第三章:

A练习题:

3.3.

解: ① $\int_{-1}^{1}|z|dz=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1}x\,dx$
$=1$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{z}\,dz=\int_{-1}^{1}\sqrt{x}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{x}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx$

$=\int_{-1}^{0}\sqrt{|x|e^{i\pi}}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx$

$=e^{\frac{\pi}{2}i}\int_{-1}^{0}\sqrt{|x|}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{3}(1+i)$

② $z=e^{i\theta}\quad \theta\in[0,\pi]\quad dz=e^{i\theta}i\,d\theta$

$\int_{-1}^{1}|z|dz=\int_{\pi}^{0}ie^{i\theta}d\theta=[e^{i\theta}]_{\pi}^{0}=2$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{z}\,dz=\int_{\pi}^{0}e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3\theta}{2}i}\right]_{\pi}^{0}=\frac{2}{3}[1+i]$

③ $z=e^{i\theta}\quad \theta\in[-\pi,0]$

$\int_{-1}^{1}|z|dz=\int_{-\pi}^{0}ie^{i\theta}d\theta=[e^{i\theta}]_{-\pi}^{0}=2$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{z}\,dz=\int_{-\pi}^{0}e^{i\frac{\theta}{2}}ie^{i\theta}d\theta=\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3\theta}{2}i}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{2}{3}[1+i]$

注意: 多值函数求积分时, 复平面仅取一个单叶分支. 本题中取$[-\pi,\pi]$为辐角单叶分支, 使多值函数为单值函数.

3.6.

(2) 解: $\int_{0}^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz=\left[2\sin\frac{z}{2}\right]_{0}^{\pi+2i}=2\sin(\frac{\pi}{2}+i)$

$=2\cdot\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)}-e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2i}=\frac{1}{e}+e$

(5) $\int_{-1}^{i}(1+4iz^3)dz$
$=[z+iz^4]_{-1}^{i}=1+i$

3.7 解: $\oint_l\frac{dz}{(z-a)(z-b)}$

$=\oint_l\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right]dz$

$=\frac{1}{b-a}\left[\oint_l\frac{1}{z-b}dz-\oint_l\frac{1}{z-a}dz\right]$

$=0$

3.8.

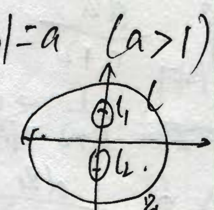
解: ③ $\oint_l\frac{e^z}{z-2}dz\qquad l:|z-2|=2.$

由单连通区域Cauchy积分公式 $f(z)=e^z.$

上式 $=2\pi i\,f(z)\big|_{z=2}=2\pi ie^2=2\pi e^2 i$

3.9 ②

解: $\oint_l\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz\qquad l:|z|=a\quad(a>1)$



$=\oint_l\frac{e^z}{(z+i)^2(z-i)^2}dz.$

$=\oint_{l_1}\frac{e^z}{(z+i)^2(z-i)^2}dz.\ \rightarrow f(z)=\frac{e^z}{(z+i)^2}$

$+\oint_{l_2}\frac{e^z}{(z+i)^2(z-i)^2}dz.\ \rightarrow f(z)=\frac{e^z}{(z-i)^2}$

因复变函数解析则函数高阶导数定义、

$=\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]^{(1)}_{z=i}+\frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]^{(1)}_{z=-i}$

$=\frac{2\pi i}{2}[\sin 1-\cos 1]=\pi i[\sin 1-\cos 1]$

3.11

解: $f(z)=u+iv$

$v=e^{px}\sin y.$

$\frac{\partial v}{\partial x}=\sin y\,p\,e^{px}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\sin y\,p^2e^{px}$

$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{px}\cos y\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^{py}\sin y$

故 $\sin y\cdot p^2\cdot e^{px}=e^{px}\sin y.\quad p=\pm1$

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

当$p=1$ $\frac{\partial w}{\partial z}=e^x\cos y+ie^x\sin y$
$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^z$

故 $f(z)=e^z+C.$

当$p=-1$ 同理得 $f(z)=-e^z+C.$

B作业题:

3.2.

(2) 求: $\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right|\le\pi$

证明: $\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right|$

$\le\int_{-i}^{i}|x^2+iy^2|\,|dz|$

$\le\int_{-i}^{i}(|x^2|+|y^2 i|)|dz|$

$=\int_{-i}^{i}|dz|=\pi$

3.3.

