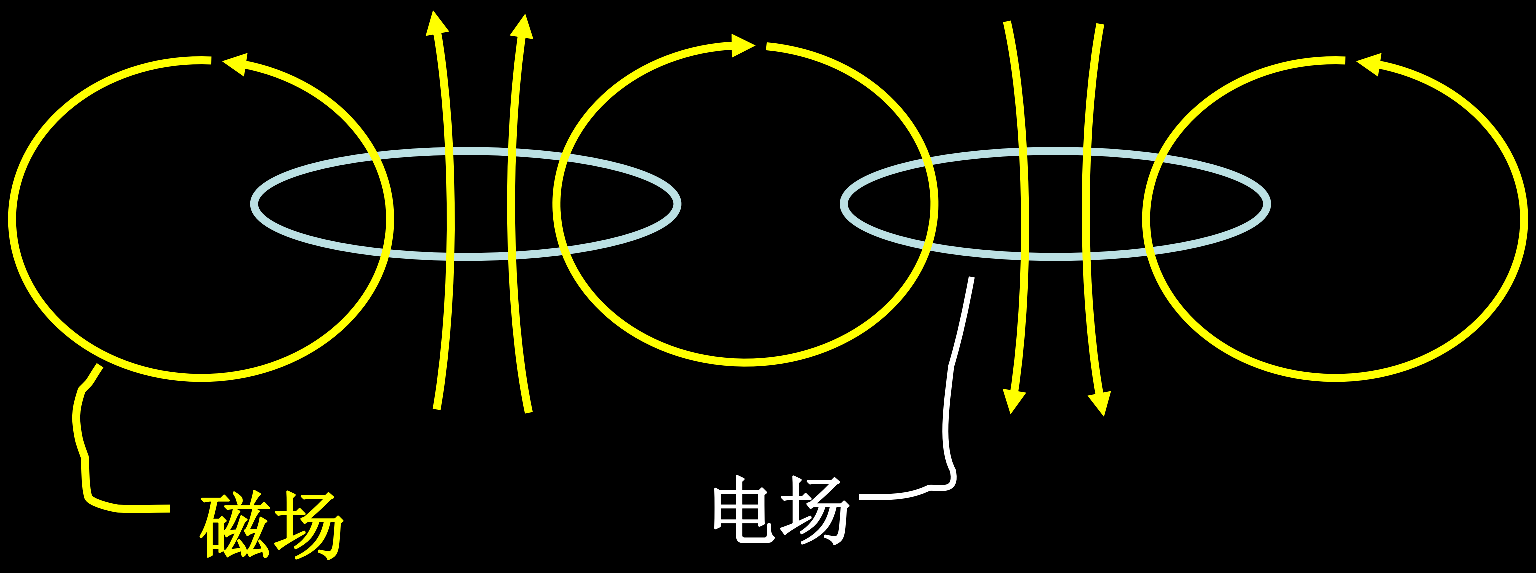
时变电磁场

（第五章）

随时间变化的电磁场为时变电磁场

波动是时变电磁场运动的基本特征

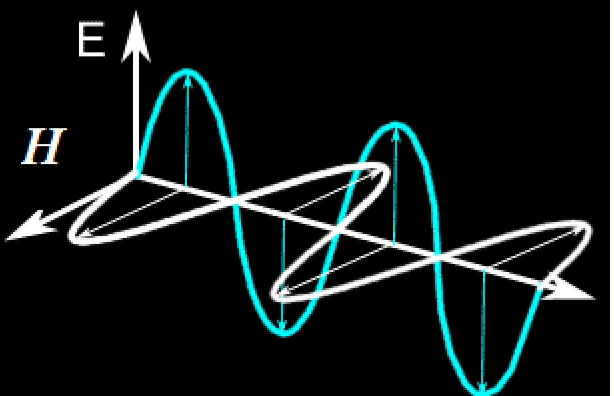
变化的磁场产生涡旋电场 ⟷ 变化的电场产生涡旋磁场



现代物理学证明，电磁波以光速传播，是物理世界运动物体速度的最高极限。

电磁波（信号）可通过电荷运动产生，通过对电荷运动的控制，实现电磁波信号产生、控制、放大、调制、处理

最简单的电磁波
为简谐电磁波

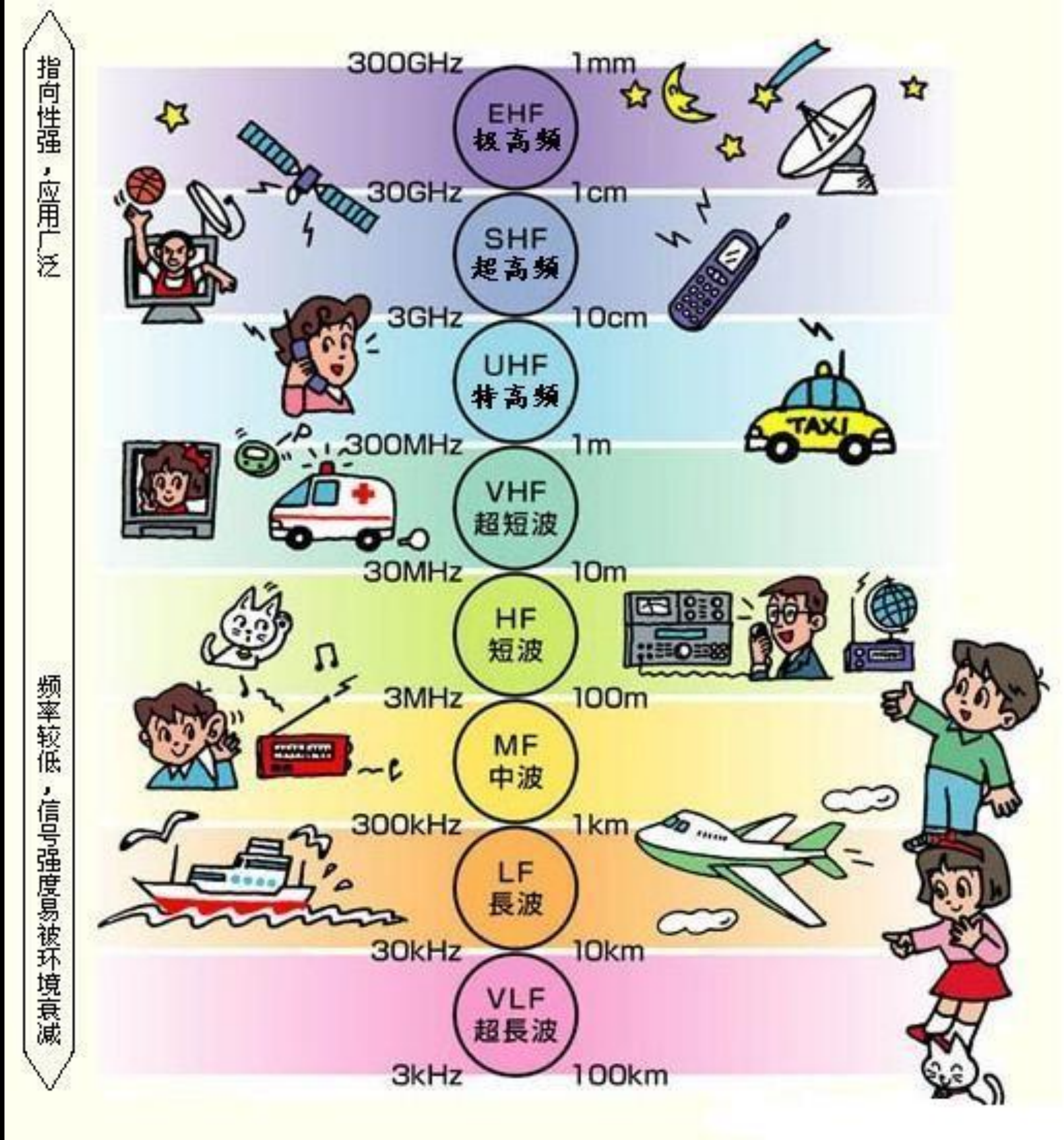


$$c = f\lambda$$

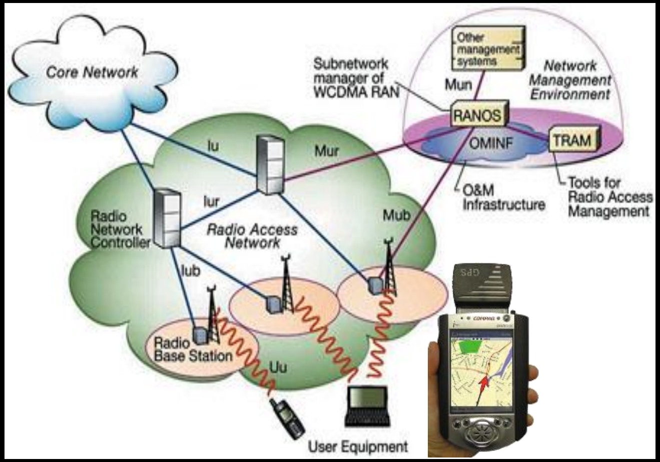
c：波速

f：频率

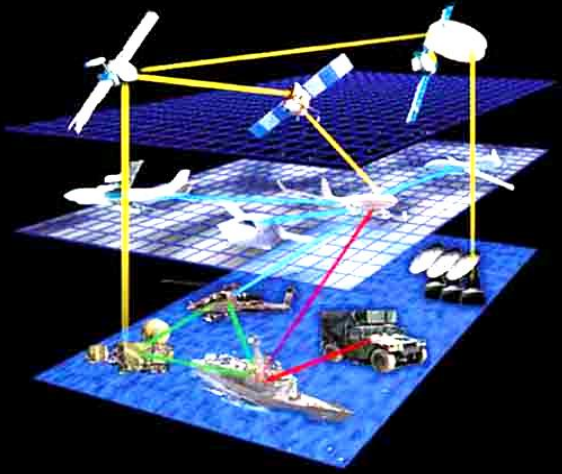
λ：波长



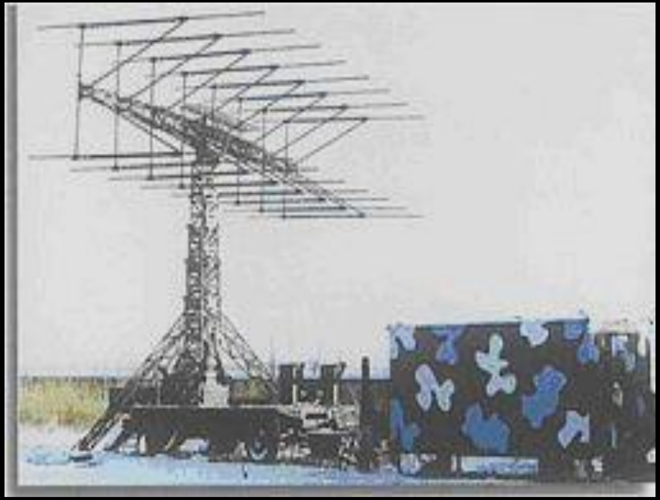
通信



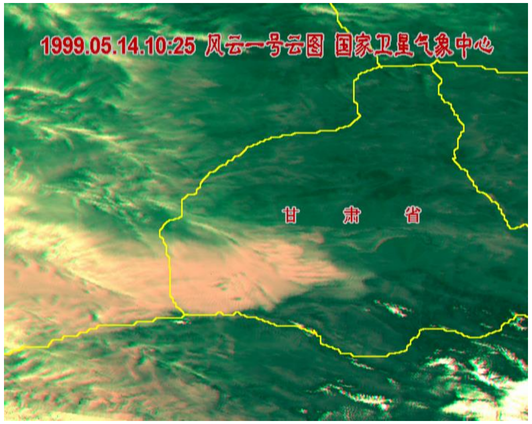
定位



雷达



监测沙尘暴灾害



遥感

本章主要内容

- 时变电磁场的波动方程
- 时变场的势函数与推迟势
- 能量守恒与转化—玻印亭**定理**
- 时变电磁场的时谐展开
- 定态（频）时变电磁场
- 平面电磁波的极化概念

§1 时变电磁场的势函数

1. 时变电磁场基本特点

- 场的方向与大小随时间变化——波动；
- 场的叠加既有方向叠加，还有波动影响——干涉；
- 介质特性时变，不同频率波的速度不同——色散；

2. 理想介质空间电磁波方程

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = \mu \dfrac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\left(\dfrac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon}\right) \\ \nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \end{cases}$$

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 电磁波传播速度，与波源参考系运动无关！

3. 时变电磁场的势函数

通过势函数求解静态场--化简

时变电磁场能否引入势函数？

势函数满足的方程能否求解？

势函数求解时变场能否达到简化?

