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = j\frac{k\eta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_x = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$H_y = -j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

纵向分量E_z、H_z可由方程：

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

求得。

对TEM 波：

$$\vec{E}(x,y) = -\nabla\phi(x,y)$$

$$\vec{E}(x,y,z) = -\nabla\phi(x,y)e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}(x,y,z) = -\frac{1}{\eta}\hat{e}_x \times \nabla\phi e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}(x,y) = -\frac{1}{\eta}\hat{e}_x \times \nabla\phi$$

可见场$\vec{E}$可从电势导出。这与静电学中方法一样，则在理想的空心导体管中，$\vec{E}$必定为零，TEM 波就不可能存在。

2. 电磁波在波导中的传播条件

$$\lambda < \lambda_c \text{或} f > f_c$$

其中λ_c为截止波长。相速为：

$$V_p=\frac{\omega}{k_z}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

$$=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2\varepsilon_r\mu_r}}}$$

对TEM 波，$V_p=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$，$\lambda_c\to\infty$，即波导内为无截止的波。但是这种波不能满足边界条件，在波导中是不能传播的。

3. 矩形波导中的电磁波

TE 波的场分量：

将纵向场分量$H_z=H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$ 代入上述各场分量表达式中得：

$$E_x=+j\frac{k\eta}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$E_y=-j\frac{k\eta}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$H_x=j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$H_y=j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$H_z=H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$E_z=0$$

其中，$m=1,2,\cdots$

$n=1,2,\cdots$

同理TM 波的场分量：

$$E_x=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$E_y=-j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_zz}$$

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z}$$

$$H_x = j\frac{k}{k_c^2\eta}\frac{n\pi}{b}E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z}$$

$$H_y = -j\frac{k}{k_c^2\eta}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z}$$

$$H_z = 0$$

其中，$k_x = \frac{m\pi}{a}$ $\qquad m = 0,1,2,\cdots$

$k_y = \frac{n\pi}{b}$ $\qquad n = 0,1,2,\cdots$

m,n不能同时为零

$$k_c = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

可见对不同的m、n，场分布不同对应不同的波型，以TE_{mn}或TM_{mn}表之。

截止波长：$\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

在同一尺寸的矩形波导内，不同波型的λ_c不同，即表示他们的传播条件不同。

特例：TE_{10}模矩形波导的基模

场分布：

$$E_x = -j\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\pi}{a}H_0 \sin\frac{\pi}{a}x e^{-jk_z z}$$

$$H_x = j\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\pi}{a}H_0 \sin\frac{\pi}{a}x e^{-jk_z z}$$

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi}{a}x e^{-jk_z z}$$

截止波长：

$$\lambda_c = 2a$$

相速：

$$V_p = \frac{V}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

波导波长：

$$\lambda_g = \frac{V_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

波阻抗：

$$\eta = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

4. 同轴传输线

场分布：当同轴传输线中传输TEM 波时，同轴线内、外导体间的电位差为：

$$V_0 = \int_a^b \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{b}{a}$$

则横截面上的电位为：

$$\phi = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{\rho}{b} = \frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}} \ln\frac{\rho}{b}$$

电磁场为：

$$\vec{E} = \hat{e}_\rho \frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}} \frac{1}{\rho} e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \hat{e}_\varphi \frac{V_0}{\eta \ln\frac{b}{a}} \frac{1}{\rho} e^{-jkz}$$

特性阻抗：

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

传输功率：

$$p = \frac{1}{2} R_e [\int_s \vec{E} \times \overrightarrow{H^*} \cdot \overrightarrow{ds}] = \frac{1}{2} V_0 \frac{2\pi V_0}{\eta \ln\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

5. 圆柱介质波导与光纤

纵向场分量满足的方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}+k_c^2\begin{pmatrix}E_z\\H_z\end{pmatrix}=0$$

式中：$k_c^2=\begin{cases}(\omega^2\varepsilon_1\mu_0)^2-k_z^2=k_\kappa^2 & (\rho<a)\\(\omega^2\varepsilon_2\mu_0)^2-k_z^2=-\kappa^2 & (\rho>a)\end{cases}$

方程的解：$E_{z1}=A_nJ_n(k_{1c}\rho)e^{jn\varphi}$

$$E_{z2}=C_nK_n(\kappa\rho)e^{jn\varphi}$$

$$H_{z1}=B_nJ_n(k_{1c}\rho)e^{jn\varphi}$$

$$H_{z2}=D_nK_n(\kappa\rho)e^{jn\varphi}$$

利用基本条件得出本征值方程：

$$[\frac{J_n^{'}(u)}{uJ_n(u)}+\frac{K_n^{'}(u)}{uK_n(u)}][\frac{k_1^2J_n^{'}(u)}{uJ_n(u)}+\frac{k_2^2K_n^{'}(u)}{uK_n(u)}]=n^2k_z^2(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{\omega^2})$$