$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z+2}$

$\frac{1}{z+2}$ 奇点 $z=-2$ 不在 $|z|=1$ 内

故 $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z+2}=0$

$z=e^{i\theta}$

上式 $=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}+2}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin\theta+(1+2\cos\theta)i}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

故则 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

3.4.

$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$

$=2\pi i\,e^z\big|_{z=0}=2\pi i$

$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$ 令 $z=e^{i\theta}$

上式 $=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{(e^{i\theta})}}{e^{i\theta}}e^{i\theta}i\,d\theta$

$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{(e^{i\theta})}i\,d\theta$

$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta$

$=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]d\theta$

$=-\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\cos\theta)}\sin(\sin\theta)d\theta$

$+i\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\cos\theta)}\cos(\sin\theta)d\theta$

$\because e^{(\cos\theta)}\cos(\sin\theta)$ 为偶函数

故则 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$

3.7 计算: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi}{\xi-z}d\xi$.

解: 讨论:

① $|z|<1$ 时 $\xi=z$ 在单位圆内

故上式 $=\frac{1}{2\pi i}\cdot2\pi i\cdot\xi\big|_{\xi=z}=z$.

② $|z|>1$ 时 $\xi=z$ 在单位圆外.

故上式 $=0$

③ $|z|=1$ 积分路径上有奇点.

3.8.

证明 $|t|=1$ $\quad t\bar{t}=1$ $\quad t=e^{i\theta}$

$dt=e^{i\theta}i\,d\theta$ $\quad d\bar{t}=e^{-i\theta}(-i)d\theta$

$dt=d\bar{t}\cdot(-1)t^2=\frac{(-1)}{\bar{t}^2}d\bar{t}$

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{\overline{f(t)}}{t-z}dt$

$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{\overline{f(t)}}{\overline{t}-\overline{z}}\cdot\frac{(-1)}{\bar{t}^2}d\bar{t}$

$=\frac{1}{2\pi i}\overline{\oint_{|t|=1}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}\cdot\frac{(-1)}{t^2}dt}$

$=\frac{1}{2\pi i}\overline{\oint_{|t|=1}\frac{f(t)(-1)}{t(1-\bar{z}t)}dt}$

$=\frac{1}{2\pi i}\overline{\oint_{|t|=1}\frac{f(t)}{(-\bar{z})t(t-\frac{1}{\bar{z}})}dt}$

$=\frac{1}{2\pi i}\overline{\oint_{|t|=1}f(t)\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-\frac{1}{\bar{z}}}\right]dt}$

讨论: $\begin{cases}|z|<1 & \left|\frac{1}{\bar{z}}\right|>1 & 上式=\overline{f(0)}\\ |z|>1 & \left|\frac{1}{\bar{z}}\right|<1 & 上式=\overline{f(0)}-\overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}\end{cases}$

第四章：

A练习题：

4.1·(3).

解：比值判断法：

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ $|z|\geq 1$ 发散. $|z|<1$ 收敛：

对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n z^n}$ $l=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_{k+1}}{f_k}\right|=\left|\frac{1}{3z}\right|$

$l<1$ $|z|>\frac{1}{3}$ 收敛

$l>1$ $|z|<\frac{1}{3}$ 发散：

故则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{3^n z^n}\right)$ 而言：

$$\begin{cases} |z|<\frac{1}{3} & 发散: \\ \frac{1}{3}<|z|<1 & 收敛 \\ |z|>1 & 发散: \end{cases}$$

4.2.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{3^n z^n}\right)$

解比值判断法：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ $l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|z|=|z|$

$l<1$ $|z|<1$ 收敛.

$l>1$ $|z|>1$ 发散：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3^n z^n}\right)$ $l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left|\frac{1}{3z}\right|=\left|\frac{1}{3z}\right|$

$l<1$ $|z|>\frac{1}{3}$ 收敛.

$l>1$ $|z|<\frac{1}{3}$ 发散：

故则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{3^n z^n}\right)$

$$\begin{cases} |z|<\frac{1}{3} & 发散 \\ \frac{1}{3}<|z|<1 & 收敛 \\ |z|>1 & 发散: \end{cases}$$

4.3

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$

解. 比值判断法.

$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot|z|=|z|$

$l<1$ $|z|<1$ 收敛.

$l>1$ $|z|>1$ 发散.