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \rightarrow \text{无散}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]=0$$

$$\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right] \rightarrow \text{无旋} \rightarrow \text{引入}\phi(\boldsymbol{r},t)$$

令： $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\nabla \phi(\boldsymbol{r},t)$$

$$\begin{cases}\text{磁矢势}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\\ \text{电标势}\phi(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)-\dfrac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\end{cases}$$

磁感应强度形式上只与磁矢势有关，但不能认为磁感应强度仅由磁矢势决定而与电标势无关。因为在时变情形下，电磁场相互激发，
而时变电场由磁矢势和电标势共同描述，使得时变磁场本质上与磁矢势和电标势都有联系。

4. 势函数的规范

磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 仅由旋度（$\boldsymbol{A}$的散度可任意）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

引入，<u>这使得势函数与场之间不唯一确定。</u>

例如：
$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\left[\boldsymbol{A}\pm\nabla\psi\right]=\nabla\times\boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\left[\phi\mp\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{A}\pm\nabla\psi\right]=-\nabla\phi'-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\phi\\ \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\Leftarrow\begin{bmatrix}\phi'\\ \boldsymbol{A}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi\mp\dfrac{\partial}{\partial t}\psi\\ \boldsymbol{A}\pm\nabla\psi\end{bmatrix}$$

为使电磁场与势函数之间唯一对应关系，须给磁矢势以明确约束条件规定，这种约束为势函数的规范。

① Coulomb规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0$

$$\rightarrow\left\{\begin{aligned}&\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon}\\&\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\phi]\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

② Lorentz 规范

对势函数辅以约束条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0$$

势函数满足的方程为：

$$\left.\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\\[2ex]\nabla^2\phi-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r},t)\end{cases}\right\}\text{D' Alembert方程}$$

5. 规范变换的不变性

每一种规范建立了势函数与时变电磁场之间的一一对应关系。因此同一电磁场可以有多种规范下所对应的势函数与之对应，如：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

不同规范下势函数能够描述同一电磁场。不同规范下的势函数之间必然存在某种相互变换关系

例：Lorentz 与 Coulomb规范

$$\left[\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]=0\leftrightarrow\left[\nabla\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t)\right]=0$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \phi\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\Leftarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}'\\ \phi'\end{bmatrix}\leftarrow$$

$$\nabla\cdot\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\psi\right]=\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=0$$

$$\rightarrow\nabla^2\psi=\varepsilon\mu\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

$$= -\nabla\left[\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{A} + \nabla\psi\right] = -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}'$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t) \\ \phi'(\boldsymbol{r},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) + \nabla\psi(\boldsymbol{r},t) \\ \phi(\boldsymbol{r},t) - \dfrac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \\ \phi(\boldsymbol{r},t) \end{bmatrix}$$

电磁场的势函数可以有多种规范，不同规范有不同的势函数，不同规范的势函数可通过变换关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}'(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{A}(\mathbf{r},t) + \nabla\psi(\mathbf{r},t) \\ \phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \dfrac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{cases}$$

实现相互之间的转换，称为规范变换。

重要结论：

不同规范的势函数描述同一物理场。规范变换要求：势函数描述的物理量及其遵循的规律应保持不变，称规范变换不变性

§2　推迟势–激励影响滞后效应

1．达朗贝尔方程

时变电磁场为不同初始条件和边界条件下

$$\begin{cases}\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\mu \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\\ \nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r},t)\end{cases}$$

达朗贝尔方程的求解

为强化对波动物理的理解，仅就无界空间波动方程特例的解及其意义进行讨论

$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi(\mathbf{r},t)-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-\dfrac{1}{\varepsilon}\rho(\mathbf{r},t) \\
\lim\limits_{r\to\infty}\phi(\mathbf{r},t)=0 \quad , \quad \phi(\mathbf{r},0)=\dfrac{\partial\phi(\mathbf{r},0)}{\partial t}=0
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\mathbf{r},\omega) \; e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \\ \tilde{\phi}(\mathbf{r},\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r},t) \; e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega) \; e^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \\ \tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r},t) \; e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\nabla^2 \tilde{\phi}(\mathbf{r},\omega) + k^2 \tilde{\phi}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{1}{\varepsilon} \tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega) \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$
\begin{cases}
\tilde{\phi}(\boldsymbol{r},\omega)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint\limits_{\boldsymbol{K}} \hat{\phi}(\boldsymbol{K},\omega)\exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{K} \\
\hat{\phi}(\boldsymbol{K},\omega)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint\limits_{V} \tilde{\phi}(\boldsymbol{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\
\tilde{\rho}(\boldsymbol{r},\omega)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint\limits_{\boldsymbol{K}} \hat{\rho}(\boldsymbol{K},\omega)\exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{K} \\
\hat{\rho}(\boldsymbol{K},\omega)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint\limits_{V} \tilde{\rho}(\boldsymbol{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}V
\end{cases}
$$

$$
-\mathrm{K}^2\hat{\phi}(\boldsymbol{K},\omega)+k^2\hat{\phi}(\boldsymbol{K},\omega)=-\frac{1}{\varepsilon}\hat{\rho}(\boldsymbol{K},\omega)
$$

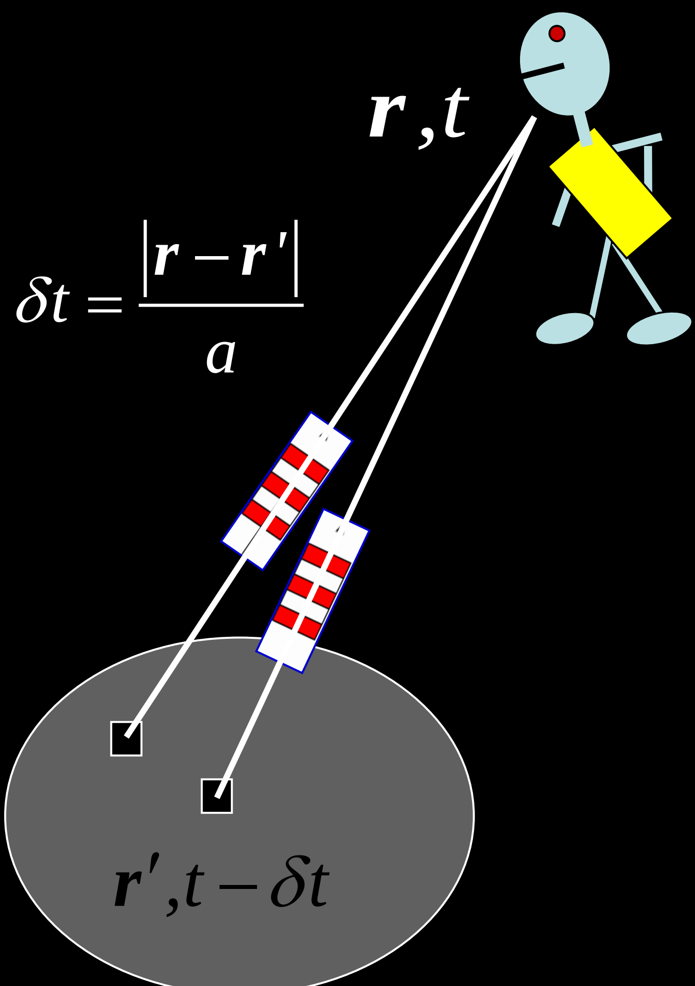
$$\hat{\phi}(\boldsymbol{K},\omega)=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\hat{\rho}(\boldsymbol{K},\omega)}{K^2-k^2}$$

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon}\iiint_K\frac{\exp[-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{K^2-k^2}\iiint_V\tilde{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}\boldsymbol{K}$$

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\tilde{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\quad e^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\tilde{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)e^{\mathrm{j}\omega\left[t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right]}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho\left(\boldsymbol{r}',\quad t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)\quad,\quad a=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$



$$\delta t=\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$$

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

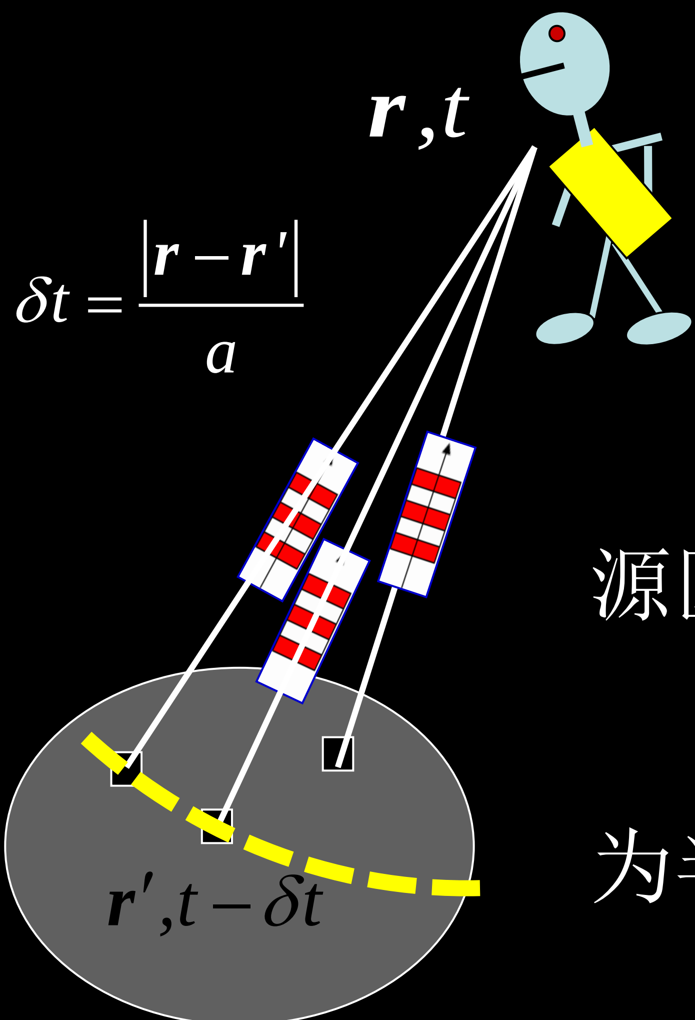
1) 源的影响以有限速度传播

$\boldsymbol{r}'$的源对 $\boldsymbol{r}$（观测点）、t（观测时刻）的影响必须是比t早的时刻

$$t'=t-\Delta t=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}$$

的源之影响才能在t时刻传到 $\boldsymbol{r}$点

$$\delta t=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a}$$



$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V'$$

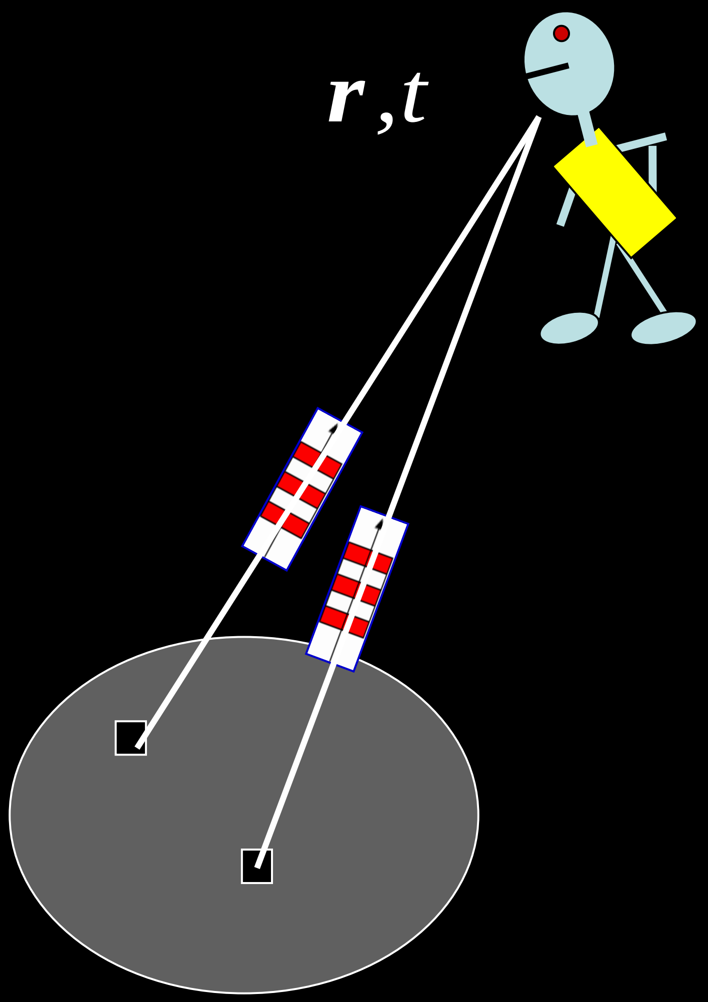
2) 源对观测点的影响

源区内对 $[\mathbf{r},t]$ 有影响的源来自以

$$\Delta ta=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

为半径的球体内部源贡献之叠加

3）时变与非时变激励与响应之比较

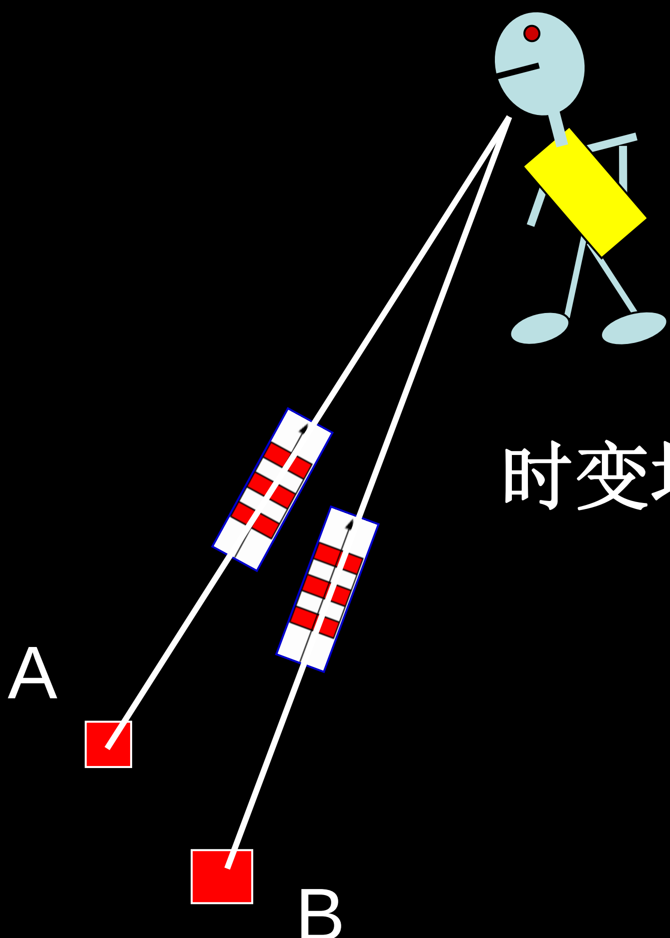


时变：激励的影响有滞后效应

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

非时变：激励的影响无滞后效应

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$



静态场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\left[\frac{Q_A}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A|}+\frac{Q_B}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B|}\right]$$

时变场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\left[\frac{Q_A\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A|}+\frac{Q_B\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_B|}\right]$$

§3 时变电磁场的能量

1. 玻印廷定理

静态电磁场由电荷或电流的空间分布唯一确定

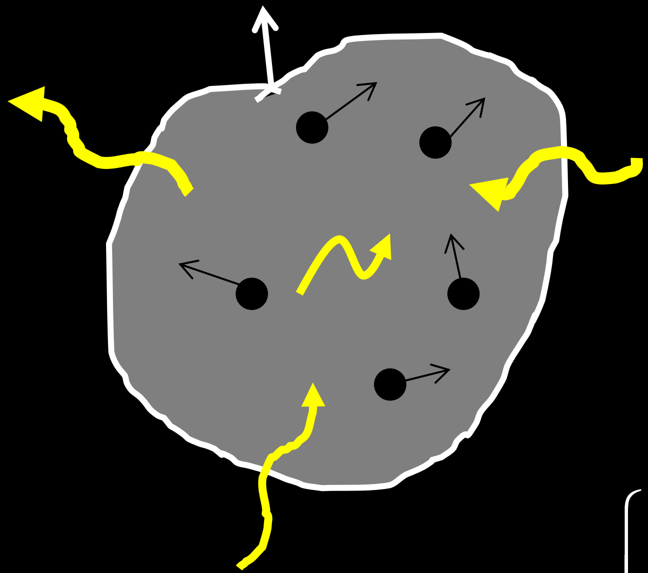
其能量也由场空间分布唯一确定，不随时间而变

时变电磁场可脱离电荷或电流在空间存在，

在空间以波动形式传播。

时变电磁场能量以何种形式存在于空间 ？

时变电磁场能量以何种方式在空间传播？



- 场的波动特点，闭合区域内外部有能量的交换
- 带电粒子与电磁场之间发生能量的交换

$$
\text{记}\ :\begin{cases}
w(\boldsymbol{r},t):\text{场能量密度函数}\\
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t):\text{场能量流密度矢量}\\
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t):\text{场对电荷作用力密度矢量}\\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t):\text{电荷运动速度矢量}
\end{cases}
$$