其中 $u=k_{1c}a\quad \omega=\kappa a\quad k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_0\quad k_2^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_0$

将本征值方程与方程$u^2+\omega^2=(n_1^2-n_2^2)\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2$联立，就可解得$\mu$、$\omega$，进而得到$k_{1c}$、$\kappa$和$k_z$。其中$n^2=\varepsilon r$

截止频率：

$$f_c=\frac{u}{2\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0(n_1^2-n_2^2)}}\Big|_{\omega=0}$$

6. 谐振腔

谐振腔的基本特性参量

谐振频率：$W_{mnp}=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2+\left(\frac{n}{L_2}\right)^2+\left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$

或 $f_{mnp}=\frac{\pi}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2+\left(\frac{n}{L_2}\right)^2+\left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$

品质因素Q_L：它描述的是谐振腔选频性的优劣及能量损耗的程度。

$$\frac{1}{Q_L}=\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_e}$$

其中Q_0和Q_e是只计及导体损耗的Q_L值和只计及介质损耗的Q_L值。

8—5

解：无限长的矩形波导管中可存在TE_{mn}与TM_{mn}模。

对TE_{mn}模，场的表达式为：

$$H_z = H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}_T = \frac{-jk_z}{k^2 - k_z^2}\nabla_T H_z \qquad \text{(参考 8-6 题)}$$

$$\vec{E}_T = \frac{j\omega\mu}{k^2 - k_z^2}\hat{z}\times\nabla_T H_z = \frac{\omega\mu}{k_z}\vec{H}_T \times \hat{z}$$

据边界条件：$Z = 0$时$H_z = 0$，H_z是关于Z的奇函数

则H_z可表示为：$H_z = H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \sin k_z z$

对TM_{mn}模，场的表达式为：

$$E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z}$$

$$\vec{E}_T = \frac{-jk_z}{k^2 - k_z^2}\nabla_T E_z$$

$$\vec{H}_T = \frac{j\omega\varepsilon}{k^2 - k_z^2}\hat{z}\times\nabla_T E_z = \frac{\omega\varepsilon}{k_z}\vec{E}_T \times \hat{z}$$

据边界条件：$Z = 0$时$E_x = 0$，$E_y = 0$

则E_z可表示为：

除TM_{on}、TM_{mo}模外；TE_{mn}、TM_{mn}模都可存在。

8—6

证明：设在直角坐标系中

$$\vec{E}=\vec{E}(x,y)+\hat{z}E_z=\vec{E}_T+\hat{z}E_z \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\vec{H}=\vec{H}_T+\hat{z}H_z \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\nabla=\nabla_T+\nabla_z$$

将（1）、（2）代入麦克斯韦方程$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu_0\vec{H},\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon_0\vec{E}$

令两边横向分量相等。

$$\nabla\times\vec{E}\Big|_T=(\nabla_T+\nabla_z)\times(\vec{E}_T\times\hat{z}E_z)\Big|_T$$

$$=\nabla_z\times\vec{E}_T+\nabla_T\times\hat{z}\vec{E}_Z=-j\omega\mu_0\vec{H}_T \qquad \cdots\cdots(3)$$

同理可得：$\nabla_z\times\vec{H}_T+\nabla_T\times\hat{z}E_z=j\omega\varepsilon\vec{E}_T \qquad \cdots\cdots(4)$

$\nabla_z\times(4)$得：

$$\nabla_z\times(\nabla_z\times\vec{H}_T)+\nabla_z\times(\nabla_T\times\hat{z}H_z)=j\omega\varepsilon\nabla_z\times\vec{E}_T \qquad \cdots\cdots(5)$$

利用矢量恒等式：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

得（5）式左边两项分别为

$$\nabla_z\times(\nabla_z\times\vec{H}_T)=\nabla_z(\nabla_z\cdot\vec{H}_T)-(\nabla_z\cdot\nabla_z)\vec{H}_T$$

$$\nabla_z\times(\nabla_T\times\hat{z}H_z)=\nabla_T(\nabla_z\cdot\hat{z}H_z)-(\nabla_z\cdot\nabla_T)\hat{z}H_z$$

在理想无耗时，对沿 Z 轴传输的波$\nabla_z=\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}=-jk_z\hat{z}$，所以（5）式可写为：

$$k_z^2\vec{H}_z-jk_z\nabla_T H_z=j\omega\varepsilon\nabla_z\times\vec{E}_T \qquad \cdots\cdots(6)$$

由（3）及（6）可得：

$$(k^2-k_z^2)\vec{H}_z=-j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_T E_z-jk_z\nabla_T H_z$$

同理可得：

$$(k^2-k_z^2)\vec{E}_z=-j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_T H_z-jk_z\nabla_T E_z$$

