第八章　　现性系统的状态空间分析与综合

习题解答

8-1　已知电枢控制的直流伺服电机的微分方程组及传递函数

$$U_a = R_a I_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b$$

$$E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$M_m = C_m i_a$$

$$M_m = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + f_m \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{C_m}{s[L_a J_m s^2 + (L_a f_m + J_m R_a)s + (R_a f_m + K_b C_m)}$$

(1)　设状态变量 $x_1 = \theta_m x_2 = \dot{\theta}_m x_3 = \ddot{\theta}_m$ 及输出量 $y = \theta_m$，试建立其动态方程;

(2) 设状态变量 $\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m$ 及 $y = \theta_m$,试建立其动态方程

(3) 设 $x = T\bar{x}$, 确立两组状态变量间的变换阵

解：

（1）由题意可知：$\begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_m \\ y = \theta_m = x_1 \end{cases}$，

由已知 $\begin{cases} U_a = R_a i_a + L_a \ddot{i}_a + E_b \\ E_b = K\dot{\theta}_m \\ M_m = C_m i_a \\ M_m = J_m \ddot{\theta}_m + f_m \dot{\theta}_m \end{cases}$

可推导出 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{f_m L_a + J_m R_a}{L_a J_m} x_3 - \dfrac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} x_2 + \dfrac{C_m}{L_a J_m} U_a \\ y = x_1 \end{cases}$$

由上式，可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{R_a f_m + K_b C_m}{L_a J_m} & -\dfrac{L_a f_m + J_m R_a}{L_a J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{C_m}{L_a J_m} \end{bmatrix} U_a$$

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

（2）由题意可知：$\bar{x}_1 = i_a, \bar{x}_2 = \theta_m, \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m, y = \theta_m$

可推导出 $$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \dot{i}_a = -\dfrac{R_a}{L_a} i_a - \dfrac{K_b}{L_a} \dot{\theta}_m + \dfrac{1}{L_a} U_a = -\dfrac{R_a}{L_a} \bar{x}_1 - \dfrac{K_b}{L_a} \bar{x}_3 + \dfrac{1}{L_a} U_a \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{\theta}_m = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \ddot{\theta}_m = \dfrac{C_m}{J_m} i_a - \dfrac{f_m}{J_m} \dot{\theta}_m = \dfrac{C_m}{J_m} \bar{x}_1 - \dfrac{f_m}{J_m} \bar{x}_3 \\ y = \theta_m = \bar{x}_2 \end{cases}$$

可列动态方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & 0 & -\dfrac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{C_m}{J_m} & 0 & -\dfrac{f_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_a \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

由 $\begin{cases} x_1 = \theta_m \\ x_2 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \bar{x}_1 = i_a \\ \bar{x}_2 = \theta_m \\ \dot{\bar{x}}_3 = \dot{\theta}_m \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 = \theta_m \\ x_2 = \bar{x}_3 = \dot{\theta}_m \\ x_3 = \ddot{\theta}_m = \dfrac{C_m}{J_m} i_a - \dfrac{f_m}{J_m}\dot{\theta}_m = \dfrac{C_m}{J_m}\bar{x}_1 - \dfrac{f_m}{J_m}\bar{x}_3 \end{cases}$

由上式可得变换矩阵为 $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{C_m}{J_m} & 0 & -\dfrac{f_m}{J_m} \end{bmatrix}$

8-2 设系统微分方程为 $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$。式中，u 和 y 分别为系统输入和输出量。试列写可控标准型（即 A 为友矩阵）及可观测标准型(即 A 为友矩阵转置)状态空间表达式，并画出状态变量图。

解： 由题意可得：

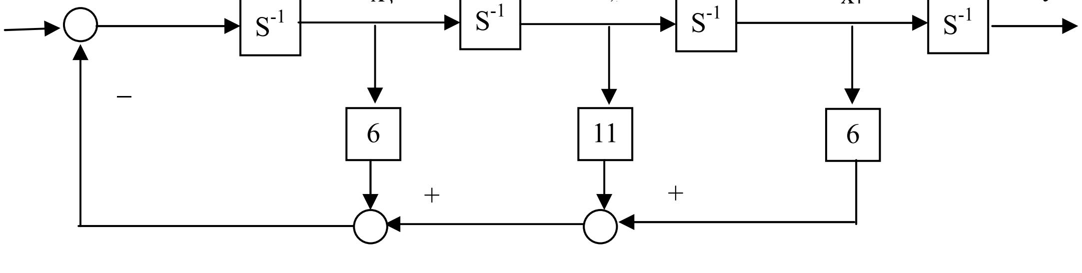
$$\frac{y}{u} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