能量守恒定律：

通过区域界面进入区域内电磁能量	=	区域内电磁场能的增量	+	区域内场对荷电系统所作功
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$

$$-\oiint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_V \frac{\partial w(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V + \iiint_V \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t)\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

或：$-\nabla\cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{\partial}{\partial t}w(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$

玻印廷定理：

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=\left(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}\cdot\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$$

$$=\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{H}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)$$

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}\right)=\boldsymbol{G}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{F}\right)-\boldsymbol{F}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{G}\right)$$

$$-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\left[\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right]+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)=\left[\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial\boldsymbol{t}}\right]+\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\underbrace{-\oint\!\!\!\oint_S\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}_{\text{通过区域界面进入电磁能量}}=\underbrace{\iiint_V\left[\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial\boldsymbol{t}}\right]\mathrm{d}V}_{\text{区域内电磁场能量的改变量}}+\underbrace{\iiint_V\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}V}_{\text{区域内场对带电粒子所做功}}$$

表示闭合区域内电磁场能量守恒

和转化的关系式——玻印廷定理

比较得到 ： $\begin{cases} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}w(\boldsymbol{r},\ t)=\left[\boldsymbol{H}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{E}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial\boldsymbol{t}}\right] \end{cases}$

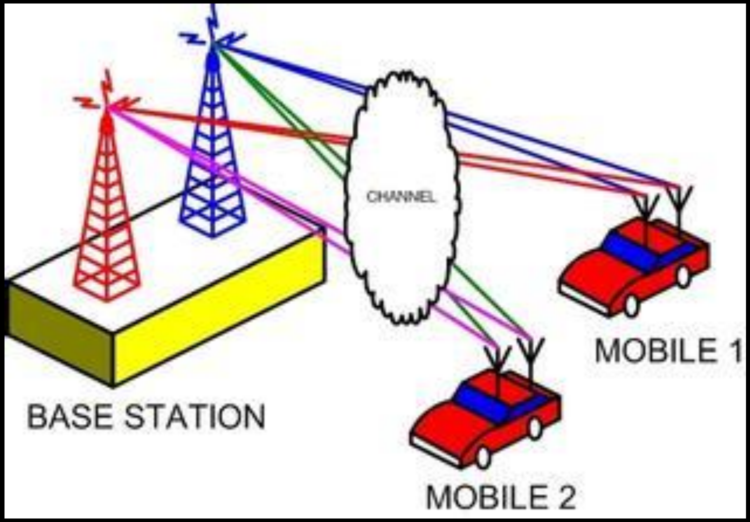
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ ： 场能流密度矢量 $\rightarrow$ 能流通过场传输

对于线性均匀各向同性介质

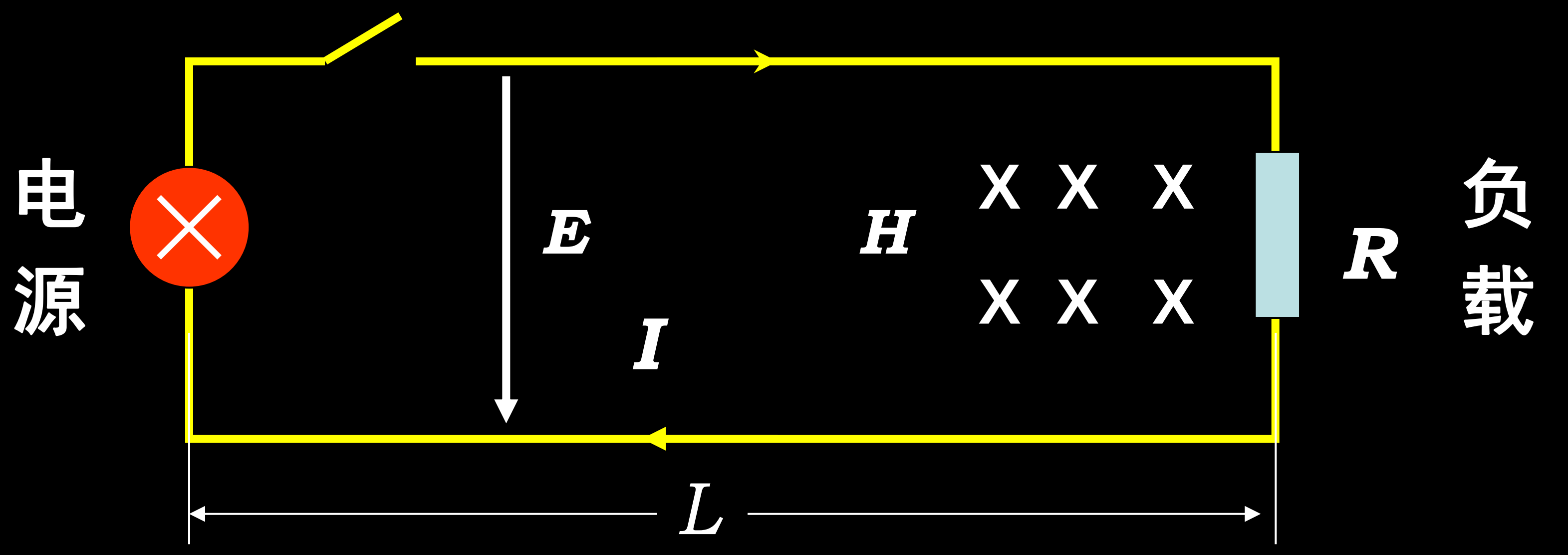
$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rightarrow w(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\left[\mu\boldsymbol{H}^{2}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{2}\right]$$

2. 能量的传输

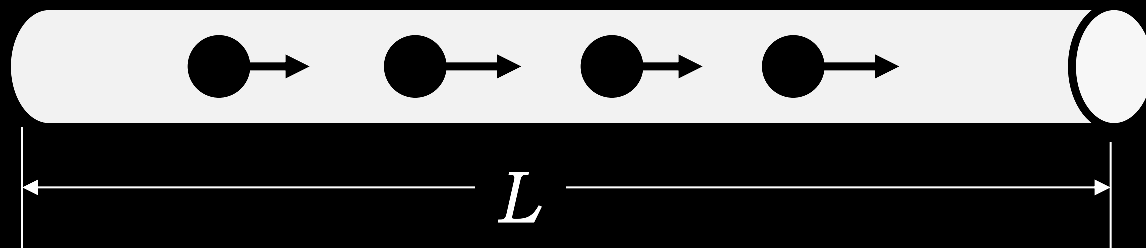
玻印廷定理给出了时变电磁场能量传播的一个新图像，电磁场能量通过电磁场传播。对于广播电视、无线通信和雷达等领域是容易理解。



电能或低频信号的传输：



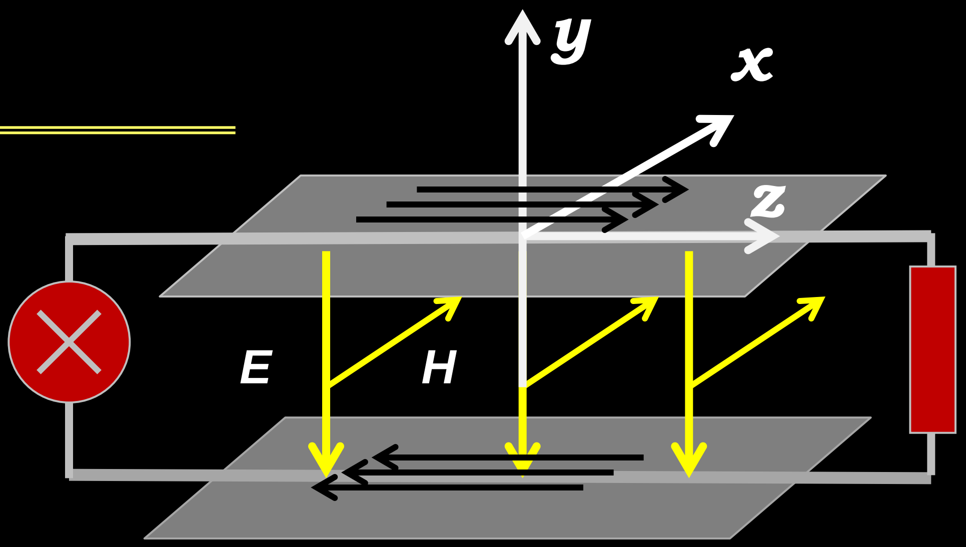
双导线引导，造成能量通过导线传输的假象



场传播所需时间：$\delta t = \dfrac{L}{c}$

金属中电子运动速度：$v \to 6\times 10^{-5}\,\mathrm{cm}$

如能量通过导线内传输，常温下电荷由电源端到负载端所需时间是场传播时间 δt 的亿万倍



$$\boldsymbol{E}=-\frac{U}{d}\hat{y},\quad \boldsymbol{H}=\frac{I}{a}\hat{x}$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{UI}{ad}\hat{z}$$

$$P=\iint_s \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{UI}{ad}\int_0^a\int_0^d \mathrm{d}x\mathrm{d}y=UI$$

导线、同轴线等传输系统的作用？是否可以取消？

§4　时变场唯一性定理

1. 时变电磁场唯一性定理

在闭合区域Ω内

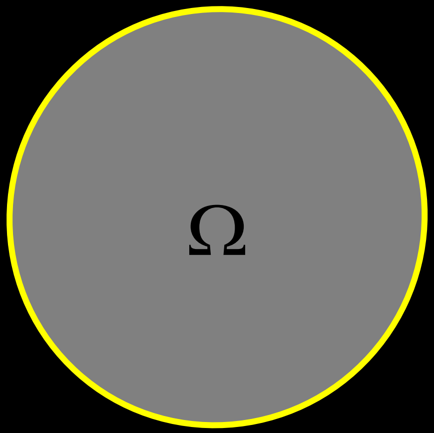
1）$t = t_0$ 时刻,电场和磁场已知；

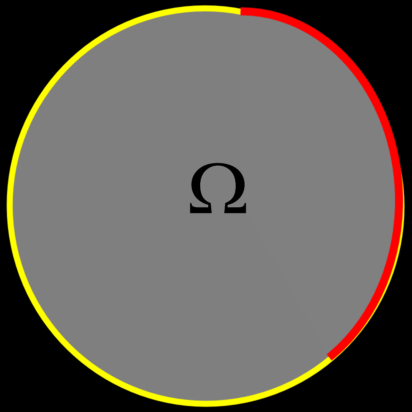
2）$t \geq t_0$ 任意时刻,区域边界电场或磁场的切向分量（或部分区域边界上电场切向；其余边界上磁场切向分量）已知；则在区域Ω上任意时刻存在唯一的电磁场解。

$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t_0\right)\text{ ， }\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t_0\right)\right]$$

$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)\text{ 或： }\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right]\Big|_{\Omega\text{边界}}（t \geq t_0）$$

$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)\text{ ， }\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right]（t \geq t_0）\text{ 有唯一解}$$





$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t_0\right)\text{ ， }\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t_0\right)\right]$$

$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right]\Big|_{\text{部分边界}}\text{ ， }\left[\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right]\Big|_{\text{其余边界}}（t \geq t_0）$$

$$\left[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r},t\right)\text{ ， }\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right]（t \geq t_0）\text{ 有唯一解}$$

2. 唯一性定理的证明

仍用反证方法，假设有两组解

$$\left[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)\ ,\ \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r},t)\right] \qquad \left[\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)\ ,\ \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r},t)\right]$$

应用玻印廷定理：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r},t)$$

在区域的边界上：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$均为零

应用玻印廷定理：

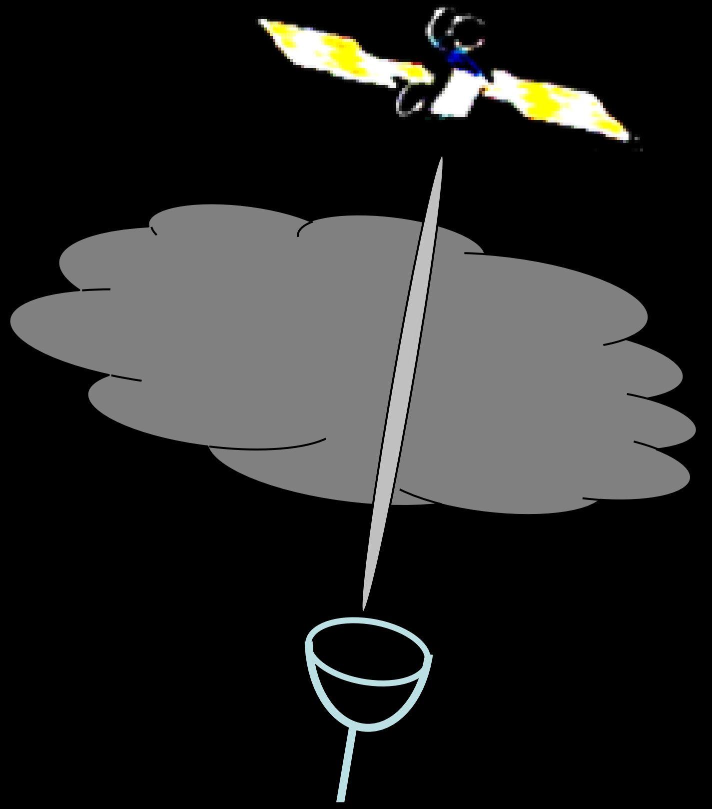
$$-\oint\!\!\!\!\oint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_V \frac{\partial w(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V + \iiint_V \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t)\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\left[\mu \boldsymbol{H}^2 + \varepsilon \boldsymbol{E}^2\right]\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\int_V \sigma \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}V$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) \le 0 \rightarrow W(t) = 0$$

