第三章习题及答案

3-1　已知系统脉冲响应如下，试求系统闭环传递函数Φ(s)。

$$k(t)=0.0125e^{-1.25t}$$

解　$\Phi(s)=L\left[k(t)\right]=0.0125/(s+1.25)$

3-2　设某高阶系统可用下列一阶微分方程近似描述

$$T\dot{c}(t)+c(t)=\tau\dot{r}(t)+r(t)$$

其中，0<(T-τ)<1。试证系统的动态性能指标为

$$t_d=\left[0.693+\ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right)\right]T$$

$$t_r=2.2T$$

$$t_s=\left[3+\ln(\frac{T-\tau}{T})\right]T$$

解　设单位阶跃输入 $R(s)=\dfrac{1}{s}$

当初始条件为 0 时有: $\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\tau s+1}{Ts+1}$

$$\therefore\qquad C(s)=\frac{\tau s+1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{T-\tau}{Ts+1}$$

$$C(t)=h(t)=1-\frac{T-\tau}{T}e^{-t/T}$$

1) 当 $t=t_d$ 时

$$h(t)=0.5=1-\frac{T-\tau}{T}e^{-t_d/t}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{T-\tau}{T}e^{-t_d/T}\ ;\qquad -\ln 2=\ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right)-\frac{t_d}{T}$$

$$\therefore\qquad t_d=T\left[\ln 2+\ln\left(\frac{T-\tau}{T}\right)\right]$$

2) 求 t_r（即 $c(t)$ 从 0.1 到 0.9 所需时间)

当 $h(t)=0.9=1-\dfrac{T-\tau}{T}e^{-t_2/T}$；　　　$t_2=T[\ln(\dfrac{T-\tau}{T})-\ln 0.1]$

当 $h(t)=0.1=1-\dfrac{T-\tau}{T}e^{-t_1/T}$；　　　$t_1=T[\ln(\dfrac{T-\tau}{T})-\ln 0.9]$

则 $t_r=t_2-t_1=T\ln\dfrac{0.9}{0.1}=2.2T$

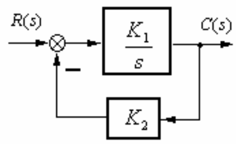
3) 求 t_s

$$h(t_s)=0.95=1-\frac{T-\tau}{T}e^{-t_s/T}$$

$$\therefore \quad t_s=T[\ln\frac{T-\tau}{T}-\ln 0.05]=T[\ln\frac{T-\tau}{T}+\ln 20]=T[3+\ln\frac{T-\tau}{T}]$$

3-3　一阶系统结构图如题 3-3 图所示。要求系统闭环增益 $K_\Phi=2$，调节时间 $t_s\le 0.4$（s），试确定参数 K_1, K_2 的值。

解　由结构图写出闭环系统传递函数



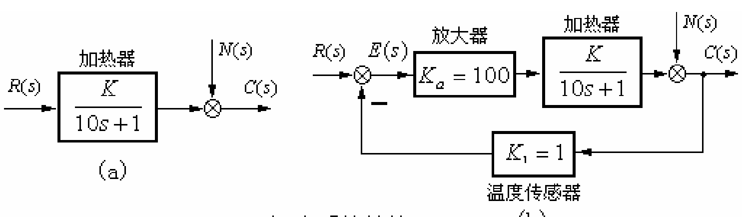
题3-3图 系统结构图

$$\Phi(s)=\frac{\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1K_2}{s}}=\frac{K_1}{s+K_1K_2}=\frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{s}{K_1K_2}+1}$$

令闭环增益 $K_\Phi=\dfrac{1}{K_2}=2$，　　　得：$K_2=0.5$

令调节时间 $t_s=3T=\dfrac{3}{K_1K_2}\le 0.4$，得：$K_1\ge 15$。

3-4　在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定， 题 3-4 图（a）和（b）分别为开环和闭环温度控制系统结构图，两种系统正常的 K 值为 1。



题3-4图 温度系统结构图

（1）　若 $r(t)=1(t)$，$n(t)=0$ 两种系统从开始达到稳态温度值的 63.2% 各需多长时间？

（2）　当有阶跃扰动 $n(t)=0.1$ 时，求扰动对两种系统的温度的影响。

解　（1）对（a）系统：

$$G_a(s)=\frac{K}{10s+1}=\frac{1}{10s+1}\text{，}\qquad \text{时间常数}\ T=10$$

$\because$　$h(T)=0.632$　（a）系统达到稳态温度值的63.2%需要 10 个单位时间；

对（a）系统：$\Phi_b(s)=\dfrac{100}{10s+101}=\dfrac{\frac{100}{101}}{\frac{10}{101}s+1}$，　时间常数 $T=\dfrac{10}{101}$

$\because$　$h(T)=0.632$　（b）系统达到稳态温度值的63.2%需要 0.099 个单位时间。

（2）对（a）系统：　$G_n(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}=1$

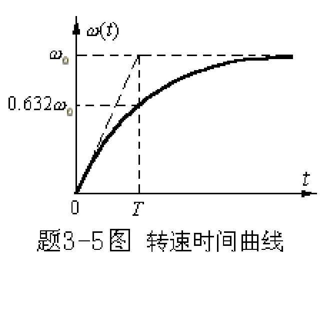
$n(t)=0.1$ 时，该扰动影响将一直保持。

对（b）系统：　$\Phi_n(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}=\dfrac{1}{1+\frac{100}{10s+1}}=\dfrac{10s+1}{10s+101}$

$n(t)=0.1$ 时，最终扰动影响为 $0.1\times\dfrac{1}{101}\approx 0.001$。

3-5　一种测定直流电机传递函数的方法是给电枢加一定的电压，保持励磁电流不变，测出电机的稳态转速；另外要记录电动机从静止到速度为稳态值的 50%或 63.2%所需的时间，利用转速时间曲线（如题 3-5 图）和所测数据,并假设传递函数为

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{V(s)}=\frac{K}{s(s+a)}$$



题3-5图 转速时间曲线

可求得 K 和 a 的值。

若实测结果是：加 10 伏电压可得每分钟 1200 转的稳态转速，而达到该值 50%的时间为 1.2 秒，试求电机传递函数。

[提示：注意 $\dfrac{\Omega(s)}{V(s)}=\dfrac{K}{s+a}$，其中 $\omega(t)=\dfrac{d\theta}{dt}$，单位是弧度/秒]

解　依题意有：

$$v(t)=10 \quad （伏）$$

$$\omega(\infty)=\frac{1200\times 2\pi}{60}=40\pi \quad （弧度/秒） \qquad (1)$$

$$\omega(1.2)=0.5\omega(\infty)=20\pi \quad （弧度/秒） \qquad (2)$$

设系统传递函数 $\quad G_0(s)=\dfrac{\Omega(s)}{V(s)}=\dfrac{K}{s+a}$

应有 $\quad \omega(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s\,G_0(s)\cdot V(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot\dfrac{10}{s}\cdot\dfrac{K}{s+a}=\dfrac{10K}{a}=40\pi \qquad (3)$

$$\omega(t)=L^{-1}\left[G_0(s)\cdot V(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{10K}{s(s+a)}\right]=\frac{10K}{a}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{10K}{a}\left[1-e^{-at}\right]$$

由式（2），（3） $\quad \omega(1.2)=\dfrac{10K}{a}\left[1-e^{-1.2a}\right]=40\pi\left[1-e^{-1.2a}\right]=20\pi$