证毕

8—7

矩形波导管内 $\vec{H}$ 满足齐次亥姆霍滋方程：

$$\nabla^2\vec{H}+k_2\vec{H}=0$$

其中 $\vec{H}=\vec{H}(x,y,z)e^{j\omega t}$

$\vec{H}$ 所满足的边界条件：

$$\hat{n}\times\vec{E}=0\text{或}E_t=0$$

$$\hat{n}\cdot\vec{H}=0$$

$$\hat{n}\times\vec{H}=\vec{J}_s$$

8—8

对 TM 波，$H_z=0$。E_z 所满足的方程

$$\nabla^2E_z+k^2E_z=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

在直角坐标系中

$$E_z=E_z(x,y,z)$$

$$=E_x(x,y)g(z) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\nabla^2=\nabla_T^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \cdots\cdots(3)$$

将（2)、（3）代入方程（1)，得:

$$g(x)\nabla_T^2E_z(x,y)+E_z(x,y)\frac{\partial^2g(z)}{\partial z^2}+k^2E_z(x,y)g(z)=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

将（4）式除以 $E_z(x,y)g(z)$ 得：

$$\frac{\nabla_T^2E_z(x,y)}{E_x(x,y)}=-\frac{1}{g(z)}\frac{\partial^2g(z)}{\partial z^2}-k^2=-k_c^2$$

因为上式左边仅是 x,y 的函数，右边仅是 z 的函数，使等式两边分别相等，必须两边分别等于某一常数，这常数设为 $-k_c$。则可设两个方程为：

$$\nabla_T^2E_z(x,y)+k_c^2E_z(x,y)=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$\frac{d^2g}{dz^2}+(k^2-k_c^2)g(z)=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

设 $k^2-k_c^2=-\gamma^2$，则方程（6）为：

$$\frac{d^2 g(z)}{dz^2} - \gamma^2 g(z) = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

方程（7）的通解为：

$$g(z) C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} \qquad \cdots\cdots(8)$$

得波导中，波沿 z 轴正向传输，则

$$g(z) = C_1 e^{-\gamma z} = C_1 e^{-j\beta z} \qquad (\gamma = j\beta)$$

所以

$$E_z(x,y,z) = C_1 E_z(x,y) e^{-\gamma z}$$

$$= C_1 E_z(x,y) e^{-j\beta z} \qquad \cdots\cdots(9)$$

对方程（5），用分离变量法求解

得：
$$E_z(x,y) = X(x) Y(y) \qquad \cdots\cdots(10)$$

代入方程（5）并两边同乘以 $\frac{1}{X(x)Y(y)}$ 得

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_c^2$$

上述方程左边为两个独立变量的函数之和，因此要满足上式，左边两项必须分别为常数，令

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2 \qquad \cdots\cdots(12)$$

其中：

（11）、（12）式为二阶常微分方程，其解为:

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)$$

$$Y(x) = A_2 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)$$

代入到（10）式中得：

$$E_z(x,y) = [A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][A_2 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)] \qquad \cdots\cdots(13)$$

将（13）代入（9）式得：

$$E_z(x,y,z) = [A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)][A_2 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)] e^{-j\beta z} \qquad \cdots\cdots(14)$$

上式中 $C_1 z$ 已并入 A_1、B_1、A_2、B_2 中。而 A_1、B_1、A_2、B_2 为待定常数。据理想导体

边界条件，$E_t = 0$

$$E_z\big|_{x=0} = E_z\big|_{x=a} = 0$$

$$E_z\big|_{y=0} = E_z\big|_{y=b} = 0$$

将边界条件代入（14），即得：

$$A_1 = 0 \qquad k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

$$A_2 = 0 \qquad k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$E_z(x,y,z) = B\sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{-j\beta z} \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$B = B_1 B_2$$

由（15）式可见m、n中任何一个不能为零，若其中之一为零，则$E_z(x,y,z) = 0$。据（8—6）题可知：

$$(k^2 - k_z^2)E_T = -jk_z\nabla_T E_z = 0$$

$$(k^2 - k_z^2)H_T = -j\omega\varepsilon\hat{z}\times\nabla_T H_z = 0$$

即矩形波导管内不存在TM_{mo}与TM_{on}波

8—9

解：$\lambda = \dfrac{c}{f} = 1(cm)$

$$a = 0.7cm, b = 0.4cm$$

$$\lambda_{CTE_{10}} = 2a = 1.4(cm) > 1(cm)$$

$$\lambda_{CTE_{20}} = a = 0.7(cm) < 1(cm)$$

$$\lambda_{CTE_{01}} = 2b = 0.8(cm) < 1(cm)$$

$$a = 0.7cm, b = 0.4cm$$

$$\lambda_{CTE_{01}} = 2b = 1.2(cm) > 1(cm)$$

$$\lambda_{CTE_{10}} = 2a = 1.4(cm) > 1(cm)$$

$$\lambda_{CTE_{11}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} \approx 0.9(cm) < 1(cm)$$

第一种情况，可传输TE_{10} 1 个波型；

第二种情况，可传输TE_{10}、TE_{01} 2 个波型。