§5 时谐电磁场

1. 时变场求解的问题



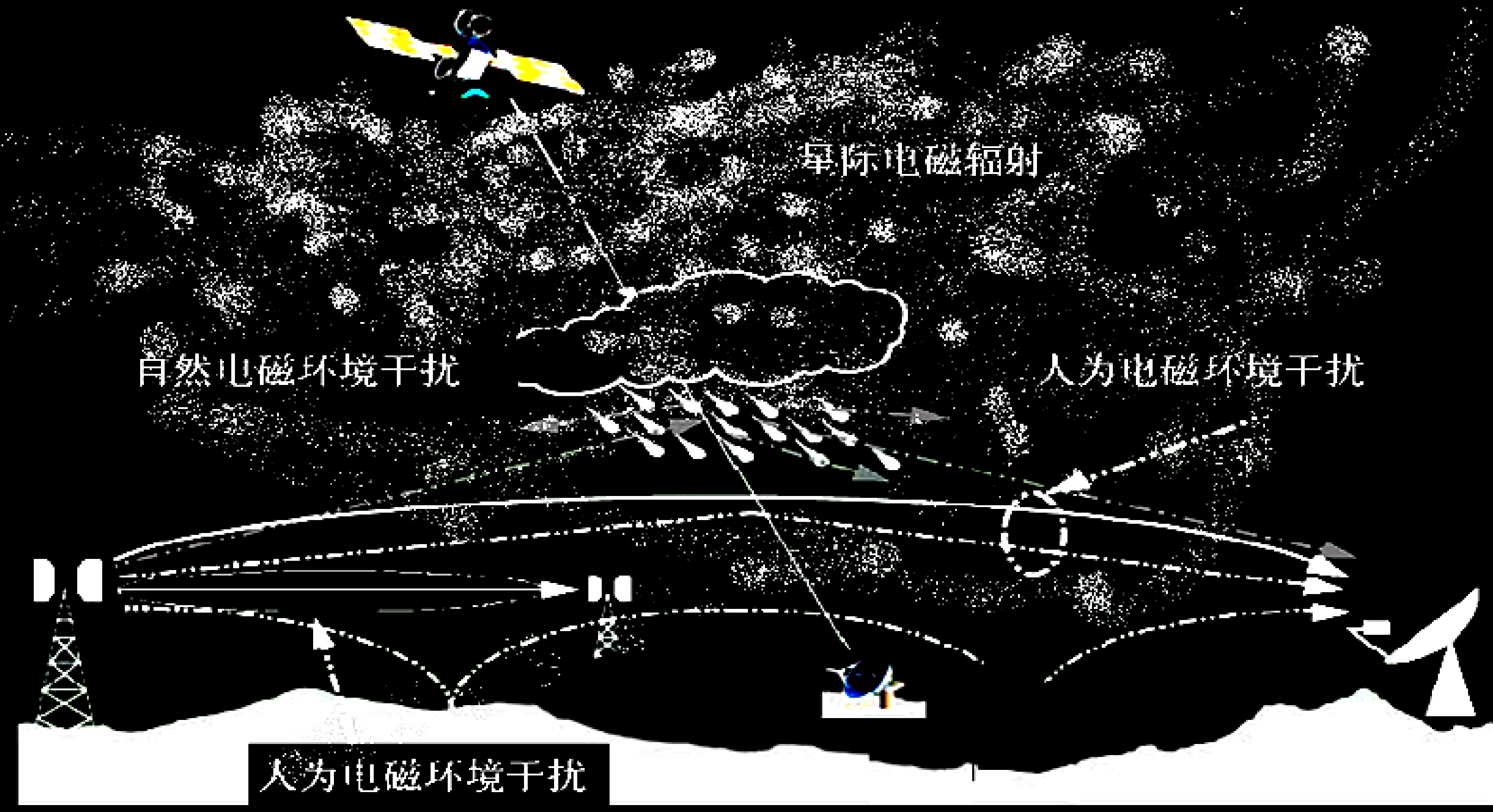
唯一性定理：

电磁场的初始状态

区域边界电磁场状态

时变电磁场可解且唯一

问题一： 时变电磁场的初始状态无法确知！



问题二：电磁场的边界状态无法确知！

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r},t) \qquad \mu = \mu(\mathbf{r},t)$$

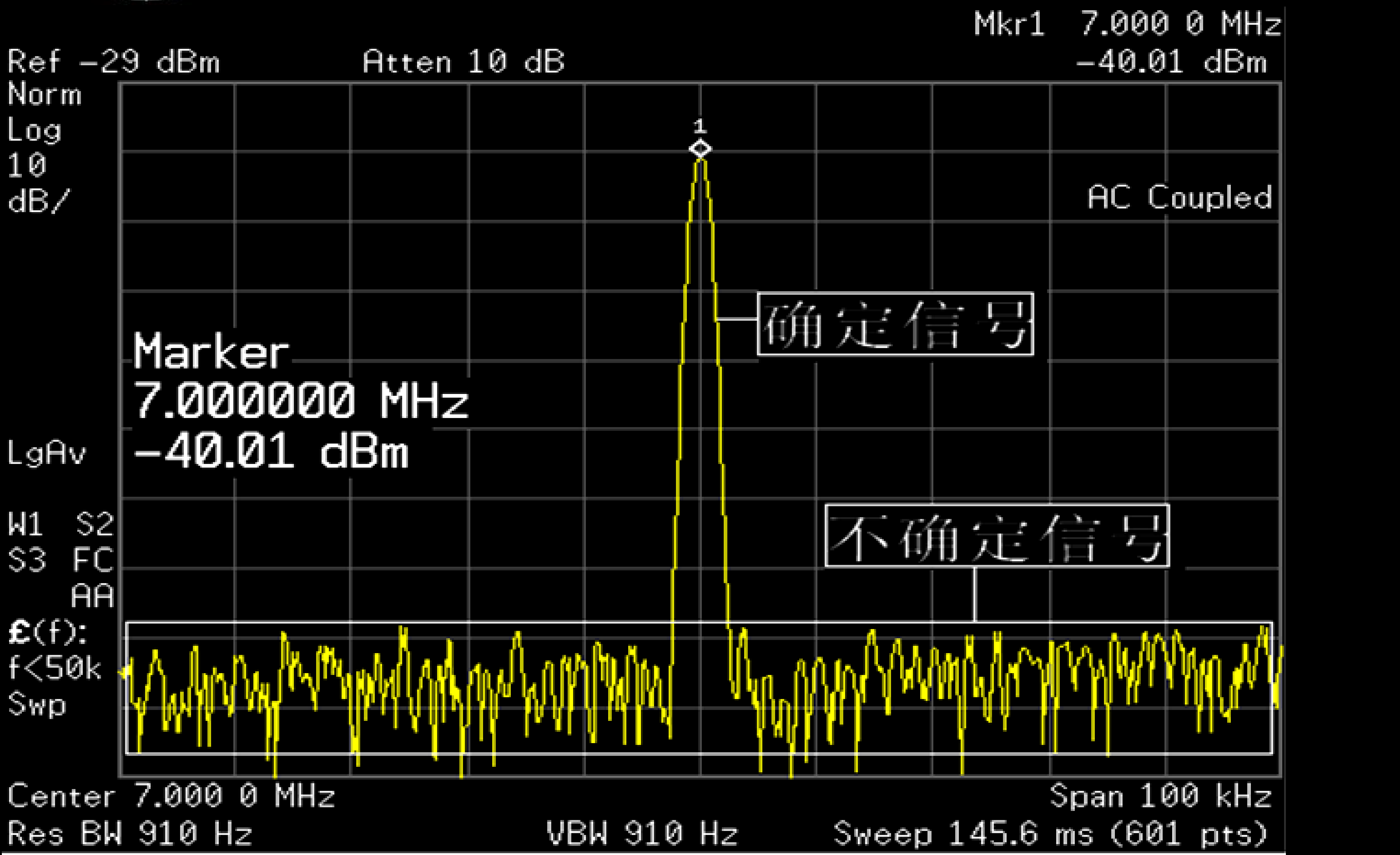
☆ 场满足的波动方程或势函数方程是以介质的电磁特性参数为时不变情形下得到的。

☆ 一般介质电磁特性参数不仅是空间的函数，同时还是时间的函数。

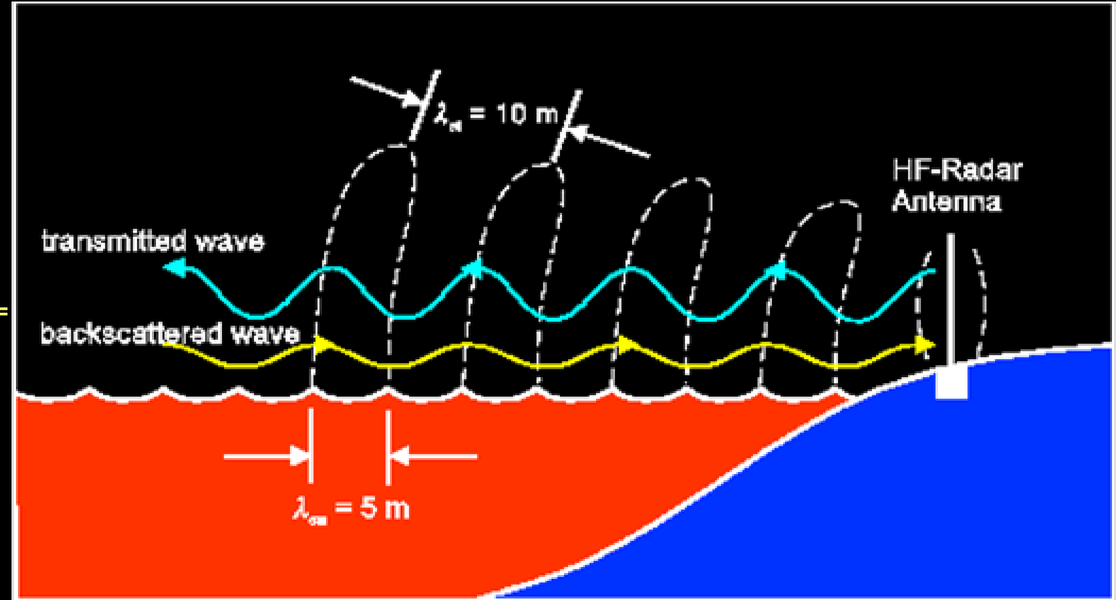
☆ 时变场和势函数所满足的方程非常复杂。

问题三：介质特性参数一般是时间(频率)和空间的函数，时变电磁场方程非常复杂

2. 时变电磁场信号的基本组成



地波雷达原理示意图

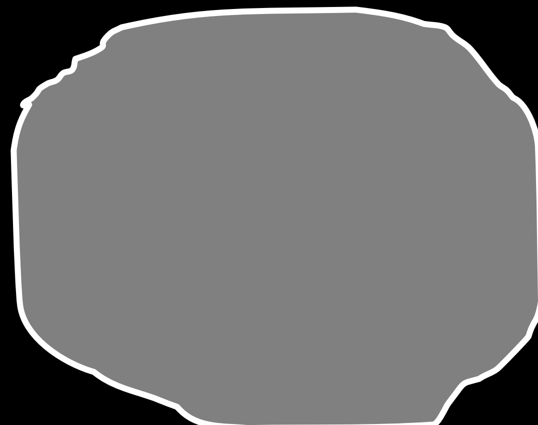

$\lambda_{el} = 10$ m
HF-Radar Antenna
transmitted wave
backscattered wave
$\lambda_{sw} = 5$ m


多普勒谱(2004-4-11 11:05:25)
雷达回波信号
确定性信号
噪声分布
5
-8.69
-22.59
-36.29
-49.99
-0.76593
-0.51062
-0.25531
2.7429E-8
0.25531
0.51062
0.76593

场的确定边界状态

场的确定激励源

场的确定初始状态



场的边界随机状态

场的随机激励源

场的随机初始状态

时变电磁场系统解由两个部分组成：

确定性条件 + 确定激励源产生的电磁场

—— 确定性电磁场解

不确定（初始和边界）条件 + 随机热运动辐射

—— 随机特点电磁场解（宇宙+环境+热）噪声

确定性问题，电磁场理论

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \text{确定性边界条件下} \\ \text{电磁场或波问题的解} \end{pmatrix}}$$