收敛半径为 1

② $\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n!}$

解 比值判断法

$l=\lim_{n\to\infty}\left|2\cdot z^{n!\cdot n}\right|$

当 $|z|<1$ $l<1$

当 $|z|>1$ $l>1$

故则 收敛半径为 1

4.4.

解：$w=\cos z-1$

① $\cos z-1=0$ $z=(k+\frac{1}{2})\pi$.

$(\cos z-1)'=-\sin z$ $\sin(k+\frac{1}{2})\pi\neq 0$

故 $z=(k+\frac{1}{2})\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$ 是函数 $w=\cos z-1$ 的一阶零点.

4.5

解③：$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'$ $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ $(|z|<1)$

⑤ 将③中 $-z$ 换成 z^2 代入.

$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n z^{2n}$ $(|z|<1)$

⑧ $\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2z$.

$\because \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$ 复平面收敛.

4.6.

解②. $\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}(z-(1+i))}$

$=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right]^n$

$=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+9i}{10}\right)^n(z-1-i)^n$

收敛则 $\left|\frac{3(z-1-i)}{1-3i}\right|<1$. $|z-1-i|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

则其收敛半径为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

④ $\sin(2z-z^2)=\sin[1-(z-1)^2]$

$=\sin 1\cos(z-1)^2-\cos 1\sin(z-1)^2$

$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$\sin(2z-z^2)=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{4n}}{(2n)!}-\cos 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^{4n-2}}{(2n-1)!}$

收敛半径为 ∞

4.7.

(3)

解① $0<|z|<1$ 时

$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}=\frac{1}{-z^2}-\frac{2}{z}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

② $1<|z|<\infty$

$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{2}{z-1}-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}=\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}$

$=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}$

$=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}$

$=2\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z^2}$

(5)

解: $0<|z|<1$

$\left(\frac{1}{z-i}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)''=\left(\frac{i}{2}\frac{1}{1+zi}\right)''=\left[\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(iz)^n\right]''$

$=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)(iz)^n$

② $1<|z|<\infty$

$\left(\frac{1}{z-i}\right)^3=\left(\frac{i}{2}\frac{1}{1+zi}\right)''=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}}\right)''=\left[\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n\right]''$

$=\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\right]''$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdot i^n\frac{1}{z^{(n+3)}}$

4.8.

解 $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

$z=1$，$z=2$ 是孤立奇点

当 $|z|<1$

$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$

当 $1<|z|<2$

$f(z)=\left(-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

当 $|z|>2$

$f(z)=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

$=\left(-\frac{1}{z}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\left(\frac{2}{z}\right)^n\right]$

$=\left(-\frac{1}{z}\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\left(\frac{2}{z}\right)^n\right]$

4.9.

解③ 孤立奇点 $z^4+1=0$

$z=\sqrt[4]{-1}$ $z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}$ $z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$z_3=e^{-\frac{\pi}{4}i}$ $z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

均为一阶极点.

考查 $z=\infty$ 记 $\frac{1}{z}=z$ 代换考查 $z=0$

则得 $z=\infty$ 不为奇点.

(6) $\frac{e^z}{1+z^2}$

$z^2+1=0$ $z=\pm i$ 为一阶极点.

$\frac{e^z}{1+z^2}$ 在 ~~|z|>1 展开~~

$\lim_{y\to0}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^z}{1+z^2}=\infty$ $\lim_{\substack{y\to0\\x\to-\infty}}\frac{e^z}{1+z^2}=0$

故 $z=\infty$ 为孤立本性奇点.

4.9.

(8) $\frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}$

$1+e^{z}=0 \quad z=(2k+1)\pi i \; (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

为一阶极点..

$z=\infty$ 为本性奇点

$\lim_{y\to0,\,x\to+\infty}\frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}=-1$

$\lim_{y\to0,\,x\to-\infty}\frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}=1$

(12) $\frac{1}{\sin z+\cos z}$

解 $\sin z+\cos z=0 \quad z=(k-\frac{1}{4})\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

为一阶极点.. $z=\infty$ 为非孤立奇点.

考查 $\frac{1}{z'}=z,\ z'=0$ 处则可.

B 作业:

4.2 ② $w=6\sin z^{3}+z^{3}(z^{6}-6)$

$6\sin z^{3}+z^{3}(z^{6}-6)=6(z^{3}-\frac{(z^{3})^{3}}{3!}+\frac{(z^{3})^{5}}{5!}+\cdots)+z^{9}-6z^{3}$

故则 z 最低次幂为 z^{15}.

$z=0$ 为零点.. 零点阶数为 15.