得 $\quad 1-e^{-1.2a}=0.5$

解出 $\quad a=\dfrac{-\ln 0.5}{1.2}=0.5776 \qquad (4)$

将式（4）代入式（3）得 $\quad K=4\pi a=7.2586$

3-6 单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{4}{s(s+5)}$，求单位阶跃响应 $h(t)$ 和调节时间 t_s 。

解：依题，系统闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{4}{s^2+5s+4}=\frac{4}{(s+1)(s+4)}=\frac{4}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})} \qquad \begin{cases}T_1=1\\ T_2=0.25\end{cases}$$

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{4}{s(s+1)(s+4)}=\frac{C_0}{s}+\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+4}$$

$$C_0=\lim_{s\to 0} s\,\Phi(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4}{(s+1)(s+4)}=1$$

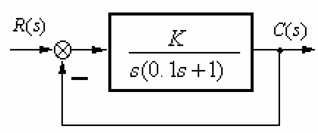
$$C_1=\lim_{s\to -1}(s+1)\,\Phi(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4}{s(s+4)}=-\frac{4}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s\to -4}(s+4)\Phi(s)R(s) = \lim_{s\to 0}\frac{4}{s(s+1)} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$\because\ \dfrac{T_1}{T_2} = 4$，　　$\therefore\ t_s = \left(\dfrac{t_s}{T_1}\right)T_1 = 3.3T_1 = 3.3$。

3-7　设角速度指示随动系统结构图如题 3-7 图。若要求系统单位阶跃响应无超调，且调节时间尽可能短，问开环增益K应取何值，调节时间t_s是多少？



题3-7图 系统结构图

解　依题意应取 $\xi = 1$，这时可设闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -1/T_0$。

写出系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$$

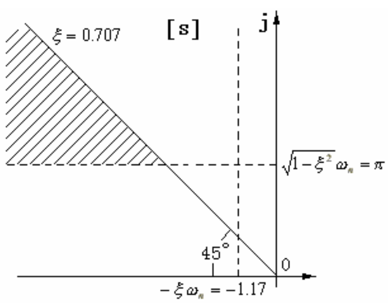
闭环特征多项式

$$D(s) = s^2 + 10s + 10K = \left(s + \frac{1}{T_0}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{T_0}s + \left(\frac{1}{T_0}\right)^2$$

比较系数有 $\begin{cases} \dfrac{2}{T_0} = 10 \\ \left(\dfrac{1}{T_0}\right)^2 = 10K \end{cases}$　　联立求解得 $\begin{cases} T_0 = 0.2 \\ K = 2.5 \end{cases}$

因此有　　$t_s = 4.75T_0 = 0.95'' < 1''$

3-8 给定典型二阶系统的设计指标：超调量 $\sigma\% \le 5\%$，调节时间 $t_s < 3$（s），峰值时间$t_p < 1$（s），试确定系统极点配置的区域，以获得预期的响应特性。



图解3-8

解　依题

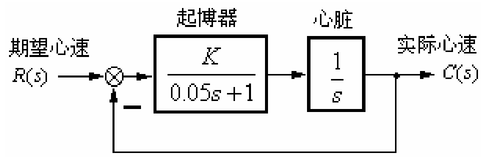
$\sigma\% \le 5\%$，　　$\Rightarrow\ \xi \ge 0.707$　($\beta \le 45°$)；

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} < 3\text{，}\Rightarrow\ \xi\omega_n > 1.17\text{；}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} < 1\text{，}\Rightarrow\ \sqrt{1-\xi^2}\omega_n > 3.14$$

综合以上条件可画出满足要求的特征根区域如图解 3-8 所示。

3-9 电子心律起博器心率控制系统结构图如题 3-9 图所示，其中模仿心脏的传递函数相当于一纯积分环节，要求：



题3-9图 电子心律起博器系统

（1） 若 ξ=0.5 对应最佳响应，问起博器增益 K 应取多大？

（2） 若期望心速为 60 次/分钟，并突然接通起博器，问 1 秒钟后实际心速为多少？瞬时最大心速多大？

解 依题，系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\dfrac{K}{0.05}}{s^2 + \dfrac{1}{0.05}s + \dfrac{K}{0.05}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{0.05}} \\ \xi = \dfrac{1}{0.05\times 2\omega_n} \end{cases}$$

令 $\xi = 0.5$ 可解出 $\begin{cases} K = 20 \\ \omega_n = 20 \end{cases}$

将 $t = 1$（秒）代入二阶系统阶跃响应公式

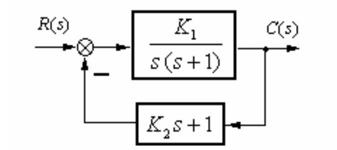
$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \beta\right)$$

可得 $h(1) = 1.000024$（次/秒）$=60.00145$（次/分）

$\xi = 0.5$ 时，系统超调量 $\sigma\%$=16.3%，最大心速为

$$h(t_p) = 1 + 0.163 = 1.163\text{（次/秒）}=69.78\text{（次/分）}$$

3-10　机器人控制系统结构图如题 3-10 图所示。试确定参数 K_1, K_2 值，使系统阶跃响应的峰值时间 $t_p = 0.5$（s），超调量 $\sigma\% = 2\%$。



题3-10图 机器人位置控制系统

解　依题，系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\dfrac{K_1}{s(s+1)}}{1+\dfrac{K_1(K_2 s+1)}{s(s+1)}} = \frac{K_1}{s^2+(1+K_1K_2)s+K_1} = \frac{K_\Phi \omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

由 $\begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \le 0.02 \\ t_p = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = 0.5 \end{cases}$　联立求解得 $\begin{cases} \xi = 0.78 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$

比较 $\Phi(s)$ 分母系数得

$$\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 100 \\ K_2 = \dfrac{2\xi\omega_n - 1}{K_1} = 0.146 \end{cases}$$

3-11 某典型二阶系统的单位阶跃响应如题 3-11 图所示。试确定系统的闭环传递函数。

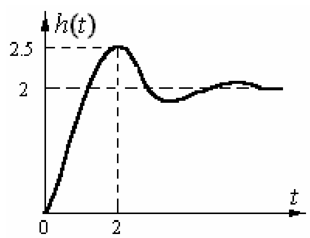


图3-11 系统单位阶跃响应

解　依题，系统闭环传递函数形式应为

$$\Phi(s) = \frac{K_\Phi \omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

由阶跃响应曲线有：

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\Phi(s)\,R(s) = \lim_{s\to 0} s\,\Phi(s)\cdot\frac{1}{s} = K_\Phi = 2$$

$$\begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2 \\ \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{2.5-2}{2} = 25\% \end{cases}$$

联立求解得 $\begin{cases} \xi = 0.404 \\ \omega_n = 1.717 \end{cases}$，所以有

$$\Phi(s) = \frac{2\times1.717^2}{s^2 + 2\times0.404\times1.717s + 1.717^2} = \frac{5.9}{s^2 + 1.39s + 2.95}$$

3-12　设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{12.5}{s(0.2s+1)}$$

试求系统在误差初条件 $e(0) = 10,\ \dot{e}(0) = 1$ 作用下的时间响应。

解　依题意，系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{62.5}{s^2 + 5s + 62.5}$$