$$+ \boxed{\begin{pmatrix} \text{不能确定求解部分} \\ \text{即随机部分（噪声）} \end{pmatrix}}$$

不确定性问题，随机过程

确定性时变电磁场问题

→ 介质特性参数可能是时间的函数—与频率有关

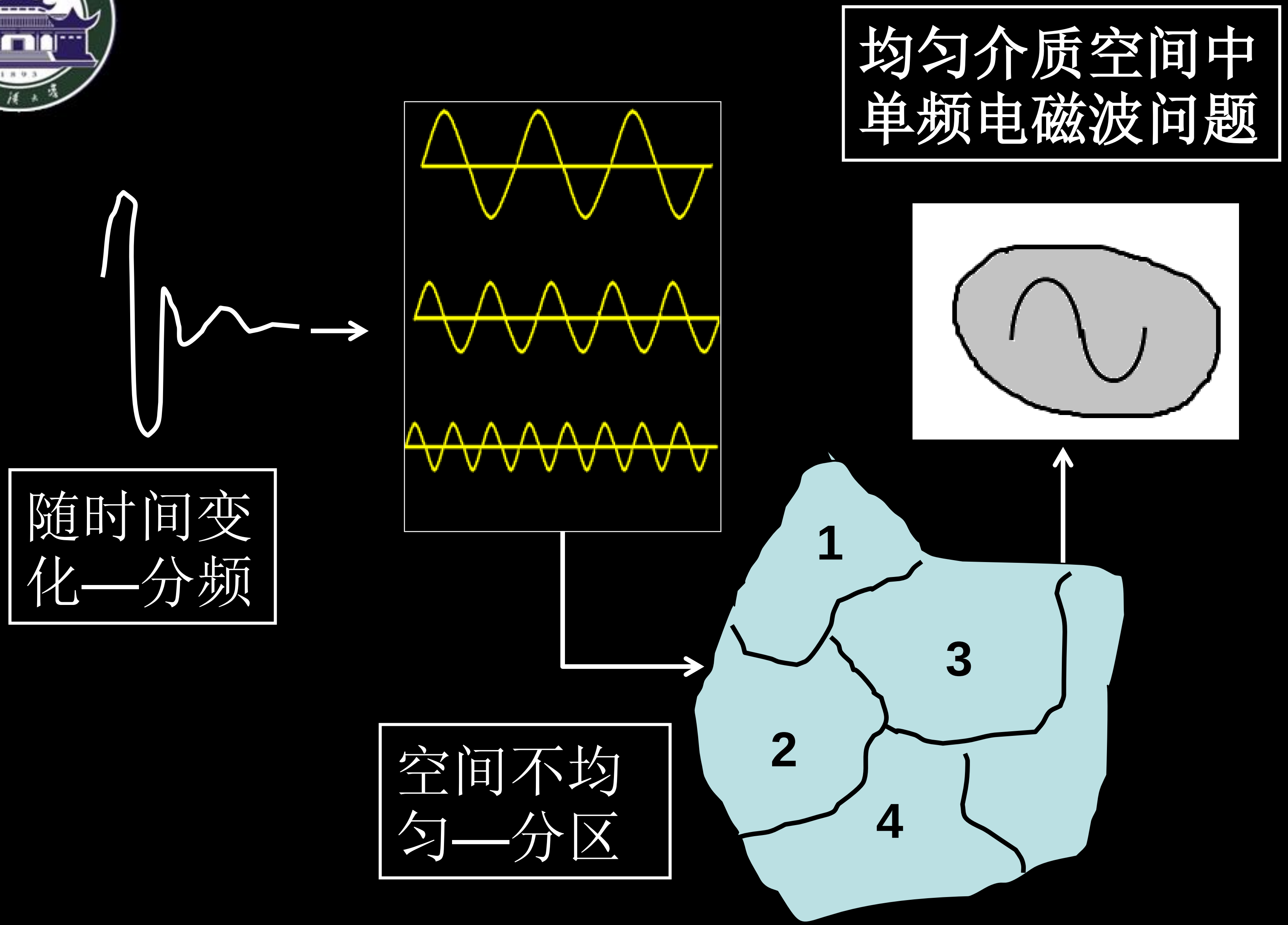
→ 时域分频 → 单频波动

→ 介质特性参数可能是坐标的函数—空间不均匀

→ 空域分区 → 空域均匀

→ 时变电磁场最基本问题

→ 线性各向同性均匀介质空间中单频电磁波


均匀介质空间中
单频电磁波问题
随时间变
化—分频
空间不均
匀—分区
1
2
3
4

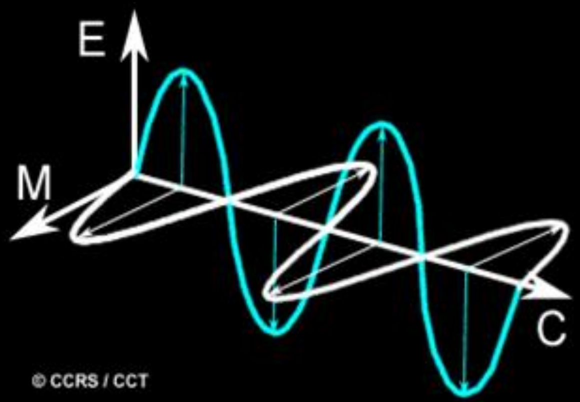
3. 简谐（定态）电磁场

☆ 谐变电磁场

随时间作简谐变化的电磁场

或称定态电磁场，其一般形式是：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\begin{pmatrix} +\hat{e}_x E_x(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\varphi_x) \\ +\hat{e}_y E_y(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\varphi_y) \\ +\hat{e}_z E_z(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\varphi_z) \end{pmatrix}$$



$\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$为初相位，$\omega=2\pi f$ 为圆频率

谐变电磁场为单一频率随时间作正（或余）弦变化的电磁场，借助相量可以表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\left[\hat{e}_x\dot{E}_x(\boldsymbol{r})+\hat{e}_y\dot{E}_y(\boldsymbol{r})+\hat{e}_z\dot{E}_z(\boldsymbol{r})\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

其中： $\dot{E}_x(\boldsymbol{r})=E_x(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\varphi_x}$ $\dot{E}_y(\boldsymbol{r})=E_y(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\varphi_y}$

$\dot{E}_z(\boldsymbol{r})=E_z(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\varphi_z}$

☆ 谐变电磁场中的介质特性

实验证明，谐变电磁场中线性均匀各向同性介质的极化强度、磁化强度和传导电流皆为谐变量，即：

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\varepsilon_0 \chi_e e^{\mathrm{j}\delta_e} \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\chi_m e^{\mathrm{j}\delta_m} \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\sigma \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}\right] \end{cases}$$

对于某个确定频率ω

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\omega)\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \\ \dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) = \mu(\omega)\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) \\ \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\omega)\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

，$\varepsilon(\omega)$ $\mu(\omega)$ $\sigma(\omega)$ 为常量

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\dot{F}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\dot{F}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ \displaystyle\int \mathrm{Re}\left[\dot{F}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\dot{F}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi \to \mathrm{j}\omega\phi \\ \displaystyle\int \phi\mathrm{d}t \to \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\phi \end{cases}$$

☆　谐变电磁场的Maxwell方程

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} = \dot{\rho}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} \\
\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} = 0 \\
\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} = -\mathrm{j}\omega\mu(\omega) \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} \\
\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} = \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{j}\omega\varepsilon(\omega) \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) e^{\mathrm{j}\omega t}
\end{cases}
$$

约定：$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{j\omega t} \rightarrow \begin{cases}
\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu(\omega) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \\
\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\omega\varepsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})
\end{cases}$

☆ 谐变电磁场的波动方程

在谐变电磁场中，介质的电磁特性参数

$\varepsilon(\omega)$、$\mu(\omega)$、σ 为常量

场量满足的波动方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}\mu(\omega)\omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \nabla\left(\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon(\omega)}\right) \\ \nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

洛伦茨规范条件势函数的波动方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\dfrac{\nabla[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})]}{k^2(\omega)} - \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega\phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\begin{cases} \nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu(\omega)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \\ \nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\phi(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)}\rho(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

谐变电磁场问题变为求 Helmholtz方程

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}) + k^2 F(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

在相应边界条件下的解。不需要初始条件

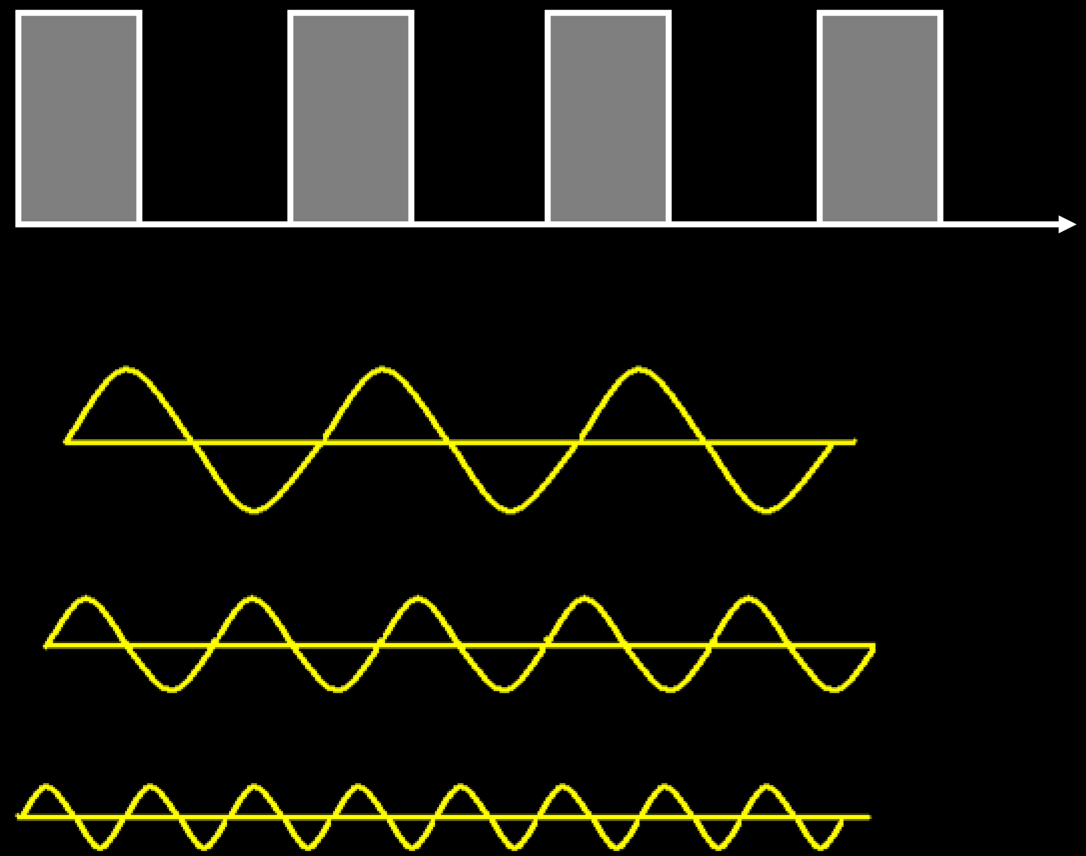
因为谐变场为无穷远过去到无穷远未来随时间作简谐变化，不存在初始状态。因为场随时间变化的规律已由谐变（时谐）所描述，因此只需要求场关于空间的分布。

4. 任意时变电磁场的时谐展开

按照 Fourier变换的观点，任何时变电磁场信号，可以表示为不同频率、不同振幅和不同初始相位的谐变电磁场信号的叠加

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \end{cases}$$

电磁波信号



信号的分解

其中：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}$　$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{\mathrm{j}\omega t}$ 为谐变电磁场

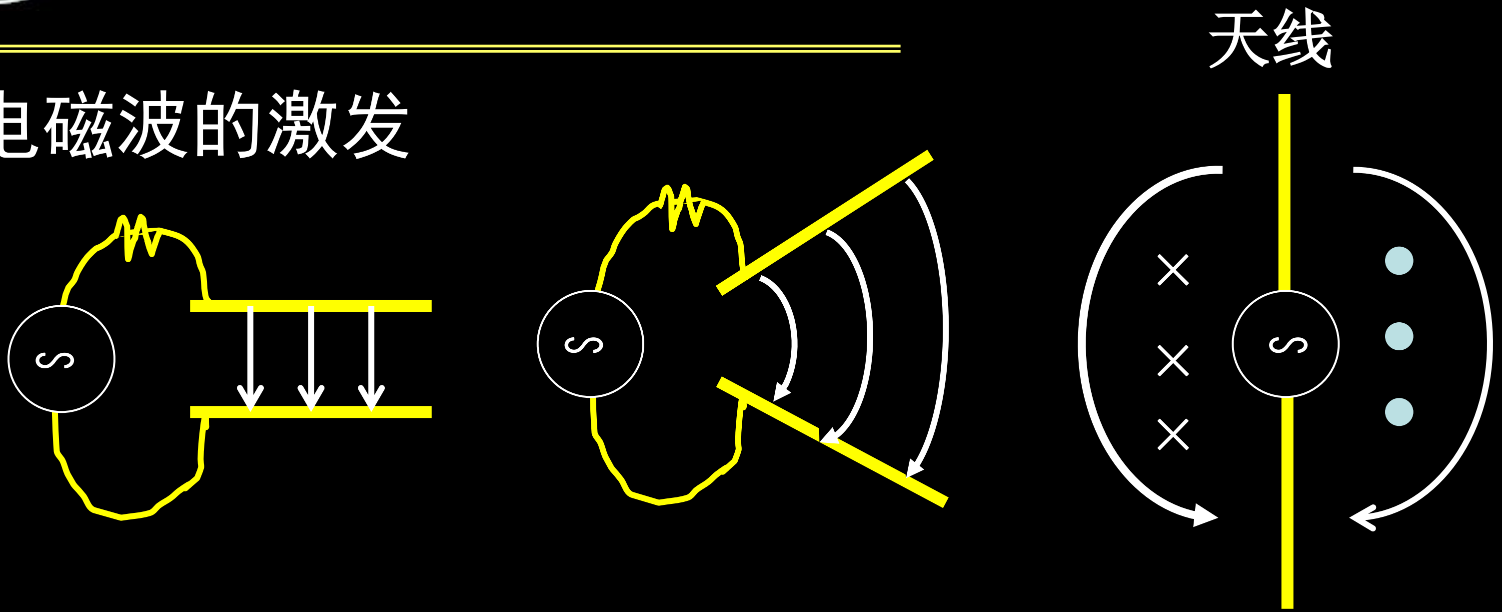
$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}\mu(\omega)\omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \nabla\left(\dfrac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon(\omega)}\right) \\ \nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

方程的解,其中

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} = \frac{2\pi f}{v(\omega)} = \frac{2\pi}{\lambda(\omega)}$$

§6 均匀平面电磁波

1. 电磁波的激发



2. 定态电磁波方程

无源介质空间中，定态电磁场满足如下关系

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{j}\mu(\omega)\omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon(\omega)}\right) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

电磁场的六个分量不是完全独立的。所以在无源空间区域上电磁场只有两个独立的变量。

3. 均匀平面电磁波及特性

设电场仅为坐标变量 z 的函数，其方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\boldsymbol{E}(z)+k^2\boldsymbol{E}(z)=0$$

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{A}e^{-\mathrm{j}kz}+\boldsymbol{B}e^{\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{H}(z)=-\mathrm{j}\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{\omega\mu}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\left[\boldsymbol{A}e^{-\mathrm{j}kz}-\boldsymbol{B}e^{\mathrm{j}kz}\right]$$

第一项代表沿 Z 轴正向传播的电磁波?

第二项代表沿 Z 轴负向传播的电磁波?

