



## 第五讲 时变电磁场问题 (3)

# 电波传播理论基础

(第七章)



## 电磁波的频谱结构

自 Hertz 应用电磁振荡方法产生电磁波以来，实验证明光是一类频率很高的电磁波，1895年德国科学家 Rontgen 发现

的X射线等，电磁波频谱进一步得到拓展

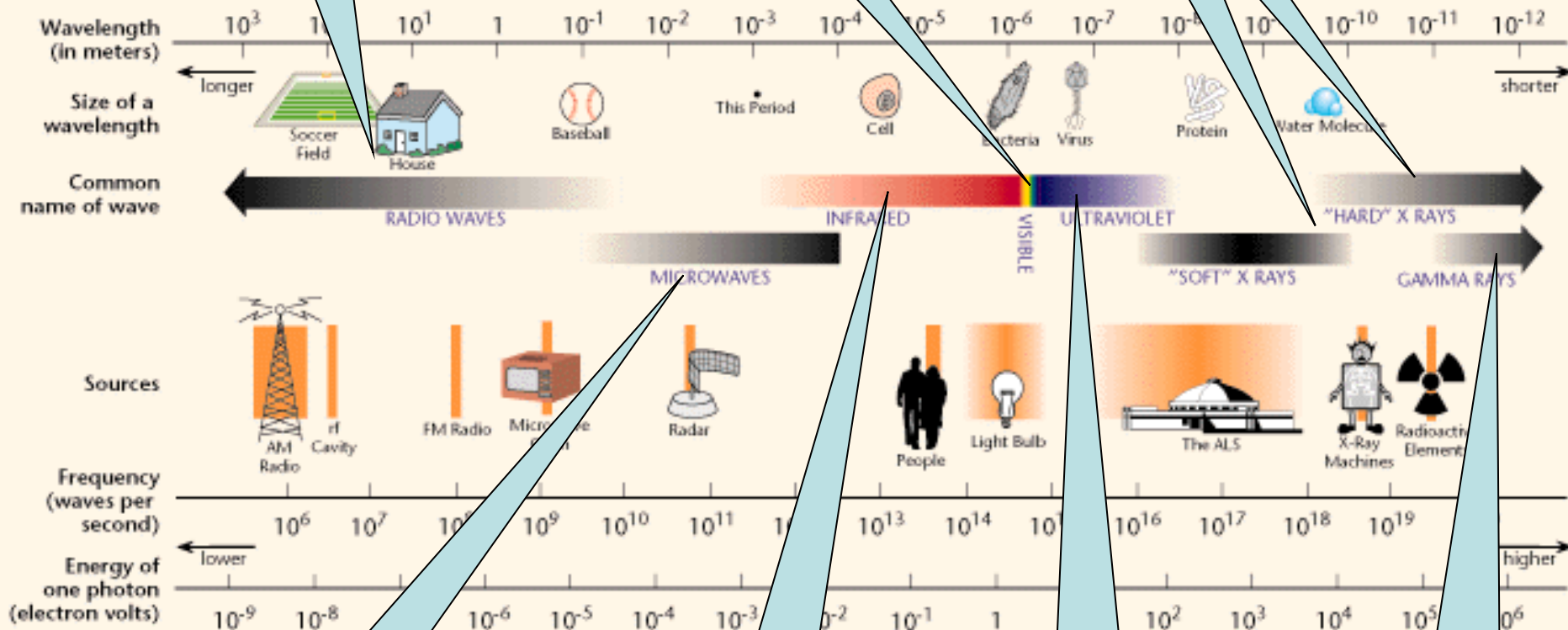


无线电波

可见光

X射线

# THE ELECTROMAGNETIC SPECTRUM



微波

红外线

紫外线

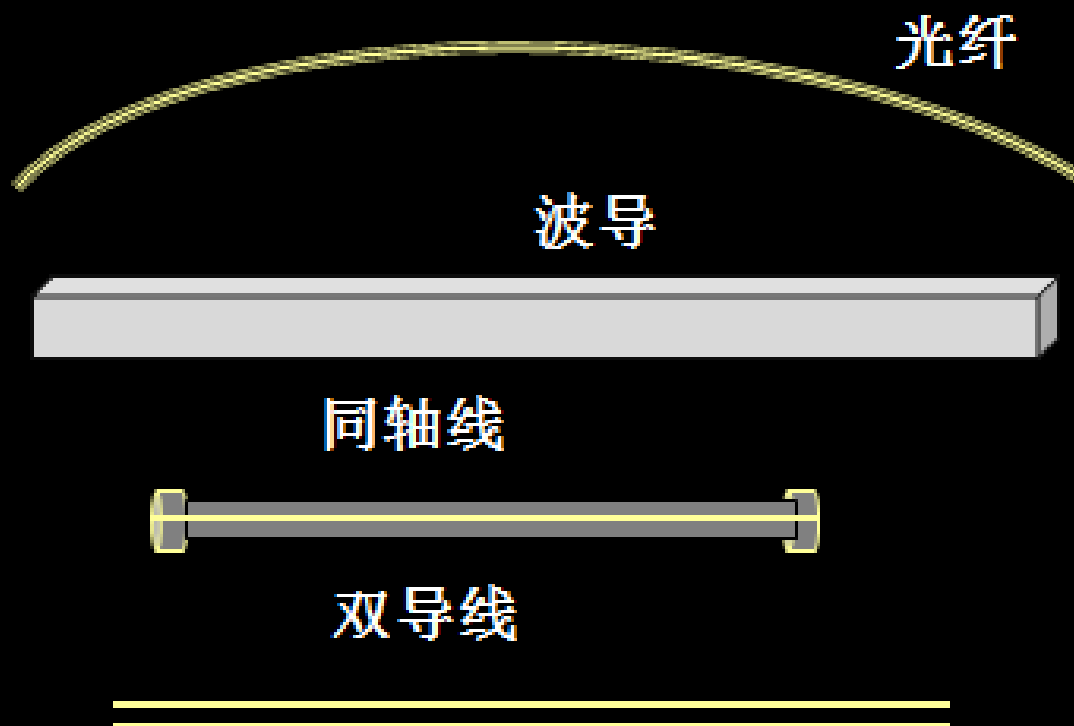
γ射线

极低频 ( ELF ) : 3-30 Hz	} 电磁能量传输频段
特低频 ( SLF ) : 30-300 Hz	
超低频 ( ULF ) : 300-3000 Hz	
甚低频 ( VLF ) : 3-30 kHz	} 无线电信标和对潜通信
低 频 ( LF ) : 30-300 kHz	
中 频 ( MF ) : 300-3000 kHz	
高 频 ( HF ) : 3-30 MHz	} 广播电视 舰对岸的通信 导航
甚高频 ( VHF ) : 30-300 MHz	
超高频 ( UHF ) : 300-3000 MHz	} 移动通信 微波通信 卫星通信 雷达和遥感
特高频 ( SHF ) : 3-30 GHz	
极高频 ( EHF ) : 30-300 GHz	



# 无线电信号传送方式

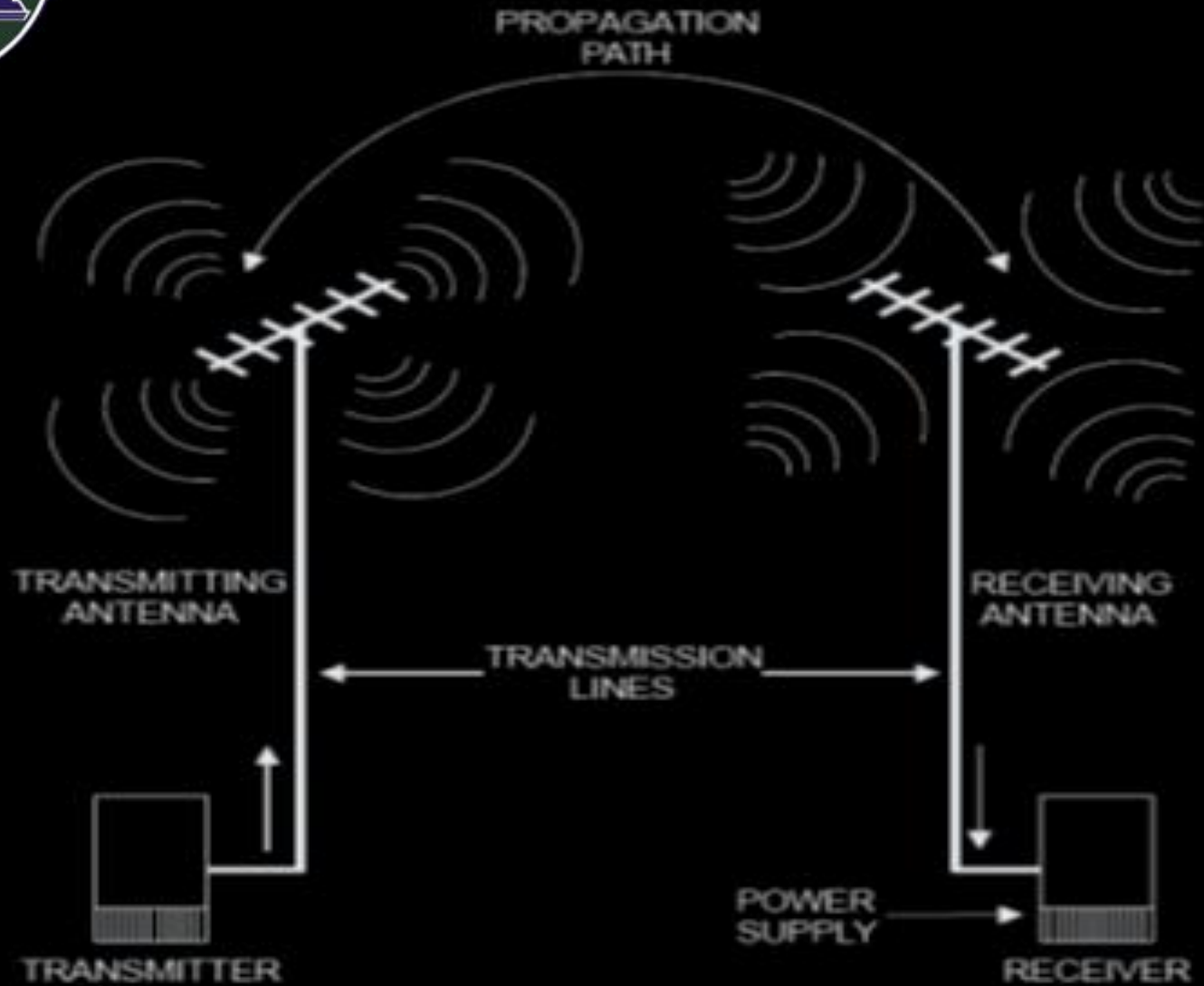
- 通过导波系统传导



不同频率的电磁波信号的传输



- 通过空间波动传播





# 本章主要内容

- 等效波阻抗概念及其应用
- 波在界面上特性及其应用
- 有耗介质中波的传播
- 波的速度与介质色散
- 电磁波的衍射现象及其应用
- 各向异性介质波的传播问题



## § 1 行波、驻波与波阻抗

### 1. 波的反射、透射与行—驻波状态

在无界线性均匀各向同性介质空间中

Maxwell方程组的最基本解为平面电磁波：

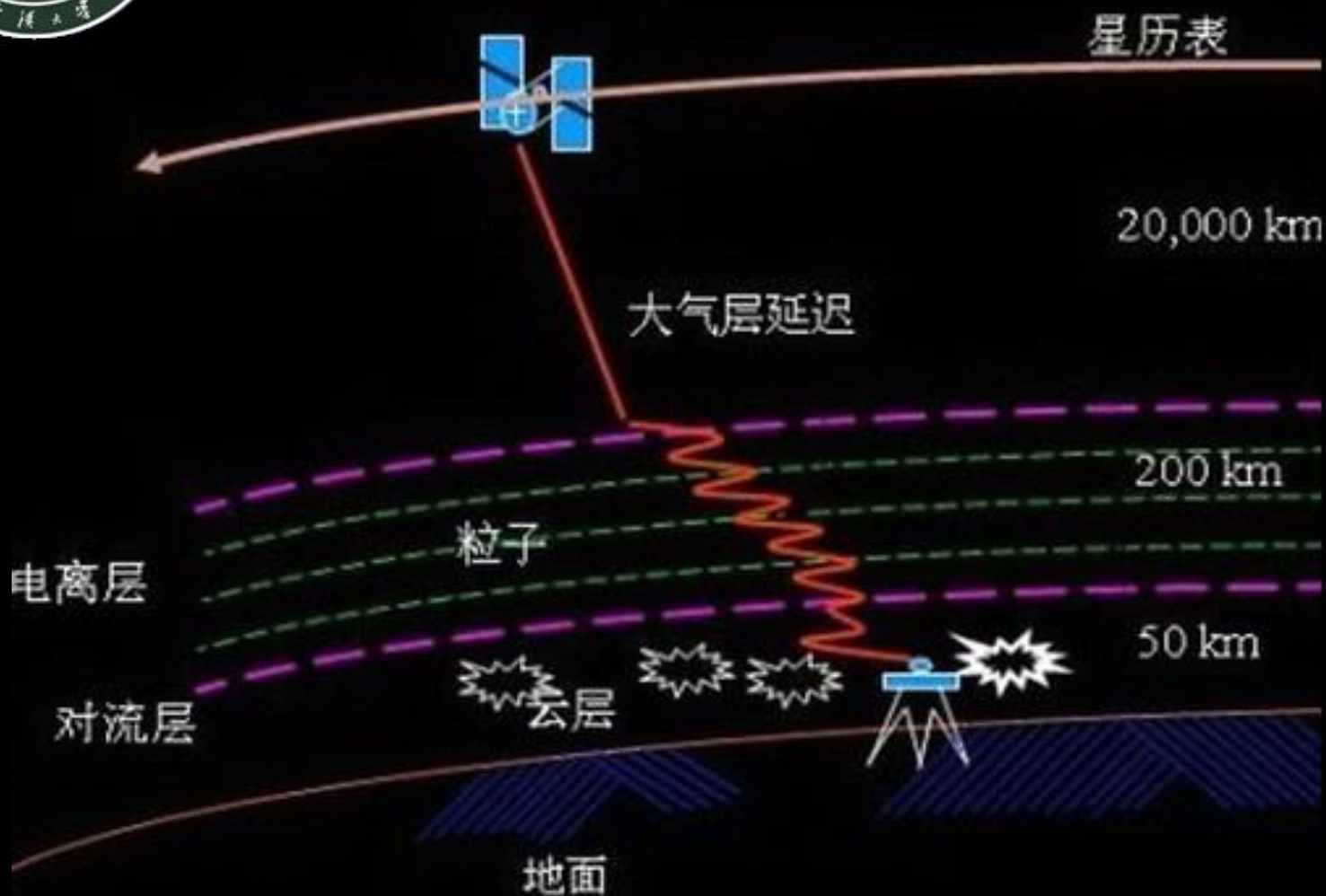
$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k} \quad , \quad \frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \text{ (波阻抗)}$$



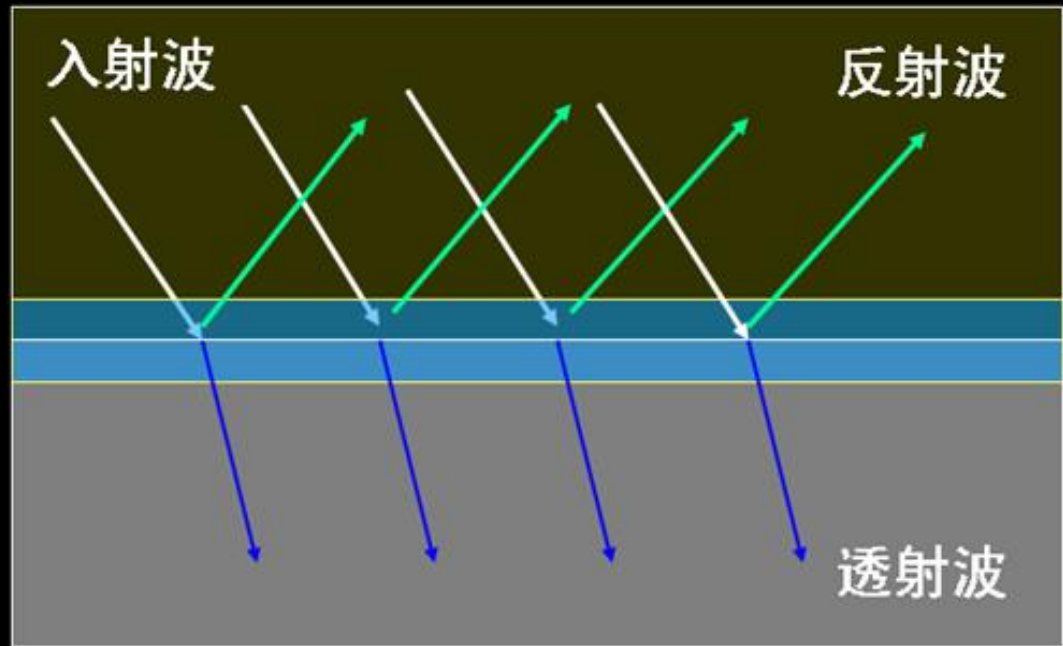


## 现实中电磁波传播的空间非常复杂





感应束缚电荷  
与磁化电流层



## 电磁波的反射与透射机理

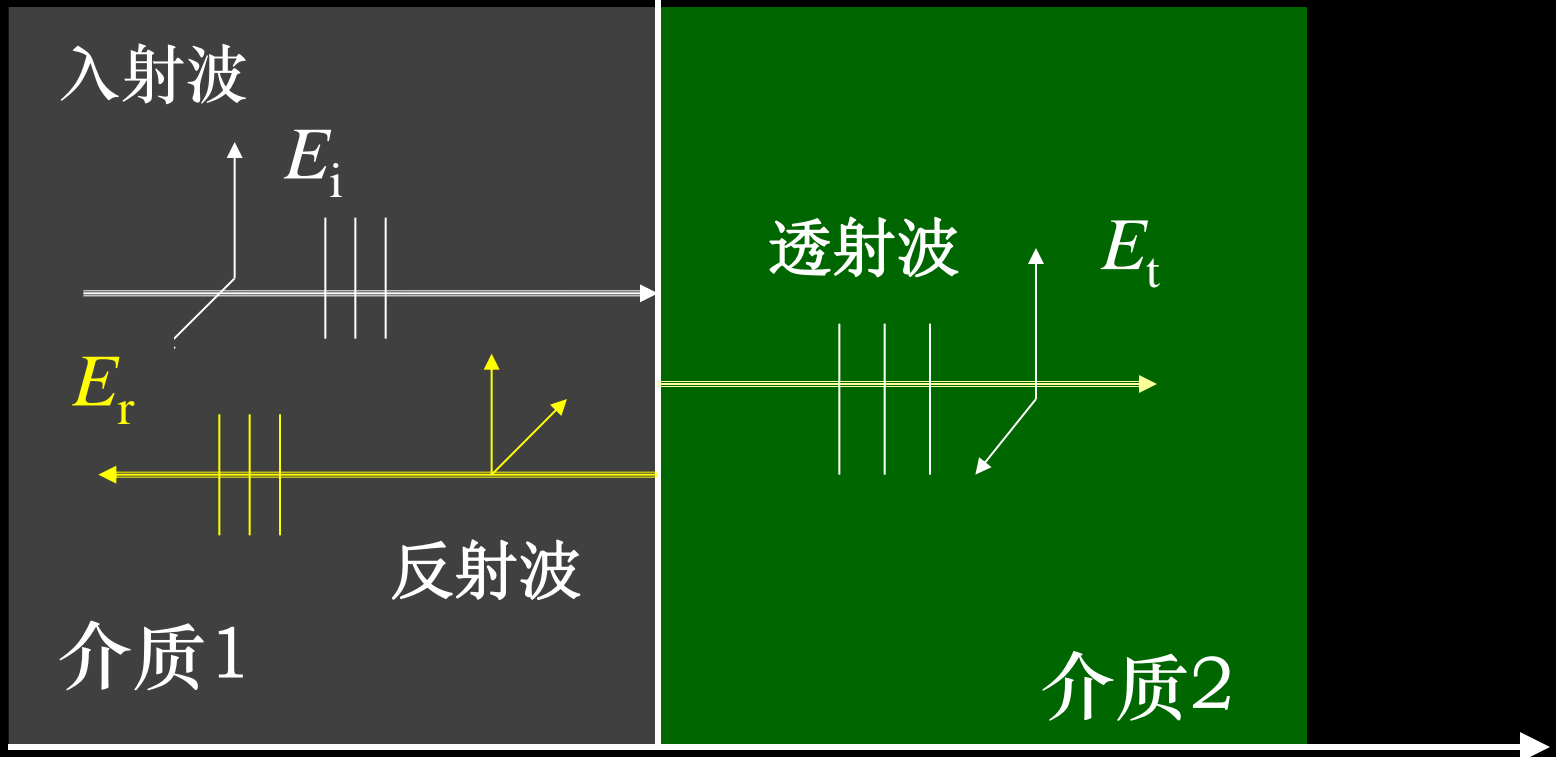
界面两侧的薄层内感应出随时变化的极化电荷、极化电流和磁化电流，成为新的电磁波辐射源。新的辐射源向界面两侧的电磁辐射在入射波介质空间称为反射波，另一侧的辐射称为透射波。



设空间由两种不同介质组成，平面电磁波自介质 1 垂直入射到介质的分界面

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$





## 分界面上电磁场满足的条件

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Rightarrow E_i + E_r = E_t$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Rightarrow \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

定义反射系数（反射波振幅与入射波振幅之比），  
利用上述关系得到反射系数：

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad E_r = E_i \Gamma$$

对于理想介质,  $\eta_2, \eta_1$  为实数，反射系数也为实数



介质1中的场由入射与反射波叠加构成：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_i e^{-jk_1 z} \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i e^{-jk_1 z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_i \Gamma e^{jk_1 z} \\ \mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = -\frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i \Gamma e^{jk_1 z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_i \left[ e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z} \right] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i \left[ e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z} \right] \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) &= \hat{e}_x E_i \left[ e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z} \right] \\ &= \hat{e}_x E_i \left[ (1 - \Gamma) e^{-jk_1 z} + 2\Gamma \cos k_1 z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i \left[ e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z} \right] \\ &= \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} E_i \left[ (1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} - 2\Gamma \cos k_1 z \right] \end{aligned}$$

介质 1 中电磁场由两个部分组成：

第一项表示沿  $z$  正向传播的波，称为行波项

第二项为空间分布确定，且不随时间传播的驻波



对于理想介质，反射系数为实数，

$$\begin{cases} |\mathbf{E}_1| = |E_i| \left[ 1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_1 z \right]^{\frac{1}{2}} \\ |\mathbf{H}_1| = \frac{|E_i|}{\eta_1} \left[ 1 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cos 2k_1 z \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