当 $r(t) = 0$ 时，系统微分方程为

$$c''(t) + 5c'(t) + 62.5c(t) = 0$$

考虑初始条件，对微分方程进行拉氏变换

$$\left[s^2C(s) - s\,c(0) - c'(0)\right] + 5\left[s\,C(s) - c(0)\right] + 62.5\,C(s) = 0$$

整理得　$\left(s^2 + 5s + 62.5\right)C(s) = (s+5)c(0) + c'(0)$　（1）

对单位反馈系统有　$e(t) = r(t) - c(t)$，　所以

$$c(0) = r(0) - e(0) = 0 - 10 = -10$$
$$c'(0) = r'(0) - e'(0) = 0 - 1 = -1$$

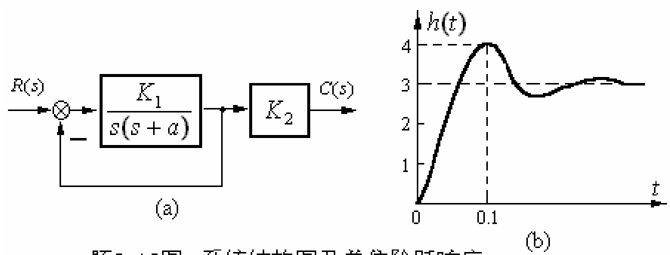
将初始条件代入式（1）得

$$C(s) = \frac{-10s - 51}{s^2 + 5s + 62.5} = -\frac{10(s+2.5) + 26}{(s+2.5)^2 + 7.5^2}$$

$$= -10\frac{(s+2.5)}{(s+2.5)^2 + 7.5^2} - 3.47\frac{7.5}{(s+2.5)^2 + 7.5^2}$$

$$c(t) = -10e^{-2.5t}\cos 7.5t - 3.47e^{-2.5t}\sin 7.5t = -10.6e^{-2.5t}\sin(7.5t + 70.8^\circ)$$

3-13 设题 3-13 图（a）所示系统的单位阶跃响应如题 3-13 图（b）所示。试确定系统参数 K_1，K_2 和a。



题3-13图　系统结构图及单位阶跃响应

解　由系统阶跃响应曲线有

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ \sigma\% = (4-3)/3 = 33.3\% \end{cases}$$

系统闭环传递函数为

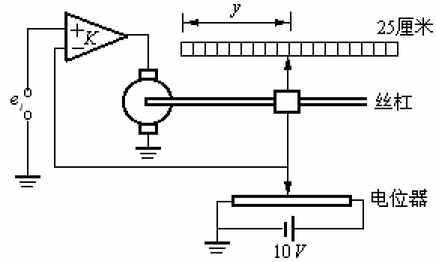
$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

由 $\begin{cases} t_p = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n} = 0.1 \\ \sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33.3\% \end{cases}$　联立求解得 $\begin{cases} \xi = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases}$

由式（1）$\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\xi\omega_n = 22 \end{cases}$

另外　$h(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} s\,\Phi(s)\cdot\dfrac{1}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K_1K_2}{s^2+as+K_1} = K_2 = 3$

3-14 题 3-14 图是电压测量系统，输入电压 $e_t(t)$ 伏，输出位移 $y(t)$ 厘米，放大器增益 $K = 10$，丝杠每转螺距 1 毫米，电位计滑臂每移动 1 厘米电压增量为 0.4 伏.当对电机加 10 伏阶跃电压时（带负载）稳态转速为 1000 转/分钟，达到该值 63.2% 需要 0.5 秒。画出系统方框图，求出传递函数



题3-14图　电压测量系统

$Y(s)/E_t(s)$，并求系统单位阶跃响应的峰值时间 t_p、超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s 和稳态值 $h(\infty)$。

解　依题意可列出环节传递函数如下

比较点：　$E(s)=E_t(s)-F(s)$　　伏

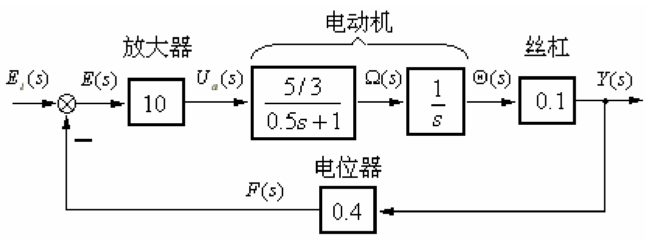
放大器：　$\dfrac{U_a(s)}{E(s)}=K=10$

电动机：　$\dfrac{\Omega(s)}{U_a(s)}=\dfrac{K_m}{T_m s+1}=\dfrac{\frac{1000}{10\times 60}}{0.5s+1}=\dfrac{5/3}{0.5s+1}$　(转/秒/伏)

丝杠：　$\dfrac{Y(s)}{\Theta(s)}=K_1=0.1$　(厘米/转)

电位器：　$\dfrac{F(s)}{Y(s)}=K_2=0.4$　(伏/厘米)

画出系统结构图如图解 3-14 所示



图解3-14 电压测量系统结构图

系统传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{E_t(s)}=\frac{\frac{10}{3}}{s^2+2s+\frac{4}{3}}\qquad \begin{cases}\omega_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ \xi=\dfrac{2}{2\omega_n}=0.866\end{cases}$$

$\therefore$

$$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}=5.44''$$

$$\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.433\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 3.5''$$

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} s\Phi(s)\cdot\frac{1}{s} = 2.5$$

3-15 已知系统的特征方程，试判别系统的稳定性，并确定在右半 s 平面根的个数及纯虚根。

（1）$D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

（2）$D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

（3）$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$

（4）$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

解（1）$D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

Routh：				
	S^5	1	2	11
	S^4	2	4	10
	S^3	ε	6	
	S^2	$4\varepsilon - 12/\varepsilon$	10	
	S	6		
	S^0	10		

第一列元素变号两次，有 2 个正根。

（2）$D(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

Routh：					
	S^5	1	12	32	
	S^4	3	24	48	
	S^3	$\frac{3\times 12 - 24}{3} = 4$	$\frac{32\times 3 - 48}{3} = 16$	0	
	S^2	$\frac{4\times 24 - 3\times 16}{4} = 12$	48		
	S	$\frac{12\times 16 - 4\times 48}{12} = 0$	0		辅助方程 $12s^2 + 48 = 0$,
	S	24			辅助方程求导：24s=0
	S^0	48			

系统没有正根。对辅助方程求解，得到系统一对虚根 $s_{1,2} = \pm j2$。

（3）$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$

Routh： s^5	1	0	-1	
s^4	2	0	-2	辅助方程 $2s^4-2=0$
s^3	8	0		辅助方程求导 $8s^3=0$
s^2	ε	-2		
s	$16/\varepsilon$			
s^0	-2			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程 $2s^4-2=0$ 可解出：

$$2s^4-2=2(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$D(s)=s^5+2s^4-s-2=(s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

（4）$D(s)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

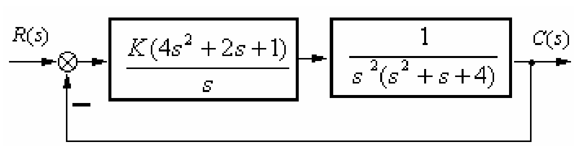
Routh： s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	辅助方程 $2s^4+48s^2-50=0$
s^3	8	96		辅助方程求导 $8s^3+96s=0$
s^2	24	-50		
s	338/3			
s^0	-50			

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程 $2s^4+48s^2-50=0$ 可解出：

$$2s^4+48s^2-50=2(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

$$D(s)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=(s+2)(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)$$

