5-6 习题课

1 证明传导电流和位移电流之和的散度为零

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t))=0$$

$$\nabla\bullet(\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t})=0$$

$$\nabla\bullet\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

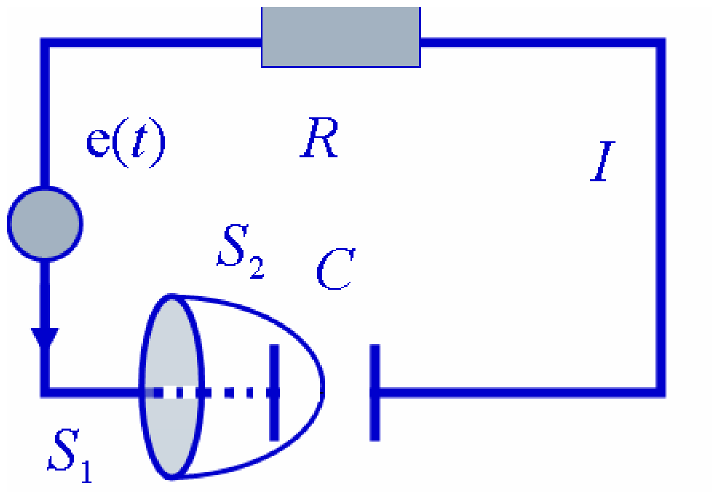
$$\nabla\bullet\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\ (\nabla\bullet D(\mathbf{r},t))}{\partial t}=0$$

$$\nabla\bullet(\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t})=0$$

2 Maxwell在总结方程时，作了哪些推广或假设？简述这些推广或假设逻辑的合理性

问题一：将安培环路定律用到如图所表示的环路，同样以L为边界的两个不同曲面 S_1 和 S_2，其旋涡源的通量有两个不同的结果

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \begin{cases} \mu_0 \iint\limits_{S_1} \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I \\ \mu_0 \iint\limits_{S_2} \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \end{cases}$$



问题二：

电荷守恒定律：$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J} \neq 0$

矢量场性质：$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} \equiv 0$

得到相互矛盾的结果！

Maxwell的假设贡献

在Maxwell时代，磁力线闭合已被实验证实，

即第二式被实验证实，要使得两式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J} \neq 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} \equiv 0 \end{cases}$$

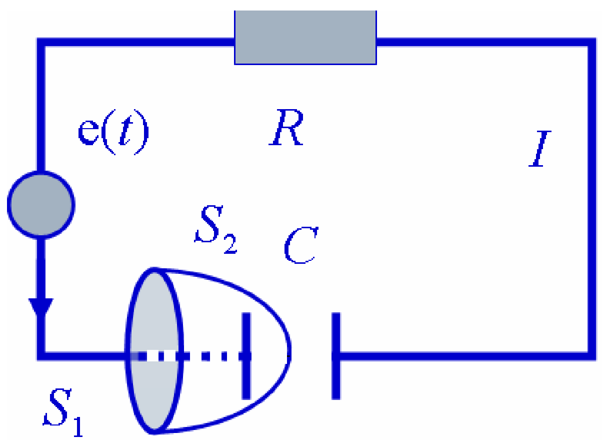
相一致，只有两式中电流密度的物理含义不同

$$\nabla \cdot [\nabla \times \boldsymbol{B}] = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Maxwell 认为：电流由两个部分组成，一部分为传导电流，另一部分他称之为位移电流，即总电流密度：

$$\boldsymbol{J}_{总} = \boldsymbol{J}_{传导} + \boldsymbol{J}_{位移} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D$$

问题1中：通过曲面S_1只有传导电流，没有位移电流，通过曲面S_2只有位移电流，没有传导电流



3 各种电流的异同：

◆传导电流：电子的定向运动形成，能将电能转换成热能，存在于导体中

◆位移电流：一个假设的电流，打比方，当电容充电时，不断有电子涌入电容两板，但电容两板之间却没有电流流动，因为电容相当于开路，电流在两板之间“断开”了，为了让电流连续下去，不妨假设电容两板之间仍然有电流流动，这就是位移电流。其实质是变化的电场，存在于导体、介质甚至真空中