由于反射波与入射波干涉叠加，电场和磁场的振幅不再是常数，而是随空间位置不同而变化。

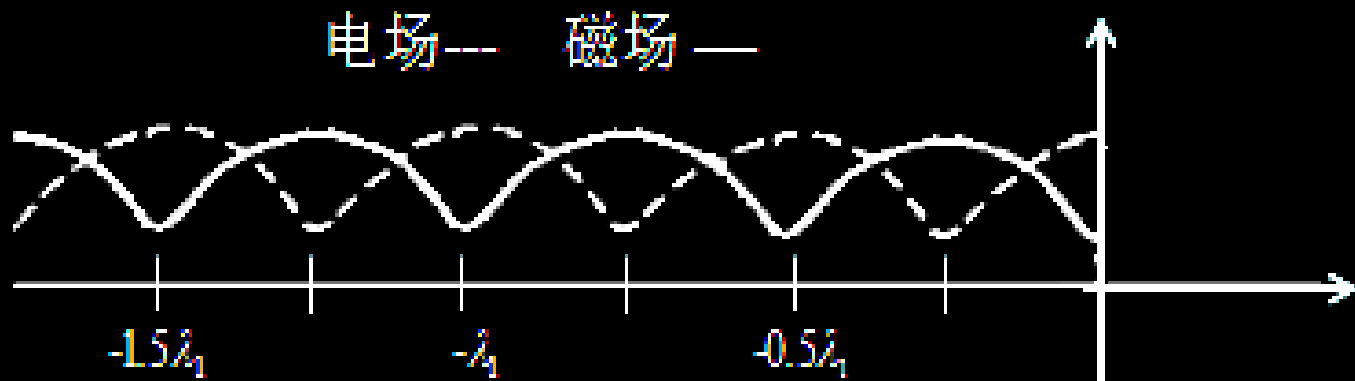


对于理想介质，反射系数是实数，

$$\begin{cases} |E_1| = |E_i| \left[ 1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos 2k_1 z \right]^{\frac{1}{2}} \\ |H_1| = \frac{1}{\eta_1} |E_i| \left[ 1 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cos 2k_1 z \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

当  $z = -\frac{n}{2} \lambda_1$  ,  $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$|E_1|_{\max} = |E_i| (1 + \Gamma) \quad ; \quad |H_1|_{\min} = \frac{1}{\eta_1} |E_i| (1 - \Gamma)$$







能量的传播：介质1空间的玻印廷矢量为：

$$\begin{aligned} (P_{\text{av}})_1 &= \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*] = \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} \text{Re} [1 - \Gamma^2 + 2j\Gamma |\sin 2k_1 z|] \hat{e}_z \\ &= \frac{|E_i|^2}{2\eta_1} [1 - \Gamma^2] \hat{e}_z = (P_{\text{av}})_{\text{in}} - (P_{\text{av}})_r \end{aligned}$$

沿 Z 轴传输的功率 = 入射波功率-反射波功率



## 透射波

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Rightarrow E_i + E_r = E_t$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Rightarrow \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2}$$

透射系数：透射波与入射波振幅之比

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma$$

$$E_t = E_i T \quad \begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_x T E_i e^{-jk_2 z} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_2} T E_i e^{-jk_2 z} \end{cases}$$

介质 2 空间的平面电磁波



透射波功率：

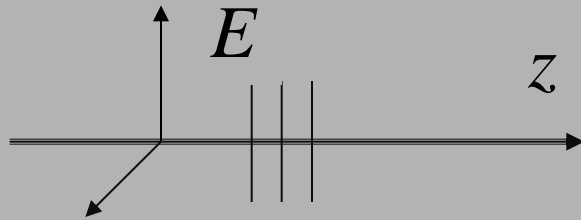
$$(P_{\text{av}})_{\text{t}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^*] = \frac{1}{2\eta_2} |\mathbf{E}_i|^2 T^2$$

透射波与反射波功率之和：

$$\begin{aligned} (P_{\text{av}})_{\text{r}} + (P_{\text{av}})_{\text{t}} &= \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} \Gamma^2 + \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_2} T^2 \\ &= \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} \left[ \Gamma^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} T^2 \right] = \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} = (P_{\text{av}})_{\text{i}} \end{aligned}$$

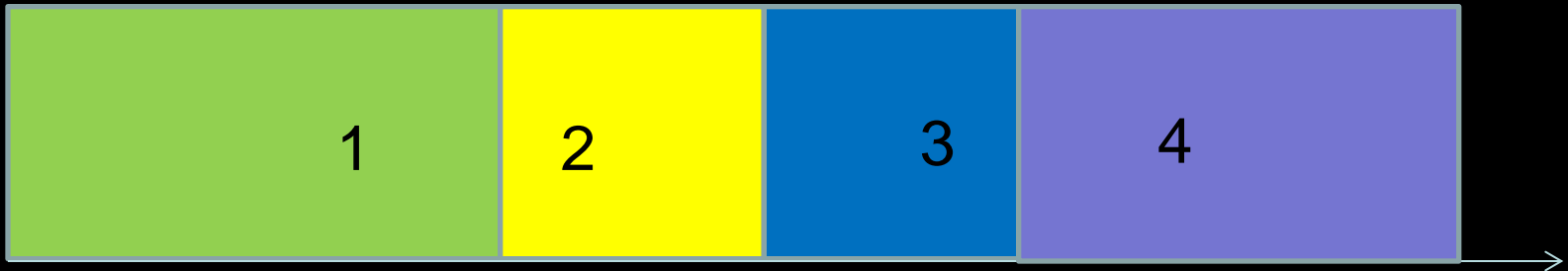


## 2. 等效波阻抗概念



均匀介质

均匀介质空间波阻抗：
$$\eta(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

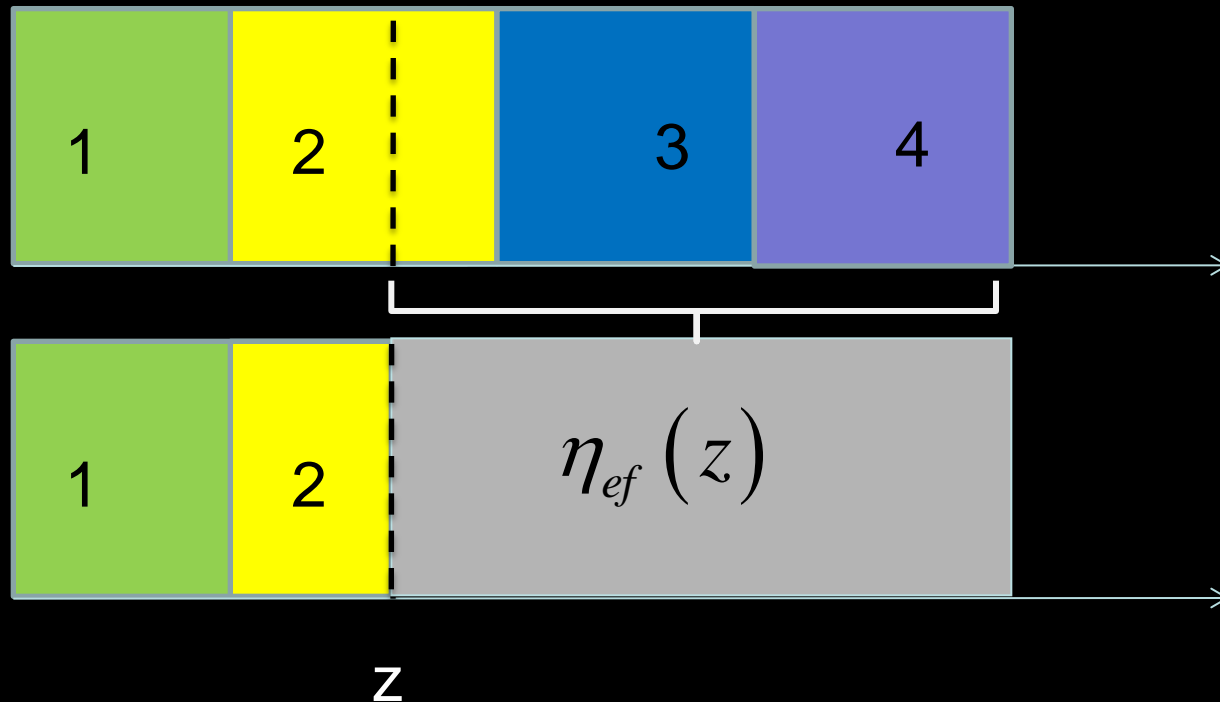


由若干不同均匀介质组成的空间，波阻抗？



将波阻抗概念推广到不同介质组成的介质空间中，定义空间  $z$  处的等效波阻抗为：

$$\eta_{ef}(z) = \frac{E(z)(z\text{处总电场})}{H(z)(z\text{处总磁场})}$$

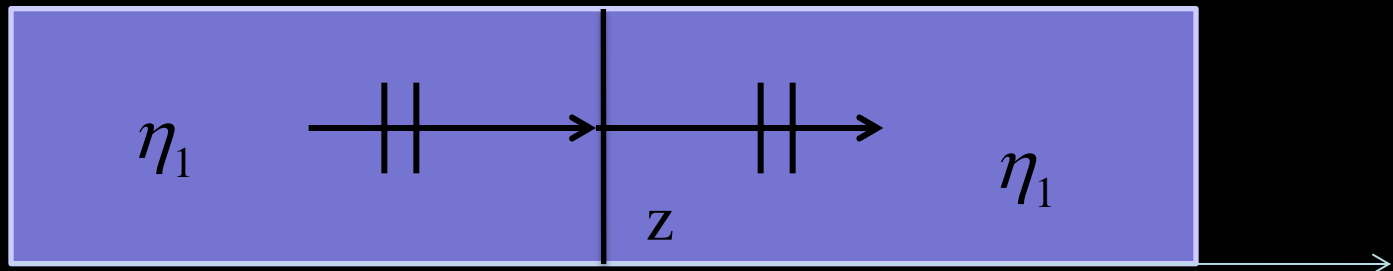




## (1) 无界介质（一种介质组成）空间

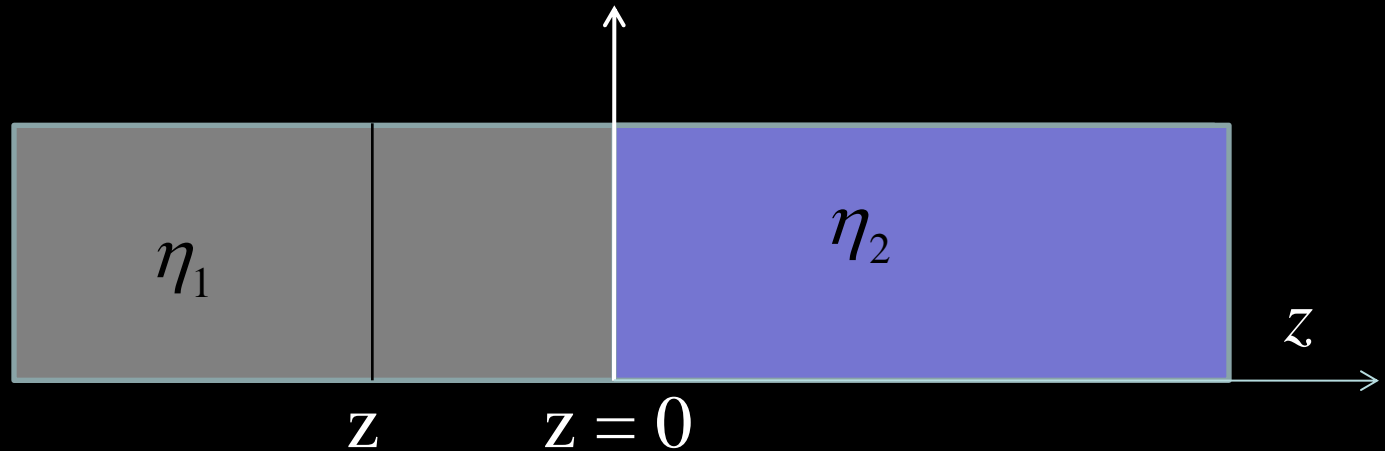
当空间为一种介质组成，电磁波在空间传播不发生反射，空间任意位置上的电场和磁场为入射波的电场和磁场，等效波阻抗即为介质的波阻抗。

$$\eta_{\text{ef}}(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \frac{E_i(z)}{H_i(z)} = \eta_1$$





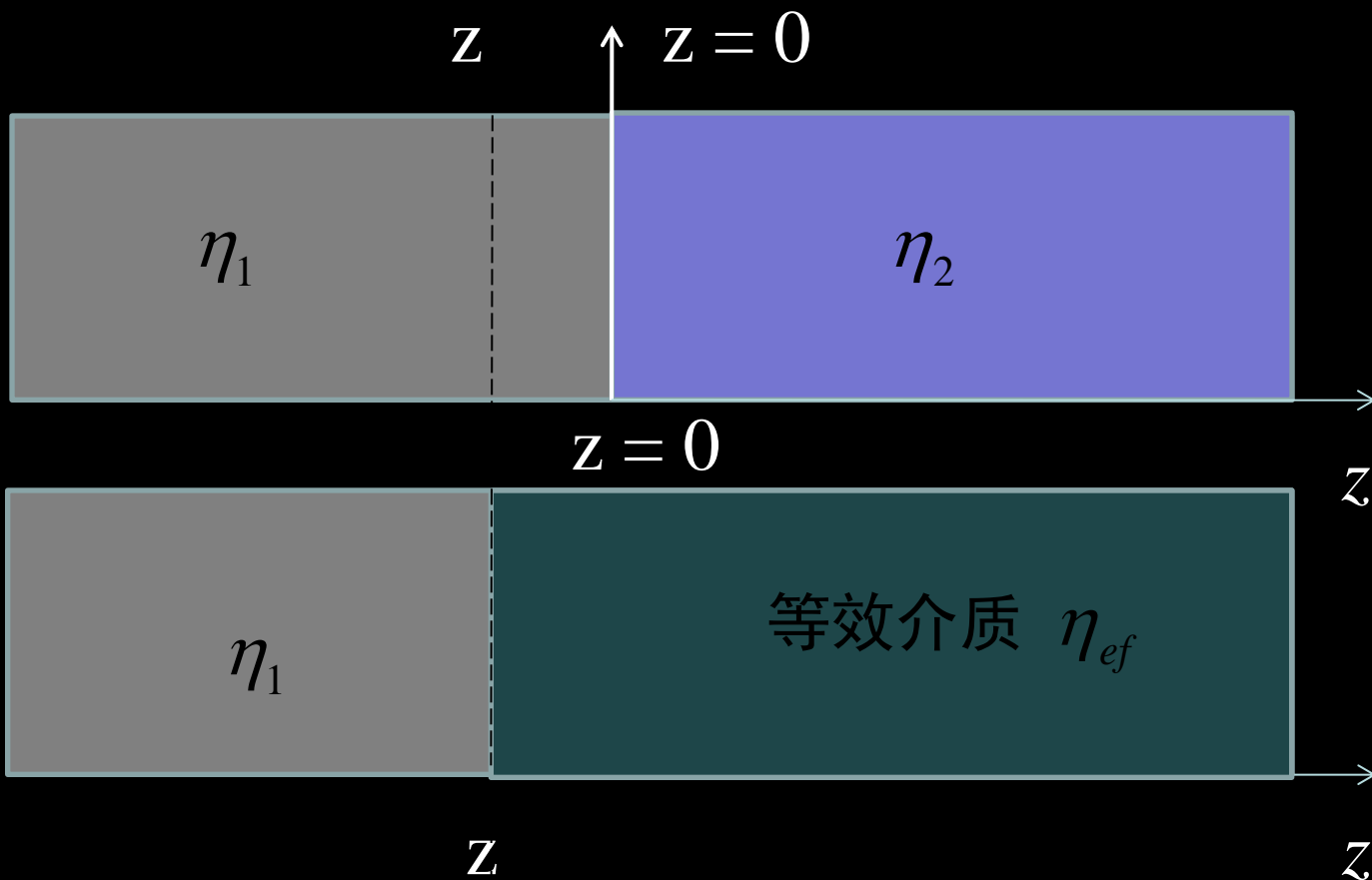
## (2) 半无界介质（两介质组成）空间



$$\begin{aligned}\eta_{\text{ef}}(z) &= \frac{E_1(z)}{H_1(z)} = \frac{E_i(z) + E_r(z)}{H_i(z) + H_r(z)} = \eta_1 \frac{E_i(z) + E_r(z)}{E_i(z) - E_r(z)} \\ &= \eta_1 \frac{e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}}{e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}} = \eta_1 \frac{\eta_2 - j\eta_1 \operatorname{tg} k_1 z}{\eta_1 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_1 z}, \quad z < 0\end{aligned}$$

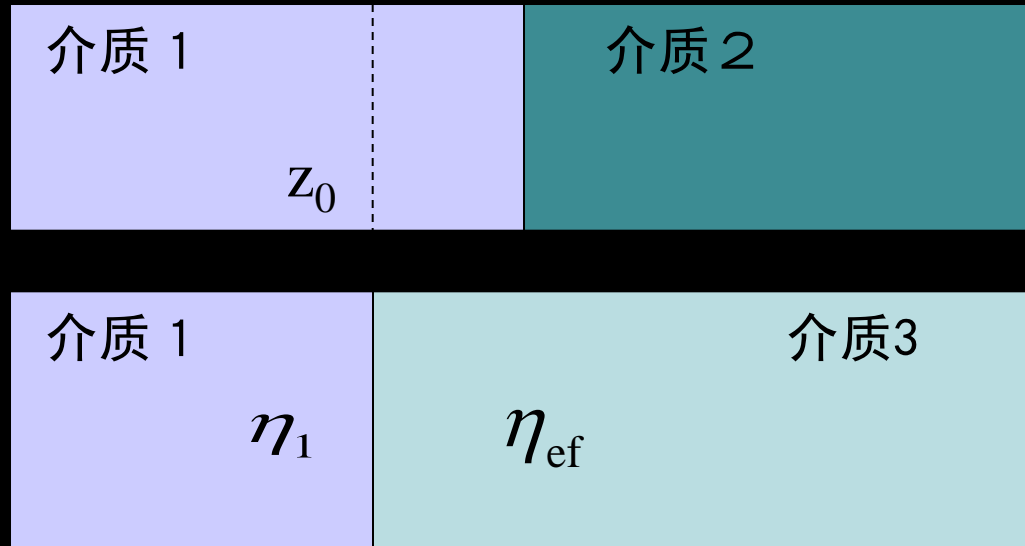


# 等效波阻抗的意义



相当于将  $z$  处右边视为一种介质空间所表现出的阻抗——等效波阻抗





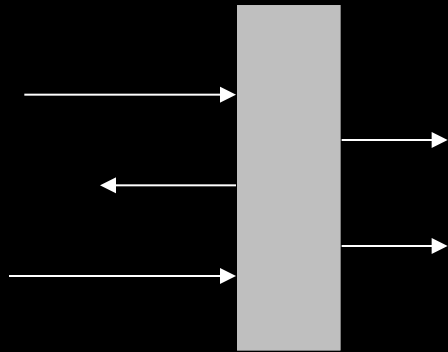
基于等效阻抗概念，假想介质1空间  $z_0$  处有一分界面，根据反射系数的定义，假想界面  $z_0$  处波的反射系数（根据定义）为：

$$\Gamma(z_0) = \frac{E_r(z_0)}{E_i(z_0)} = \frac{\eta_{\text{ef}}(z_0) - \eta_1}{\eta_{\text{ef}}(z_0) + \eta_1}$$

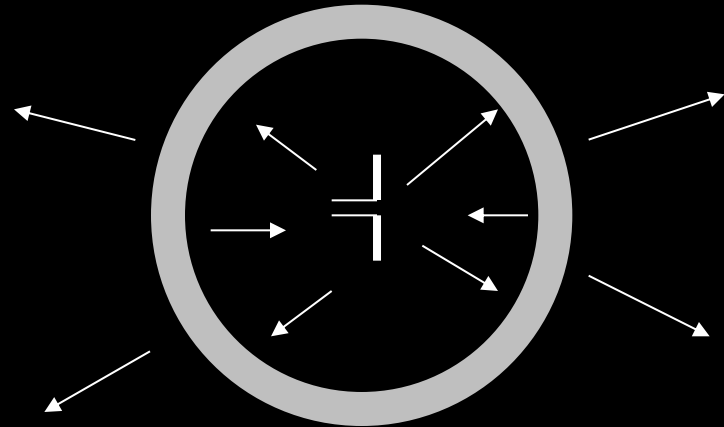


### (3) 等效波阻抗的应用

如何克服分界面对电磁波反射而使其全部或大部能量透射，在实际中有广泛的应用。



照相机的镜头



天线防护罩

## 机载相控阵雷达天线及天线罩

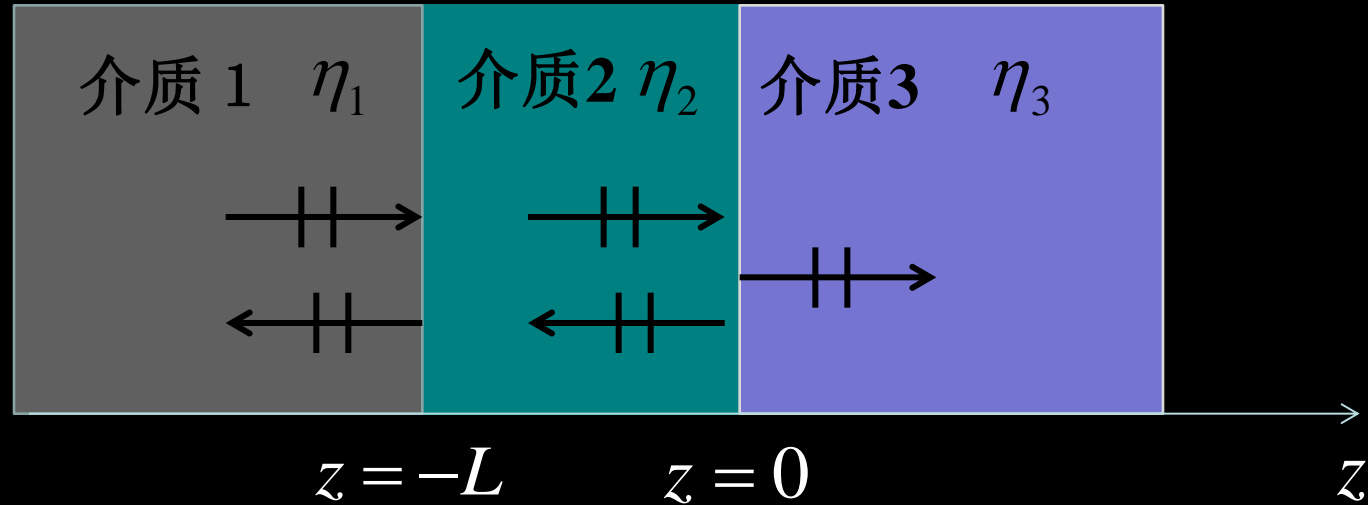












设入射波电场只有  $x$  分量，磁场只有  $y$  分量。

介质1、2、3中的电磁场可以表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{e}_x \left[ E_{1i} e^{-jk_1(z+L)} + E_{1r} e^{jk_1(z+L)} \right] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_1} \left[ E_{1i} e^{-jk_1(z+L)} - E_{1r} e^{jk_1(z+L)} \right] \end{cases} \quad (\text{介质1})$$

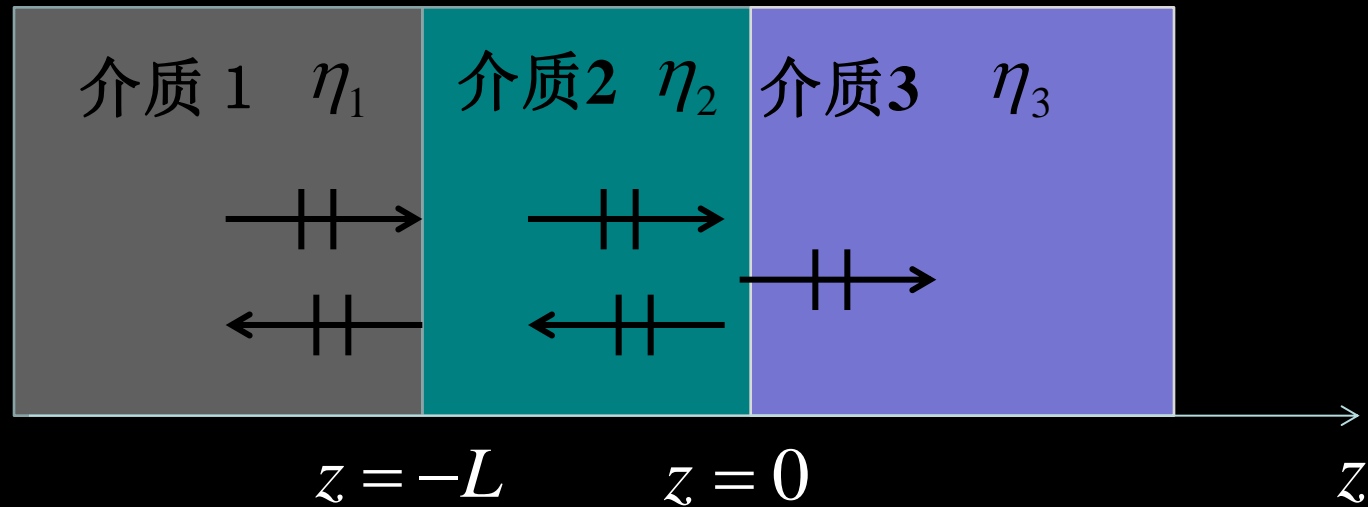


$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_x [E_{2i} e^{-jk_2 z} + E_{2r} e^{jk_2 z}] \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_2} [E_{2i} e^{-jk_2 z} - E_{2r} e^{jk_2 z}] \end{cases} \quad (\text{介质2})$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) = \hat{e}_x E_{3i} e^{-jk_3 z} \\ \mathbf{H}_3(\mathbf{r}) = \frac{\hat{e}_y}{\eta_3} E_{3i} e^{-jk_3 z} \end{cases} \quad (\text{介质3})$$