3-16　题 3-16 图是某垂直起降飞机的高度控制系统结构图，试确定使系统稳定的 K 值范围。



题3-16图　控制系统结构图

解　由结构图，系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(4s^2+2s+1)}{s^3(s^2+s+4)}\qquad \begin{cases}\text{开环增益 } K_k=K/4\\ \text{系统型别 } v=3\end{cases}$$

$$D(s)=s^5+s^4+4s^3+4Ks^2+2Ks+K=0$$

Routh：	S^5	1	4	2K
	S^4	1	4K	K
	S^3	-4(1-K)	K	$\Rightarrow\quad K<1$
	S^2	$\dfrac{(15-16K)K}{4(1-K)}$	K	$\Rightarrow\quad K>16/15=1.067$
	S	$\dfrac{-32K^2+47K-16}{4(1-K)}$		$\Rightarrow\quad 0.536<K<0.933$
	S^0	K		$\Rightarrow\quad K>0$

∴ 使系统稳定的 K 值范围是： $0.536<K<0.933$。

3-17 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

为使系统特征根的实部不大于-1，试确定开环增益的取值范围。

解 系统开环增益 $K_k=K/15$。特征方程为：

$$D(s)=s^3+8s^2+15s+K=0$$

做代换 $s=s'-1$ 有：

$$D(s')=(s'-1)^3+8(s-1)^2+15(s'-1)+K=s'^3+5s'^2+2s'+(K-8)=0$$

Routh ：	S^3	1	2	
	S^2	5	K-8	
	S	$\dfrac{18-K}{5}$		$\Rightarrow\quad K<18$
	S^0	K-8		$\Rightarrow\quad K>8$

使系统稳定的开环增益范围为： $\dfrac{8}{15}<K_k=\dfrac{K}{15}〈\dfrac{18}{15}$ 。

3-18 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试在满足 $T>0, K>1$ 的条件下，确定使系统稳定的 T 和 K 的取值范围，并以 T 和 K 为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

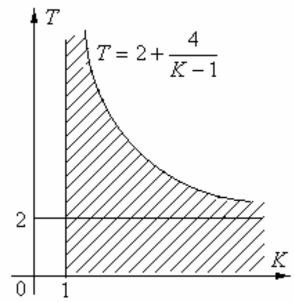
解 特征方程为：

$$D(s)=2Ts^3+(2+T)s^2+(1+K)s+K=0$$

Routh ：

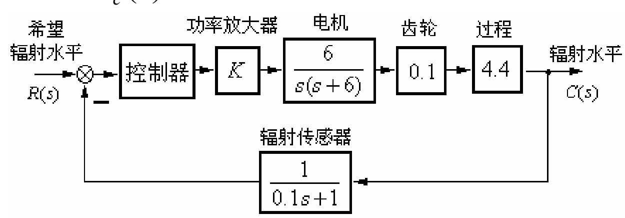
$$\begin{array}{llll} s^3 & 2T & 1+K & \Rightarrow\ T>0 \\ s^2 & 2+T & K & \Rightarrow\ T>-2 \\ s & 1+K-\dfrac{2TK}{2+T} & & \Rightarrow\ T<2+\dfrac{4}{K-1} \\ s^0 & K & & \Rightarrow\ K>0 \end{array}$$

综合所得条件，当 $K>1$ 时，使系统稳定的参数取值范围如图解 3-18 中阴影部所示。



图解3-18 使系统稳定的参数范围

3-19 题 3-19 图是核反应堆石墨棒位置控制闭环系统，其目的在于获得希望的辐射水平，增益 4.4 就是石墨棒位置和辐射水平的变换系数，辐射传感器的时间常数为 0.1 秒，直流增益为 1，设控制器传递函数 $G_c(s)=1$。



题3-19图 反应堆石墨棒位置控制系统

（1） 求使系统稳定的功率放大器增益 K 的取值范围；

（2） 设 $K=20$，传感器的传递函数 $H(s)=\dfrac{1}{\tau s+1}$（τ 不一定是 0.1），求使系统稳定的 τ 的取值范围。

解 （1）当控制器传递函数 $G_c(s)=1$ 时

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2.64K(0.1s+1)}{s(s+6)(0.1s+1)+2.64K}$$

$$D(s)=s(s+6)(s+10)+26.4K=s^3+16s^2+60s+26.4K=0$$

$$\begin{array}{llll} Routh: & s^3 & 1 & 60 \\ & s^2 & 16 & 26.4K \\ & s^1 & \dfrac{960-26.4K}{16} & 0 & \rightarrow \quad K<36.36 \\ & s^0 & 26.4K & & \rightarrow \quad K>0 \end{array}$$

$\therefore \qquad 0<K<36.36$

（2）$K=20$，$H(s)=\dfrac{1}{\tau s+1}$时

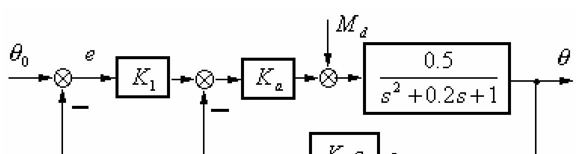
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{52.8(\tau s+1)}{s(s+6)(\tau s+1)+52.8}$$

$$D(s)=s(s+6)(\tau s+1)+52.8=\tau s^3+(6\tau+1)s^2+6s+52.8=0$$

$$\begin{array}{lllll} Routh: & s^3 & \tau & 6 \\ & s^2 & 6\tau+1 & 52.8 & \rightarrow \quad \tau>-0.167 \\ & s^1 & \dfrac{6-16.8\tau}{6\tau+1} & 0 & \rightarrow \quad \tau<0.357 \\ & s^0 & 52.8 \end{array}$$

$\therefore \quad 0<\tau<0.357$

3-20　题 3-20 图是船舶横摇镇定系统结构图，引入内环速度反馈是为了增加船只的阻尼。



题3-20 图　船舶横摇控制系统

（1）　求海浪扰动力矩对船只倾斜角的传递函数$\dfrac{\Theta(s)}{M_d(s)}$；

（2） 为保证 M_d 为单位阶跃时倾斜角 θ 的值不超过 0.1，且系统的阻尼比为 0.5，求 K_a、K_1 和 K_g 应满足的方程；

（3） 取 K_a=1 时，确定满足（2）中指标的 K_1 和 K_g 值。

解 （1）

$$\frac{\Theta(s)}{M_d(s)}=\frac{\dfrac{0.5}{s^2+0.2s+1}}{1+\dfrac{0.5K_aK_gs}{s^2+0.2s+1}+\dfrac{0.5K_1K_a}{s^2+0.2s+1}}=\frac{0.5}{s^2+(0.2+0.5K_aK_g)s+(1+0.5K_1K_a)}$$

（2）令： $\theta(\infty)=\lim\limits_{s\to0}sM_d(s)\cdot\dfrac{\Theta(s)}{M_d(s)}=\lim\limits_{s\to0}s\cdot\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{\Theta(s)}{M_d(s)}=\dfrac{0.5}{1+0.5K_1K_a}\le0.1$