- 极化电流：当介质被极化时，原本呈电中性的粒子的正负电荷被拉开，在拉开过程中正、负电荷产生位移，产生电流，如果分子极化变化剧烈，极化能量转化成无规则的热运动能量，也可产生热效应
- 磁化电流：磁铁之所以能有磁性，可以看作是因为有很多很小很小的电流环整齐排列的结果，每个电流环都有磁场，因为排列整齐，所有磁场的场强叠加起来变得很大。于是就产生磁铁的磁性，但是每个小电流环排列起来时，相邻两环之间的电流方向相反，于是整个磁铁除了边缘部分的小电流环的电流无法抵消外，内部电流总和为0，但是无法抵消的部分就变成了磁化电流了

4-5 写出方程组中电磁场的激励源，分析其产生的电磁场的有散或有旋特性

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\rho(\mathbf{r},t) \\
\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0 \\
\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\dfrac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}
\end{cases}
$$

$\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\rho(\mathbf{r},t)$ 电场的高斯定理，说明总的电场和电荷的联系

$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$ 磁通连续定理，说明磁场是无源场，磁力线是闭合的，目前自然界没有磁荷存在

$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ 法拉第电磁感应定律，说明总的电场和磁场的联系，变化的磁场产生电场

$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\dfrac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ 安培环路定理，说明磁场与电流以及变化电场的联系，变化的电场激发磁场

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}=\iiint_V \rho \,\mathrm{d}V$$

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint (\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

6 利用**Maxwell**方程，推导出介质空间中静电场满足的拉普拉斯方程，并写出理想介质与理想导体分界面处的边界条件

对于静电场，Maxwell方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

这说明静电场是有散无旋矢量场，
可以表示为某个标量场的梯度。

引入电位函数 $\phi(\boldsymbol{r})$，令 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$

得到 $\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon}$ （Poisson方程）

如果 $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ ，变为Laplace方程

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

理想导体①和理想介质②间的边界条件

理想导体内部电场和磁场都为零 $\delta \to \infty$

代数式	矢量式	式　号
$E_{1t}=0$	$\hat{n}\times E_1=0$	(2－57a)
$H_{1t}=J_s$	$\hat{n}\times H_1=J_s$	(2－57b)
$D_{1n}=\rho_s$	$\hat{n}\cdot D_1=\rho_s$	(2－57c)
$B_{1n}=0$	$\hat{n}\cdot B_1=0$	(2－57d)

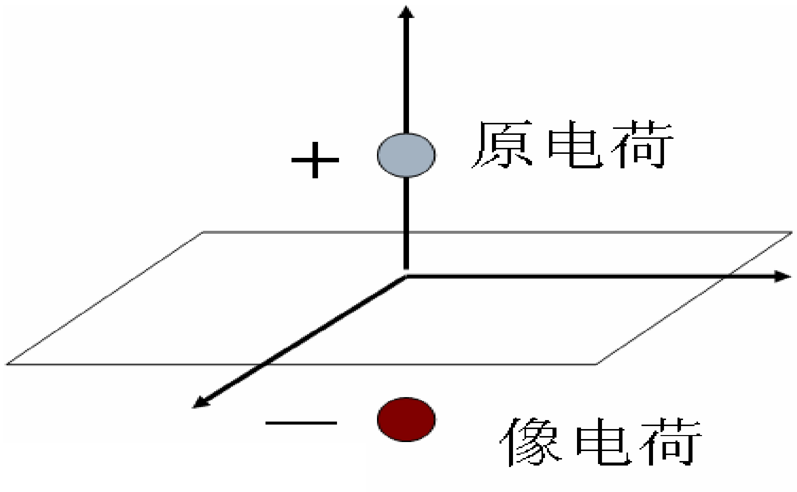
介质1为良导体，介质2为理想介质

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0（\text{常数}） \\ \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\rho_s \end{cases}$$

（二）无穷大导体平板上方有一单位点电荷，导体板接地，写出导体平板上半空间电场满足的方程和边界条件，求上半空间中静电场的解

无穷大导体板与电荷是否有作用力？如果有，请求出作用力的大小和方向

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), z > 0 \\ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$



$$\mathbf{r}' = \hat{e}_z h \quad , \quad \mathbf{r}'' = -\hat{e}_z f \quad , \quad Q' < 0$$

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\Big|_{z=0} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right]\Bigg|_{z=0} = 0 \ , \ f = h \ , \ Q' = -1$$