$E_{1i}$  是入射波电场的复振幅

$E_{1r}, E_{2i}, E_{2r}, E_{3i}$  为待求量



$z=0$  和  $z=-L$  界面处的反射系数分别为：

$$\Gamma(0^-)_{\perp} = \frac{E_{2r}}{E_{2i}} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}, \quad \Gamma(-L^-)_{\perp} = \frac{E_{1r}}{E_{1i}} = \frac{\eta_{\text{ef}}(-L) - \eta_1}{\eta_{\text{ef}}(-L) + \eta_1}$$

$$\text{其中：} \quad \eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 L}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 L}$$





为使电磁波能量全部被透射，  
反射系数应为零，则要求：

$$\eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 L}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 L} = \eta_1$$

如果介质1、3的波阻抗相等，介质 2 的最小厚度由  $k_2 L = \pi$  确定。

$$L = 0.5\lambda_2 \quad , \quad \eta_{\text{ef}}(-L) = \eta_3 = \eta_1$$

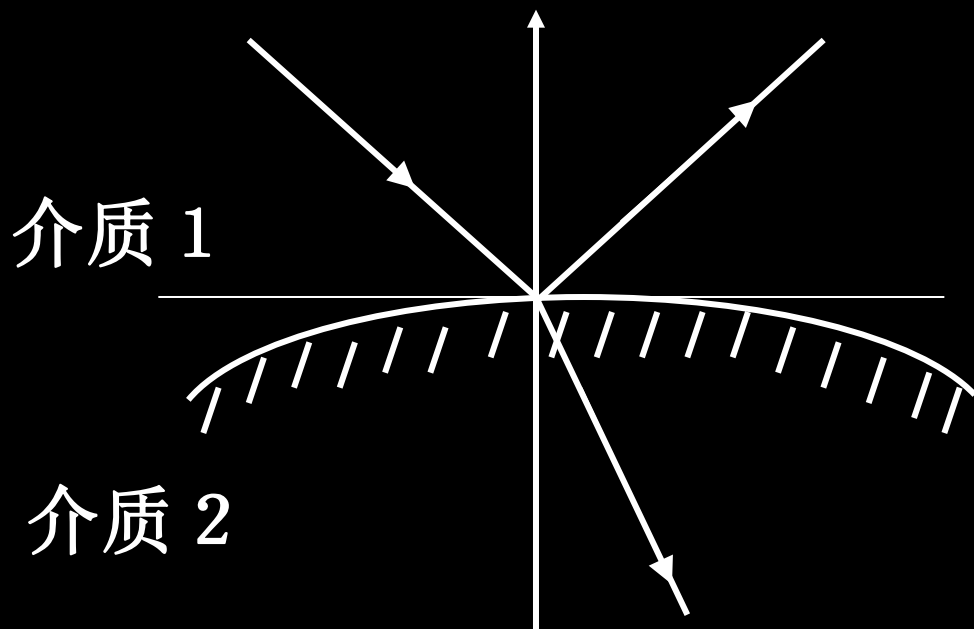
这是雷达系统天线罩设计的基本方程



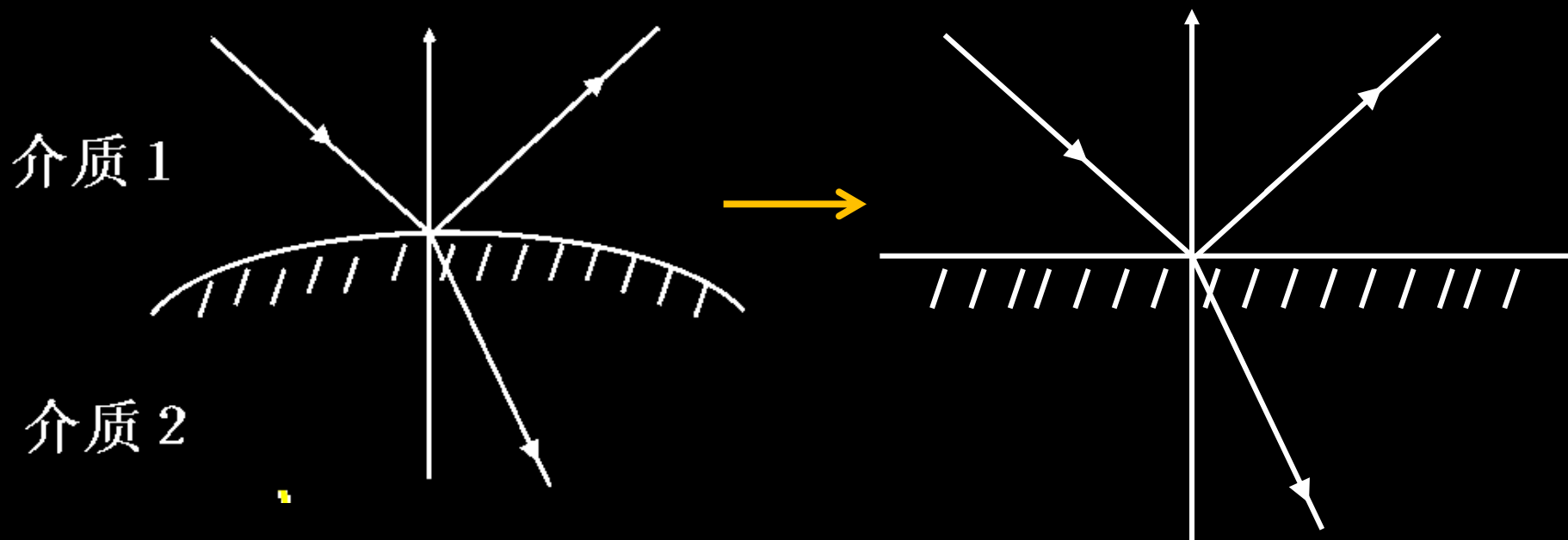
## § 2 平面波对界面的斜入射

### 1. 介质分界面上相位匹配原则

一般情况下的均匀平面波对于界面的斜入射为：



只要界面的曲率半径远大于波长，电磁波在边界上的行为与平面非常接近



设入射波为平面电磁波：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{i\perp} E_{i\perp} + \hat{e}_{i\parallel} E_{i\parallel}) \exp(-jk_1 \hat{e}_i \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \hat{e}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \end{cases}$$



反射波和透射波可表示为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{r\perp} E_{r\perp} + \hat{e}_{r\parallel} E_{r\parallel}) \exp(-jk_1 \hat{e}_r \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_r(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \hat{e}_r \times \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = (\hat{e}_{t\perp} E_{t\perp} + \hat{e}_{t\parallel} E_{t\parallel}) \exp(-jk_2 \hat{e}_t \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_2} \hat{e}_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$

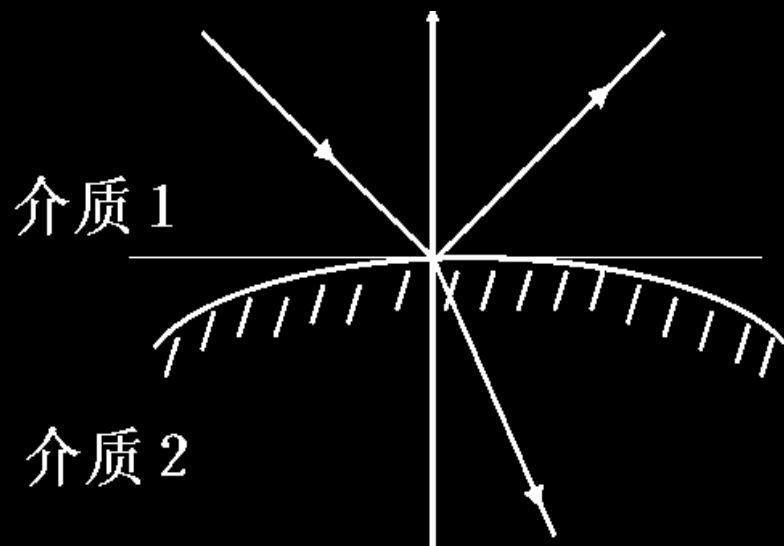


$$\hat{n} \times [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r})] = \hat{n} \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r})$$

相位匹配原则：入射、反射和透射波相位相等

$$k_1 \hat{e}_i \cdot \mathbf{r} = k_1 \hat{e}_r \cdot \mathbf{r} = k_2 \hat{e}_t \cdot \mathbf{r}$$

- ① 入射波、反射波和透射波的传播方向在同一平面内，该平面由传播方向和界面法线方向构成



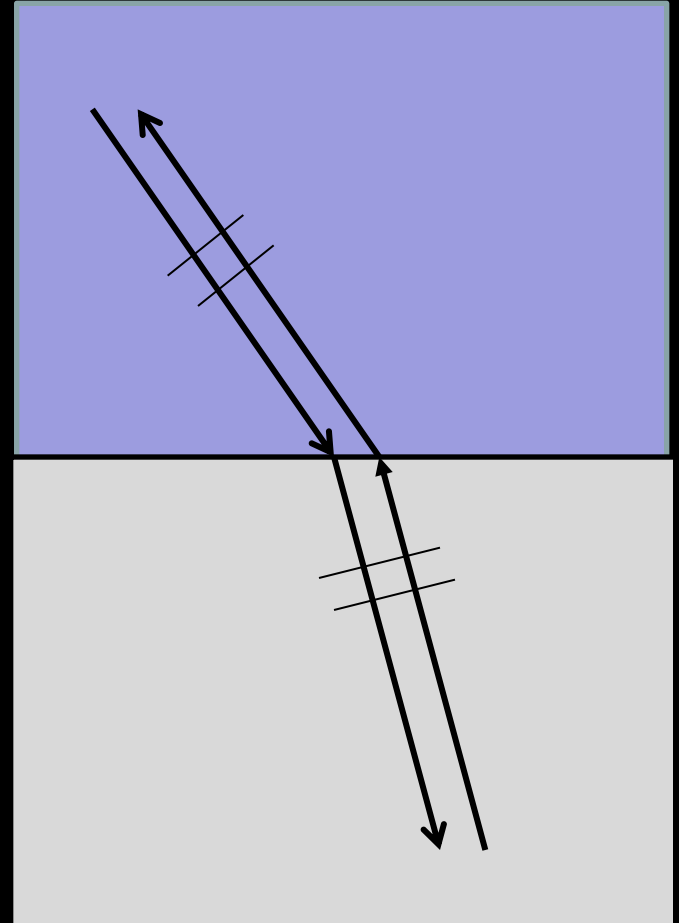


② 入射、反射和透射波与界面法向的夹角满足：

$$\theta_i = \theta_r \text{ (入射角等于反射角)}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t$$

③ 波在介质中运动轨迹或称射线具有可逆性

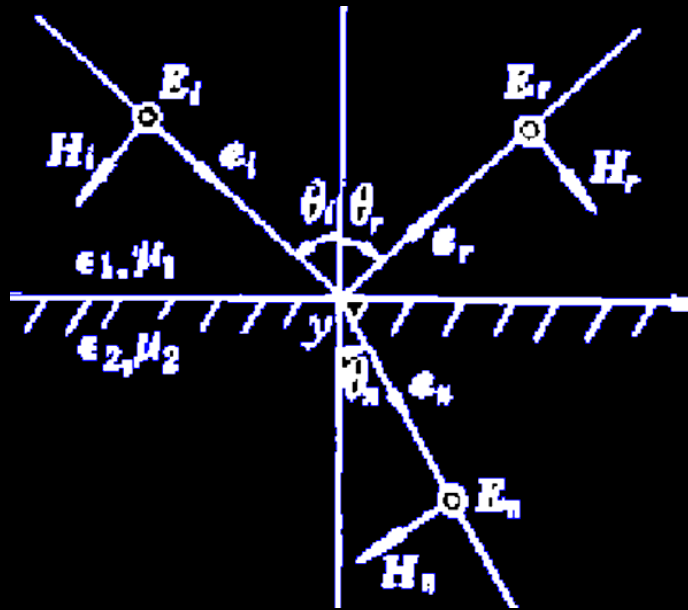


$$k_1 \hat{e}_i \cdot \mathbf{r} = k_1 \hat{e}_r \cdot \mathbf{r} = k_2 \hat{e}_t \cdot \mathbf{r}$$



## 2. Fresnel 公式

1) 电场与入射面垂直      应用边界条件, 得到



$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ \eta_2 (E_i - E_r) \cos \theta_i = \eta_1 E_t \cos \theta_t \end{cases}$$

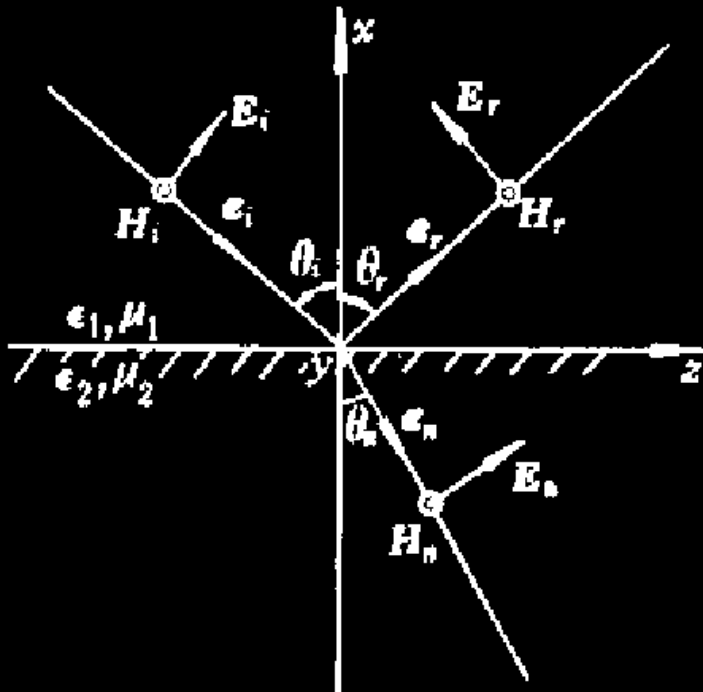
$$\begin{cases} \Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ T_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ 1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp} \end{cases}$$



## 2) 电场平行入射面

应用边界条件得到:

$$\begin{cases} \eta_2(E_i + E_r) = \eta_1 E_t \\ (E_i - E_r)\cos\theta_i = E_t\cos\theta_t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Gamma_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2 \cos\theta_t}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} \\ T_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} \end{cases}$$

$$1 + \Gamma_{\parallel} = (\eta_1 / \eta_2) T_{\parallel}$$





对非铁磁性介质：

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0, \quad \eta_1/\eta_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |\Gamma_{\parallel}| e^{j\varphi_{\parallel}} \\ T_{\parallel} = \frac{2n \cos \theta_i}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |T_{\parallel}| e^{j\psi_{\parallel}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |\Gamma_{\perp}| e^{j\phi_{\perp}} \\ T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} = |T_{\perp}| e^{j\psi_{\perp}} \end{array} \right.$$



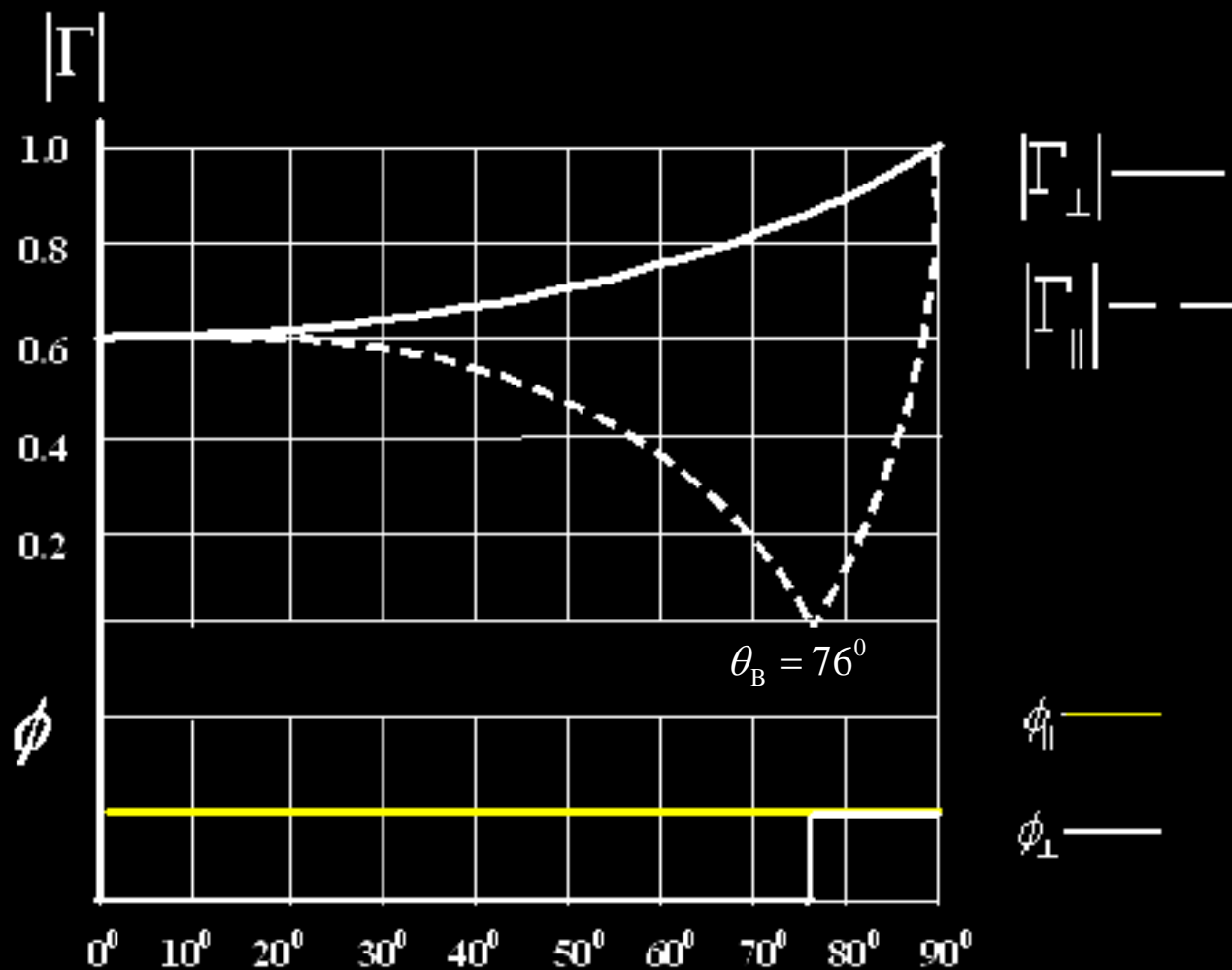
### 3. 全透射现象

介质 1 中的入射波在什么条件下全部透射？

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$1) \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = 1, \quad \Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = 0$$

$$2) \quad \theta_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}} = \theta_B, \quad \Gamma_{\perp} \neq 0, \quad \Gamma_{\parallel} = 0$$



反射系数随入射角度变化曲线

- ① 垂直极化平面波入射时，反射系数的幅角保持定值 $\pi$ 不变；模随波的入射角的增加而增大，但变化缓慢。
- ② 平行极化平面波入射时；当  $\theta_i \leq \theta_B$  ，反射系数的模随波的入射角的增加而减小，幅角为恒定值；当  $\theta_i = \theta_B$  时，反射系数的模变为零，幅角发生突变；当  $\theta_i > \theta_B$  ，反射系数模随波的入射角的增加增大，幅角为恒定值。

$$n^2 \cos \theta_B = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_B} \Rightarrow \theta_B = \sin^{-1} \sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}} = \operatorname{tg}^{-1} n$$



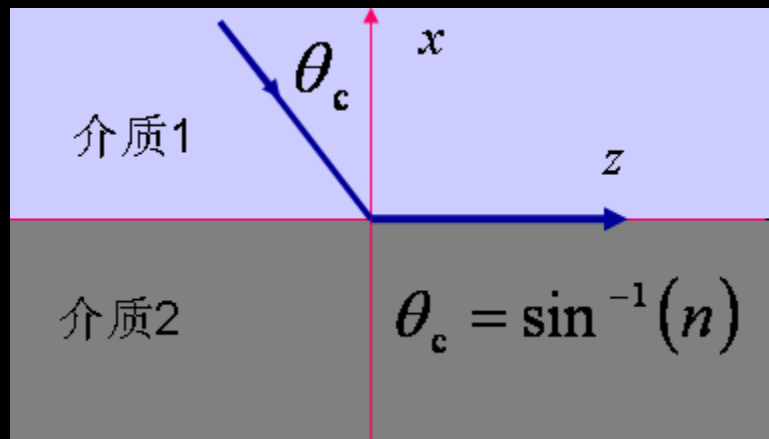
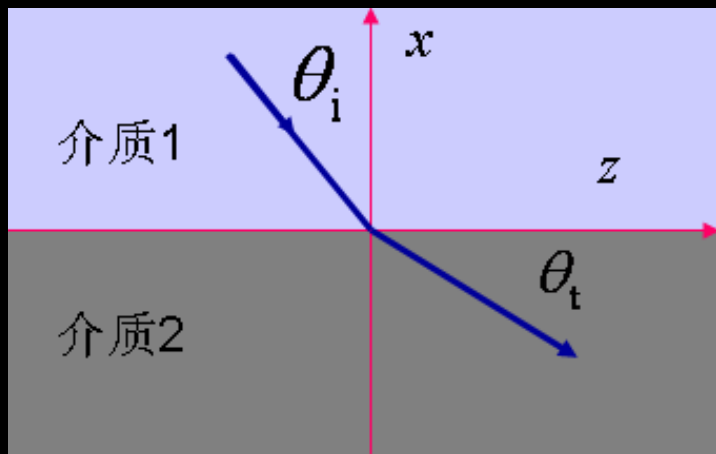
## 4. 全反射现象与表面电磁波

对于非铁磁性介质，根据透射角公式

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \theta_t \Rightarrow \sin \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sin \theta_t = n \sin \theta_t$$

如果：  $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n < 1 \Rightarrow \theta_i < \theta_t$

当  $\theta_i \uparrow \Rightarrow \theta_t = 90^\circ$ ，发生全反射，  $\sin \theta_i = n \Rightarrow \theta_c = \sin^{-1}(n)$





$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i + j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = e^{-2j\delta_{\perp}} \\ \Gamma_{\parallel} = \frac{n\cos \theta_i - j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n\cos \theta_i + j\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = e^{-2j\delta_{\parallel}} \end{array} \right.$$

$$\delta_{\perp} = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i} \right], \quad \delta_{\parallel} = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i} \right]$$