可控标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如下：

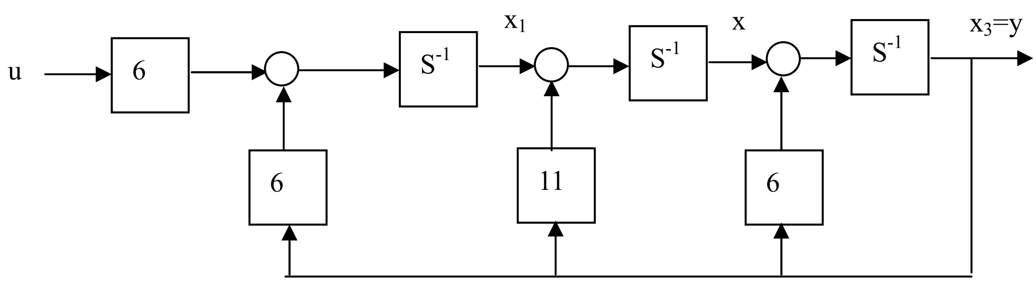


由方程得可观测标准型

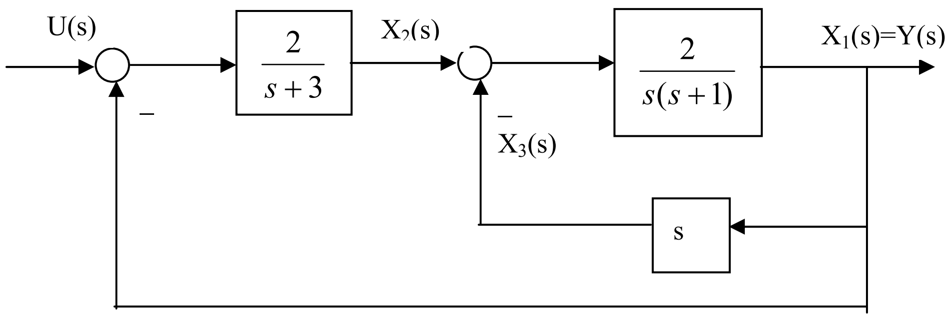
$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

状态变量图如下：



8-3　已知系统结构图如图所示，其状态变量为 x_1,x_2,x_3。试求动态方程，并画出状态变量图。



由结构图可得

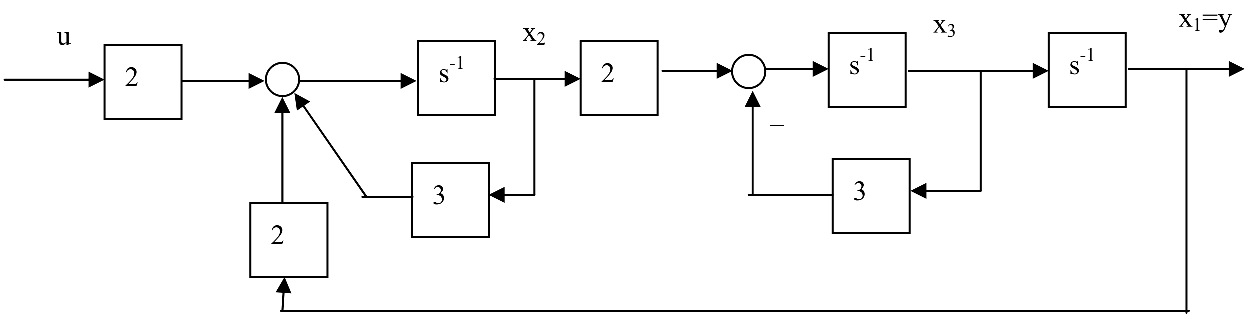
$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2 - x_3} = \dfrac{2}{s(s+1)} & \Rightarrow s^2 x_1 + s x_1 = 2x_2 - 2x_3 \quad \text{即}\ \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{x_3}{x_1} = s & \Rightarrow s x_1 = x_3 \quad \text{即}\ \dot{x}_1 = x_3 \\ \dfrac{x_2}{u - x_1} = \dfrac{2}{s+3} & \Rightarrow s x_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \quad \text{即}\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \end{cases}$$

