A陈[illegible]

5.1

② 解 $\cos z=0$ $z=(k+\frac{1}{2})\pi$ 为奇点.

并为一阶奇点. $z=\infty$ 为非孤立奇点, 故无留数;

故: $\mathrm{Res}[\frac{z}{\cos z},(k+\frac{1}{2})\pi]=\left[\frac{z}{-\sin z}\right]_{z=(k+\frac{1}{2})\pi}$

$=(-1)^k(k+\frac{1}{2})\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\dots)$

③

解 $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ 奇点为 $z_1=0, z_2=3i, z_3=-3i$ $z_4=\infty$ 为本性奇点

$z_1=0$ 为2阶极点,

$z_2=3i, z_3=-3i$ 为1阶极点.

$\mathrm{Res}[f(z),3i]=\frac{e^z}{2z(2z^2+9)}\Big|_{z=3i}=\frac{e^{(3+\frac{\pi}{2})i}}{54}$

$\mathrm{Res}[f(z),-3i]=\frac{e^z}{2z(2z^2+9)}\Big|_{z=-3i}=\frac{e^{(-3-\frac{\pi}{2})i}}{54}$

$\because \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}\right)\left(\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)\frac{z^2}{3}\right]^n\right)$

故 $\mathrm{Res}[f(z),0]=1/9$.

当 $|z|>3$ 时

$\because \frac{e^z}{z^2+(z^2+9)}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{z^{2n}}\right)$

$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{\sin 3}{27}-\frac{1}{9}$

5.2

解: $f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ 奇点为 $z_1=3$,

$z_{2-6}=\sqrt[5]{1}$ $C=|z|=2$

$\oint_{|z|=2}f(z)dz=2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),z_2)]$
$+2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),z_3)]+2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),z_4]]$
$+2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),z_5)]+2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),z_6)]$

$\because \sum_{n=2}^{6}[\mathrm{Res}(f(z),z_n)]+\mathrm{Res}[f(z),3]$
$+\mathrm{Res}(f(z),\infty)=0$

$\mathrm{Res}[f(z);3]=\frac{1}{z^5-1}\Big|_{z=3}=\frac{1}{242}$

$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$

$\because \lim_{z\to\infty}f(z)=0$

故则 $\oint_{|z|=2}f(z)dz=2\pi i(-\frac{1}{242})=\frac{-\pi i}{121}$

5.4

② 解: $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$

$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 奇点为 $z=1$ 二阶.

$\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),1]$

$=2\pi i(\lim_{z\to1}2e^{2z})=4\pi i e^2$

③ $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$

$f(z)$奇点, $z_1=0$ 为一阶极点,

$z_2=1$ 为二阶极点,

故则 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$

$=2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),0]]+2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),1)]$

$=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}\right]+2\pi i\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z}(1-\frac{1}{z})$

$=2\pi i$

5.5

解: $f(z)=\frac{2z}{3+z^2}$

$\because \lim_{z\to\infty}f(z)=0$

故则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\lim_{z\to\infty}zf(z)=-2$

5.6 $\oint_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$

解: $=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$

因为 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$

$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\lim_{z\to\infty}zf(z)=-1$

故则 $\oint_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$

$=2\pi i$

5.7 ⑧ $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta$

解方法一：∵ $d\theta=\frac{dz}{iz}$，$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{4z}{i(4z^2+(z^2+1)^2)}dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4z\,dz}{i(z+(\sqrt2+1)i)(z-(\sqrt2+1)i)(z+(\sqrt2-1)i)(z-(\sqrt2-1)i)}$$

$$=8\pi\left[\frac{z}{(z^2+3+2\sqrt2)(z+(\sqrt2-1)i)}\bigg|_{z=(\sqrt2-1)i}+\frac{z}{(z^2+3+2\sqrt2)(z-(\sqrt2-1)i)}\bigg|_{z=(1-\sqrt2)i}\right]$$

$=\sqrt2\pi$

方法二：上式 $=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1+\cos2\theta}{2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d(2\theta)}{3+\cos2\theta}=\int_0^{4\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$

$$=2\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}=-4i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}=8\pi\frac{1}{2z+6}\bigg|_{z=-3+2\sqrt2}$$

$=\sqrt2\pi$

5.8

解② $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$　$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$

∵ $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$

故则 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),i]]$

$=2\pi i\lim\limits_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'=\pi/2$

解④ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0)$

$f(x)=\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$

∵ $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$

故则 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$=2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),ai]+\mathrm{Res}[f(z),bi]]$

$=\frac{\pi}{ab(a+b)}$

解⑥ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$

$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$　$f(x)=\frac{x}{x^2+4x+20}$

$=\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx$

∴ $f(z)=\frac{z}{z^2+4z+20}$

∵ $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$

故则 $I=\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix}dx]$

$=\mathrm{Im}[2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},-2+4i]]$

$=\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos^2+\sin^2)$

⑩ $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}$ $(a>0,\ b>0)$

解：$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{[a+b(\frac{1+\cos2\theta}{2})]^2}$