由相位匹配原则，得到介质1和2的波数满足：

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{2z} = k_{1z} = k_1 \sin \theta_i \\ k_{2x} = \sqrt{k_2^2 - k_{2z}^2} = -jk_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} \end{array} \right.$$



## 全反射情况下介质中电磁波的解

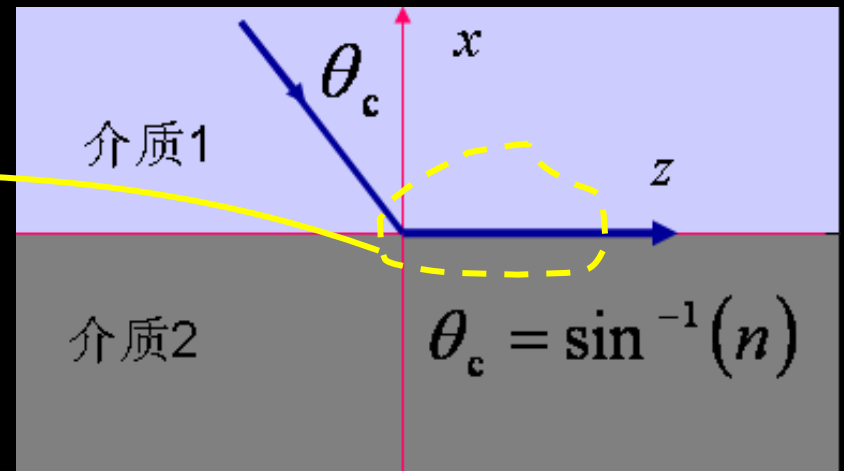
介质均匀，界面为平面结构中均匀平面电磁波入射，介质2中的电磁波也应该是平面电磁波，否则电磁波的边界条件不可能满足。介质1和2中的解应具有平面波形式，即：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = E_{20} \hat{e}_y \exp\left(-jk_1 \sin \theta_i z - k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} |x|\right) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \left[ \hat{e}_z j \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} - \hat{e}_x \sin \theta_i \right] \hat{e}_y \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \end{cases}$$

（设入射波仅有 y 分量）



## 表面波



$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \hat{e}_y E_{20} e^{-k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} |x|} \exp(-jk_1 \sin \theta_i z) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta_1} \left[ \hat{e}_z j \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} - \hat{e}_x \sin \theta_i \right] \hat{e}_y \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \end{cases}$$

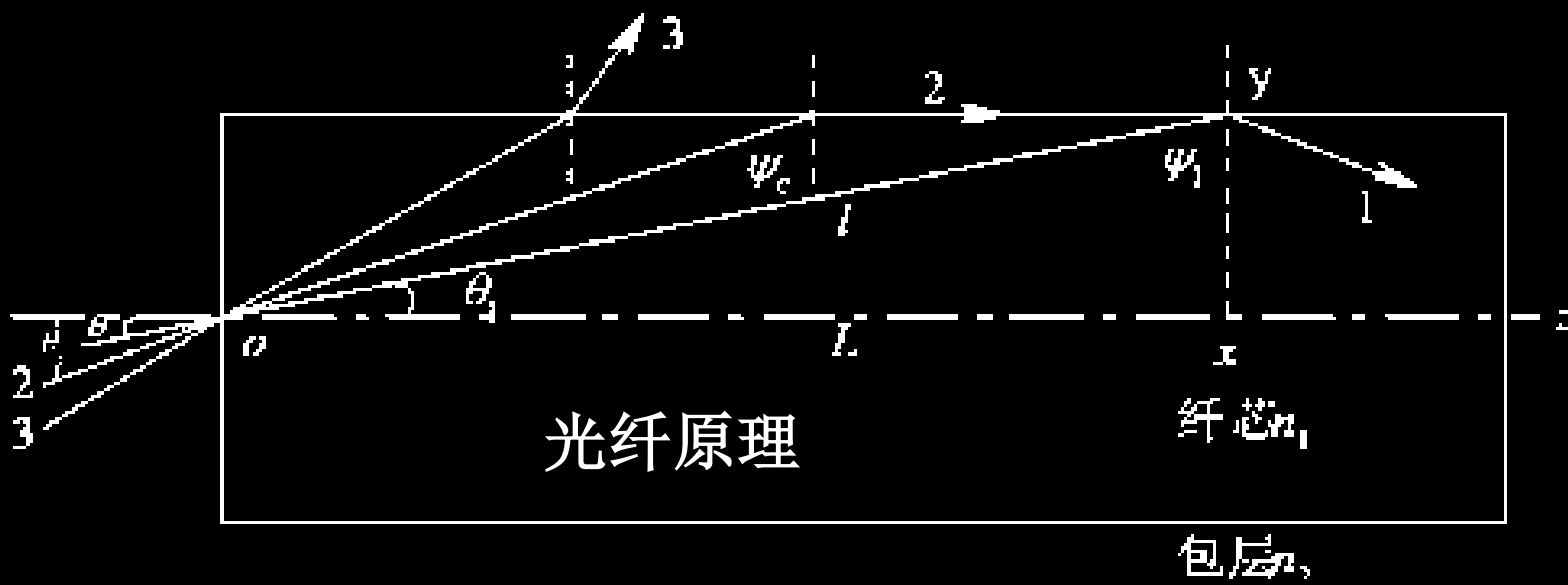
透射波为传播方向上的指数衰减波，能流密度矢量：

$$\begin{cases} S_x = 0 \\ S_z = \frac{1}{2\eta_1} \sin \theta_i |E_{20}|^2 \exp(-2k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2} |x|) \end{cases}$$



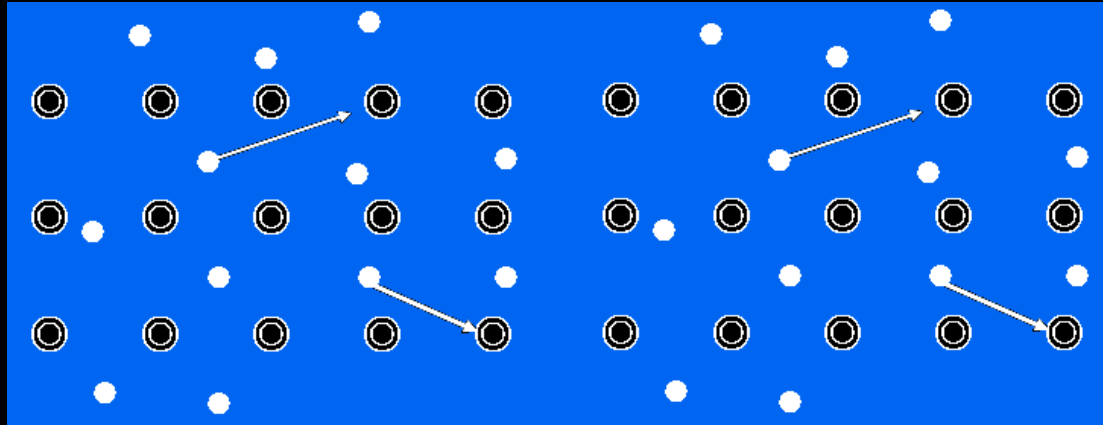
介质 2 中不能传播电磁波。沿两介质表面仍然存在可以传播的电磁波，称为表面电磁波。

介质 2 的作用类似于电路中的电感器，在电磁波的一个周期中的一半时间内，介质2从入射波获得能量，另一半时间释放能量，返回介质1。





### § 3 导电介质中电波传播



#### 导电介质模型

导电介质中存在大量可移动的带电粒子  
带电粒子在外作用下定向运动形成传导电流  
运动带电粒子与大质量离子碰致电流的热效应  
运动带电粒子成为新的辐射源而辐射电磁波



## 1. 导电介质及其内部电荷的分布

静态场中的导体内部不存在电荷的分布  
时变化场的导电介质中是否存在电荷分布？

设导电介质内电荷密度为  $\rho$ ，电荷与传导电流之间满足如下方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \end{cases}$$



$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

对于良导体(如铜) :  $\sigma \sim 5 \times 10^7$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \approx \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \sim 10^{-18}, \rho(t) \Rightarrow t \uparrow \Rightarrow \rho(t) \downarrow$$

该结果表明，导电介质中自由电荷密度随时间按指数规律衰减，与电磁波的形式和变化规律无关，只与导电媒质本身电磁特性参数有关。由于初始时导电介质内电荷密度一般为零，因此导电介质中不存在自由电荷。



## 2. 导电介质中的电磁波

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} = j\omega\varepsilon'\mathbf{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

其中  $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} \right)$

称为复介电常数，复介电常数的引入，使得导电介质中场的方程与理想介质场的方程形式上完全一致



$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon \left( 1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} \right)$$

复介电常数的实部和虚部分别代表位移电流和传导电流对磁场的贡献率；

位移电流与电场有 $90^\circ$ 相位差，不耗散电磁波能量；

传导电流与电场相同，耗散电磁波能量；

导电介质中电磁波振幅随传播距离增加而减小。

耗散功率密度为： $\frac{1}{2} \sigma E^2$



# 理想介质与导电介质中电磁波方程比较

## 理想介质空间

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j \frac{1}{\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k \eta} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

## 导电介质空间

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j \frac{1}{\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k \tilde{\eta}} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

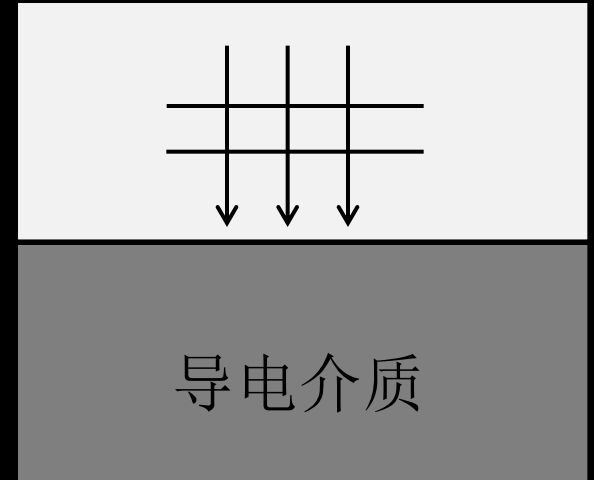
理想介质与导电介质中谐变场满足相同形式的方程



导电介质中有与理想介质有相同形式的电磁波解，设波沿  $z$  轴传播，其解为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{-jkz} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ \mathbf{H}(z) = |\tilde{\eta}|^{-1} e^{-j\phi} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \quad \mathbf{k} = \hat{e}_z (\beta - j\alpha)$$



场的瞬时值为：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{H}(z, t) = |\tilde{\eta}|^{-1} \hat{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \phi) \end{cases}$$

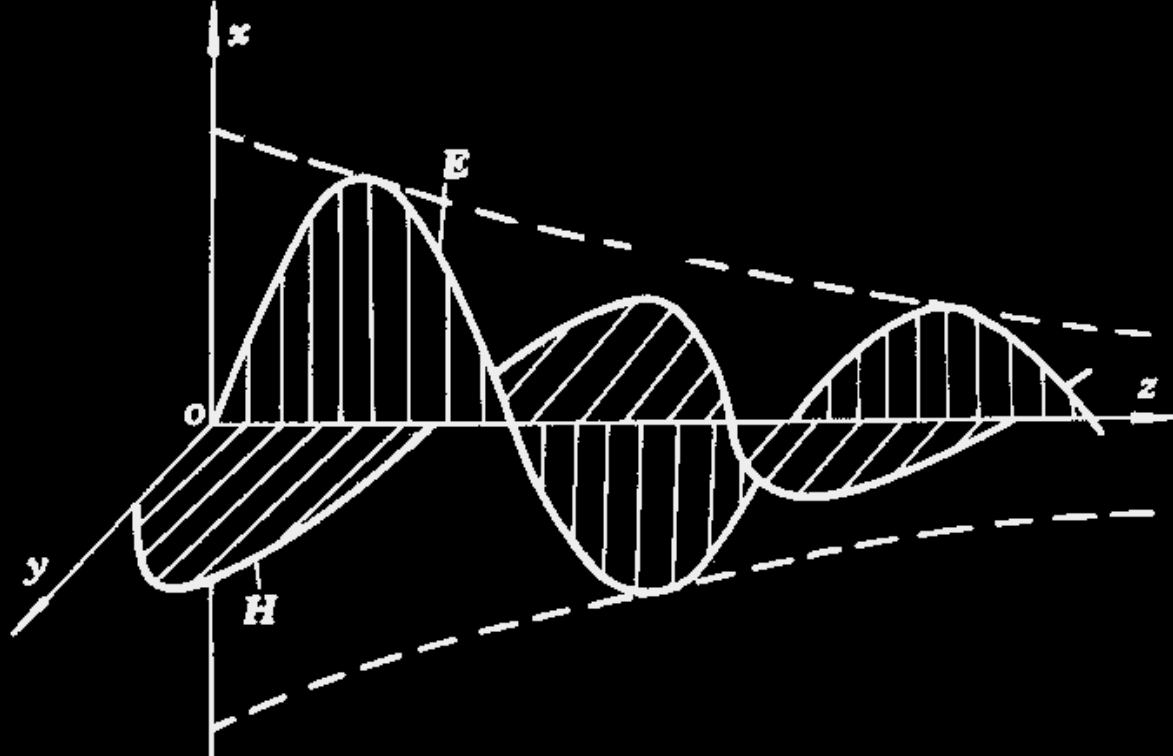




$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\beta = \omega^2 \mu \varepsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$$

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ 2\alpha\beta = \omega \sigma \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \left( \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = \left( \frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \tilde{\eta} = |\tilde{\eta}| e^{j\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left( j \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \right) \end{cases}$$



玻印廷矢量: 
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{\hat{e}_z}{2|\tilde{\eta}|} |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\alpha|z|} \cos \phi$$

$$w_e = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right) = \frac{1}{4} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\alpha|z|}, \quad w_m = w_e \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq w_e$$



# 主要结果

- ① 导电介质波数为复数，实部为相位常数，与理想介质波数意义相同，虚部为衰减常数；
- ② 导电介质中平面波为非均匀平面电磁波，振幅随传播距离而指数衰减；
- ③ 导电介质波阻抗为复数，幅角为电场与磁场的相位差；
- ④ 导电介质中电场能量密度小于磁场能量密度；
- ⑤ 平面波等相位面的传播速度与频率有关。



### 3. 良导体中的电磁波

为定量描述导电介质的导电强弱的程度，考察导电介质中传导电流与位移电流之比

$$\frac{\text{传导电流}}{\text{位移电流}} = \left| \frac{\sigma E}{\omega \epsilon E} \right| = \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

$$\left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) = \begin{cases} \ll 1 & \text{传导电流远小于位移电流，弱导电介质} \\ \sim 1 & \text{传导电流接近位移电流，半导体} \\ \gg 1 & \text{传导电流远大于位移电流，良导电介质} \end{cases}$$



对于良导体： $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \gg 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left(\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \gg 1 \\ \beta = \left(\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \gg 1 \\ \tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[ 1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \exp\left(j \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)\right) = \sqrt{\frac{\mu \omega}{\sigma}} \exp(j45^\circ) \end{array} \right.$$



良导体概念： $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \gg 1$

对某种媒质它是导体还是介质，不仅取决于该物质的结构特性等，还与电磁波的频率有关。

- 铜对于频率小于30GHz的电磁波呈现良导体特性，而对于x-射线等频率极高的电磁波呈现出介质特性
- 海水对于频率小于30MHz的电磁波呈现出良导电性，而对于频率大于30MHz以上的电磁波呈现出不良导体。



$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= \mathbf{E}_0 e^{-jkz} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ &= \mathbf{E}_0 \exp\left(-j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(z) = \left|\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}\right|^{-1} e^{-j45^\circ} \hat{e}_z \times \mathbf{E}(z)$$

对于良导体:  $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1$

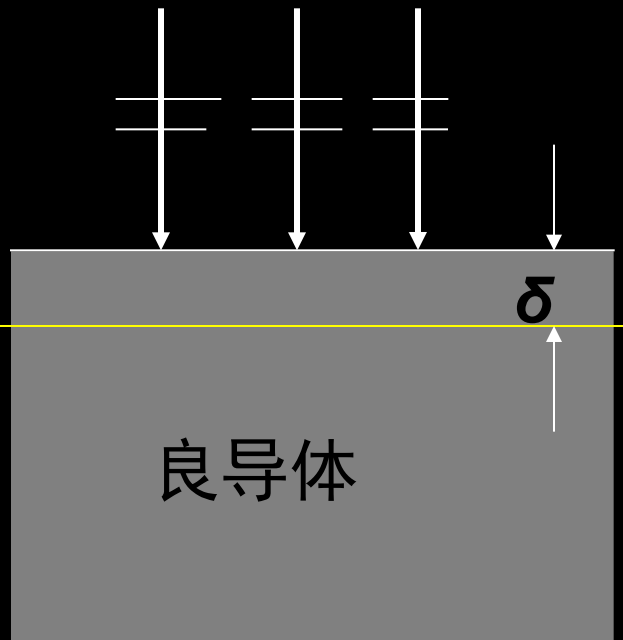
导体中电磁波随传播距离的衰减很快



为描述电磁波在良导体中传播的衰减特性，将场的幅度衰减

$$\left| \frac{\mathbf{E}(z)}{\mathbf{E}_0} \right| = e^{-\alpha z} = e^{-1}$$

所传播的距离定义为良导体中电磁波传播的穿透深度 $\delta$



$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

工程上常用  $z=5\delta$  作为电磁波幅度衰减至零的深度，即原值的0.0067



【例】 频率100Hz, 1MHz, 10GHz的电磁波在铜中的穿透深度(铜的电导率  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  /欧·米)

$$\delta_1 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6.6(\text{mm})$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 66(\mu\text{m})$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^{10} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6600(\text{\AA})$$

良导体中的电磁波只能在导体表面薄层中传播，这一现象被称为良导体的趋肤效应



例：对低频电磁波海水为良导体

海水特性参数约为：

$$\varepsilon = 81\varepsilon_0 \quad \mu \approx \mu_0 \quad \sigma \approx 4 \text{ (西门子/米)}$$

$$\left( \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \approx 10^9 f^{-1} (\leq 10\text{M}) \geq 100 \gg 1 \text{ (良导体)}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \approx \frac{250}{\sqrt{f}}$$

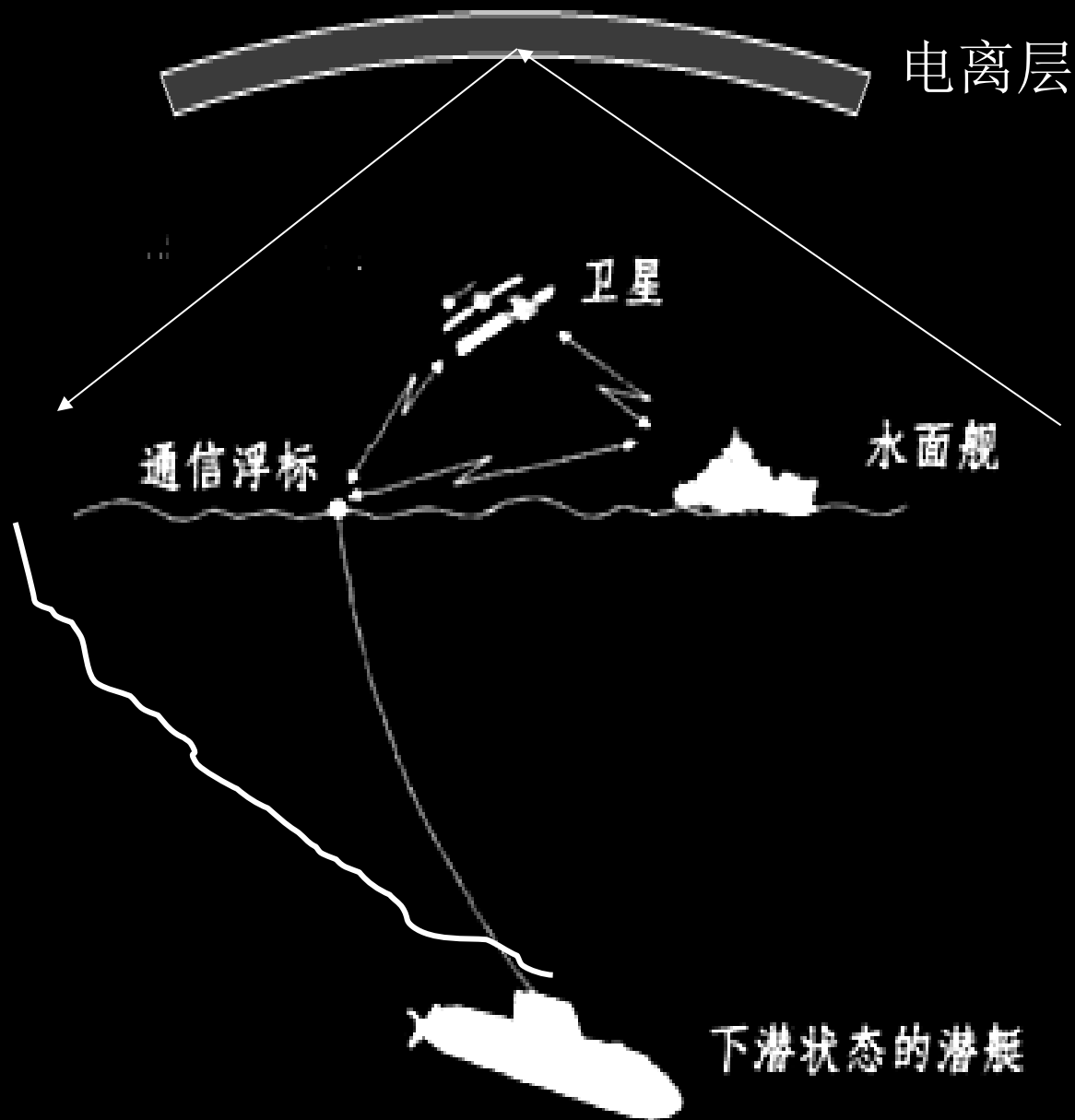
$$f = 1\text{kHz}, \quad \delta = 8\text{m}$$

$$10\text{kHz}, \quad 2.5\text{m}$$

$$10\text{MkHz}, \quad 0.0025\text{m}$$



低频通信

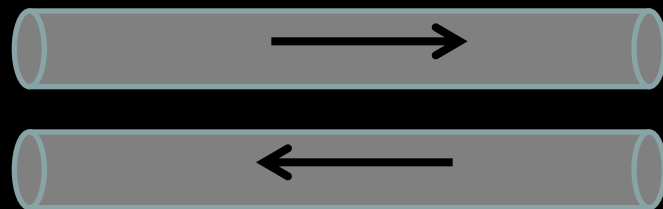
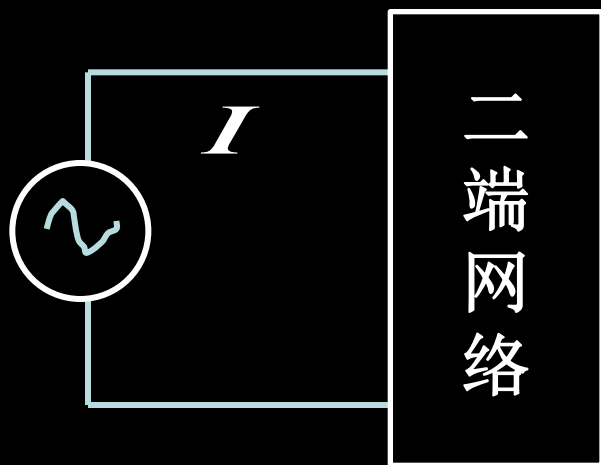