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-h\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+h\right)^2}}\right]$$

$$F\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2h)^2}$$

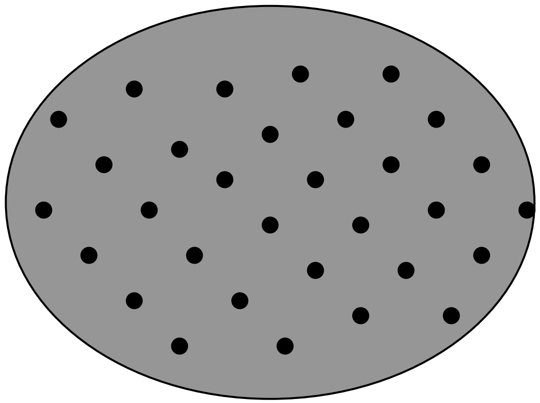
（三）简述理想导体的物理模型，证明理想导体为等电势和等磁势体，求出理想导体表面面电荷密度的表达式。

$$\sigma \to \infty$$

$$\mu \to \infty$$

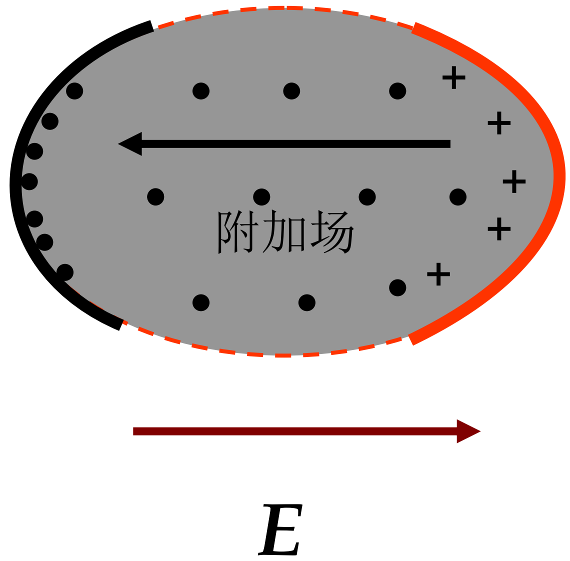
$$D_2 = -\rho_s$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\rho_s$$



没有外加电场

导体内部存在大量
可自由移动的电子
宏观上呈现电中性



达到静电平衡状态
导体内部电场为零
静电屏蔽

电场中的导体：

1. 导体内部电场为零，导体为等势体；
2. 导体边界面上电场的切向分量为零；
3. 电荷只分布在导体的表面

$$\oiint_S \rho_s \mathrm{ds} = \begin{cases} Q\ (\text{导体所带电荷量}) \\ 0\ (\text{导体不带电}) \end{cases}$$

证明 $\mu \to \infty$ 的磁性介质为等磁位体

证：下标1代表磁性介质，2代表真空，由磁场的边界条件得到：

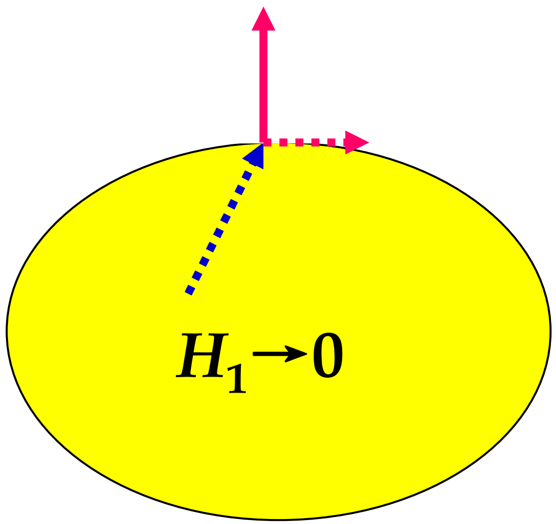
$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\right)=0 \quad , \quad \boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\right)=0$$

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_0\boldsymbol{H}_2, \quad \boldsymbol{B}_1=\mu\boldsymbol{H}_1$$

$$\mu_0 H_{2n}=\mu H_{1n}, H_{2t}=H_{1t}$$

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}}=\frac{\mu_0}{\mu}\frac{H_{1t}}{H_{1n}}\to 0 \Rightarrow \left(\frac{H_{2t}}{H_{1t}}\right)\to 0$$

$$\frac{\mu_0}{\mu}H_{2n}=H_{1n}\to 0$$



磁性介质中磁场恒为零，标量磁位为常数