得 $K_1K_a\ge8$。 由 $\dfrac{\Theta(s)}{M_d(s)}$ 有： $\begin{cases}\omega_n=\sqrt{1+0.5K_1K_g}\\ \xi=\dfrac{0.2+0.5K_aK}{2\omega_n}=0.5\end{cases}$， 可得

$$0.2+0.25K_aK_g=\sqrt{1+0.5K_1K_a}$$

（3）$K_a=1$ 时，$K_1\ge8$，$0.2+0.25K_g\ge\sqrt{5}$，可解出 $K_g\ge4.072$。

3-21 温度计的传递函数为 $\dfrac{1}{Ts+1}$，用其测量容器内的水温，1min 才能显示出该温度的 98%的数值。若加热容器使水温按 10ºC/min 的速度匀速上升，问温度计的稳态指示误差有多大？

解法一 依题意，温度计闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

由一阶系统阶跃响应特性可知：$h(4T)=98\%$，因此有 $4T=1\ \text{min}$，得出 $T=0.25\ \text{min}$。视温度计为单位反馈系统，则开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{1}{Ts}\qquad\begin{cases}K=1/T\\ v=1\end{cases}$$

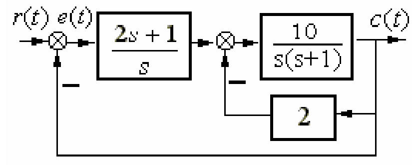
用静态误差系数法，当 $r(t)=10\cdot t$ 时，$e_{ss}=\dfrac{10}{K}=10T=2.5°C$。

解法二 依题意，系统误差定义为 $e(t)=r(t)-c(t)$，应有

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=1-\frac{C(s)}{R(s)}=1-\frac{1}{Ts+1}=\frac{Ts}{Ts+1}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\,\Phi_e(s)\,R(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{Ts}{Ts+1}\cdot\frac{10}{s^2}=10T=2.5°C$$

3-22 系统结构图如题3-22图所示。试求局部反馈加入前后系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。



题3-22图 系统结构图

解 局部反馈加入前，系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\infty$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=10$$

局部反馈加入后，系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{2s+1}{s}\cdot\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+\dfrac{20}{(s+1)}}=\frac{10(2s+1)}{s(s^2+s+20)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=0.5$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=0$$

3-23 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

试分别求出当输入信号 $r(t)=1(t)$, t 和 t^2 时系统的稳态误差[$e(t)=r(t)-c(t)$]。

解 $G(s)=\dfrac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$ $\begin{cases}K=7/8\\ v=1\end{cases}$

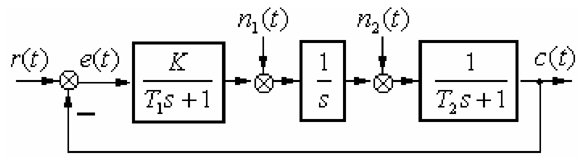
由静态误差系数法

$r(t)=1(t)$ 时， $e_{ss}=0$

$r(t)=t$ 时， $e_{ss}=\dfrac{A}{K}=\dfrac{8}{7}=1.14$

$r(t)=t^2$ 时， $e_{ss}=\infty$

3-24 系统结构图如题 3-24 图所示。已知 $r(t)=n_1(t)=n_2(t)=1(t)$，试分别计算 $r(t),n_1(t)和n_2(t)$ 作用时的稳态误差，并说明积分环节设置位置对减小输入和干扰作用下的稳态误差的影响。



题3-24图 系统结构图

解 $G(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $\begin{cases}K\\ v=1\end{cases}$

$r(t)=1(t)$ 时， $e_{ssr}=0$；

$$\Phi_{en_1}(s)=\frac{E(s)}{N_1(s)}=\frac{-\dfrac{1}{s(T_2s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

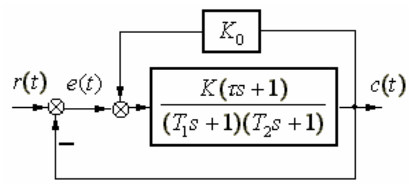
$n_1(t)=1(t)$ 时， $e_{ssn_1}=\lim\limits_{s\to0}s\,\Phi_{en_1}(s)N_1(s)=\lim\limits_{s\to0}s\,\Phi_{en_1}(s)\dfrac{1}{s}=-\dfrac{1}{K}$

$$\Phi_{en_2}(s)=\frac{E(s)}{N_2(s)}=\frac{-\dfrac{1}{(T_2s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K}$$

$n_2(t)=1(t)$ 时， $e_{ssn_2}=\lim\limits_{s\to0}s\,\Phi_{en_1}(s)N_2(s)=\lim\limits_{s\to0}s\,\Phi_{en_2}(s)\dfrac{1}{s}=0$

在反馈比较点到干扰作用点之间的前向通道中设置积分环节，可以同时减小由输入和干扰因引起的稳态误差。

3-25　系统结构图如题 3-25 图所示，要使系统对 $r(t)$ 而言是 II 型的，试确定参数 K_0 和 τ 的值。



题3-25图 系统结构图

解

$$G(s)=\frac{\dfrac{K(\tau s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}}{1-\dfrac{K_0 K(\tau s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}}=\frac{K(\tau s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)-K_0 K(\tau s+1)}$$

$$=\frac{K(\tau s+1)}{T_1 T_2 s^2+(T_1+T_2-K_0 K\tau)s+(1-K_0 K)}$$

依题意应有：$\begin{cases}1-K_0 K=0\\ T_1+T_2-K_0 K\tau=0\end{cases}$　联立求解得　$\begin{cases}K_0=1/K\\ \tau=T_1+T_2\end{cases}$

此时系统开环传递函数为

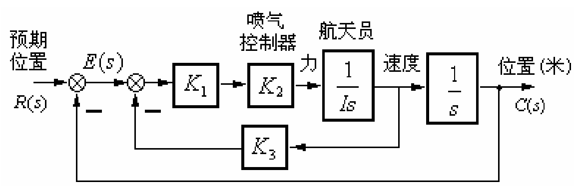
$$G(s)=\frac{K(T_1+T_2)s+K}{T_1 T_2 s^2}$$

考虑系统的稳定性，系统特征方程为

$$D(s)=T_1 T_2 s^2+K(T_1+T_2)s+K=0$$

当 T_1，T_2，$K>0$ 时，系统稳定。

3-26　宇航员机动控制系统结构图如题 3-26 图所示，其中控制器可以用增益 K_2 来表示。宇航员及其装备的总转动惯量 $I=25\,kg\cdot m^2$。



题3-26图 宇航员机动控制系统结构图

（1） 当输入为斜坡信号 $r(t)=t$（m）时，试确定 K_3 的取值，使系统稳态误差 $e_{ss}=1$（cm）；

（2） 采用（1）中的 K_3 值，试确定 K_1, K_2 的取值，使系统超调量 σ%限制在 10%以内。

解 （1）系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{K_1K_2}{s(Is+K_1K_2K_3)}=\frac{\dfrac{K_1K_2}{I}}{s\left(s+\dfrac{K_1K_2K_3}{I}\right)} \qquad \begin{cases} K=\dfrac{1}{K_3} \\ v=1 \end{cases}$$

$r(t)=t$ 时，令 $e_{ss}=\dfrac{1}{K}=K_3\le 0.01$， 可取 $K_3=0.01$。

（2）系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{K_1K_2}{I}}{s^2+\dfrac{K_1K_2K_3}{I}s+\dfrac{K_1K_2}{I}} \qquad \begin{cases} \omega_n=\sqrt{\dfrac{K_1K_2}{I}} \\ \xi=\dfrac{K_3\sqrt{K_1K_2}}{2\sqrt{I}} \end{cases}$$