## 4. 趋肤效应与表面阻抗

电磁波在良导体中传输衰减很快，仅存在于厚度约为  $\delta$  的表面层内，称为趋肤效应。

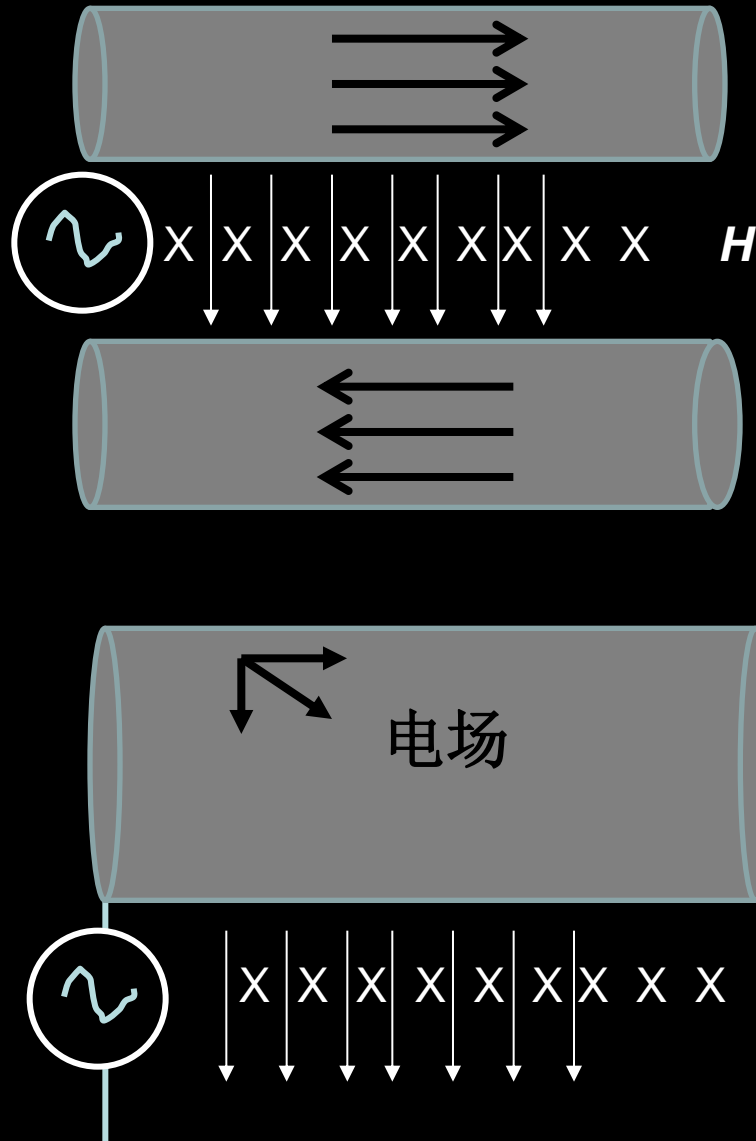
**应用：趋肤效应对高频电信号传输的影响**



导线中可移动带电粒子在信号电场力的作用下形成电流



## 恒定或低频电流及理想导体情况



导体内电场趋于零  
电流密度均匀分布

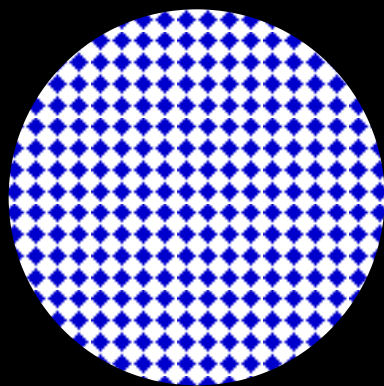
导体内电场不为零  
电荷在电场力作用  
下形成电流。导体  
内部电流随深度的  
增加因电场迅速减  
小而减小



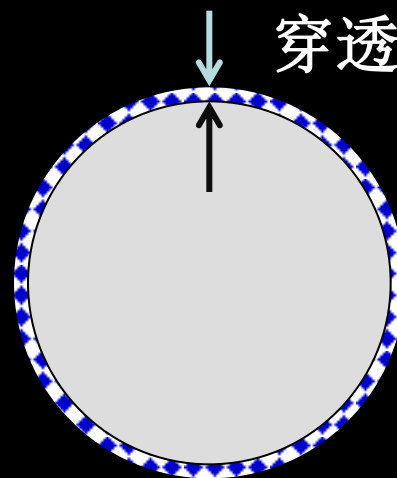
由于趋肤效应，导体中高频电流集中于表层，内部电流随深度的增加而迅速减小。

尽管导体横截面大，但真正用于电流传输的有效面积变小。导致高频电阻大于低频或直流电阻。

导线横截面  
为电流传输  
的有效面积



直流或低频信号



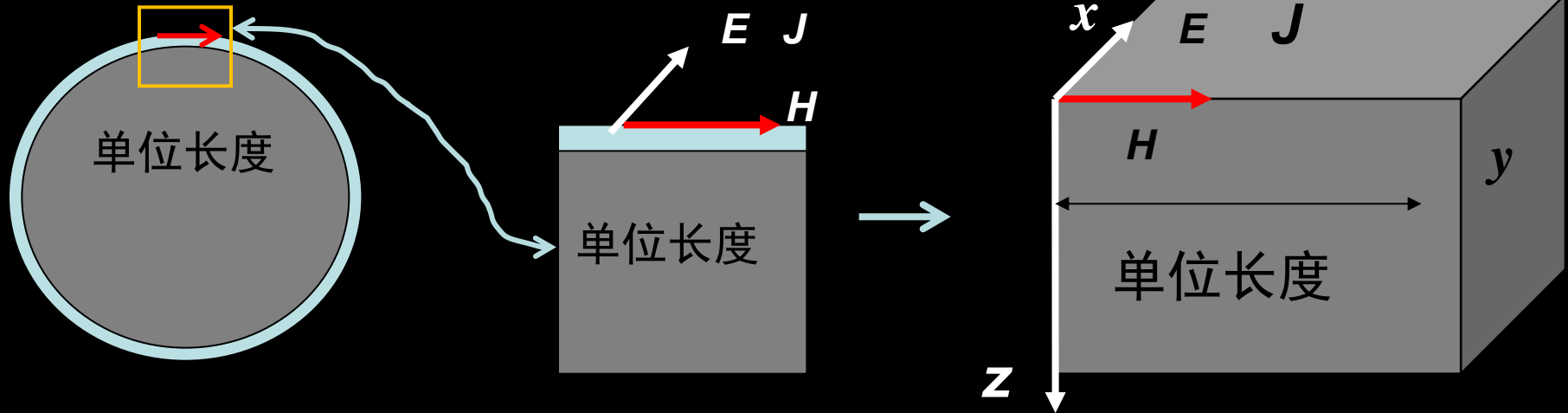
穿透深度 $\delta$

横截面的薄  
层为电流传  
输有效面积

高频信号



由于电流仅分布于表面厚度为  $\delta$  的薄层， $\delta$  很小，可进行如下近似估计：

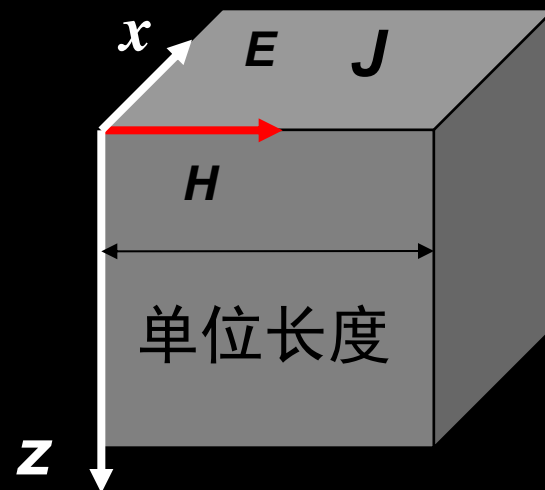


$$I = \iint_s J ds = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma E r d\phi dr \approx 2\pi a \int_0^{\infty} \sigma E dz = 2\pi a I_l$$

$$J(z) = \sigma E_0 \exp(-\alpha z - j\beta z)$$

$$I_l = \int_0^{\infty} \sigma E_0 \exp(-\alpha z - j\beta z) dz = \frac{\sigma E_0}{\alpha + j\beta}$$

$I_l$  : 单位长度横截线的电流密度



定义： 电流方向取单位长度的电压降

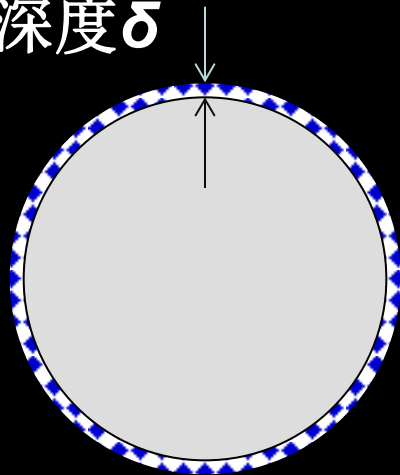
与单位长度横截线电流之比为导体表面阻抗

$$Z_s = \frac{U}{I_x} = \frac{E_0}{I_x} = R_s + jx_s = \frac{\alpha + j\beta}{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1 + j) = \frac{1}{\delta} \frac{(1 + j)}{\sigma}$$

直流电表面电阻率：  $\frac{1}{\sigma}$       高频电流表面电阻率：  $\frac{1}{\delta} \frac{1}{\sigma}$



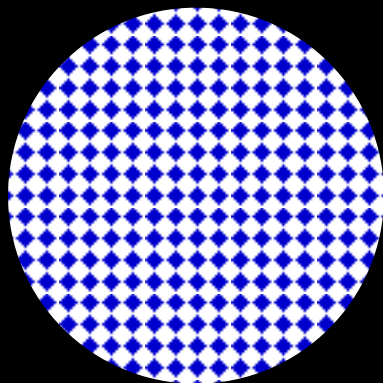
穿透深度 $\delta$



高频信号

$$\left[ \text{高频信号单位长度圆导线的电阻} \right] = \frac{1}{\delta} \frac{1}{2\pi a \sigma}$$

$$\left| \frac{a}{2\delta} \gg 1 \right.$$



直流或低频信号

$$\left[ \text{直流电单位长度圆导线电阻} \right] = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$$



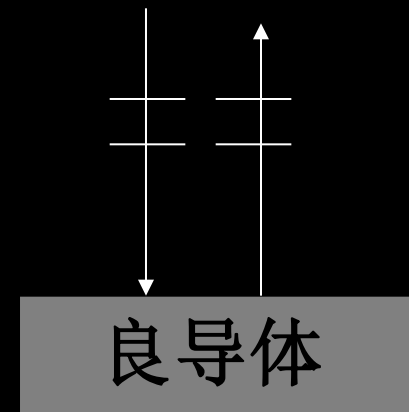
## 5. 电磁波在导体表面的反射

平面电磁波垂直入射导体表面，在导体界面上产生反射波和进入导体内部的透射电磁波，在导体表面上满足如下边界条件：

$$E + E' = E'' , \quad H - H' = H''$$

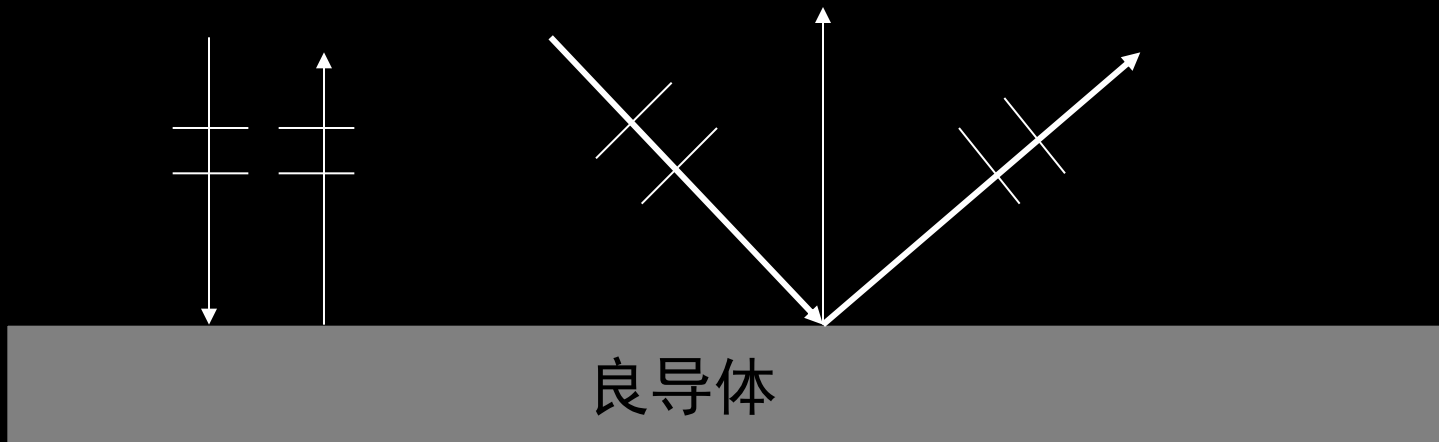
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j} \frac{1}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\tilde{\eta}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}' = E'' \frac{\eta}{\tilde{\eta}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} (1 + \mathbf{j}) E''$$





$$\frac{E'}{E} = -\frac{1 + j - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + j + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \approx -1$$





$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \left| \frac{1 + j - \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{1 + j + \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}} \right|^2 \cong 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}} \cong 1$$

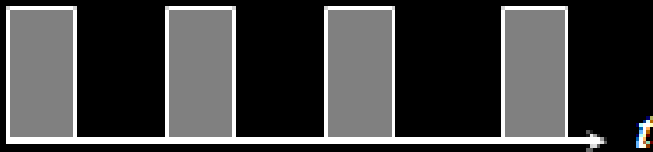
对于良导体，电磁波仅能存在于导体表面很薄的层中，绝大部分能量被反射回来。因此在高频时，导体可以看成是理想导体作为电磁场的边界。



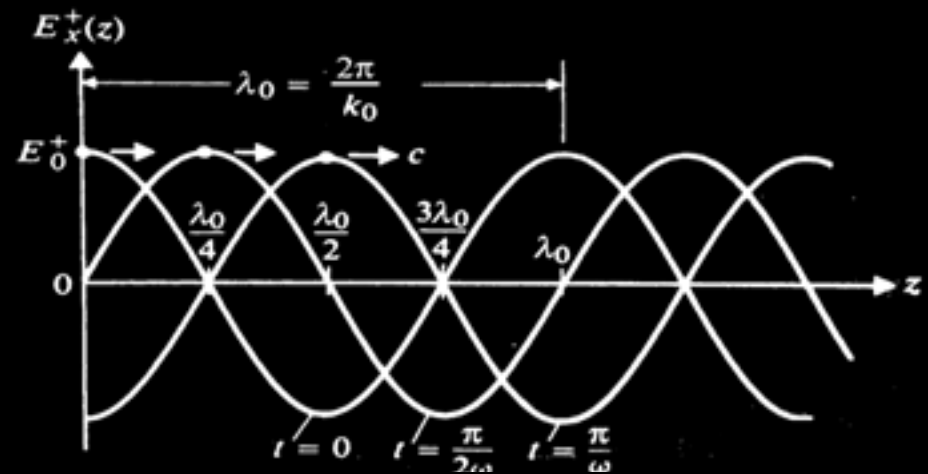
## § 4 波速与介质的色散

### 1. 电磁波的速度：有不同物理量的传播速度

如：相位速度



电磁信号传播速度



电磁能量传播速度

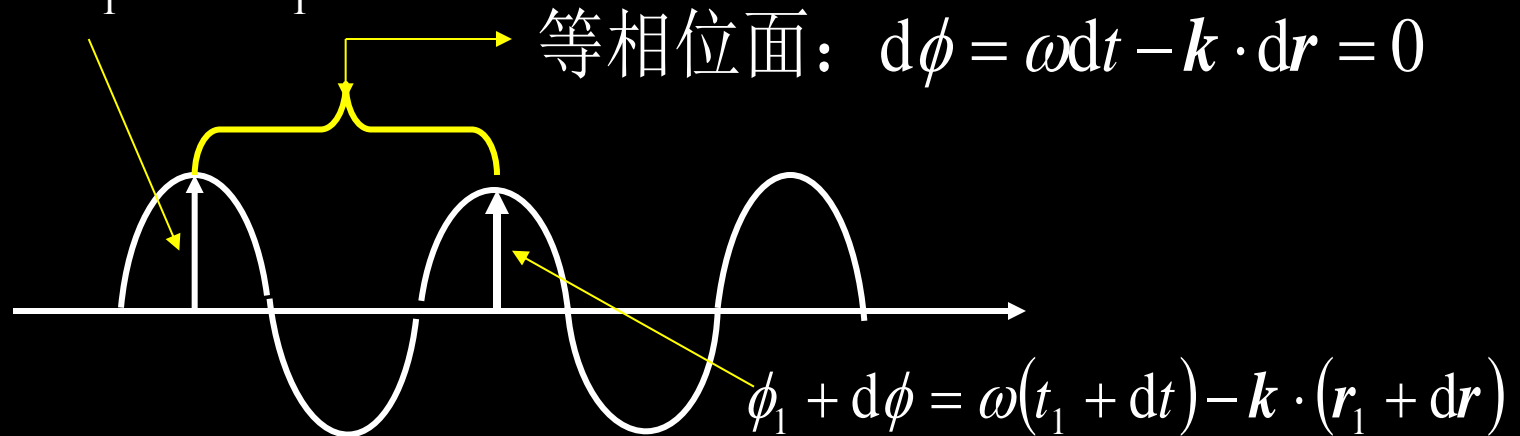


$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$$

## 2. 相速度——等相位面传播的速度

电磁波的相位表达式为:  $\phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$

$$\phi_1(\mathbf{r}_1, t_1) = \omega t_1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1$$

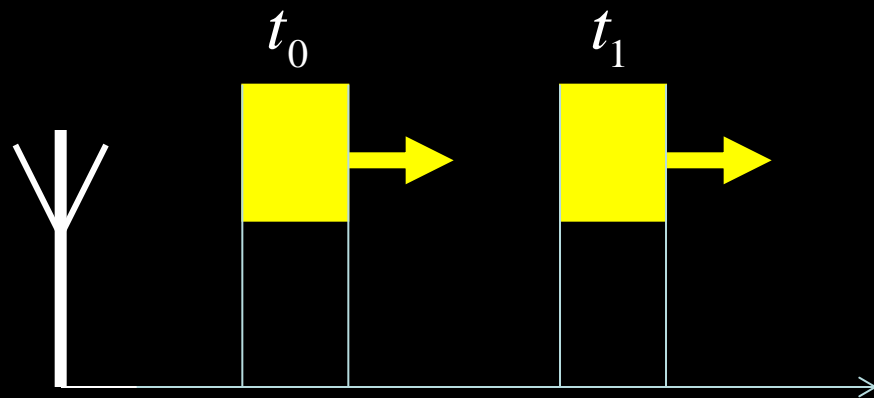
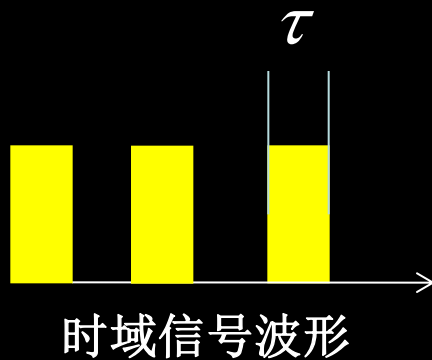


$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\hat{k}}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$



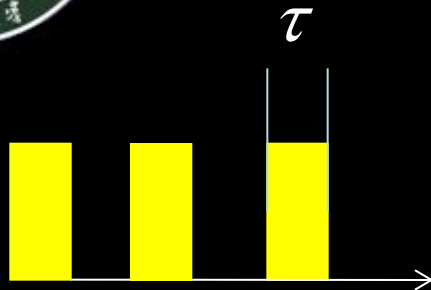
### 3. 群速度——电磁波包中心传播的速度

实际应用中电磁波信号是由不同频率、不同初相位、不同振幅平面波组成的一定波形结构的包。如雷达利用脉冲电磁波进行目标的探测和定位。





时变电磁信号表示为不同频率、不同振幅和不同初相位的谐变电磁信号的叠加：

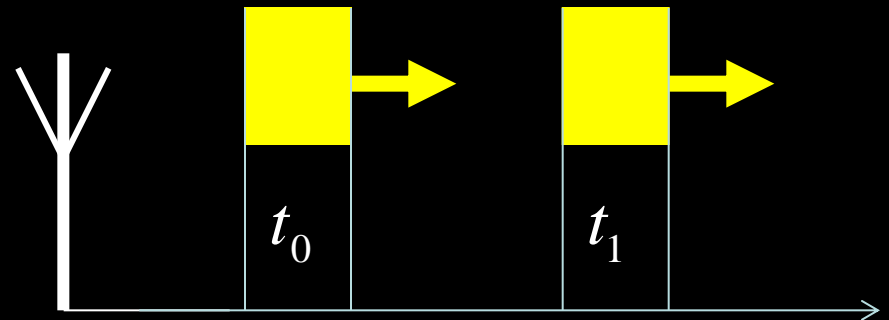


时域信号波形

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$E(r, t) = \sum_{\omega} \tilde{E}(\omega) \exp[j(\omega t - k \cdot r)]$$



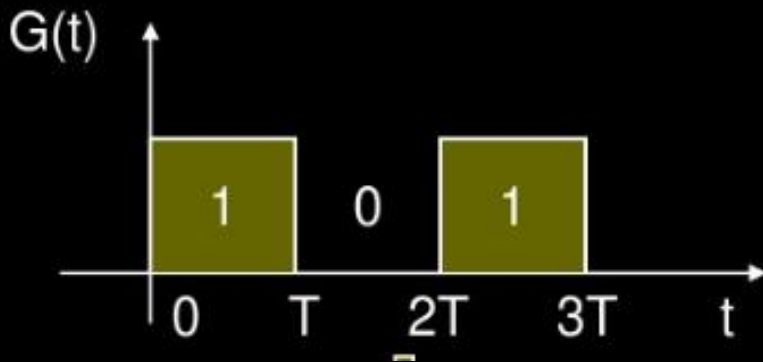
空间的波包为不同频率、不同振幅、不同初相位  
谐变平面波在空间传播过程中叠加的结果



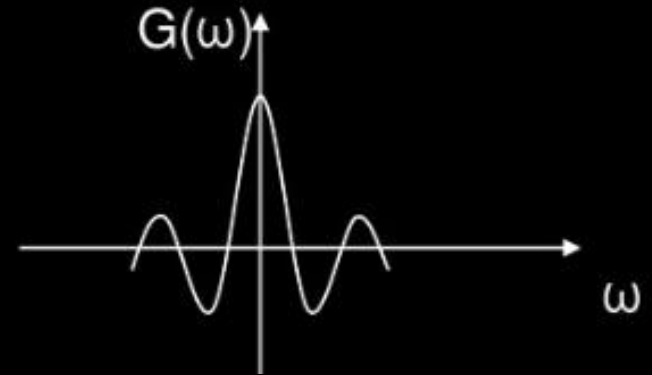


实际电磁信号总是以某个频率（载频）为中心  
频率在一定带宽范围内分布的时谐电磁信号

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_0 e^{j\omega t} dt = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{\frac{\omega \tau}{2}}$$



频谱



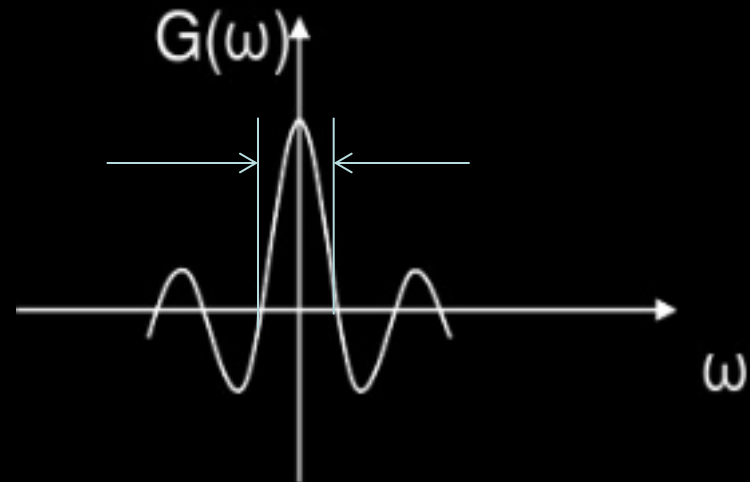


$E(\mathbf{r}, t)$  是波包中所有频率对应的定态平面波叠加所表现出的现状，即：

$$E(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega_0 - 0.5\Delta\omega}^{\omega_0 + 0.5\Delta\omega} \underbrace{\tilde{E}(\omega) \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]}_{\text{定态平面波}} d\omega$$