由上述三式，可列动态方程如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如下：



8-4　已知系统传递函数为 $G(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$。试求可控标准型（$A$ 为友矩阵），可观测标准型（A 为友矩阵转置），对角型（A 为对角阵）动态方程。

解：

(1) 可控标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

（2）可观测标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+u$$

（3）$G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{1/2}{s+3}+\dfrac{3/2}{s+1}$

由上式可得对角型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

8-5　已知系统传递函数　$G(s)=\dfrac{5}{(s+1)^2(s+2)}$　试求约当阵（A 为约当阵）动态方程。

解：$G(s)=\dfrac{5}{(s+1)^2(s+2)}=\dfrac{5}{(s+1)^2}-\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{5}{s+2}$

由上式，可得约当型动态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}5 & -5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

8-6　已知双输入—双输出系统状态方程和输出方程

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + u_1 \\
\dot{x}_2 &= x_3 + 2u_1 - u_2 \\
\dot{x}_3 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2 \\
y_1 &= x_1 - x_2 \\
y_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3
\end{aligned}$$

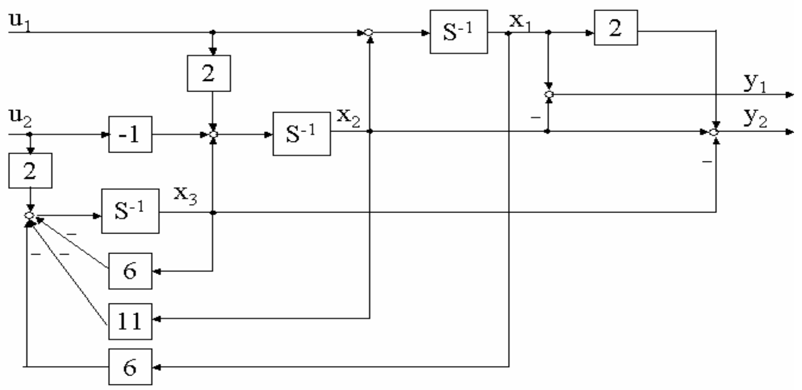
写出其向量—矩阵形式，并画出状态变量图

解： 由题中给定方程可列写出向量—矩阵

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量图如下



8-7 已知系统动态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$，试求传递函数 G(s)

解：

$$G(s)=C[(sI-A)^{-1}]B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 2 & s+3 & 0\\ 1 & -1 & s-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3-7s-6}\begin{bmatrix}-s-5 & s-1 & s^2+3s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2s^2+7s+3}{s^3-7s-6}$$

8-8 已知矩阵 A=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，至少用两种方法求状态转移矩阵。

解：

（1）级数法：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+$$

$$=\begin{bmatrix}1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\cdots & 0\\ 0 & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

(2) 拉氏变换法

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}$$

8-9 已知系统 $\Phi_1(\mathrm{t})=\begin{bmatrix}6\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-5\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} & 4\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\\ -3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} & -2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}+3\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\end{bmatrix}$,

$\Phi_2(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$，其中的$\varPhi(t)$是否是状态转移矩阵。如果是，试求该系统的状态阵 A；如果不是，请说明理由。

解：转移矩阵应满足：$\dot{\Phi}=A\Phi,\Phi(0)=I$

$$\Phi_1(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I \qquad \varPhi_2(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设$\varPhi_1(t)$，$\varPhi_2(t)$为转移矩阵则

$$A_1=\dot{\varPhi}_1(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix} -6e^{-t}+10e^{-2t} & -4e^{-t}+8e^{-2t} \\ 3e^{-t}-6e^{-2t} & 2e^{-t}-6e^{-2t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\dot{\varPhi}_2(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

则

$$A_1\Phi_1(t)=\begin{bmatrix} 12e^{-t}-8e^{-2t} & 8e^{-t}-4e^{-2t} \\ -9e^{-t}+8e^{-2t} & -6e^{-t}+4e^{-2t} \end{bmatrix}\neq\dot{\varPhi}_1(t)$$

$$A_2\Phi_2(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ 2e^{-t}-4e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t} \end{bmatrix}=\dot{\varPhi}_2(t)=\Phi_2(t)A_2$$