$=2\int_0^{2\pi}\frac{d(2\theta)}{[b\cos2\theta+2a+b]^2}$

$=2\int_0^{4\pi}\frac{d\theta}{[b\cos\theta+2a+b]^2}$

$=4\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{[b\cos\theta+2a+b]^2}$

∵ $d\theta=\frac{dz}{iz}$　$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

∴ $I=\oint_{|z|=1}\frac{4dz}{iz}\frac{1}{[b(\frac{z^2+1}{2z})+(2a+b)]^2}$

$$=\frac{(-i)16}{b^2}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{[z+1+\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}\sqrt{1+\frac{b}{a}}]^2[z+1+\frac{2a}{b}-\frac{2a}{b}\sqrt{1+\frac{b}{a}}]^2}$$

∵ $a>0$，$b>0$

故仅有 $z_1=-1-\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}\sqrt{1+\frac{b}{a}}$ 在单位圆内

且为二阶极点。

故则 $I=\frac{32\pi}{b^2}\lim\limits_{z\to z_1}\left[\frac{z}{(z+1+\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}\sqrt{1+\frac{b}{a}})^2}\right]'$

$=\frac{\pi(2a+b)}{(a\sqrt{1+\frac{b}{a}})^3}$

第五章

习题

5.1 ② $z^3\cos\frac{1}{z-2}$

解 $z=2$ 为孤立奇点

$$z^3\cos\frac{1}{z-2}=\left[(z-2)^3+6(z-2)^2+12(z-2)+8\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-2)^{-2n}\right]$$

故 $\frac{1}{z-2}$ 的系数为 $C_{-1}=\frac{1}{4!}+12\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}-6=-5\frac{23}{24}$

5.2

② 积 $\oint_C\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ $C:|z-2|=\frac{1}{2}$

解: $\oint_C\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2},2\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to2}\left(\frac{z}{z-1}\right)'$$

$$=-2\pi i$$

5.4

解 $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ $z=\infty$

$z^2=1$ $z=\pm1$

故 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 展开为 $f(z)$ 在 $z=0$ 处对 $|z|>1$ 展开罗朗级数:

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots\right]$

$$=\frac{e^{-1}-e}{2}$$

5.6

解! $\oint_C\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ $C=|z|=2$.

上式 $=2\pi i\left[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\right]$

$\mathrm{Res}[f(z),-1]=z^3e^{\frac{1}{z}}\Big|_{z=-1}=-e^{-1}$

$$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right]z^3$$

$\mathrm{Res}[f(z),0]=e^{-1}-\frac{1}{3}$

故 $\oint\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\pi i}{3}$

引子求解以上级数在 $+\infty$ 展开级数，即为 $|z|>1$ 在 $z=0$ 处展开的和求 $=C_{-1}$ 则可.

5.7 ②

解: ∵ $d\theta=\frac{dz}{iz}$ $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{1-2b\cdot\frac{(z^2+1)}{2z}+b^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(-1)}{i}\cdot\frac{1}{bz^2-(b^2+1)z+b}\,dz$$

$$=\oint_{|z|=1}i\cdot\frac{1}{b(z-\frac{1}{b})(z-b)}\,dz$$

∵ $|b|<1$

$$I=i\times2\pi i\times\mathrm{Res}\left[\frac{1}{b(z-\frac{1}{b})(z-b)},b\right]$$

$$=\frac{2\pi}{1-b^2}$$

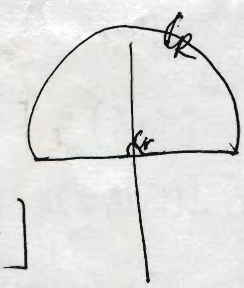
④ $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$ $(a\geq0,b\geq0)$

解:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx\right]$$



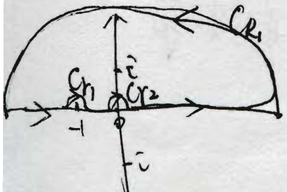
$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx$$

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz+\int_r^R\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz=0$$

$$\int_{C_r}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz=\pi(a-b)$$

$$I=-\frac{1}{2}\left[\pi(a-b)\right]=\frac{1}{2}\pi(b-a)$$

⑥ $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$



解: $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z^2+1)}$

$$\oint_C f(z)dz=\int_{-R}^{-1-r_1}\frac{1}{x(x+1)(x^2+1)}dx$$
$$+\int_{C_{r_1}}\frac{1}{z(z+1)(z^2+1)}dz$$
$$+\int_{-1+r_1}^{-r_2} f(x)dx$$
$$+\int_{C_{r_2}} f(z)\,dz+\int_{r_2}^{R} f(x)dx$$
$$+\int_{C_{R_1}} f(z)dz.$$

$\int_{\substack{C_{r_1}\\ r_1\to 0}}\frac{1}{z(z+1)(z^2+1)}dz$ $\quad\because \lim_{z\to -1}\frac{1}{z(z^2+1)}=-\frac{1}{2}$

$=i\left(-\frac{1}{2}\right)(-\pi)=\frac{\pi i}{2}$

$\int_{\substack{C_{r_2}\\ r_2\to 0}} f(z)dz$ $\quad\because \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}=1$

$=i(-\pi)=-\pi i$ $\quad\int_{C_{R_1}} f(z)dz=0$

$\oint_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),i]$

$=2\pi i\cdot\frac{1}{z(z+1)(z+i)}\Big|_{z=i}$

$=2\pi i\cdot\frac{-1}{2(1+i)}=\frac{\pi}{2}[-1-i]$

故则 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$

$=-\frac{\pi}{2}.$