沿 Z 的正向传播的波： $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_0$ ，$\boldsymbol{B}=0$

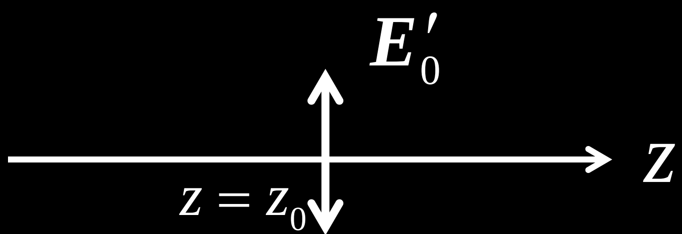
$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}kz},\quad \boldsymbol{H}(z)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}(z)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}kz}$$

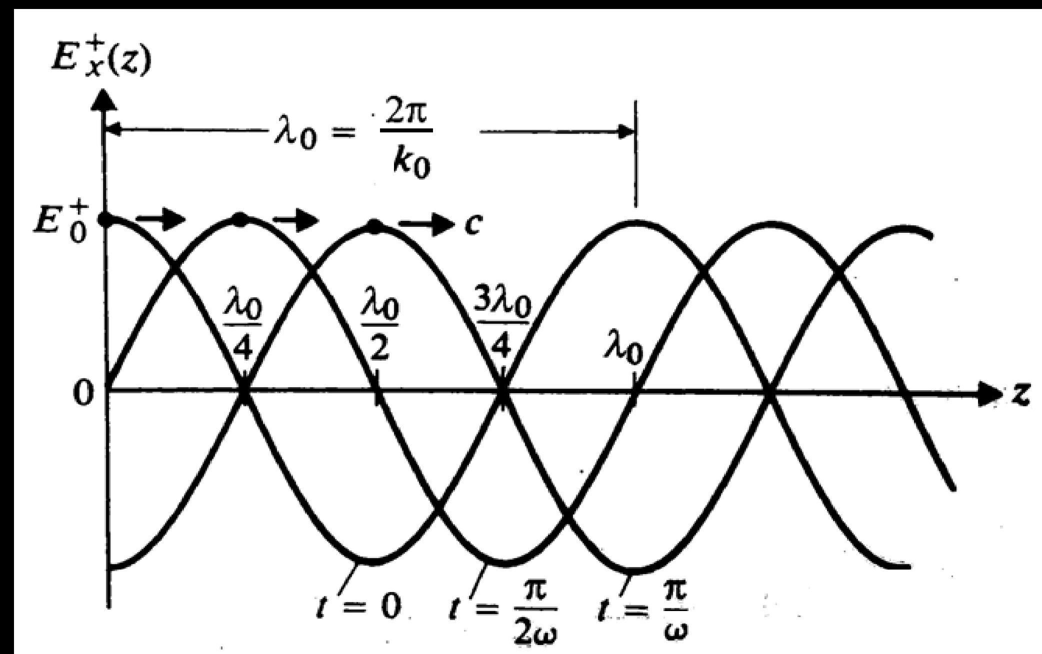
将时谐因子写完整，得到沿 z 轴正向传播电磁波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0\exp\left[-\mathrm{j}(kz-\omega t)\right]\\ \boldsymbol{H}(z,t)=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}_0\exp\left[-\mathrm{j}(kz-\omega t)\right]\end{cases}$$

相位项

$$z = z_0 \quad ; \quad \boldsymbol{E}\left(z_0, t\right) = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[-\mathrm{j}kz_0\right]\exp\left[-\mathrm{j}\omega t\right] = \boldsymbol{E}_0' \exp\left[\mathrm{j}\omega t\right]$$





$$t = t_0 \quad ; \quad \boldsymbol{E}\left(z, t_0\right) = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[\mathrm{j}\omega t_0\right]\exp\left[-\mathrm{j}kz\right] = \boldsymbol{E}_0'' \exp\left[-\mathrm{j}kz\right]$$

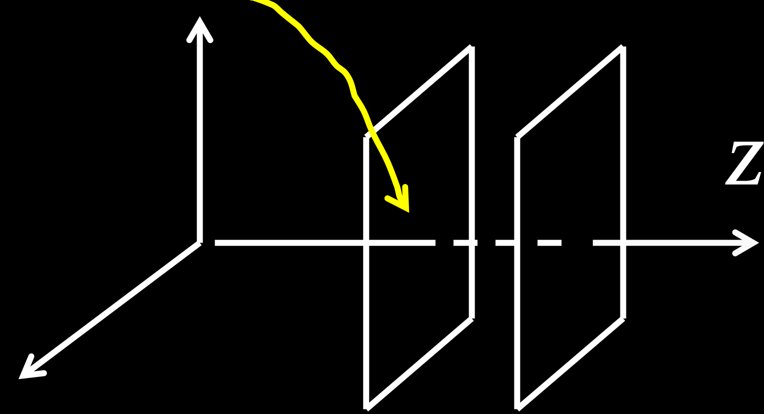
沿 Z 的正向传播的波：

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}kz},\quad \boldsymbol{H}(z)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}(z)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}kz}$$

空间等相位面（空间相位等于常数的曲面）方程为

$$kz=\mathrm{c}$$

为平面，故称其为平面电磁波。

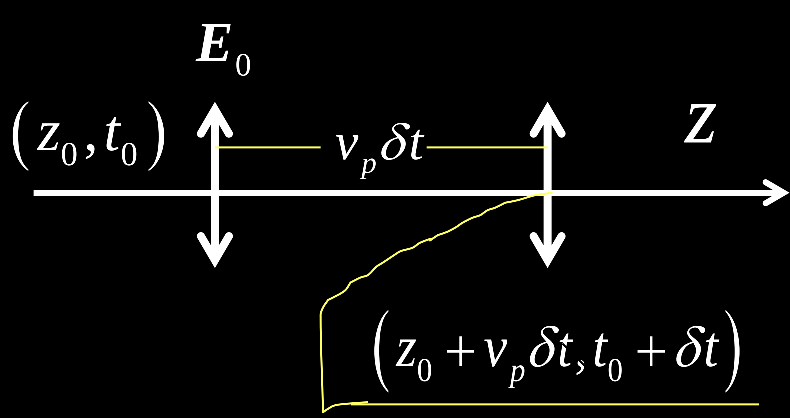


$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0\exp\left[-\mathrm{j}(kz-\omega t)\right] \\
\boldsymbol{H}(z,t)=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z}\times\boldsymbol{E}_0\exp\left[-\mathrm{j}(kz-\omega t)\right]
\end{cases}
$$
；均匀平面电磁波

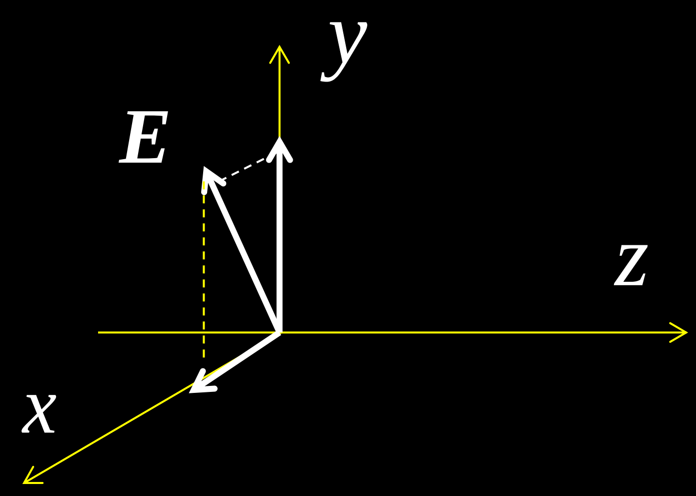
且电磁波在传播中振幅保持不变，故称其为均匀平面波

等相位面在空间传播速度

$$
kz-\omega t=C \rightarrow v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}
$$



$$\begin{cases} \boldsymbol{H}(z,t) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\hat{z} \times \boldsymbol{E}(z,t) \\ \boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \, e^{-\mathrm{j}(kz-\omega t)} \end{cases}$$



用分量表示：

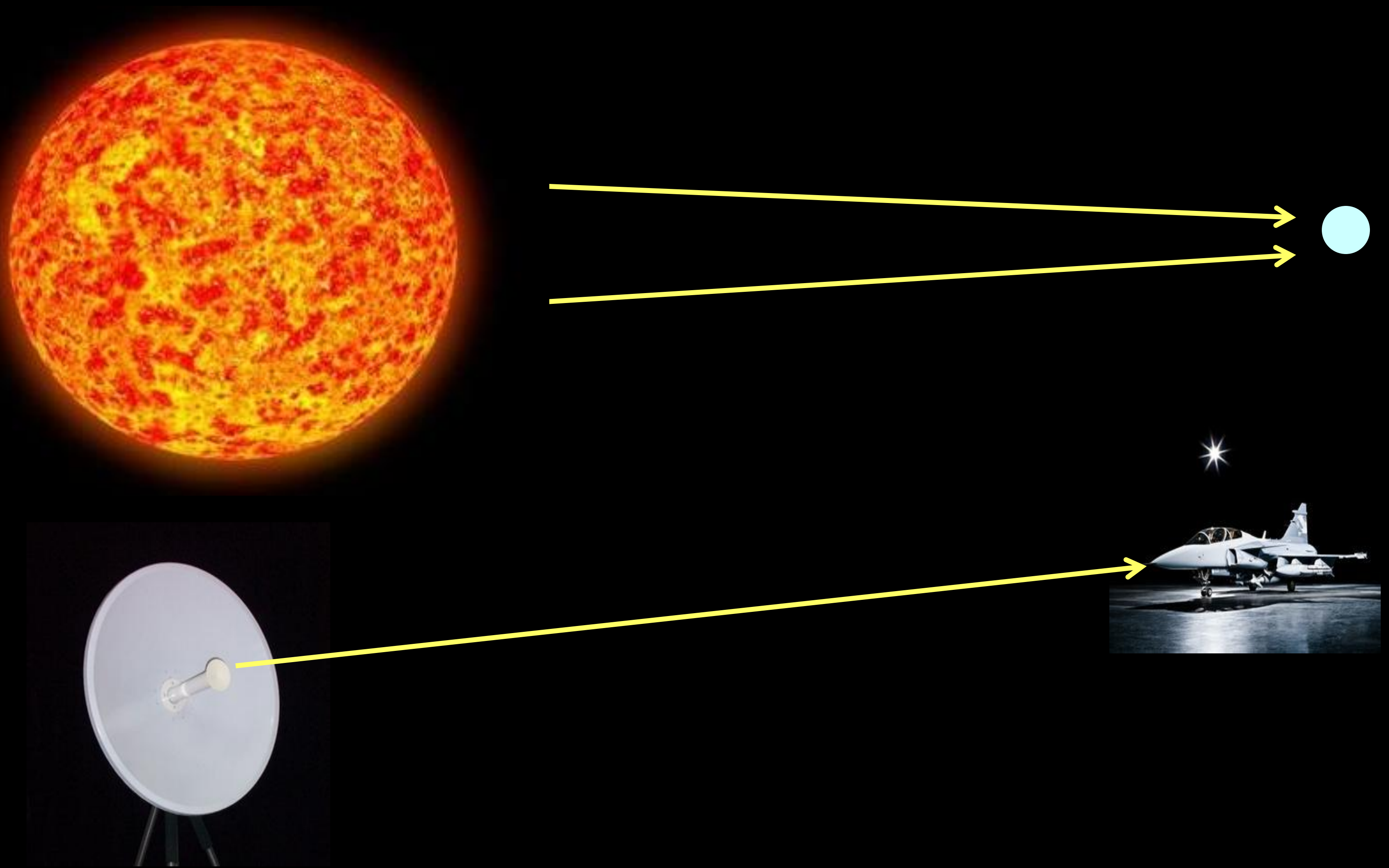
$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(z,t) = \left[\hat{e}_x E_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x} + \hat{e}_y E_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y}\right] \exp\left[\mathrm{j}(\omega t - kz)\right] \\ \boldsymbol{H}(z,t) = \left[\hat{e}_x H_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'_x} + \hat{e}_y H_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'_y}\right] \exp\left[\mathrm{j}(\omega t - kz)\right] \end{cases}$$

平面均匀电磁波的存在性讨论：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)\exp\left[-\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega)\exp\left[-\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k} \end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)\exp\left[-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right]$为均匀平面波，

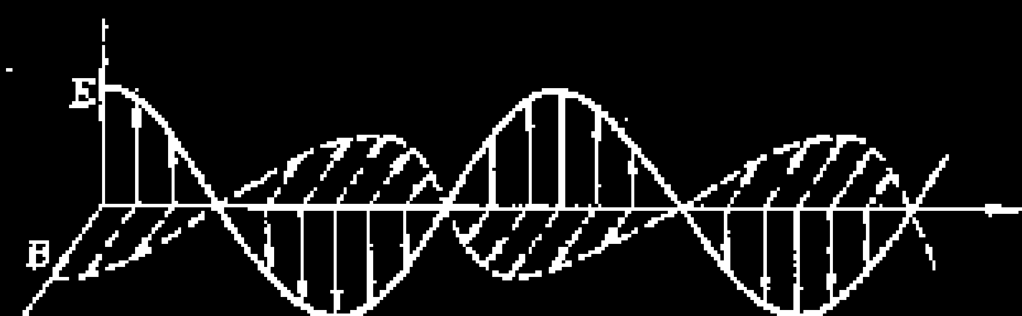
满足方程：$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$

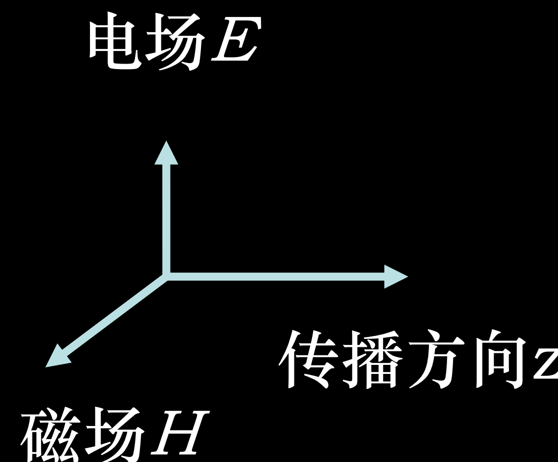


① 均匀平面电磁波为横电磁波（TEM波）

均匀平面电磁波的电场、磁场、传播方向相互垂直。在传播方向没有电磁场分量，称为横电磁波

$$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H} \perp \hat{z}\left(\text{传播方向}\right)$$

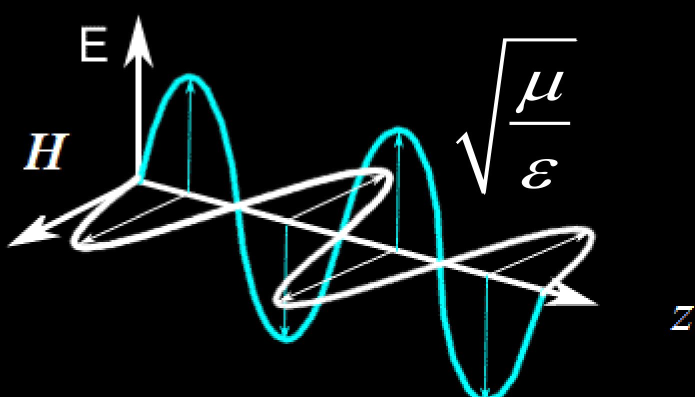




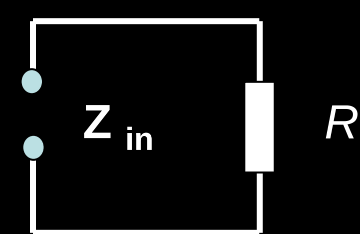
② 均匀平面电磁波电场和磁场振幅之比为常数

$$\eta=\frac{E(z)}{H(z)}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\rightarrow \text{具有阻抗量纲}$$