所以$\varPhi_1(t)$不是转移矩阵，$\Phi_2(t)$是转移矩阵，其状态阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$。

8-10 试求下列状态方程的解 $\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}x$

解：由题意可得：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ (sI - A)x = x_0 \\ x = (sI - A)^{-1} x_0 \\ x(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1} x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = L^{-1}\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} x_0$$

$$= L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} x_0$$

8-11　已知系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$。试求系统在单位阶跃输入作用下的响应。

解：

此题为求非奇次状态方程的解，对于非奇次状态方程。

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1} = L^{-1}\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ s-1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} & 0 \\ \dfrac{1}{(s-1)^2} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ (t-\tau)e^{t-\tau} & e^{t-\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}-1+2e^t\\2te^t\end{bmatrix}$$

8-12　已知差分方程

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2u(k+1)+3u(k)$$

试列写可控标准型（为友矩阵）离散动态方程，并求出$u(k)=\begin{bmatrix}u(0) & u(1)\end{bmatrix}^T=[1 \quad 1]^T$时的系统响应。

解：　由差分方程可得离散动态方程如下：

$$\begin{cases} x(k+1)=G\cdot x(k)+H\cdot u(k) \\ \quad y(k)=C\cdot x(k) \end{cases}$$

$$G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$$

$$x(1)=G\cdot x(0)+H\cdot u(0)=0+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$y(1)=C\cdot x(1)=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=2$$

$$x(2)=G\cdot x(1)+H\cdot u(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$y(2)=C\cdot x(2)=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=-1$$

8-13　已知连续系统的动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

设采样周期$T=1s$，试求离散化动态方程

解：

$$\Phi(t)=L^{-1}[sI-A]^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s-2\end{bmatrix}^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-2)}\\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{2t}-1)\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(T=1)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{2}-1)\\ 0 & e^{2}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 3.19\\ 0 & 7.39\end{bmatrix}$$

$$G(T=1)=\int_0^T\Phi(\tau)Bd\tau=\int_0^1\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{2\tau}-1)\\ 0 & e^{2\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{2\tau}-\tau)\\ \frac{1}{2}e^{2\tau}\end{bmatrix}_0^1$$

$$=\begin{bmatrix}1.347\\ 3.195\end{bmatrix}$$

8-14 试用李雅普诺夫第二法判断$\dot{x}_1=-x_1+x_2$，$\dot{x}_2=2x_1-3x_2$平衡状态的稳定性。

解：平衡点：$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$

构造 $V(x)=x_1{}^2+x_2{}^2$

则 $\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(2x_1-3x_2)$

$$=-2x_1{}^2+6x_1x_2-6x_2{}^2$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

判定$\dot{V}(x)$性质：$\begin{cases}-2<0\\ \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=12-9=3>0\end{cases}$

$\dot{V}(x)$ 负定，因此平衡状态是大范围一致渐近稳定的

8-15　已知系统状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & -3\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$，当 $Q=I$ 时，$P=$?若选 Q 为正半定矩阵，$Q=$?，对应 $P=$? 判断系统稳定性。

解：

$$A^T P+PA=-Q=-I$$

令：

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -3 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & -3\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解得：

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-4 & 8 & -12\\ 8 & 6 & -13\\ -12 & -13 & 44\end{bmatrix}$$

古氏行列式：

$$-4<0$$

$$\begin{vmatrix}-4 & 8\\ 8 & 6\end{vmatrix}=-24-64=-88<0$$

$$\begin{vmatrix}-4 & 8 & -12\\ 8 & 6 & -13\\ -12 & -13 & 44\end{vmatrix}=-1564<0$$

因此不定。

选 $$Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

则 $$\dot{V}(X)=-X^TQX=-X_2{}^2,$$ 为负半定。

由等式 $A^TP+PA=-Q$ 解得：

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 正半定。

判定系统稳定性：

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s-2&-\frac{1}{2}&3\\0&s+1&0\\0&-\frac{1}{2}&s+1\end{vmatrix}=(s+2)(s+1)^2$$

三个特征值分别为：$-2,-1,-1$。因此系统不稳定。

8-16 设线性定常离散系统状态方程为 $x(k+1)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{k}{2}&0\end{bmatrix}x(k)\quad k>0$，试求使系统渐近稳定的 k 值范围。