4.3.

解! $\frac{2z-1}{(z+2)(3z-1)}=\frac{5}{7}\frac{1}{z+2}-\frac{1}{7}\frac{1}{3z-1}$

$=\frac{5}{7}\frac{1}{1+z+1}+\frac{1}{7}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}(z+1)}$

$=\frac{5}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z+1)^{n}+\frac{1}{28}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{3}{4}(z+1)]^{n}.$

收敛半径为 $|z+1|<1 \quad |\frac{3}{4}(z+1)|<1$

故 仍为 $|z+1|<1$

所以 收敛半径为 1

4.5. $\frac{1}{(z-a)^{k}}$ 在 $z=0$

解: 因为 $\frac{1}{(z-a)^{k}}=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)$

$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n}$

$(0<|z|<a)$

故有: $\frac{1}{(z-a)^{k}}=\frac{(-1)^{k}}{(k-1)!\,a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n}$

$=\frac{(-1)^{k}}{(k-1)!\,a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{z}{a}\right)^{n}$

$=\frac{(-1)^{k}}{(k-1)!\,a^{k}}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)\left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1}$

$=\frac{(-1)^{k}}{a^{k}}\sum_{n=k-1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!}\left(\frac{z}{a}\right)^{n-k+1}$

令 $m=n-k+1$

$\frac{1}{(z-a)^{k}}=\frac{(-1)^{k}}{a^{k}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+1)}{(k-1)!}\left(\frac{z}{a}\right)^{m}$

$0<|z|<a$

4.8.

解! $w=\frac{z\cos\theta-z^{2}}{1-2z\cos\theta+z^{2}}=\frac{z(\cos\theta-z)}{(z-\cos\theta-i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta)}$

$=(-\frac{z}{2})\left(\frac{1}{z-\cos\theta-i\sin\theta}+\frac{1}{z-\cos\theta+i\sin\theta}\right)$

$=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\cos\theta+i\sin\theta}}+\frac{1}{\cos\theta-i\sin\theta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\cos\theta-i\sin\theta}}\right)$

~~$\frac{z}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}\ldots\left(1-\frac{z}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)\ldots+$~~

分两种情况讨论: $|z|<1$; $|z|>1$.

分别展开不同形式、

$w=\frac{z}{2}\left(e^{-i\theta}\frac{1}{1-ze^{-i\theta}}+e^{i\theta}\frac{1}{1-ze^{i\theta}}\right)$

$|z|<1.\quad w=\frac{z}{2}\left[e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}[ze^{-i\theta}]^{n}+e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty}[ze^{i\theta}]^{n}\right]$

$|z|>1 \quad w=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{i\theta}}{z}\right]^{n}+\left(\frac{e^{-i\theta}}{z}\right)^{n}\right]=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})\frac{1}{z^{n}}$

4.10.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

令 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$

$[zf'(z)]'=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$

$zf'(z)=C_1-\ln(1-z)$

$f'(z)=\frac{C_1}{z}-\frac{\ln(1-z)}{z}$

$f(z)=C_1\ln z-\int\frac{\ln(1-z)}{z}dz$

$=C_1\ln z-\int \ln(1-z)/z\, dz$

4.11 设 $0<|z|<1$

试证 $\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|$

$e^z-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=z+\frac{z^2}{2!}+\cdots$

$|e^z-1|>|z|-\left|\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right|$

$\because 0<|z|<1$

~~故得~~ $\cancel{|e^z-1|<|z|\left[1+\left|\frac{z}{2!}\right|+\left|\frac{z}{3!}\right|+\cdots\right]}$

$<|z|\left[1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\right]$

$\cancel{=|z|\left[1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right]}$

$\cancel{<|z|}$

$\because \left|\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right|<\left|\frac{z^2}{2!}\right|+\left|\frac{z^3}{3!}\right|+\cdots$

$<\left|\frac{z}{2}\right|+\left|\frac{z}{2}\times\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{z}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right|+\cdots$

$=\left|\frac{z}{2}\right|\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}|z|$

故得 $|e^z-1|>|z|-\left|\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right|$

$>|z|-\frac{3}{4}|z|=\frac{1}{4}|z|$

$|e^z-1|<|z|+\underbrace{\left|\frac{z^2}{2}\right|+\cdots+\left|\frac{z^n}{n!}\right|}$

$<|z|+\frac{3}{4}|z|=\frac{7}{4}|z|$

证毕