定态平面波

对于实际应用中的电磁波包，其频谱仅在有限频带范围内，如矩形脉冲信号





如果频谱为有限宽度

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\omega_0 - 0.5\delta\omega}^{\omega_0 + 0.5\delta\omega} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\omega \\ &= \mathbf{E}_0(\omega_0) \exp[j(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})] \end{aligned}$$

波包方程：

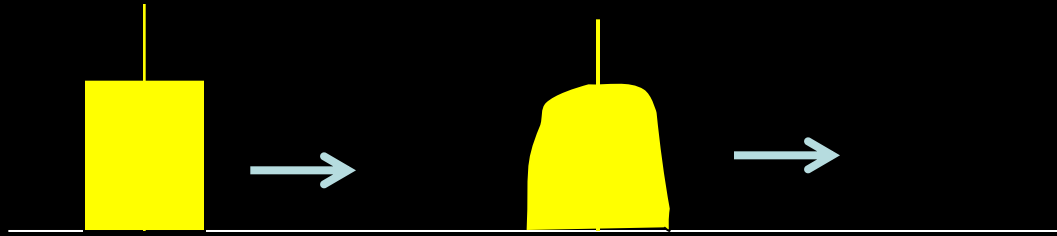
$$\mathbf{E}_0(\omega_0) = \int_{\omega_0 - 0.5\delta\omega}^{\omega_0 + 0.5\delta\omega} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{[j((\omega - \omega_0)t - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r})]} d\omega$$

波包方程说明波包不是常矢量，而是在空间一定区域范围内分布，并以波动形式在空间运动的矢量包



$$\mathbf{E}_0(\omega_0) = \int_{\omega_0 - 0.5\delta\omega}^{\omega_0 + 0.5\delta\omega} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{[j((\omega - \omega_0)t - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r})]} d\omega$$

波包中心：  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega_0)t = 0$



波包中心传播的速度（称为群速度）

$$\mathbf{v}_g = \nabla \omega(\mathbf{k}) \Big|_{\omega_0} = \hat{e}_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + \hat{e}_y \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \hat{e}_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$$



## 4. 群速度与能流传播速度

电磁波包能流密度矢量为：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*}{k\eta} \right) = \frac{\hat{k}}{2\eta} |\mathbf{E}_0(\omega_0)|^2$$

波包传播速度由电场幅度（波包）中心确定。群速度与电磁波包的能量传播速度一致。从能量传输角度看，稳态情形下的任何信号的传输必然以能量的传输为信号的传输，因此电磁波信号传播速度即能量的传播速度。



## 5. 群速度与相速度的关系

群速度为波包在空间传播的速度（某个频段平面波叠加），相速度是定频平面电磁波等相位面在空间传播的速度。如果波传播介质特性参数与频率无关，相速度与群速度相等。

$$v_g = \frac{\hat{e}_k}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v_p$$

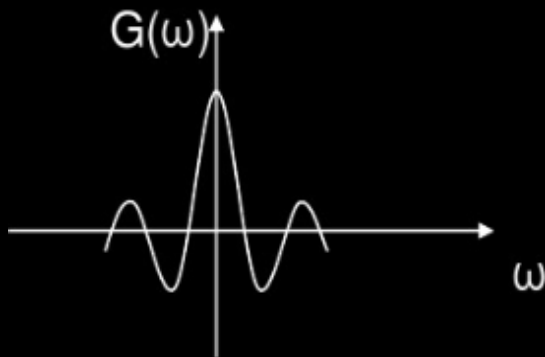
如果波传播的介质特性参数与频率有关：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_p)}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$$



## 5. 色散现象与它带来的问题

如果介质电磁特性参数随频率而变。不同频率的电磁波信号在介质中传播具有不同的相速度，这将导致电磁波包在传播过程中发生形状的变化，导致信号失真。与频率有关的介质称为色散介质





$t=0$  时  $z=0$  电磁处脉冲电场矢量波形为:

$$E(0, t) = \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j\omega t] d\omega \right]$$

脉冲信号在介质中传播距离  $L$  后脉冲形状为:

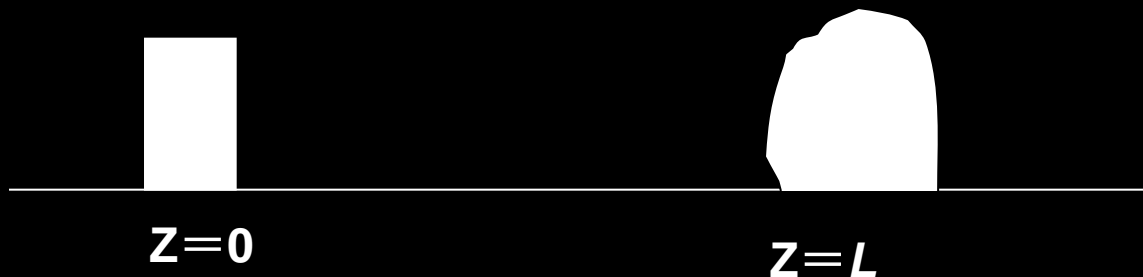
$$\begin{aligned} E(L, t) &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j(\omega t - kL)] d\omega \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} E(\omega) \exp[j(\omega T)] d\omega \right], \quad T = t - L\sqrt{\epsilon\mu} \end{aligned}$$



如果介质电磁特性参数与频率无关,  $T = t - L\sqrt{\epsilon\mu}$  与频率无关, 积分结果将使  $L$  处与  $Z=0$  处脉冲的形状完全相同, 即:



如果介质电磁特性参数与频率有关,  $T(\omega) = t - L\sqrt{\epsilon\mu}$  与频率有关, 积分结果将使  $L$  与  $Z=0$  处脉冲的形状发生改变。

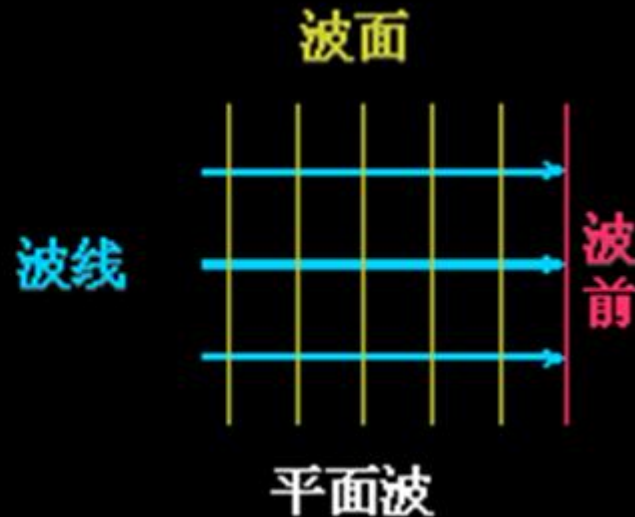
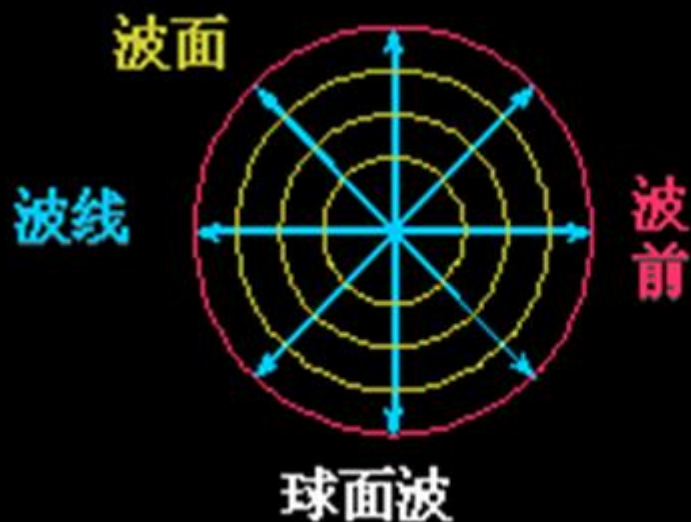




## § 5 电磁波的衍射

### 1. 电磁波的衍射现象

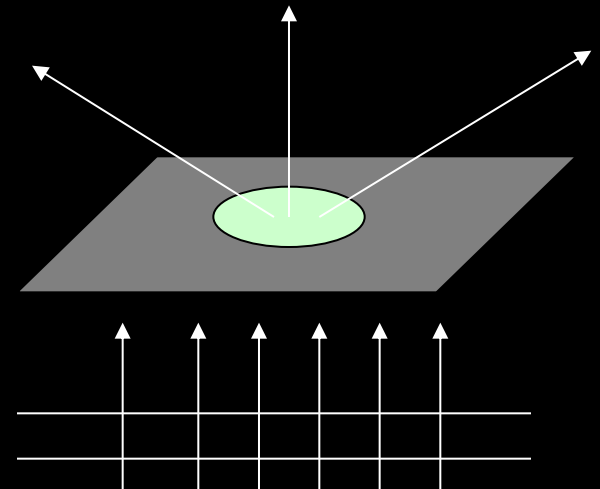
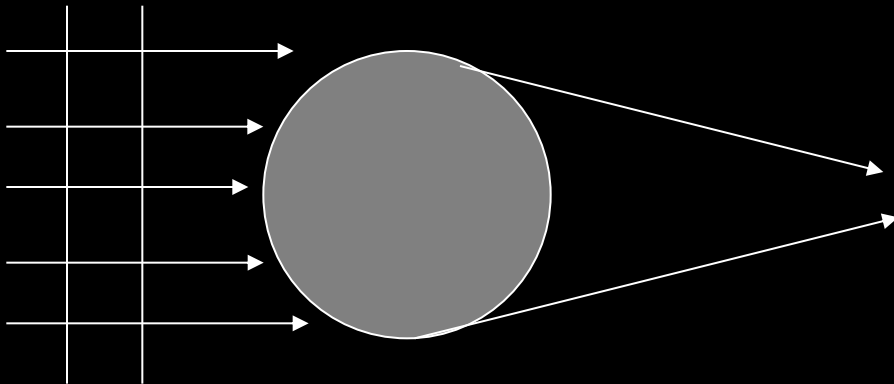
波线、波面与波前概念





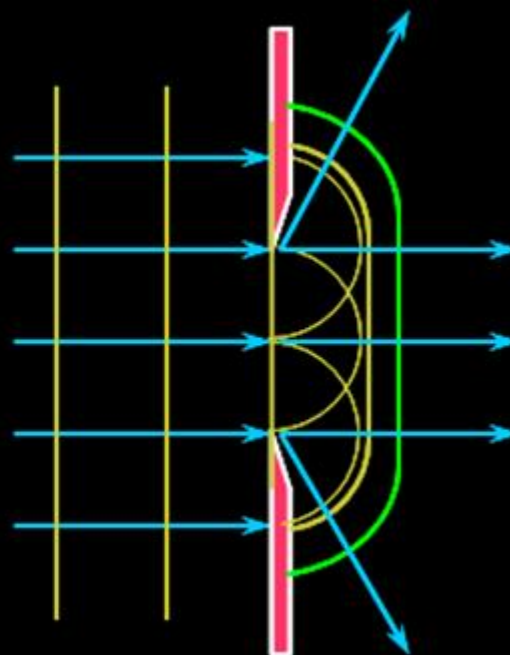
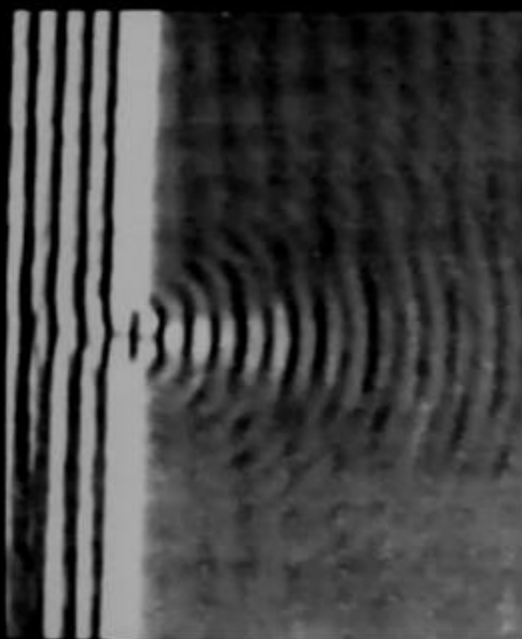
## 波的衍射现象:

波在传播过程中遇到障碍物或透过屏幕上小孔时，传播方向将发生改变的现象称为波的衍射，它是波动的基本特征之一



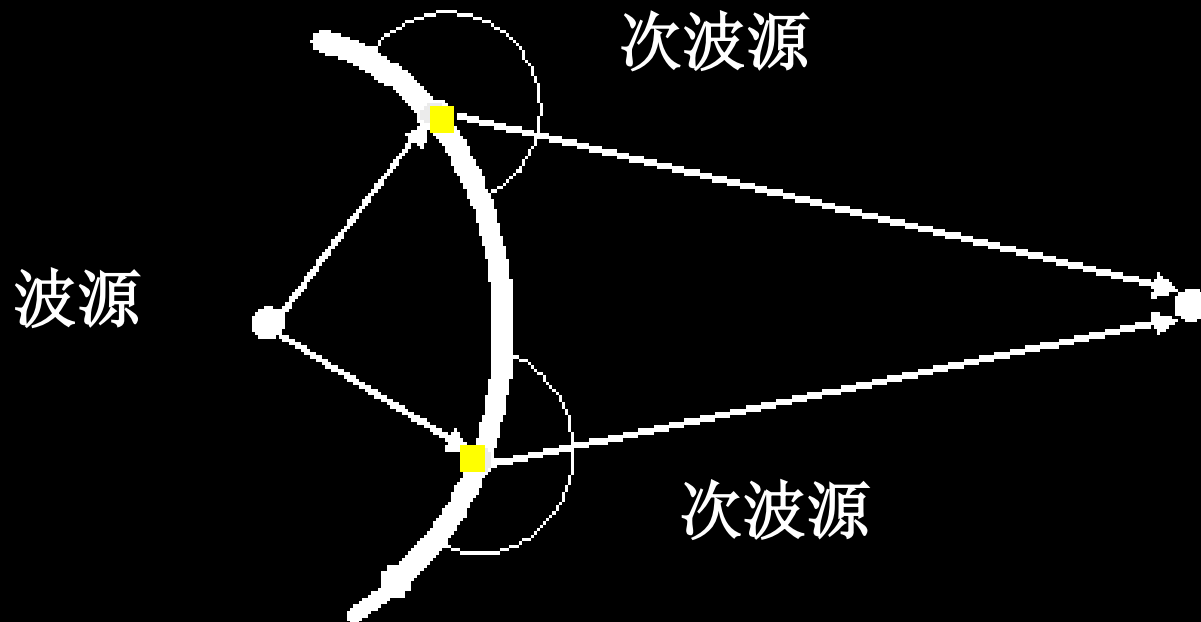
## 2. Huygens-Fresnel 原理

波传播过程中，波阵面上的每一点都是产生球面子波的次波源，波阵面上各点发出许多次波形成的包络面是原波面在一定时间内传播得到新波面



Fresnel认为：

波在传播过程中，波阵面上的每一点都是产生球面子波的次波源，空间其它点任意时刻的波动是波阵面上的所有次级波源发射子波的干涉叠加，进一步完善了Huygens原理，称为Huygens-Fresnel原理。



以标量场为例，无源空间中标量波满足方程：

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

应用Green函数方法，空间标量波函数解为

$$\phi(\mathbf{r}) = \oint\oint_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot d\mathbf{S}'$$

其中  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为无界空间波动方程

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

的解，求解得到：

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



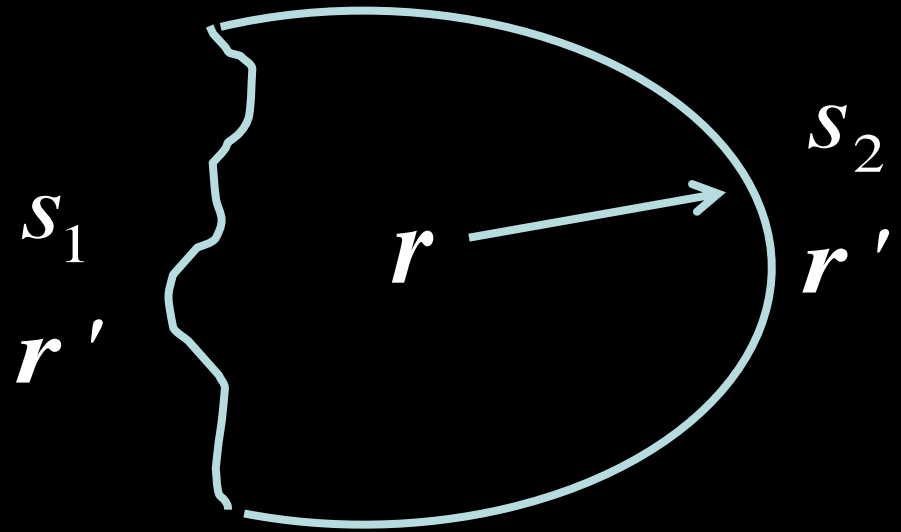
空间标量波函数为：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[ \nabla' \phi(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \phi(\mathbf{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{s}'$$

$\oiint$  表示边界面上次波的叠加

$[ ]$  表示边界面上次波源的幅度

表示区域任意点  $\mathbf{r}$  的波场是界面上所有次波源所激发的次波在该点的干涉叠加



## 2. 辐射条件

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[ \nabla' + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \right] \phi(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{s}' \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[ \nabla' + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \right] \phi(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{s}' + \\
 &\quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[ \nabla' + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \right] \phi(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{s}'
 \end{aligned}$$



$$R \rightarrow \infty \quad \hat{R} \cdot d\mathbf{s}' = \hat{R} \cdot \hat{R} R^2 d\Omega = R^2 d\Omega \quad \nabla' \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}' = \frac{\partial \phi}{\partial R}$$

无穷远边界面是假想的几何面；  
没有不同介质的交界面，无次波源；  
对区域内部电磁场的贡献必为零。

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[ \nabla' \phi(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \phi(\mathbf{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{s}' \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} R \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial R} + jk \phi(\mathbf{r}') \right) d\Omega e^{-jkR} \\ & \quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \phi(\mathbf{r}') d\Omega e^{-jkR} \equiv 0 \end{aligned}$$



否则有限区域内电磁场因与无穷远边界上次波源贡献有关，而具有多值特性。这是电磁场结果唯一性所不允许，即：

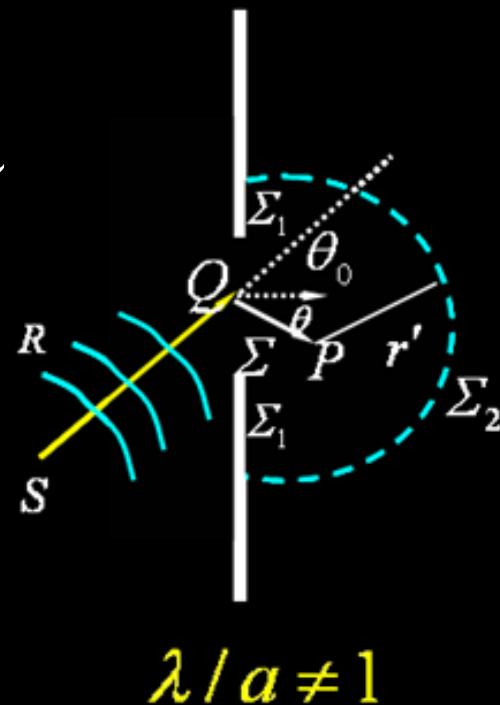
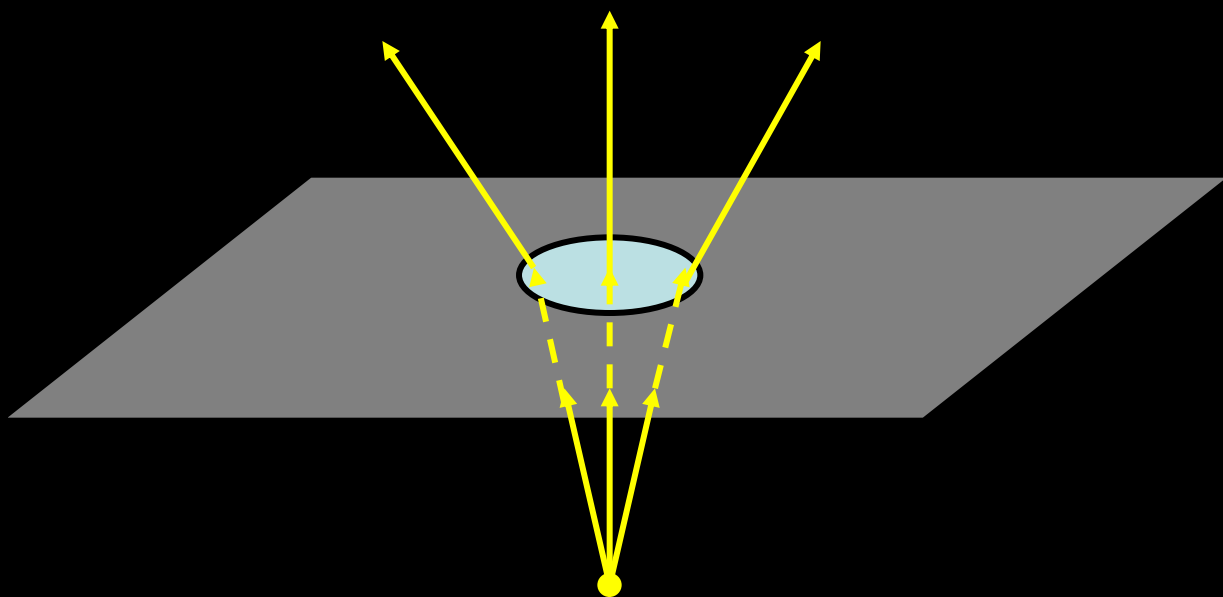
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} + jk \phi(\mathbf{r}) \right) = 0$$

称为辐射条件



# 例：小孔衍射

圆形孔的半径为  $a \ll \lambda$



应用Kirchhoff公式，必须知道屏幕上  $\nabla' \phi(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$

(1) 在小孔上,  $\nabla' \phi(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$  为点光源的直射场, 假设屏幕不对入射波产生影响, 或忽略不计

$$\phi(\mathbf{r}') = \frac{A}{R_0} \exp(-jkR_0) \quad , \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$$

$$\nabla' \phi(\mathbf{r}') = - \left( jk + \frac{1}{R_0} \right) \frac{1}{R_0} \exp(-jkR_0) \hat{\mathbf{R}}_0$$