由 $\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\le 10\%$，可解出 $\xi\ge 0.592$。取 $\xi=0.6$ 进行设计。

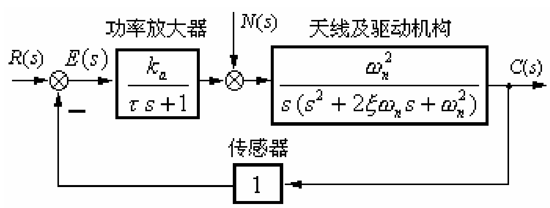
将 $I=25$，$K_3=0.01$ 代入 $\xi=\dfrac{K_3\sqrt{K_1K_2}}{2\sqrt{I}}=0.6$ 表达式，可得

$$K_1K_2\ge 360000$$

3-27 大型天线伺服系统结构图如题 3-27 图所示，其中 ξ=0.707，ω_n=15，τ=0.15(s)。

（1） 当干扰 $n(t)=10\cdot 1(t)$，输入 $r(t)=0$ 时，为保证系统的稳态误差小于 0.01°，试确定 k_a 的取值；

（2） 当系统开环工作（k_a=0），且输入 $r(t)=0$ 时，确定由干扰 $n(t)=10\cdot 1(t)$ 引起的系统响应稳态值。



题3-27图 天线控制系统结构图

解　（1）干扰作用下系统的误差传递函数为

$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-\omega_n^2(\tau s+1)}{s(\tau s+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)+K_a\omega_n^2}$$

$n(t)=10\cdot 1(t)$ 时，　令

$$e_{ssn}=\left|\lim_{s\to 0}s\cdot N(s)\cdot\Phi_{en}(s)\right|=\left|\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{10}{s}\cdot\Phi_{en}(s)\right|=\frac{10}{K_a}\le 0.01$$

得：　　$K_a\ge 1000$

（2）此时有

$$E(s)=-C(s)=\frac{-\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\cdot N(s)=\frac{-10\omega_n^2}{s^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$e_{ss}=e(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=-\infty$$

3-28　单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{25}{s(s+5)}$$

（1）　求各静态误差系数和 $r(t)=1+2t+0.5t^2$ 时的稳态误差 e_{ss}；

（2）　当输入作用 10 秒时的动态误差是多少？

解　（1）$G(s)=\dfrac{25}{s(s+5)}$　　　$\begin{cases}K=5\\ v=1\end{cases}$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{25}{s(s+5)}=\infty$$

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\,G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{25}{s+5}=5$$

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{25s}{s+5}=0$$

$r_1(t)=1(t)$ 时， $e_{ss1}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

$r_2(t)=2t$ 时， $e_{ss2}=\dfrac{A}{K_v}=\dfrac{2}{5}=0.4$

$r_3(t)=0.5t^2$ 时， $e_{ss3}=\dfrac{A}{K_a}=\dfrac{1}{0}=\infty$

由叠加原理 $e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}+e_{ss3}=\infty$

（2） 题意有

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{s(s+5)}{s^2+5s+25}$$

用长除法可得 $\Phi_e(s)=C_0+C_1s+C_2s^2+C_3s^3+\cdots=0.2s+0.008s^3+\cdots$

$$\begin{array}{ll} C_0=0 & r(t)=1+2t+0.5t^2 \\ C_1=0.2 & r'(t)=2+t \\ C_2=0 & r''(t)=1 \\ C_3=0.008 & r'''(t)=0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

∴ $e_s(t)=C_0r(t)+C_1r'(t)+C_2r''(t)+C_3r'''(t)+\cdots=0.4+0.2t$

∴ $e_s(10)=2.4$

3-29 已知单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{5s+200}{0.01s^3+0.502s^2+6s+200}$$

输入 $r(t)=5+20t+10t^2$，求动态误差表达式。

解 依题意

$$\Phi_e(s)=1-\Phi(s)=\frac{0.01s^3+0.502s^2+s}{0.01s^3+0.502s^2+6s+200}$$

用长除法可得

$$\begin{aligned}\Phi_e(s)&=C_0+C_1s+C_2s^2+C_3s^3+\cdots\\&=0.05s+0.00236s^2-0.0000335s^3+\cdots\end{aligned}$$

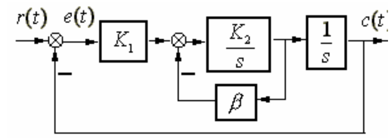
∴ $e_s(t)=0.005(20+20t)+0.00236\times 20=0.1t+0.1472$。

3-30 控制系统结构图如题 3-30 图所示。其中 K_1，$K_2>0$，$\beta\ge 0$。试分析：

（1）β 值变化(增大)对系统稳定性的影响；

（2）β 值变化(增大)对动态性能（$\sigma\%$，t_s）的影响；

（3）β 值变化(增大)对 $r(t)=a\,t$ 作用下稳态误差的影响。



题3-30图 系统结构图

解　系统开环传递函数为

$$G(s)=K_1\frac{K_2}{s+\beta K_2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_1K_2}{s(s+\beta K_2)}\qquad \begin{cases}K=K_1/\beta\\ v=1\end{cases}$$

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2}{s^2+\beta K_2 s+K_1K_2}\qquad \begin{cases}\omega_n=\sqrt{K_1K_2}\\ \xi=\dfrac{\beta K_2}{2\sqrt{K_1K_2}}=\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}\end{cases}$$

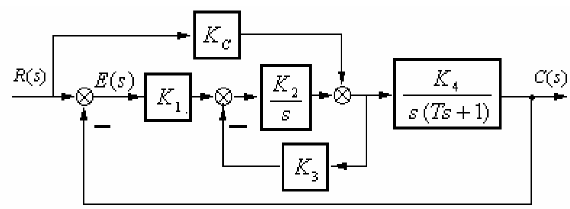
$$D(s)=s^2+\beta K_2 s+K_1K_2$$

（1）由 $D(s)$ 表达式可知，当 $\beta=0$ 时系统不稳定，$\beta>0$ 时系统总是稳定的。

（1）　由 $\xi=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}\beta$ 可知，　$\beta\uparrow\begin{cases}\xi\uparrow\ \rightarrow\ \sigma\%\downarrow\\ t_s=\dfrac{3.5}{\xi\omega_n}=\dfrac{7}{\beta K_2}\downarrow\end{cases}$　（$0<\xi<1$）

（2）　$\beta\uparrow\ \rightarrow\ e_{ss}=\dfrac{a}{K}=\dfrac{a\beta}{K_1}\uparrow$

3-31 设复合控制系统结构图如题 3-31 图所示。确定 K_C，使系统在 $r(t)=t$ 作用下无稳态误差。



题3-31图 控制系统结构图

解　系统误差传递函数为

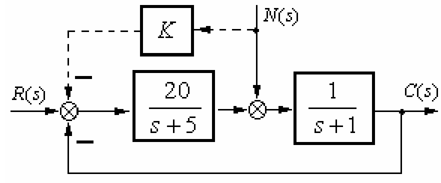
$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{(1+\dfrac{K_2K_3}{s})-\dfrac{K_4K_C}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K_2K_3}{s}+\dfrac{K_1K_2K_4}{s^2(Ts+1)}}=\frac{s\left[(s+K_2K_3)(Ts+1)-K_4K_C\right]}{Ts^3+(1+TK_2K_3)s^2+K_2K_3s+K_1K_2K_4}$$