解： 令 $\Phi^TP\Phi-P=-Q=-I$

即 $$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&\frac{k}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{k}{2}&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{12}&P_{22}&P_{23}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解得：$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{8+k^2}{4-k^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{12}{4-k^2}\end{bmatrix}$$

若要满足题意，需令 $\begin{cases}k>0\\ k^2<4\end{cases}$ 。因此，渐近稳定的条件为：$0<k<2$。

8-17 试判断下列系统的状态可控性。

(1) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

(2) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u$$

(3) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

(4) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u$$

(5) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & 0\\ & & \lambda_1 & \\ 0 & & & \lambda_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

(6) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & 0\\ & & \lambda_1 & \\ 0 & & & \lambda_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}u$$

解：

（1）$P_c=\begin{bmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$rankP_c=2<n=3$　该系统不可控

（2）$P_c=\begin{bmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$rankP_c=2<n=3$　该系统不可控。

（3）$P_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$rankP_c=3=n$　该系统可控。

（4）$P_c=\begin{bmatrix}1 & -4 & 16\\ 2 & -8 & 32\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$rankP_c=2<n=3$　该系统不可控。

（5）$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$

解：

$$P_c=\begin{bmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & A^3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1\\ 1 & \lambda_1 & {\lambda_1}^2 & {\lambda_1}^3\\ 1 & \lambda_1 & {\lambda_1}^2 & {\lambda_1}^3\\ 1 & \lambda_1 & {\lambda_1}^2 & {\lambda_1}^3\end{bmatrix}$$

矩阵不满秩，该系统不可控。

（6） $\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}u$

解：$P_c=\left[B \ \vdots \ AB \ \vdots \ A^2B \ \vdots \ A^3B\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 3\lambda_1\\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1{}^2\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1{}^2 & \lambda_1{}^3\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1{}^2 & \lambda_1{}^3\end{bmatrix}$

矩阵不满秩，该系统不可控。

8-18 设系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & a\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}u$$

设状态可控，试求 a,b.

解：

$$P_c=\left[B \ \vdots \ AB\right]=\begin{bmatrix}1 & b\\ b & ab-1\end{bmatrix}$$

令 $\left|P_c\right|=ab-1-b^2\neq 0 \quad \Rightarrow a\neq b+\dfrac{1}{b}$ 时，即可满足可控性条件。

8-19 设系统状态方程为 $G(s)=\dfrac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$

设状态可控，试求 a。

解：

$$G(s)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

① 采用可控标准型，不论为 a 何值，系统总可控。

② 在任意三阶实现情况下可控，则 $a\neq 1,2,4$ 。

8-20 试判断下列系统的可观测性：

(1) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$

(2) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} x$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$

(3) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -2 \end{bmatrix} x$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$

(4) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$

解：

（1）$P_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$rank\ P_c = 3 = n$　该系统可观。

（2）$P_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & `13 & 1 \end{bmatrix}$

$rank\ P_c = 3 = n$　该系统可观。

（3）　该形式为约当标准型，直接判定，该系统可观。

（4）该形式为约当标准型，　直接判定，该系统不可观。

8-21　试确定使下列系统可观测的$a, b.$。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}x, \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}x$$

解：

$$P_c=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

$\left|P_c\right|=1-b+a\neq 0 \quad \Rightarrow b\neq a+1$时，于是系统可观。

8-22　已知系统各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试用传递矩阵判断系统可控性，可观测性。

解：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s-1 & -3 & -2 \\ 0 & s-4 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)^2(s-4)}\begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix}$$

判断可控性：

$$(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{(s-1)(s-4)}\begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ 2 & 0 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix}$$

令　$a_1\begin{bmatrix} 2 & s-4 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix} s-4 & 0 \end{bmatrix}=0$

$$a_1=a_2=a_3=0$$

所以　$(sI-A)^{-1}B$中三行向量线性无关，因此该系统可控。

判断可观性：

$$C(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-4&3&2\\0&s-1&2\\0&0&s-4\end{bmatrix}\frac{1}{(s-1)(s-4)}$$

$$=\frac{1}{(s-1)(s-4)}\begin{bmatrix}s-4&3&2\\0&0&s-4\end{bmatrix}$$

令 $a_1\begin{bmatrix}s-4\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}2\\s-4\end{bmatrix}=0$