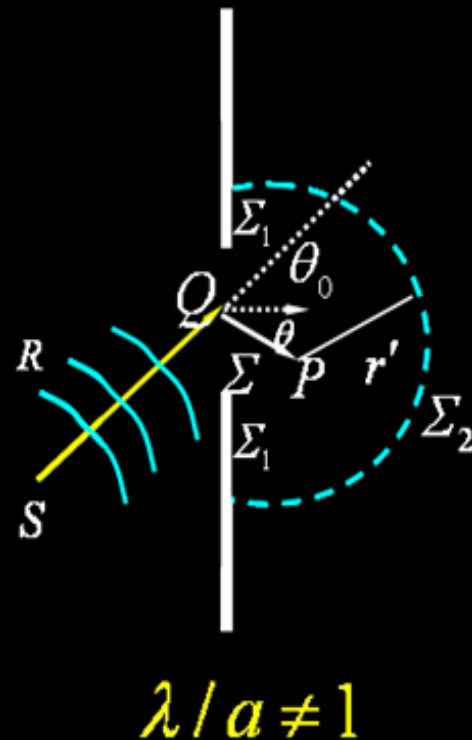
(2) 在小孔以外的屏幕上,

$$\nabla' \phi(\mathbf{r}')|_{\Sigma} = \phi(\mathbf{r}')|_{\Sigma} = 0$$



应用辐射条件, 得到:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-A}{4\pi} \iint_{S_a} \left[ \hat{\mathbf{R}}_0 \left( jk + \frac{1}{R_0} \right) + \hat{\mathbf{R}} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{-jkR_0}}{R_0} \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot d\mathbf{S}'$$



对于振幅因子保留零级近似, 忽略小孔屏幕上因 $R$ ,  $R_0$ 不同带来的微小差别, 并略去高阶项

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-jkA}{4\pi R_0 R} \iint_{S_a} [\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n}] e^{-jk(R+R_0)} d\mathbf{S}'$$

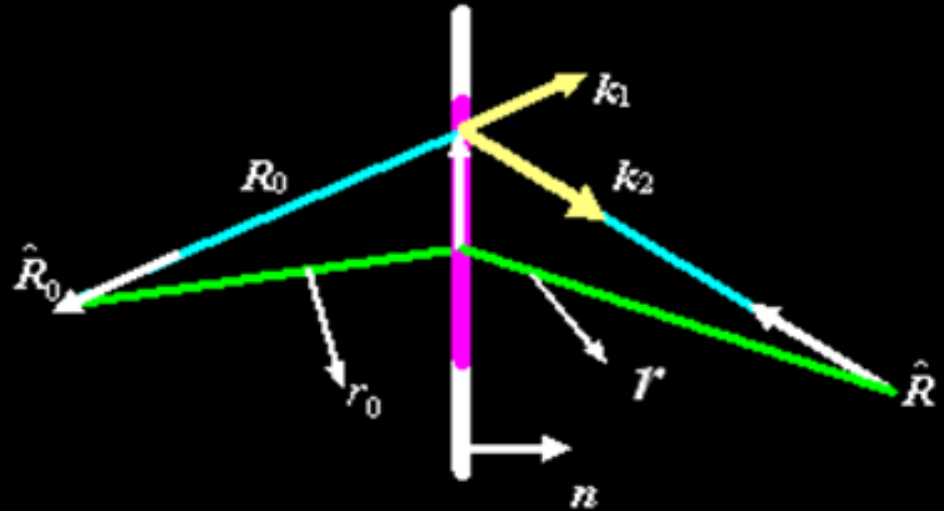


$$\hat{\mathbf{R}}_0 = -\hat{\mathbf{k}}_1$$

$$\hat{\mathbf{R}} = -\hat{\mathbf{k}}_2$$

$$kR_0 = kr_0 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'$$

$$kR = kr - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}'$$

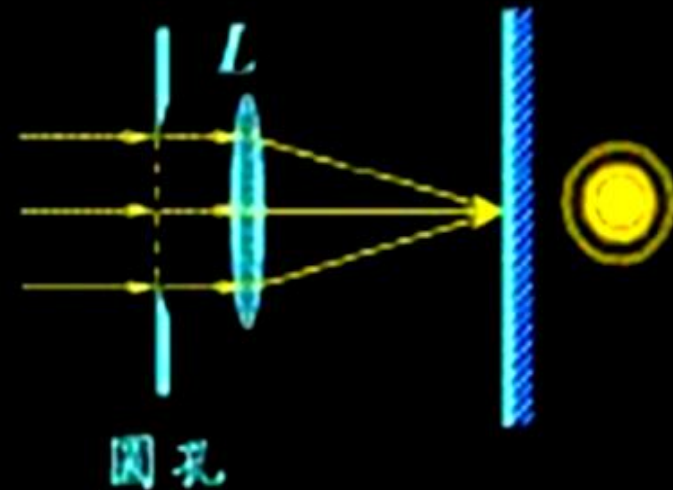
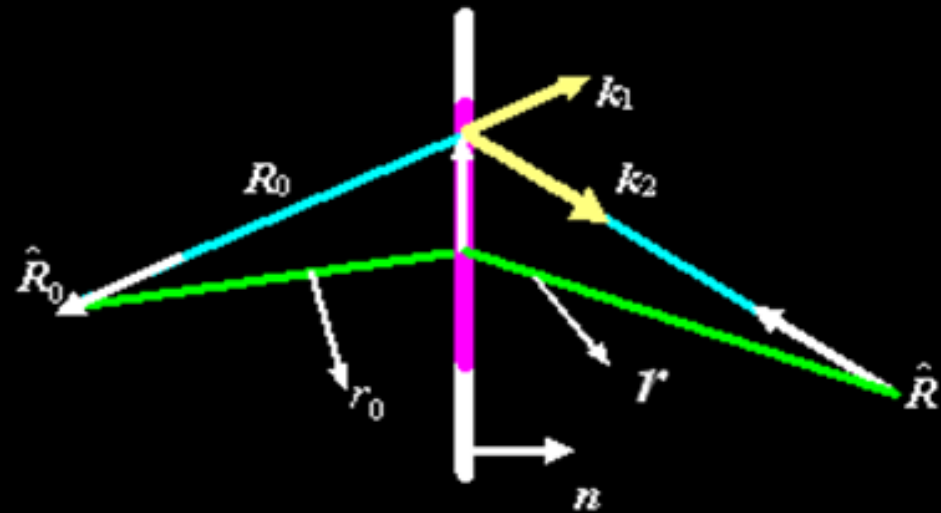


$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{-jkA}{4\pi R_0 R} \iint_{S_a} [\hat{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{n}] e^{-jk(R+R_0)} dS'$$



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{jA}{4\pi} \frac{\exp[-jk(r+r_0)]}{r_0 r}.$$

$$\iint_{S_a} [k_2 \cdot \mathbf{n} + k_1 \cdot \mathbf{n}] \exp[j(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}'] dS'$$



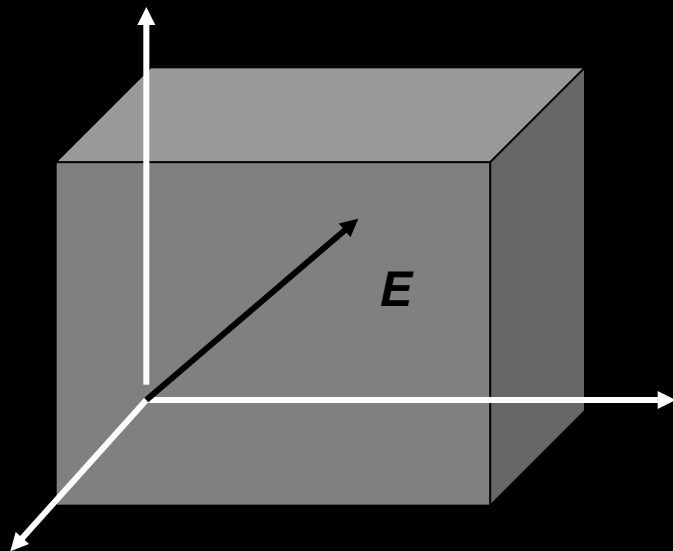
小孔衍射图



## § 6 各向异性介质的电波传播

### 1. 各向异性介质

如果介质的极化、磁化或传导特性与外加电磁场方向相关，称为各异性介质。如晶体介质的极化常数一般为：



$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \varepsilon_0 \left( \hat{e}_x \chi_{11} E_x + \hat{e}_y \chi_{21} E_x + \hat{e}_z \chi_{31} E_x \right) \Big|_{E_x} \\ & + \varepsilon_0 \left( \hat{e}_x \chi_{12} E_y + \hat{e}_y \chi_{22} E_y + \hat{e}_z \chi_{32} E_y \right) \Big|_{E_y} \\ & + \varepsilon_0 \left( \hat{e}_x \chi_{13} E_z + \hat{e}_y \chi_{23} E_z + \hat{e}_z \chi_{33} E_z \right) \Big|_{E_z} \end{aligned}$$





$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\chi} \cdot \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \varepsilon_0 \left( \chi_{11} \hat{e}_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{12} \hat{e}_x \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{13} \hat{e}_x \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \\ & + \varepsilon_0 \left( \chi_{21} \hat{e}_y \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{22} \hat{e}_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{23} \hat{e}_y \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \\ & + \varepsilon_0 \left( \chi_{31} \hat{e}_z \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{32} \hat{e}_z \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{33} \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \end{aligned}$$

极化强度张量. 如果  $\chi_{ij}$  与外加场强度  
无关的常数, 称为线性均匀各向异性



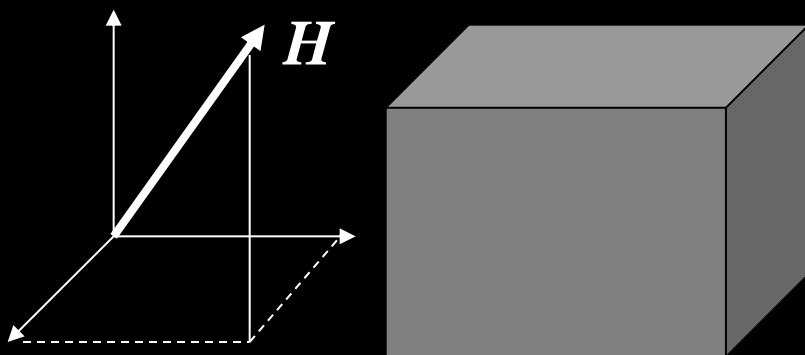
$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 \left( \hat{e}_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \hat{e}_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \hat{e}_z \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \\ &\quad + \varepsilon_0 \hat{e}_x \left( \chi_{11} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{12} \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{13} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \\ &\quad + \varepsilon_0 \hat{e}_y \left( \chi_{21} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{22} \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{23} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right) \\ &\quad + \varepsilon_0 \hat{e}_z \left( \chi_{31} \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x E_x + \chi_{32} \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y E_y + \chi_{33} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z E_z \right)\end{aligned}$$



$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} (1 + \chi_{11}) \hat{e}_x \hat{e}_x & \chi_{12} \hat{e}_x \hat{e}_y & \hat{e}_x \hat{e}_z \chi_{13} \\ \chi_{21} \hat{e}_y \hat{e}_x & (1 + \chi_{22}) \hat{e}_y \hat{e}_y & \hat{e}_y \hat{e}_z \chi_{23} \\ \chi_{31} \hat{e}_z \hat{e}_x & \chi_{32} \hat{e}_z \hat{e}_y & (1 + \chi_{33}) \hat{e}_z \hat{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x E_x \\ \hat{e}_y E_y \\ \hat{e}_z E_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \quad , \quad \vec{\varepsilon}: \text{张量介质常数}$$

如置于外磁场  $H_0$  之中的铁氧体（由 $\text{Fe}_2\text{O}_3$ 和其它金属氧化物混合经高温烧结而成）；对时变电磁场的磁导率是各异性的，即



称为磁导率张量。

$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}$$



## 2. 磁化电离子体（电离层）

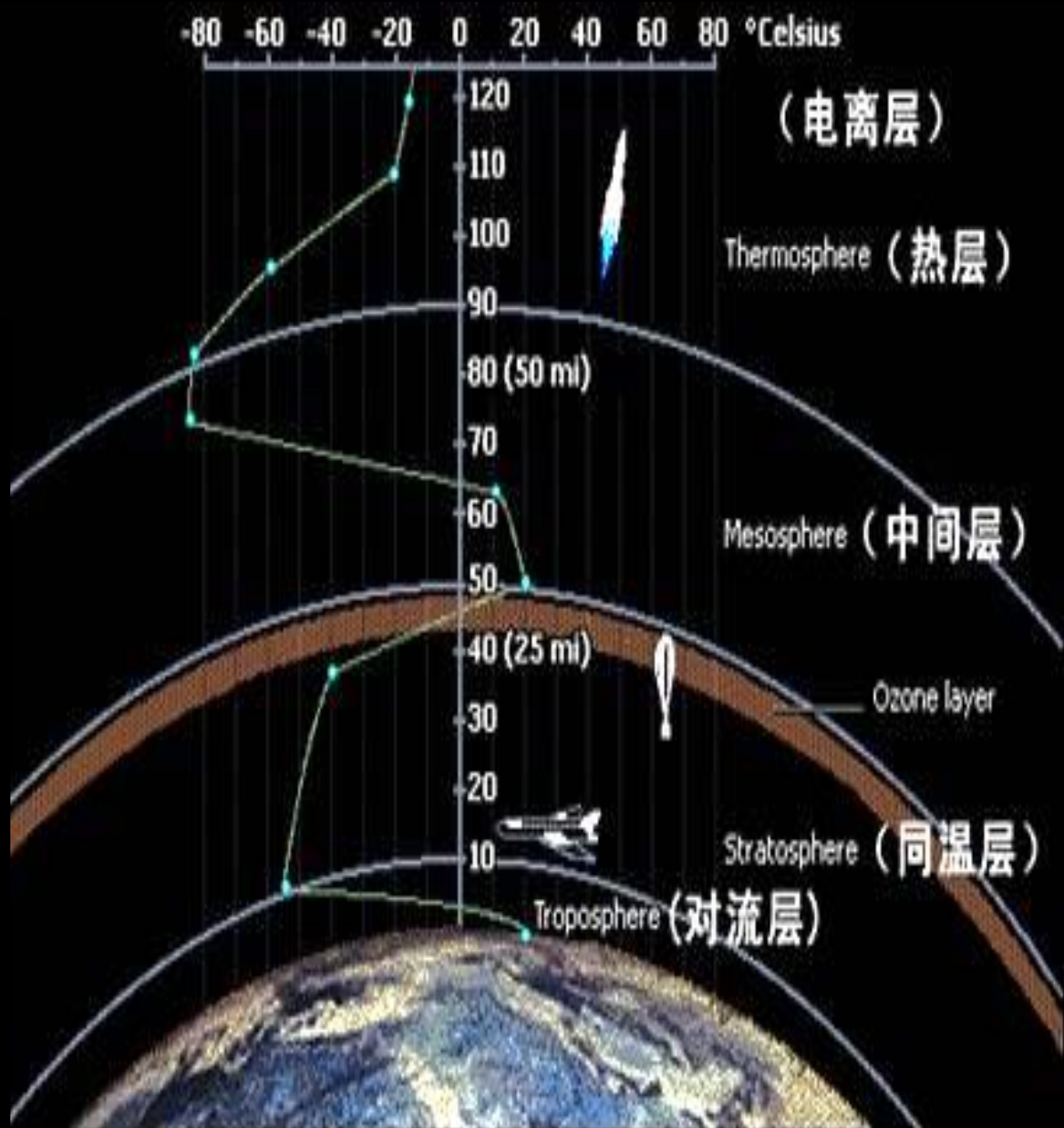
等离子体：

当物质温度升高或受到其它激发，组成物质的原子或分子电离，形成由电子、离子和部分未电离的中性分子组成的混合体，称为等离子体

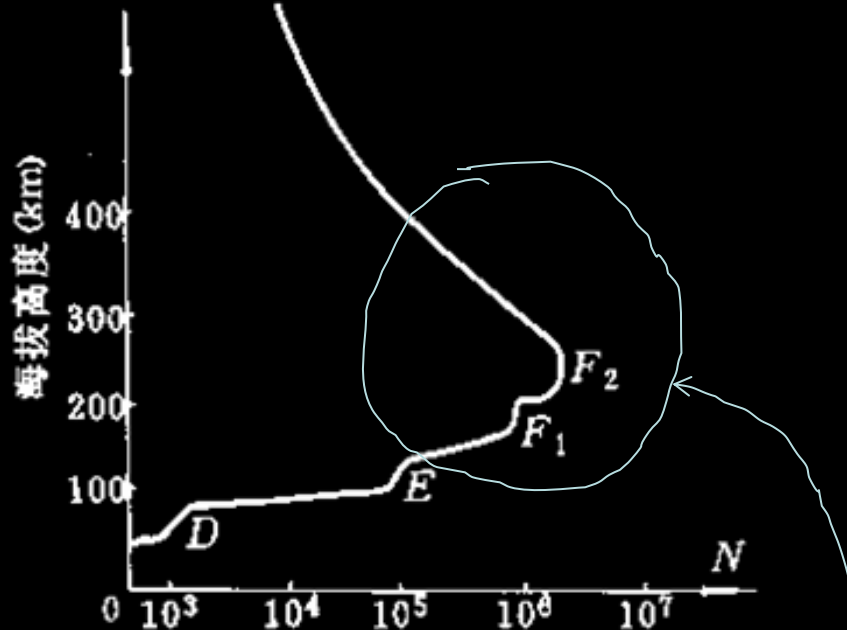
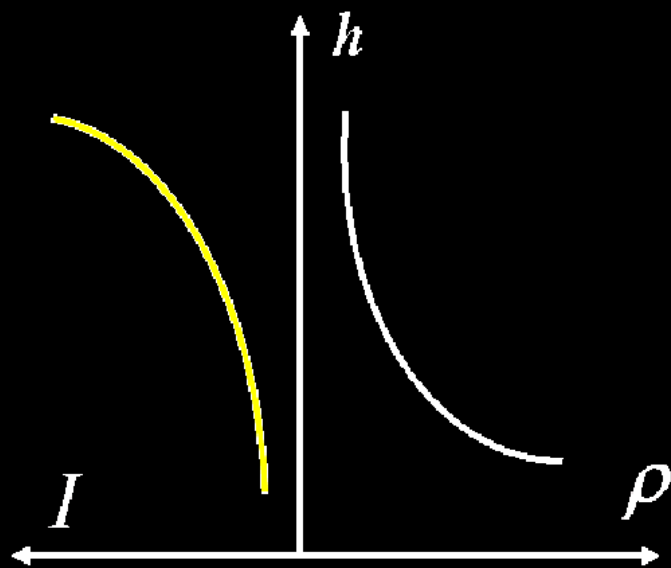
等离子体中总的正、负电荷量相等，对外显中性，是一种类似金属中的电子，但密度小得多



太阳光中的紫外线或高速粒子使高空大气电离，形成环绕地球的高空电离层，它是人类拥有的最大天然等离子体，对人类生成和发展有重要作用



地球大气层的结构



高空太阳辐射强, 大气密度小, 气体电离密度小;  
 离地球距离减小, 大气密度增加, 太阳辐射电离  
 大气概率增加, 电离气体密度增大; 随着离地球  
 距离的进一步减小, 大气密度增加, 太阳辐射粒  
 子密度迅速减小, 电离密度小。



# 磁化冷等离子体模型

忽略等离子体中电子与离子之间的碰撞(冷等离子体), 电离层中电离的电子受力及运动方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{H})] \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \end{cases}$$

$m$  : 电子的质量

$e$  : 电子的电荷量

$\mathbf{B}_0$  : 地球恒定磁场

$\mathbf{E}$  : 电离层中传播的电场

$\mathbf{H}$  : 电离层中传播的时变磁场





地磁场一般远大于电离层中传播的电磁场的磁场，所以有近似关系

$$|\mu_0 \mathbf{H}| \ll |\mathbf{B}_0| \quad |e\mathbf{E}|/|e\mathbf{v}\mu_0 \mathbf{H}| = \left| \frac{c}{v} \right| \gg 1$$

电子受到的作用力可近似为：

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{H})] \approx -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \end{cases}$$



入射电磁波激励下电子的运动方程为：

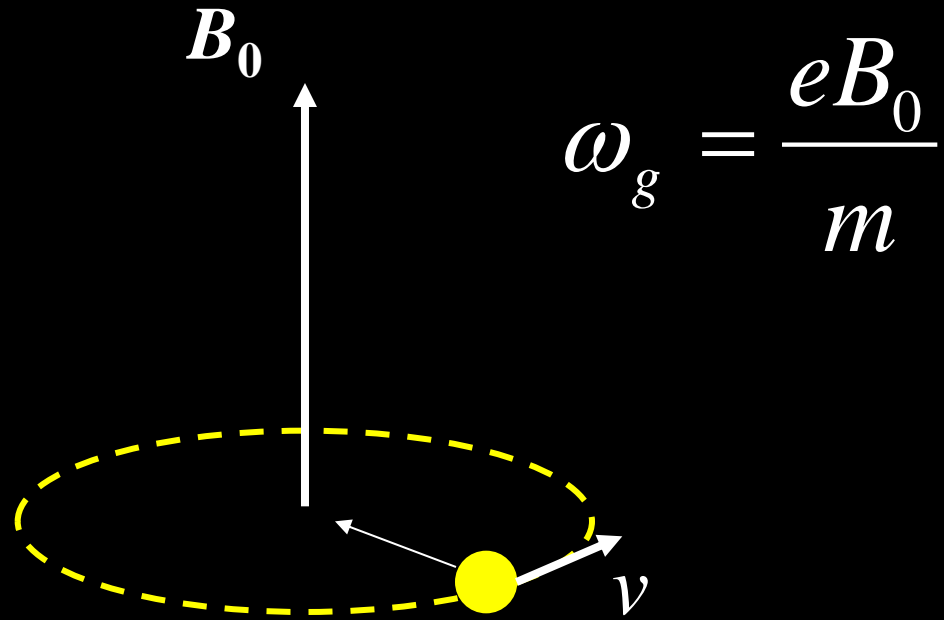
$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = j\omega\mathbf{v} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]$$

$$-j\left(\frac{m}{e}\right)\omega\mathbf{v} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \left(\frac{e}{m}\right) \begin{bmatrix} \frac{-j\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2} & \frac{-j\omega}{\omega_g^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{j}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

电子的回  
旋角频率

$$\omega_g = \frac{eB_0}{m}$$



电子的回旋角频率

磁化等离子体中传导电流密度  $\mathbf{J}_f = \rho \mathbf{v} = -eN\mathbf{v}$

磁化等离子体中的Maxwell为：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E} \end{cases}$$

电离层的张量介电常数

$$\vec{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & j\varepsilon_2 & 0 \\ -j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} \\ \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{array} \right. , \quad \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$



对上述结果稍作分析得到：

- ① 当  $\omega \rightarrow \omega_g$  时，电磁波的圆频率与电子自旋频率相同，电磁波能量被电离层中电子极大的吸收而处于磁旋共振状态，导致电磁波能量极大被损耗。如果取：

$$B_0 = 5 \times 10^{-5} \text{ (韦伯/平方米) }, f_g = 1.4 \text{ MHz}$$

这说明当频率为1.4MHz的电磁波入射电离层时吸收最大。这是短波通信应该尽量回避的频率。



- ② 对于  $B_0=0$  的非磁化等离子体，张量介电常数退化为各向同性的标量介电常数，即：

$$\vec{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \epsilon_3$$

等离子体电磁波满足的波动方程与各向同性介质中的方程相同。



## 在等离子体中传播的电磁波的波数

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_3}$$

当  $\omega < \omega_p$  ,  $\epsilon_3 < 0$  ,  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_3}$  为纯虚数

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp(j\omega t - \omega \left| \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_3} \right| r)$$