由劳斯判据，当 T、K_1、K_2、K_3 和 K_4 均大于零，且 $(1+TK_2K_3)K_3>TK_1K_4$ 时，系统稳定。

令 $$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{K_2K_3-K_4K_C}{K_1K_2K_4}=0$$

得 $$K_C=\frac{K_2K_3}{K_4}$$

3-32 已知控制系统结构图如题 3-32 图所示，试求：



题3-32图 控制系统结构图

（1） 不加虚线所画的顺馈控制时，系统在干扰作用下的传递函数 $\Phi_n(s)$；

（2） 当干扰 $n(t)=\Delta\cdot 1(t)$ 时，系统的稳态输出；

（3） 若加入虚线所画的顺馈控制时，系统在干扰作用下的传递函数，并求 $n(t)$ 对输出 $c(t)$ 稳态值影响最小的适合 K 值。

解 （1）无顺馈时，系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{s+5}{(s+1)(s+5)+20}=\frac{s+5}{s^2+6s+25}$$

（2）$c_n(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}s\Phi_n(s)\cdot N(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\Phi_n(s)\cdot\dfrac{\Delta}{s}=\dfrac{\Delta}{5}$

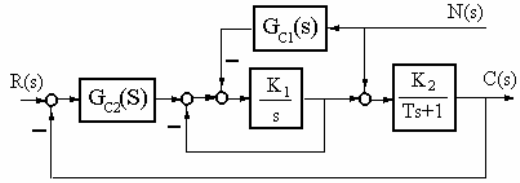
（3）有顺馈时，系统误差传递函数为

$$\Phi_n(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{\dfrac{1}{s+1}\left[1-\dfrac{20K}{s+25}\right]}{1+\dfrac{20}{(s+1)(s+5)}}=\frac{s+5-20K}{s^2+6s+25}$$

令 $$c_n(\infty)=\lim_{s\to 0}s\Phi_n(s)\cdot N(s)=\lim_{s\to 0}s\Phi_n(s)\cdot\frac{\Delta}{s}=\Delta\left(\frac{5-20K}{25}\right)=0$$

得 $$K=0.25$$

3-33 设复合校正控制系统结构图如题 3-33 图所示，其中 N(s)为可量测扰动。若要求系统输出 C(s)完全不受 N(s)的影响，且跟踪阶跃指令的稳态误差为零，试确定前馈补偿装置 $G_{c1}(s)$和串联校正装置 $G_{c2}(s)$。



题3-33图 复合控制系统结构图

解　（1）求$G_{c1}(s)$。令

$$\Phi_n(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{\frac{K_2}{Ts+1}\left(1+\frac{K_1}{s}\right)-\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}G_{c1}(s)}{1+\frac{K_1}{s}+\frac{K_1K_2G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}}=\frac{K_2\left[s+K_1-K_1G_{c1}(s)\right]}{s(Ts+1)+K_1(Ts+1)+K_1K_2G_{c2}(s)}=0$$

得：　$$G_{c1}(s)=\frac{s+K_1}{K_1}。$$

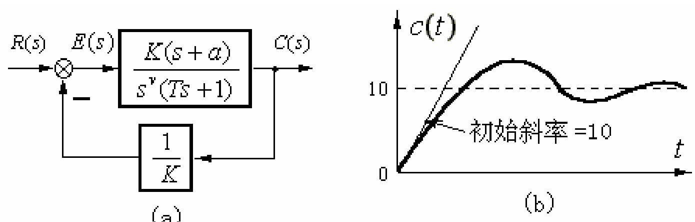
（2）求$G_{c2}(s)$。令

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1+\frac{K_1}{s}}{1+\frac{K_1}{s}+\frac{K_1K_2G_{c2}(s)}{s(Ts+1)}}=\frac{(s+K_1)(Ts+1)}{s(Ts+1)+K_1(Ts+1)+K_1K_2G_{c2}(s)}$$

当$r(t)=1(t)$作用时，令　$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s\,\Phi_e(s)\cdot\frac{1}{s}=\lim\limits_{s\to 0}\frac{K_1}{K_1+K_1K_2G_{c2}(s)}=0$

明显地，取　$G_{c2}(s)=\frac{1}{s}$　可以达到目的。

3-34　已知控制系统结构图如题 3-34 图（a）所示，其单位阶跃响应如题 3-34 图（b）所示，系统的稳态位置误差$e_{ss}=0$。试确定K, v和T的值。



题3-34图 系统结构图

解　$G(s)=\frac{s+a}{s^v(Ts+1)}$　$\begin{cases}K_K=a\\ v\ 待定\end{cases}$

由 $r(t)=1(t)$时，$e_{ss}=0$，可以判定：$v\ge 1$

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K(s+a)}{s^{v}(Ts+1)}}{1+\dfrac{s+a}{s^{v}(Ts+1)}}=\frac{K(s+a)}{s^{v}(Ts+1)+s+a}$$

$$D(s)=Ts^{v+1}+s^{v}+s+a$$

系统单位阶跃响应收敛，系统稳定，因此必有： $v\le 2$ 。
根据单位阶跃响应曲线，有

$$h(\infty)=\lim_{s\to 0}s\,\Phi(s)\cdot R(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{K(s+a)}{s^{v}(Ts+1)+s+a}=K=10$$

$$h'(0)=k(0)=\lim_{s\to\infty}s\,\Phi(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{sK(s+a)}{s^{v}(Ts+1)+s+a}=\lim_{s\to\infty}\frac{Ks^{2}+aKs}{Ts^{v+1}+s^{v}+s+a}=10$$

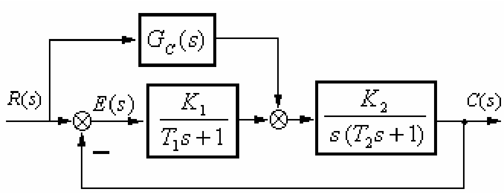
当$T\ne 0$时，有

$$k(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{Ks^{2}}{Ts^{v+1}}=10 \qquad \text{可得} \begin{cases}K=10\\ v=1\\ T=1\end{cases}$$

当$T=0$时，有

$$k(0)=\lim_{s\to\infty}\frac{Ks^{2}}{s^{v}}=10 \qquad \text{可得} \begin{cases}K=10\\ v=2\\ T=0\end{cases}$$

3-35 复合控制系统结构图如题 3-35 图所示，图中K_1，K_2，T_1，T_2均为大于零的常数。
（1） 确定当闭环系统稳定时，参数K_1，K_2，T_1，T_2应满足的条件；
（2） 当输入$r(t)=V_0 t$时，选择校正装置$G_C(s)$，使得系统无稳态误差。



题3-35图 控制系统结构图

解 （1）系统误差传递函数

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}G_c(s)}{1+\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & T_1T_2 & 1 \\
s^2 & T_1+T_2 & K_1K_2 \\
s^1 & \dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2} & 0 \\
s^0 & K_1K_2 &
\end{array}$$

因 K_1、K_2、T_1、T_2 均大于零，所以只要 $T_1+T_2>T_1T_2K_1K_2$ 即可满足稳定条件。

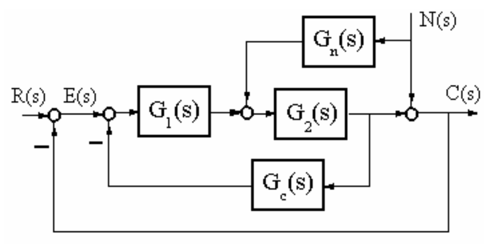
（2）令 $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}s\Phi_e(s)\cdot R(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{V_0}{s^2}\cdot\dfrac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{V_0}{K_1K_2}\left[1-K_2\frac{G_c(s)}{s}\right]=0$$