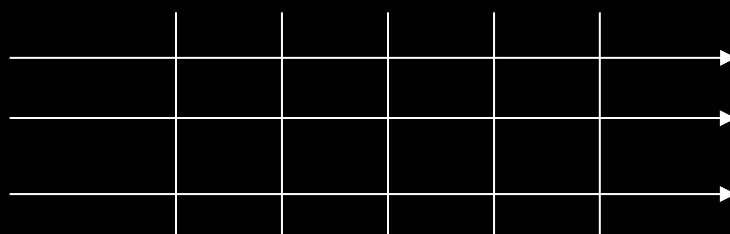
称为均匀平面电磁波的波——波阻抗。



$$\eta=\left|\frac{E(z)}{H(z)}\right| \longleftrightarrow$$



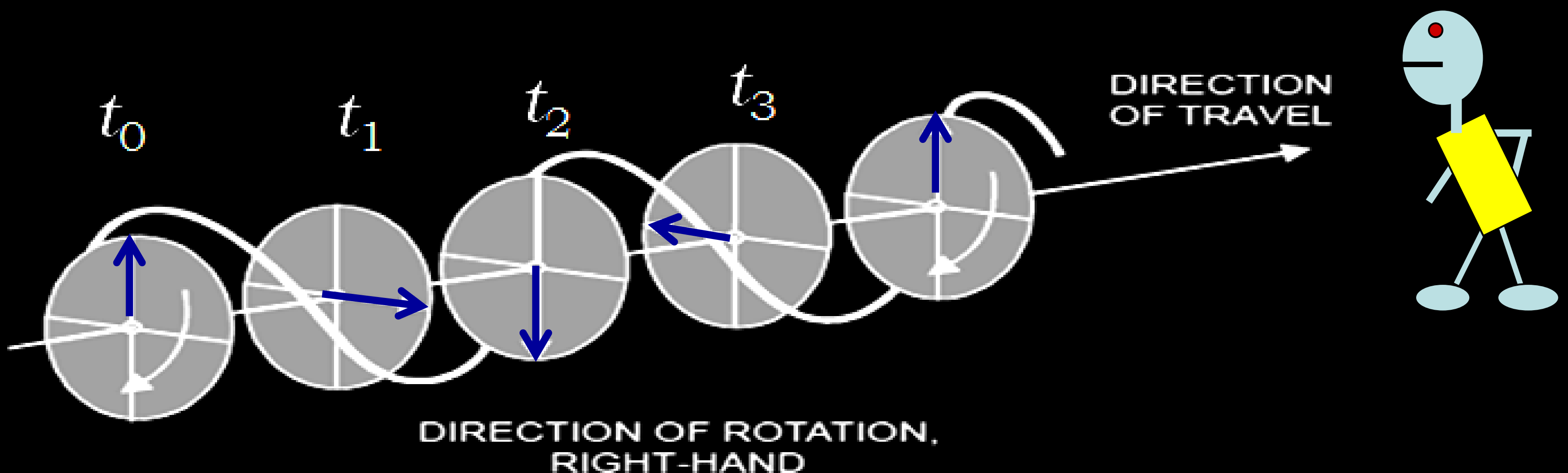
③ 平面电磁波的能流密度矢量的方向为波传播的方向，大小为平面电磁波能量密度与波传播速度的积



$$\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]=\frac{\hat{z}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2=\frac{\hat{z}}{2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\varepsilon E_0^2=\frac{\hat{z}}{2}vw$$

4. 平面电磁波的极化



平面电磁波的电场矢量和磁场矢量与波传播方向垂直。但电场或磁场矢量的方向一般随时间而变。电（或磁）场矢量末端随时间变化的方式称为电磁波的极化。

设 z 为平面电磁波传播方向，在与 z 垂直的平面上，电（或磁）场的瞬时值可分解表示为：

$$\begin{cases} X = E_x(z,t) = E_1\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ Y = E_y(z,t) = E_2\cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{cases}$$

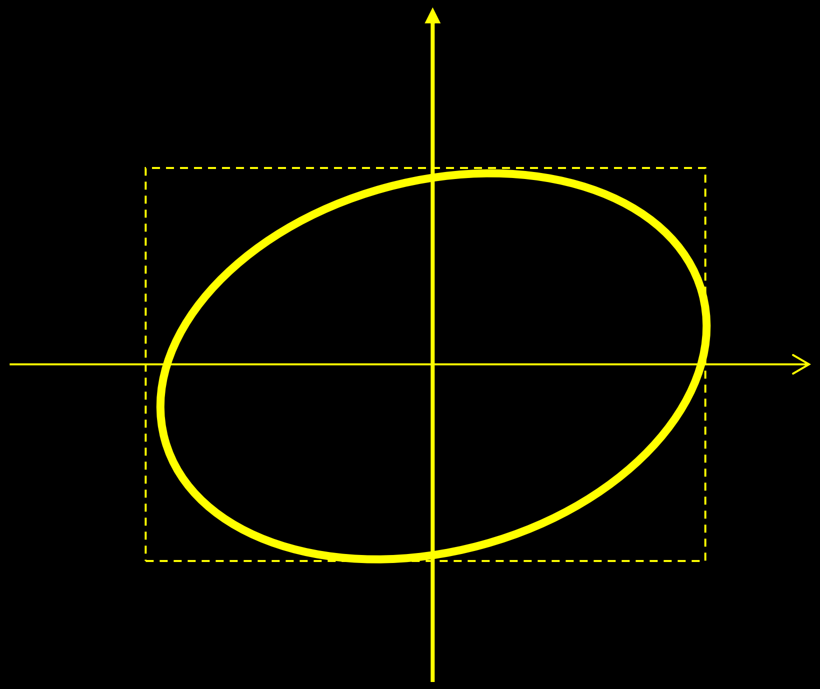
其中ϕ_x, ϕ_y为初相位，其差值为：

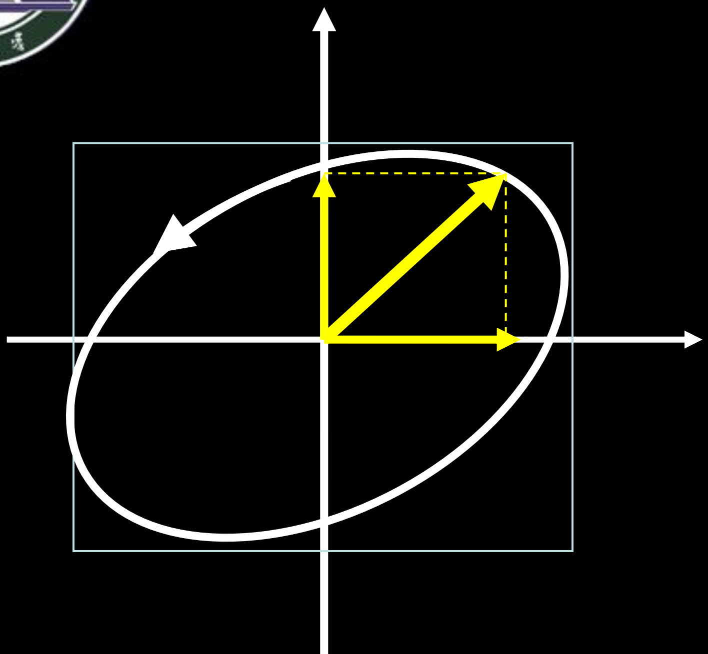
$$\delta = \phi_x - \phi_y$$

消除时间t 得到

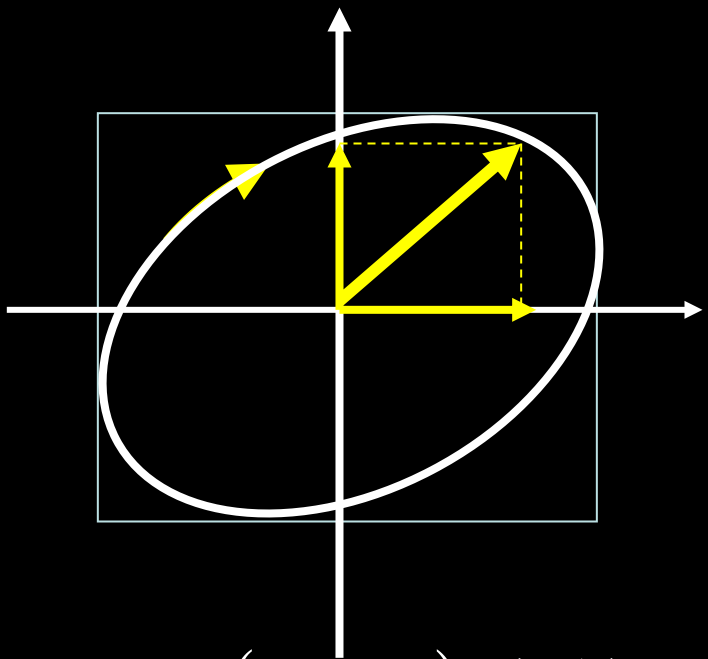
$$\left(\frac{X}{E_1}\right)^2+\left(\frac{Y}{E_2}\right)^2-2\left(\frac{X}{E_1}\right)\left(\frac{Y}{E_2}\right)\cos\delta=\sin^2\delta$$

这是一椭圆方程，表明电（磁）振幅末端运动轨迹在xoy平面为椭圆型曲线，故称为椭圆极化。





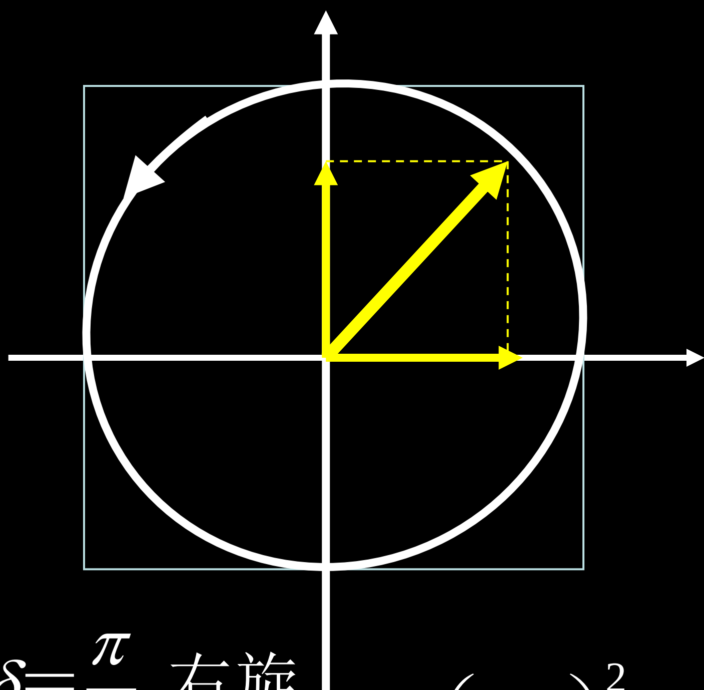
$\delta > 0(\neq 0, \pi)$ 右旋



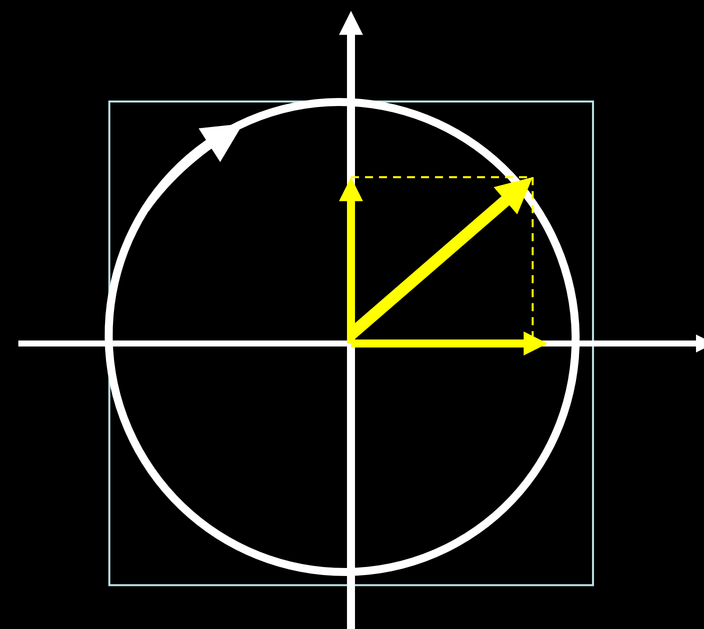
$\delta < 0(\neq 0, \pi)$ 左旋

如果 $\delta > 0(\neq 0, \pi)$，X分量的相位超前Y分量，末端的轨迹为右旋椭圆极化，反之为左旋椭圆极化波。

当$\delta = \phi_x - \phi_y = \pm 0.5\pi, E_1 = E_2 = E_0$



$\delta = \frac{\pi}{2}$ 右旋



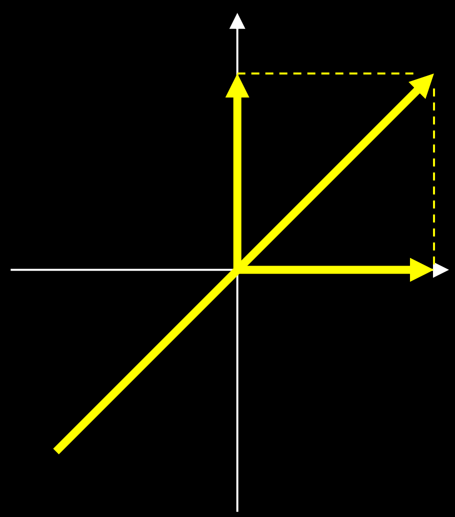
$\delta = -\frac{\pi}{2}$ 右旋

$$\left(\frac{X}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{Y}{E_0}\right)^2 = 1$$