电磁波随传播距离增加而按指数规律衰减，不再具有电磁波特点。所以  $\omega_p$  称为等离子体临界频率，与等离子体电子密度有关。



地球上空的电离层中电子密度随海拔高度变化而变化，密度最大值大约为：

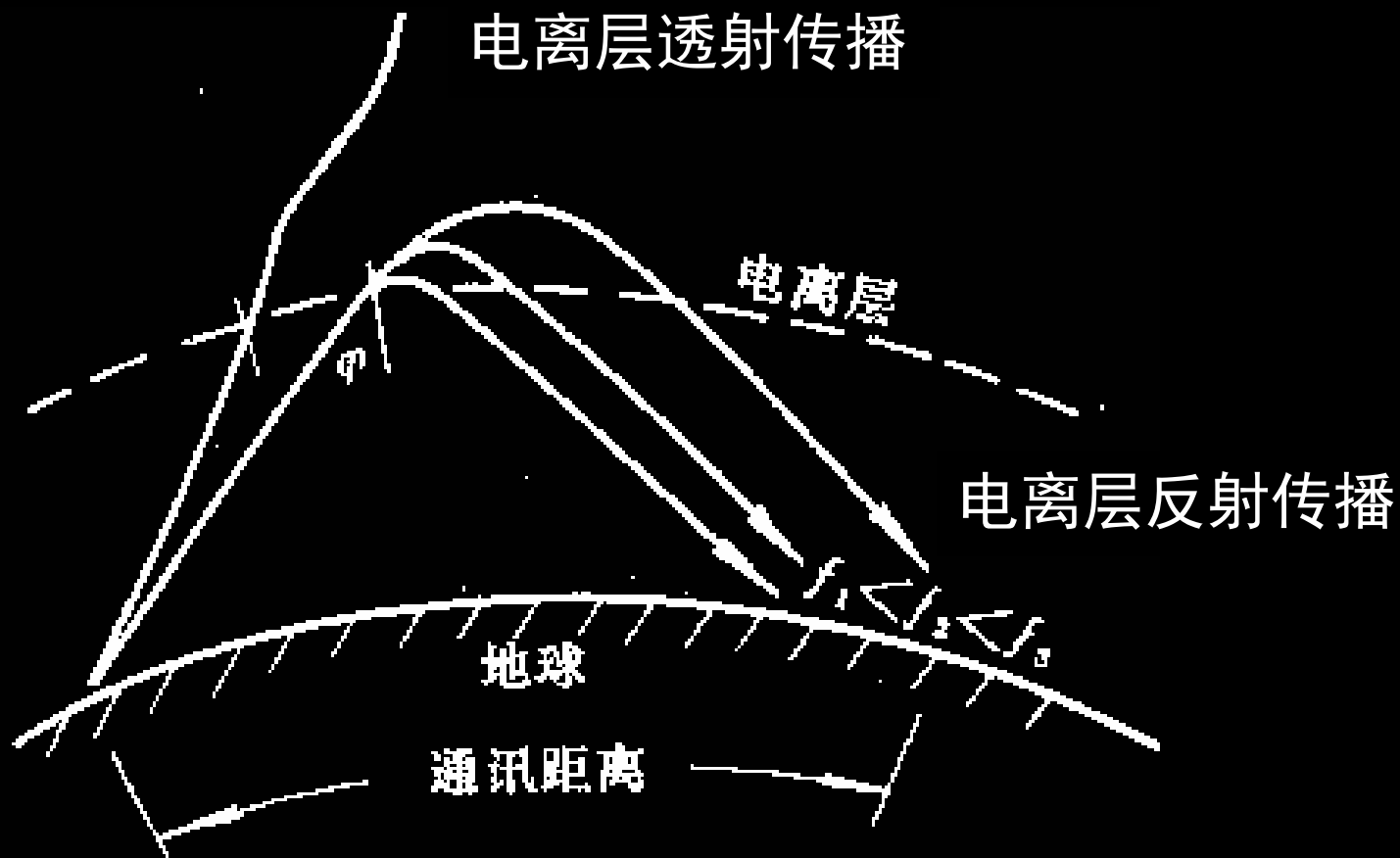
$$1 \sim 2 \times 10^6 / \text{cm}^3 \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \approx 13\text{MHz}$$

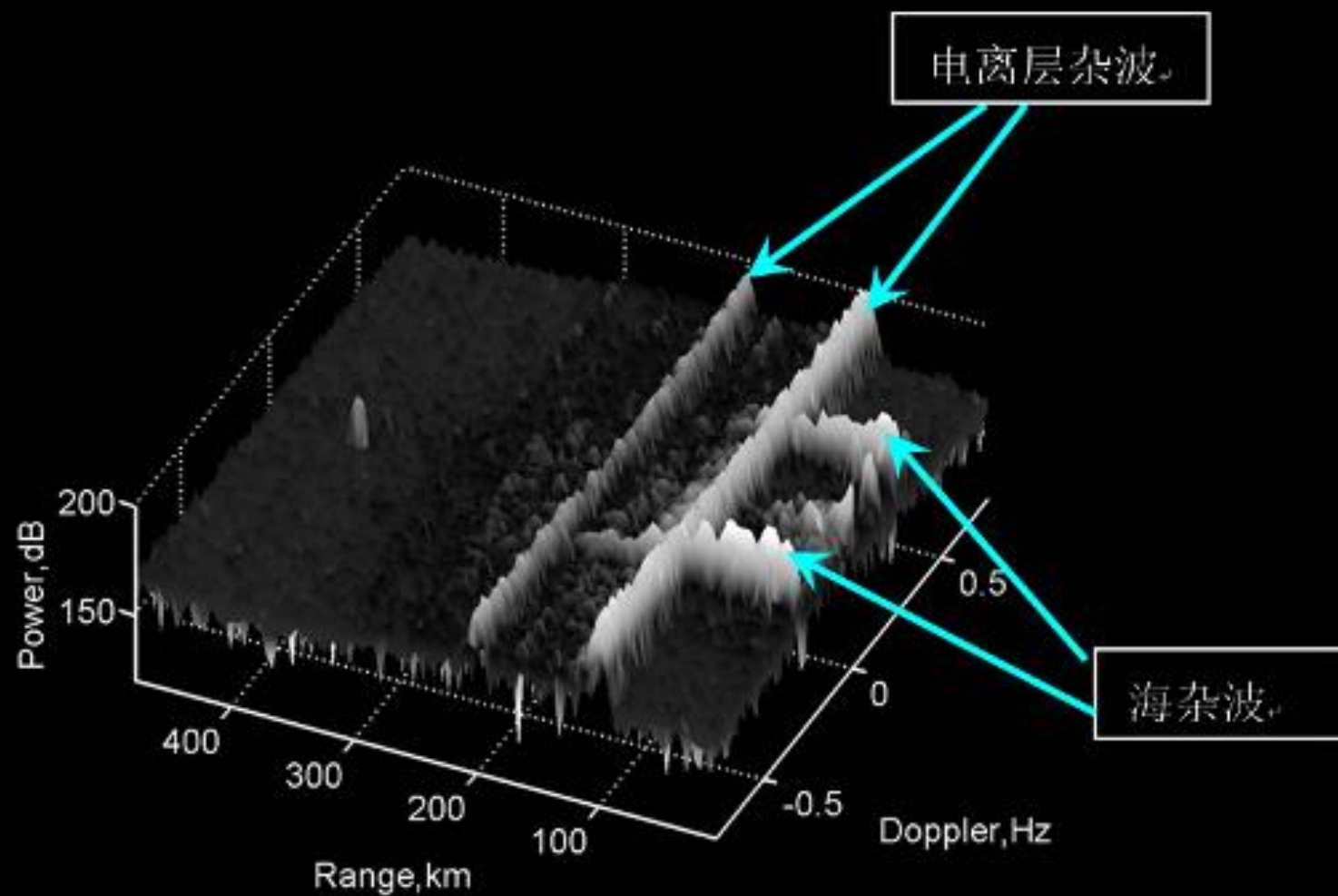
因此，为了实现地球与卫星之间的通信，其频率必须高于电离层最大临界频率，否则信号将不能穿过电离层。另一方面，小于临界频率的电磁波不能穿透在电离层，必然被反射到地面



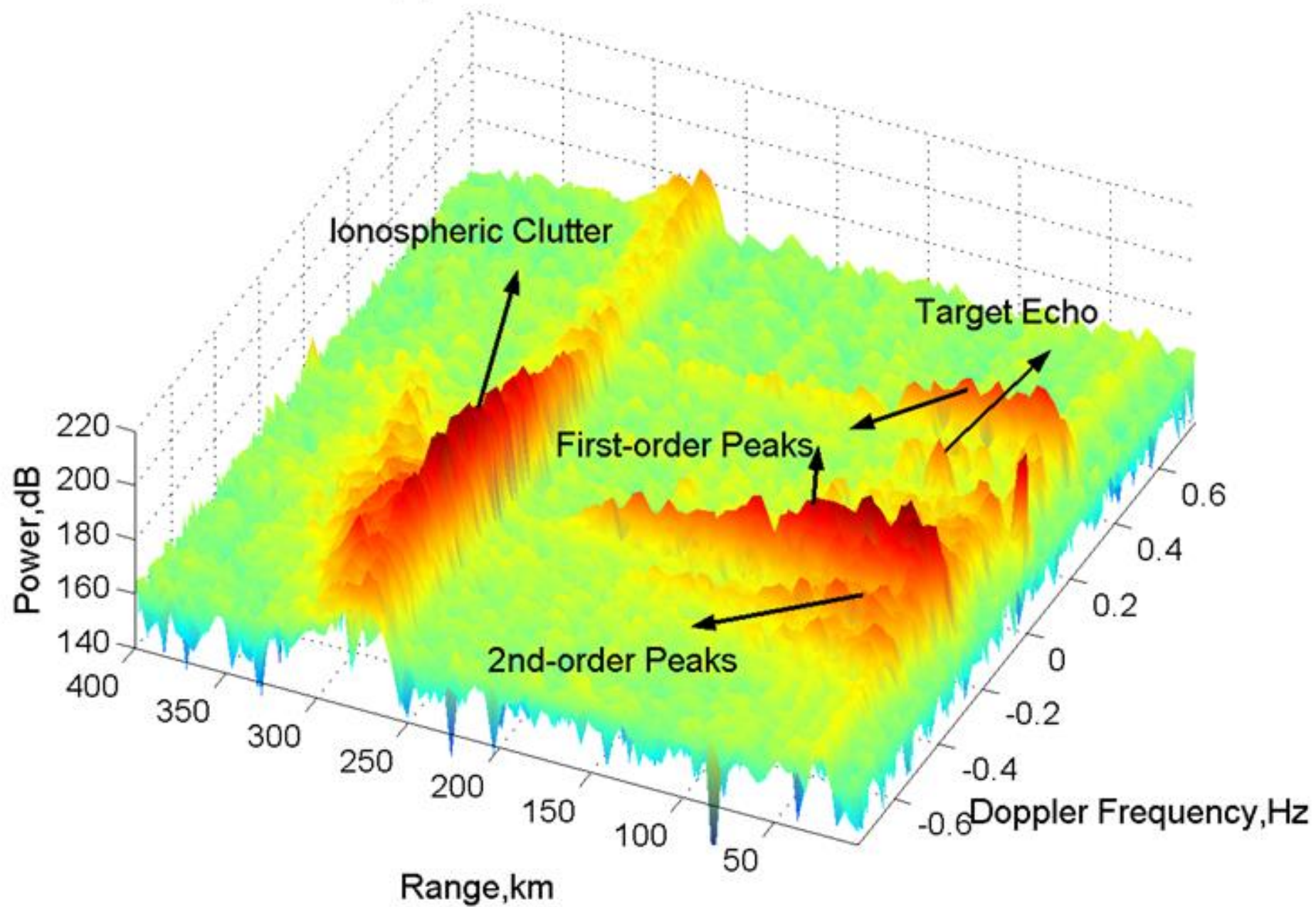


# 电离层中电波传播





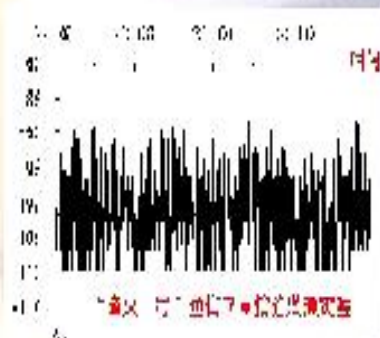
Doppler Characteristics--2003 11 29 14:17





# Scintillation

电离层闪烁



弯曲和时延

## Bend & Delay

X 视在位置

Apparent Location



真实位置

True Location

Ionosphere

电离层

雷达误差  
定位误差  
GPS误差

- Radar Errors
- Geolocation Errors
- GPS Errors



## Electron Density 电子密度

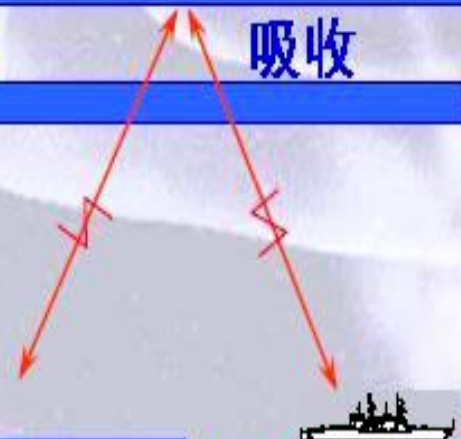
Absorb

吸收



• HF Radio Outages

短波无线电中断



### 3、电离层中的平面波

为了突出电离层中的电磁波的传播问题，假设电离层是无耗、均匀、线性的充满整个空间。其最简单的平面电磁波是：

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$$

上述平面电磁波是否存在？

如果存在，该平面波具有那些基本特性？

将平面电磁波可能解代入Maxwell方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}, & \nabla \times \mathbf{E} = -jk \times \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, & \nabla \times \mathbf{H} = -jk \times \mathbf{H} \end{cases}$$

得到电场满足的方程是：

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = -k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E}_0 \\ [\mathbf{k}\mathbf{k} - \vec{I}k^2] \cdot \mathbf{E}_0 = -k_0^2 \vec{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{E}_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

矩阵方程是一个关于波数  $k$  的代数方程，称为 Appleton—Hartree 方程。 $k$  每个取值与电离层中可存在的平面电磁波模式相互对应。

特例一： 横向传播

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x}, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

$\mathbf{B}_0$

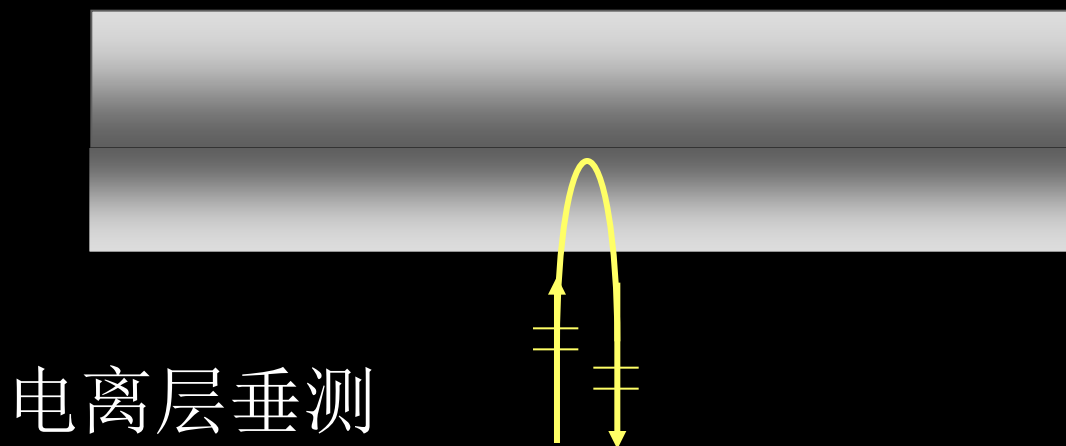
$\mathbf{E}_0$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{bmatrix} = 0 \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon_3}$$



由于电场矢量与恒定外加磁场方向平行，等离子体中的电子在电场力作用下，其运动方向与恒定外加磁场方向相同，恒定外加磁场对运动电子没有力的作用。其结果同非磁化等离子体完全相同。

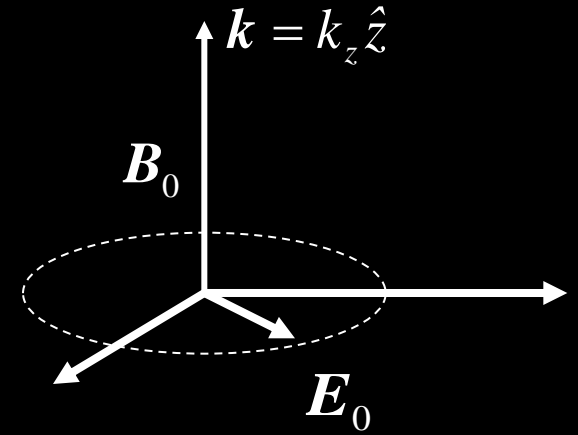




## 特例二：纵向传播

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{k} = k\hat{z}, \mathbf{E}_0 = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2$$



$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

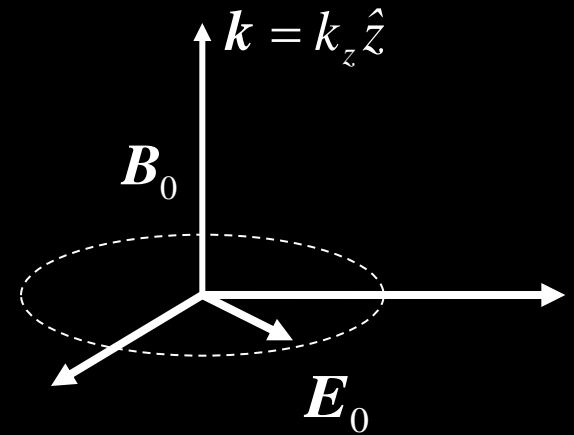
$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}} \\ k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} \end{cases}$$



## 特例二：纵向传播

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{k} = k\hat{z}, \mathbf{E}_0 = \hat{x}E_1 + \hat{y}E_2$$



$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_x^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 - k_x k_y & -k_x k_z \\ j\varepsilon_2 k_0^2 - k_y k_x & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k^2 - \varepsilon_3 k_0^2 - k_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & -j\varepsilon_2 k_0^2 & 0 \\ j\varepsilon_2 k_0^2 & k^2 - \varepsilon_1 k_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

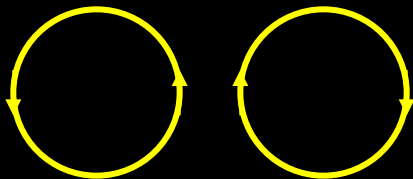


$$\begin{cases} k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_g)}} \\ k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_g)}} \end{cases}$$

为圆极化波；

如果  $\mathbf{E}_1(r) = E_0(\hat{x} \mp j\hat{y})\exp(-jk_1 z)$  为圆极化波；

即解： 如果



$$\mathbf{E}(0) = E_0 \hat{x}$$

$$= \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) + \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} - j\hat{y})$$

左旋

右旋



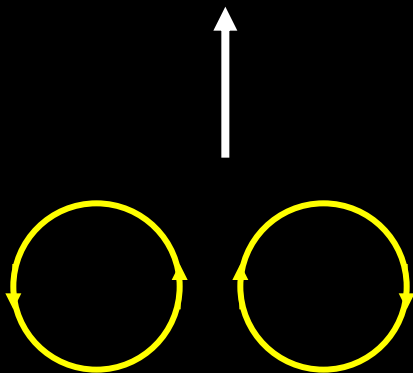
如果  $k = k_1$   $E_2 = -jE_1$

其解为右旋圆极化波；

如果  $k = k_2$   $E_2 = jE_1$  其解为左旋圆极化波；

即解：

$$E_1(r) = E_0(\hat{x} \mp j\hat{y})\exp\left(-jk_1 z\right)$$

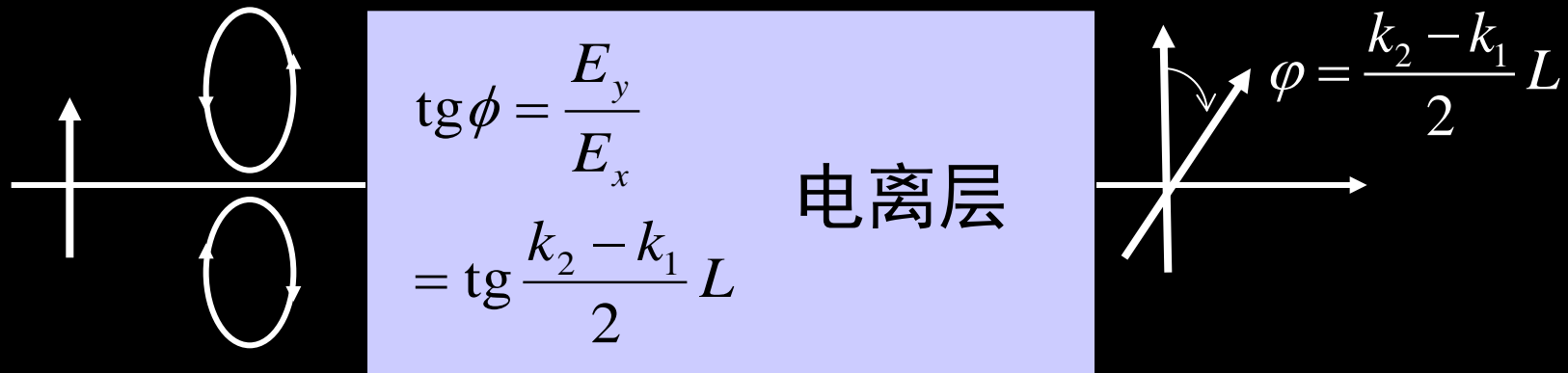
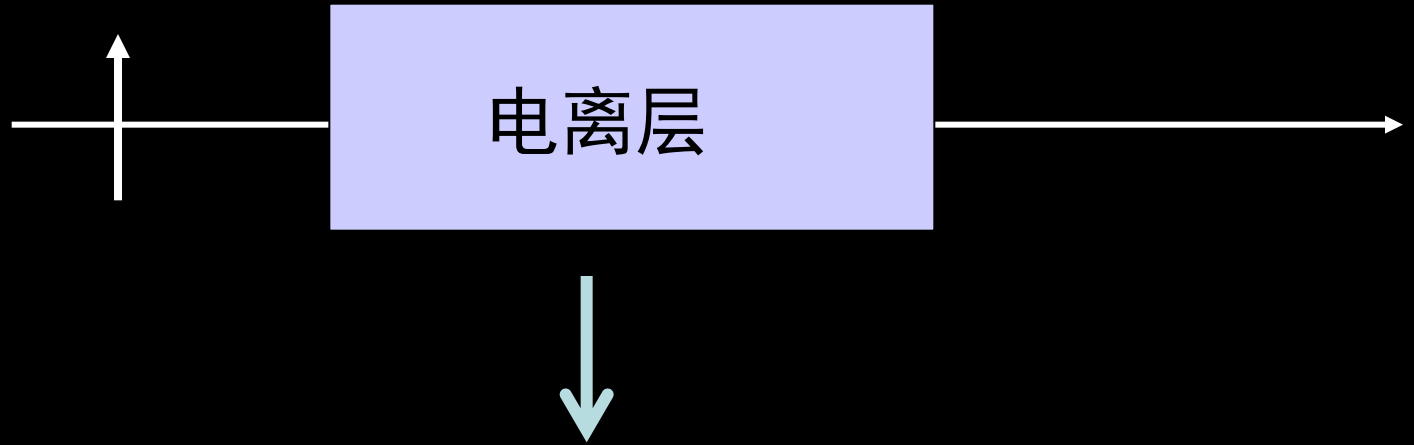


$$E(0) = E_0\hat{x}$$

$$= \frac{1}{2}E_0(\hat{x} + j\hat{y}) + \frac{1}{2}E_0(\hat{x} - j\hat{y})$$

左旋

右旋



$$\mathbf{E}(L) = \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) \exp(-jk_2 L) + \frac{1}{2} E_0 (\hat{x} - j\hat{y}) \exp(-jk_1 L)$$

$$= E_0 \exp\left(j \frac{k_1 + k_2}{2} L\right) \left[ \hat{x} \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} L\right) + \hat{y} \sin\left(\frac{k_2 - k_1}{2} L\right) \right]$$