可得 $G_c(s)=s/K_2$

3-36 设复合控制系统结构图如题 3-36 图所示。图中 $G_n(s)$ 为前馈补偿装置的传递函数，$G_c(s)=K_t's$ 为测速发电机及分压电位器的传递函数，$G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 为前向通路环节的传递函数，$N(s)$ 为可量测扰动。

如果 $G_1(s)=K_1$，$G_2(s)=1/s^2$，试确定 $G_n(s)$、$G_c(s)$和K_1，使系统输出量完全不受扰动的影响，且单位阶跃响应的超调量σ％=25％，峰值时间 t_p=2(s)。



题3-36图 复合控制系统结构图

解 （1）确定 $G_n(s)$。由梅逊公式

令 $\Phi_n(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}=\dfrac{(1+G_1G_2G_c)+G_nG_2}{1+G_1G_2G_c+G_1G_2}=\dfrac{s^2+K_1G_c(s)+G_n(s)}{s^2+K_1G_c(s)+K_1}=0$

解得 $G_n(s)=-\left[s^2+K_1G_c(s)\right]=-s(s+K_1K_t')$

（2）确定K_t'。由梅逊公式

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2G_c+G_1G_2}$$

$$=\frac{K_1}{s^2+K_1K_t's+K_1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

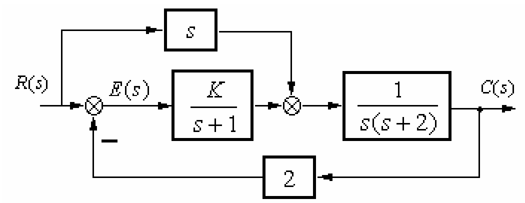
比较有 $\begin{cases} K_1=\omega_n^2 \\ K_1K_t'=2\xi\omega_n \end{cases}$ 由题目要求 $\begin{cases} \sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.25 \\ t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=2 \end{cases}$

可解得 $\begin{cases} \xi=0.403 \\ \omega_n=1.72 \end{cases}$ $\begin{cases} K_1=\omega_n^2=2.946 \\ K_t'=\dfrac{2\xi\omega_n}{K_1}=0.47 \end{cases}$

有 $G_c(s)=K_t's=0.47s$

$G_n(s)=-s(s+K_1K_t')=-s(s+1.386)$

3-37 已知系统结构图如题 3-37 图所示



题3-37图 系统结构图

（1） 求引起闭环系统临界稳定的K值和对应的振荡频率ω；

（2） $r(t)=t^2$时，要使系统稳态误差$e_{ss}\le 0.5$，试确定满足要求的K值范围。

解 （1）由系统结构图

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{2s}{s(s+2)}}{1+\dfrac{2K}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{s^2(s+1)}{s(s+1)(s+2)+2K}$$

$D(s)=s^3+3s^2+2s+2K$

系统稳定时有 $D(j\omega)=0$

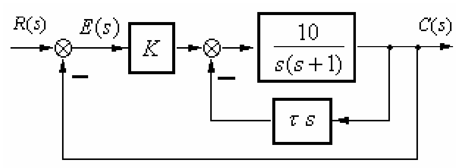
令 $\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-3\omega^2+2K=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+2\omega=0 \end{cases}$ 联立解出 $\begin{cases} K=3 \\ \omega=\sqrt{2} \end{cases}$

（2）当 $r(t)=t^2$ 时，$R(s)=\dfrac{2}{s^3}$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot R(s)\cdot\Phi_e(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{2}{s^3}\cdot\frac{s^2(s+1)}{s(s+1)(s+2)+2K}=\frac{1}{K}$$

令 $e_{ss}=\dfrac{1}{K\le 5}$，有 $K\ge 2$，综合系统稳定性要求，得：$2\le K\le 3$。

3-38 系统结构图如题 3-38 图所示。已知系统单位阶跃响应的超调量 $\sigma\%=16.3\%$，峰值时间 $t_p=1$（秒）



题3-38图 系统结构图

（1） 求系统的开环传递函数 $G(s)$；

（2） 求系统的闭环传递函数 $\Phi(s)$；

（3） 根据已知的性能指标 $\sigma\%$、t_p 确定系统参数 K 及 τ；

（4） 计算等速输入 $r(t)=1.5\,t$（度/秒）时系统的稳态误差。

解 （1） $$G(s)=K\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+\dfrac{10\tau s}{s(s+1)}}=\frac{10K}{s(s+10\tau+1)}$$

（2） $$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10K}{s^2+(10\tau+1)s+10K}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

（3）由 $\begin{cases}\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\varsigma^2}}=16.3\%\\ t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1\end{cases}$ 联立解出 $\begin{cases}\xi=0.5\\ \omega_n=3.63\\ \tau=0.263\end{cases}$

由（2） $10K=\omega_n^2=3.63^2=13.18$，得出 $K=1.318$。

（4） $$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\frac{10K}{10\tau+1}=\frac{13.18}{10\times 0.263+1}=3.63$$

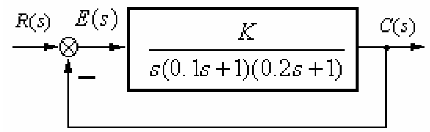
$$e_{ss}=\frac{A}{K_v}=\frac{1.5}{3.63}=0.413$$

3-39　系统结构图如题 3-39 图所示。

（1）为确保系统稳定，如何取 K 值？

（2）为使系统特征根全部位于 s 平面 $s=-1$ 的左侧，K 应取何值？

（3）若 $r(t)=2t+2$ 时，要求系统稳态误差 $e_{ss}\le 0.25$，K 应取何值？



题3-39图　系统结构图

解　$G(s)=\dfrac{50K}{s(s+10)(s+5)}$　$\begin{cases}K\\ v=1\end{cases}$

（1）　$D(s)=s^3+15s^2+50s+50K$

Routh：
$$\begin{array}{llll}
s^3 & 1 & 50 & \\
s^2 & 15 & 50K & \\
s^1 & \dfrac{50(15-K)}{15} & & \rightarrow\ K<15 \\
s^0 & 50K & & \rightarrow\ K>0
\end{array}$$

系统稳定范围：　$0<K<15$

（2）在 $D(s)$ 中做平移变换：$s=s'-1$

$$D(s')=(s'-1)^3+15(s'-1)^2+50(s'-1)+50K$$
$$=s'^3+12s'^2+23s'+(50K-36)$$

Routh：
$$\left\{\begin{array}{llll}
s'^3 & 1 & 23 & \\
s'^2 & 12 & 50K-36 & \\
s'^1 & \dfrac{312-50K}{12} & & \rightarrow\ K<\dfrac{312}{50}=6.24 \\
s'^0 & 50K-36 & & \rightarrow\ K>\dfrac{36}{50}=0.72
\end{array}\right.$$

满足要求的范围是：　$0.72<K<6.24$

（3）由静态误差系数法

当 $r(t)=2t+2$ 时，令 $e_{ss}=\dfrac{2}{K}\le 0.25$

得　$K\ge 8$。

综合考虑稳定性与稳态误差要求可得：　$8\le K<15$