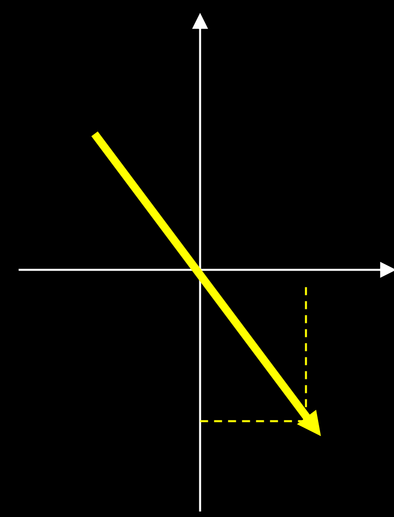
电（或磁）场矢量末端的轨迹为园周，称为圆极化

当$\delta=\phi_x-\phi_y=0$或π, $\left(\dfrac{X}{E_1}\right)=\left(\dfrac{Y}{E_2}\right)$, $-\left(\dfrac{Y}{E_2}\right)$

电（或）磁场矢量末端轨迹为直线，称为线极化



$$\theta=\pm\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

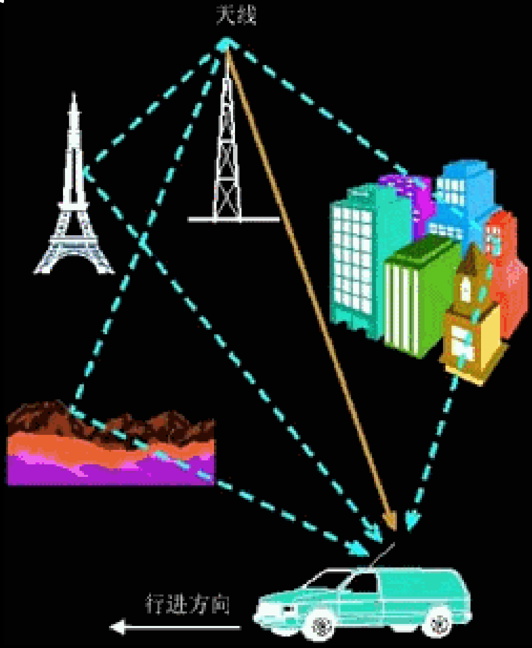


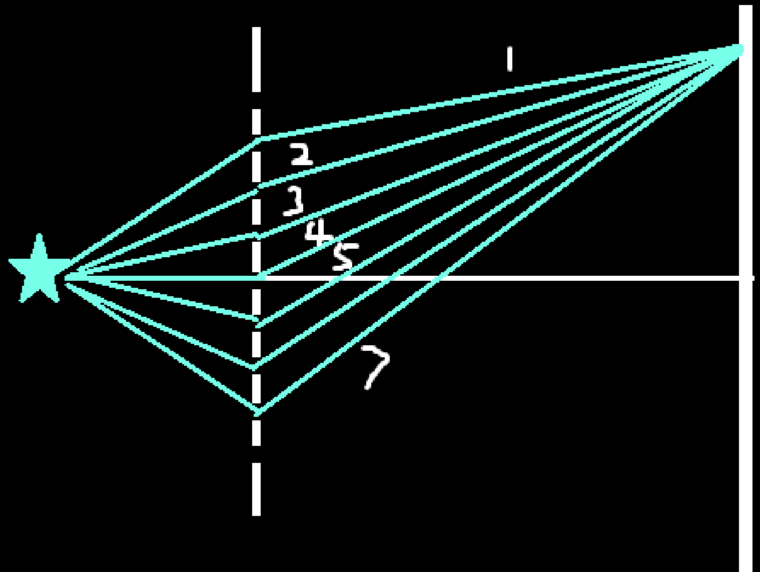
$\delta=\phi_x-\phi_y=0$，线极化

$\delta=\phi_x-\phi_y=\pi$，线极化

5. 空间平面电磁波的叠加

空间多列平面电磁波叠加





不同频率　　不同振幅

不同初相位　不同极化

不同传播方向

传播方向相同的两种情形：同频与不同频

1）不同频率情形

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}z) \\ \boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{H}_0 \exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\mathrm{j}(\boldsymbol{k}+\delta k)z] \\ \boldsymbol{H}_2(z) = \boldsymbol{H}_0 \exp[-\mathrm{j}(\boldsymbol{k}+\delta k)z] \end{cases}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad , \quad k + \delta k = (\omega + \delta\omega)\sqrt{\varepsilon\mu}$$

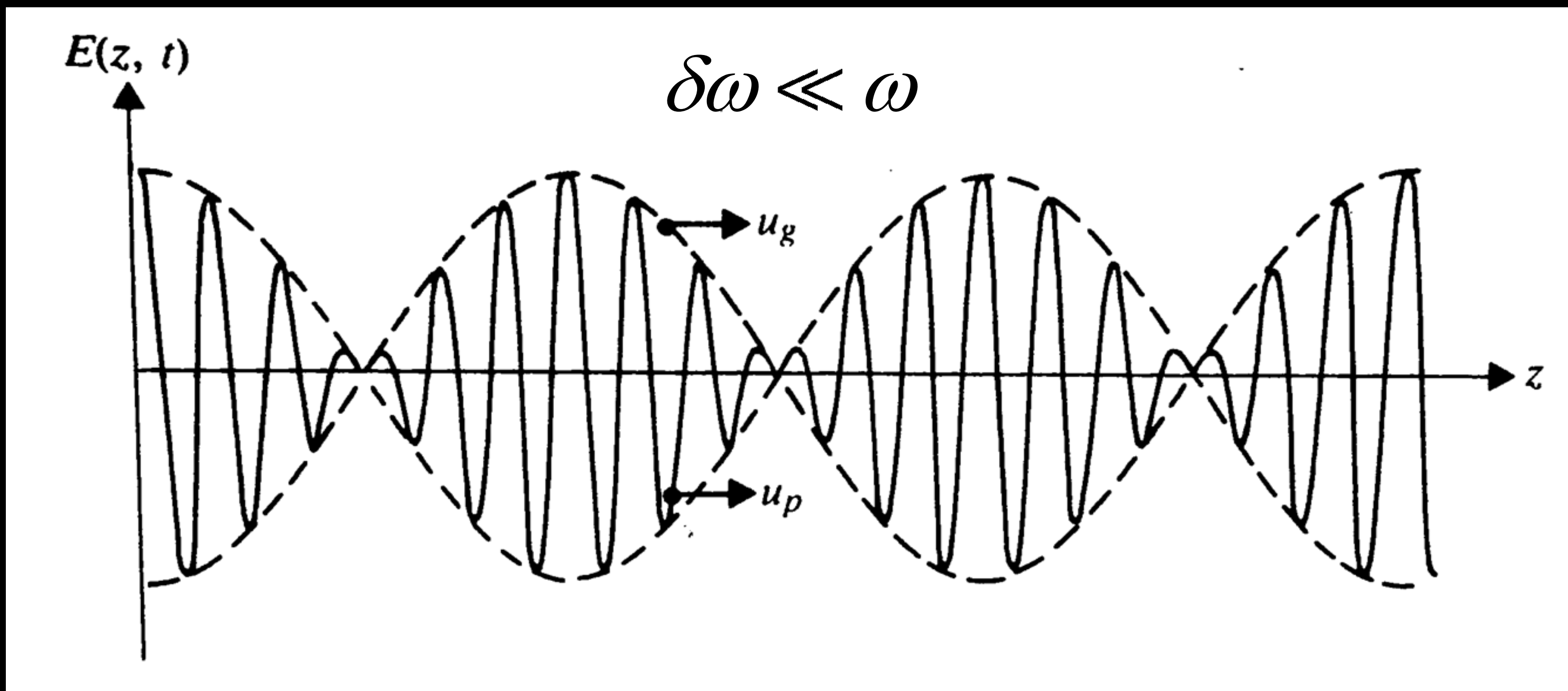
$$\boldsymbol{E}_1(z,t)=\hat{x}E_0\cos(\omega t-kz+\varphi_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2(z,t)=\hat{x}E_0\cos\left[(\omega+\delta\omega)t-(k+\delta k)z+\varphi_2\right]$$

特例： $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_1(z,t)+\boldsymbol{E}_2(z,t)$$

$$=\underbrace{\hat{x}2E_0\cos(\delta\omega t-\delta kz)}_{\text{被调制的振幅}}\quad\underbrace{\cos(\omega t-kz)}_{\text{平面波特点}}$$



不同频率电磁波的叠加

可形成各种不同空间波形的电磁波信号

2）同频率情形

两列沿 z 轴传播的同频定态平面电磁波

$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{E}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad,\quad\boldsymbol{E}_2(z)=\boldsymbol{E}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\hat{x}E_{1x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{1x}}+\hat{y}E_{1y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{1y}}\\ \boldsymbol{E}_2=\hat{x}E_{2x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{2x}}+\hat{y}E_{2y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{2y}}\end{cases}$$

在传播过程中相遇而叠加

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{E}_1(z)+\boldsymbol{E}_2(z)=?$$

$$\boldsymbol{E}(z)=\left[\hat{x}\left(E_{1x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{1x}}+E_{2x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{2x}}\right)+\hat{y}\left(E_{1y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{1y}}+E_{2y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_{2y}}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$|\boldsymbol{E}|=\sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_{1x}E_{2x}\cos\left(\phi_{1x}-\phi_{2x}\right)+2E_{1y}E_{2y}\cos\left(\phi_{1y}-\phi_{2y}\right)}$$

其中 ： $E_1^2=E_{1x}^2+E_{1y}^2$ ， $E_2^2=E_{2x}^2+E_{2y}^2$

合成电场矢量不仅与两列平面波的振幅有关，还与两列平面波初始相位有关。与振幅有关是矢量叠加的结果，与初始相位有关为波动特有之特点

$$\phi_{1x} - \phi_{2x} = \phi_{1y} - \phi_{2y} = \delta$$

$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\left(E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y}\right)\cos\delta}$$

$$|\boldsymbol{E}|_{max} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\left(E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y}\right)}$$

$$|\boldsymbol{E}|_{min} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2\left(E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y}\right)}$$

两列或两列以上的（电磁）波在空间重叠时在叠加中形成新的波动现象，称之为干涉

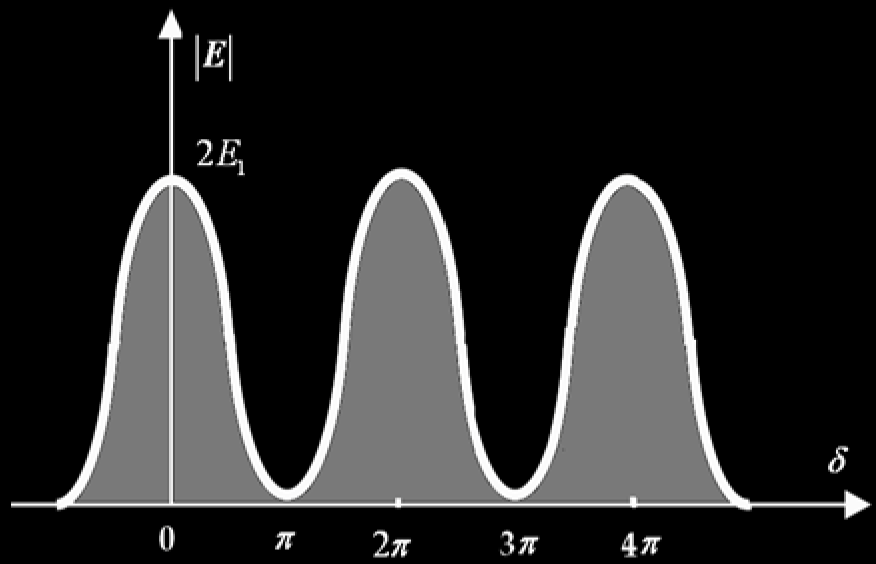
特例： $E_{1x}=E_{2x}$、$E_{1y}=E_{2y}$

$$\left|\boldsymbol{E}\right|_{max}=\sqrt{E_{1}^{2}+E_{2}^{2}+2\left(E_{1x}E_{2x}+E_{1y}E_{2y}\right)}$$

$$\left|\boldsymbol{E}\right|_{min}=\sqrt{E_{1}^{2}+E_{2}^{2}-2\left(E_{1x}E_{2x}+E_{1y}E_{2y}\right)}$$

$$\left|\boldsymbol{E}\right|_{\max}=\sqrt{2E_1^2+2E_1^2}=2E_1$$

$$\left|\boldsymbol{E}\right|_{\min}=\sqrt{2E_1^2-2E_1^2}=0$$



特例：一列平面波仅有 x 方向电场分量

另一列平面波有 y 方向电场分量

$$\begin{cases} E_{1y} = E_{2x} = 0 \\ E_{1x} \neq 0，\ E_{2y} \neq 0 \end{cases}$$

$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\left(E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y}\right)\cos\delta}$$

$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

电场振幅相互垂直的两列平面波叠加没有干涉效应

结论：

频率相同、初相位固定、电（或磁）场振幅矢量具有平行分量的两列平面波在叠加中有干涉效应。

而频率相同、初相位固定、电场（或磁场）振幅矢量相互垂直的两列平面波叠加没有干涉，但合成电场矢量的振动方向发生变化。

极化在许多工业领域中获得广泛应用

光学工程中的偏振片及其应用

通信工程中极化复用技术应用

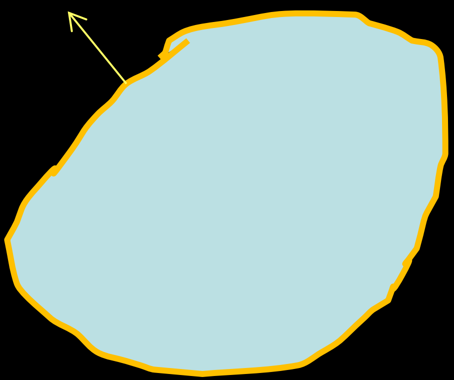
分析化学测分析物质的成分

雷达技术中利用极化实现目标的识别

天线技术中实现极化特性的应用等

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

试题 1



有一理想导体，带电为 Q ，分析或证明如下问题：

① 写出导体表面电场满足的边界条件；

② 求出导体内部空间电位或电场分布；

③ 分析导体内部有无体电荷分布；

④ 写出导体外部空间电位的定解方程；

⑤ 导体带电量与其电位比值为常数。

试题 2

简述镜像方法的原理，并说明如下问题：

① 像电荷能否在原电荷的同一空间内，为什么？

② 指出像电荷的本质，是否与原电荷符号相同？

③ 如何确定像电荷的大小和所在位置；

④ 区域边界为常电位，镜像法是否有效？

⑤ 区域边界为介质界面，镜像法是否有效？