解得 $a_1=a_2=a_3=0$。

所以，$C(sI-A)^{-1}$中三行向量线性无关，因此该系统可观测。

8-23 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ 试求 A 的特征方程,特征值,特征向量,并求出变换矩阵将 A 约当化。

解：

（1） $D(s)=|sI-A|=\begin{vmatrix}s&1&0&0\\0&s&-1&0\\0&0&s&-1\\-1&0&0&s\end{vmatrix}=s^4-1$

（2） $\lambda_1=1\qquad\lambda_2=-1\qquad\lambda_{3,4}=\pm j$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&j&\\&&&-j\end{bmatrix}$$

（3） $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}1\\j\\-1\\-j\end{bmatrix}$ $P_4=\begin{bmatrix}1\\-j\\-1\\j\end{bmatrix}$

对角化变换矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3 & P_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & j & -j\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -j & j\end{bmatrix}$$

$$P\Lambda=AP=\begin{bmatrix}1 & -1 & j & -j\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -j & j\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

所以 P 可使 A 对角化

8-24 将下列状态方程化为可控标准型。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

解： $$P_c=\begin{bmatrix}B & \vdots & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 7\end{bmatrix}$$

所以，$rank\,P_c=2,$ 可控，可化为可控标准型。

$$P_c=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}7 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

取 $P_1=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$

则 $P=\begin{bmatrix}P_1\\P_1A\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 6\end{bmatrix}$ $P_1^{-1}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$

验证：$$PAP^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}$$

$$PB=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

验证完毕。

故可控标准型实现对应的 $A\,,B$ 阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

8-25　已知系统传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

试写出系统可控不可观测，可观测不可控，不可控不可观测的动态方程。

解：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^2+3s+2}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$$

传递函数有零极点对消，因此不可控或不可观。

不可观方程：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}X$$

不可控方程：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}U$$
$$Y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}X$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{0}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

不可控不可观方程：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}U$$

$$Y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}X$$

8-26　已知系统各矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -6 & -2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

试求可控子系统与不可控子系统的动态方程。

解：

$$P_c=\begin{bmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & A^3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 2 & 11 & 47 & 191\end{bmatrix}$$

$$rank\ P_c=2$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad T=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}0 & 0 & 11 & -3\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 27 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 27 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}0 & 0 & 11 & -3\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 27 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 27 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -6 & -2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}0 & -108 & -75 & -16\\ 27 & 135 & 21 & -2\\ 0 & 0 & 81 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 54\end{bmatrix}$$

$$TB=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}0&0&11&-3\\0&0&-2&3\\27&0&-9&0\\0&27&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}27\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$CT^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\3&3&0&0\\2&11&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&10&-4&-3\end{bmatrix}$$

所以，可控子系统为：

$$\begin{cases}\dot{X}_c=\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix}0&-108\\27&135\end{bmatrix}X_c+\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix}-75&-16\\21&-2\end{bmatrix}X_c+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y_c=\begin{bmatrix}1&10\end{bmatrix}X_c\end{cases}$$

不可控子系统为：

$$\begin{cases}\dot{X}_c=\begin{bmatrix}3&\frac{2}{3}\\0&2\end{bmatrix}X_c=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}9&2\\0&6\end{bmatrix}X_c\\ Y_c=\begin{bmatrix}-4&-3\end{bmatrix}X_c\end{cases}$$

8-27　系统各矩阵同习题 8-26，试求可观测子系统与不可观测子系统的动态方程。

解：利用 9-27 的对偶关系实现：

$$\overline{A}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}0&27&0&0\\-108&135&0&0\\-75&21&81&0\\-28&-2&18&54\end{bmatrix}\qquad \overline{B}=C^T=\begin{bmatrix}1\\10\\-4\\-3\end{bmatrix}\qquad \overline{C}=B^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}$$

可观子系统：

$$\begin{cases}\dot{X}_a=\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix}0&27\\-108&135\end{bmatrix}X_a+\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}u\\ Y_a=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}X_a\end{cases}$$

不可观子系统：

$$\begin{cases}\dot{X}_a = \dfrac{1}{27}\begin{bmatrix}-75 & 21\\ -28 & -2\end{bmatrix}X_a + \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}9 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}X_a + \begin{bmatrix}-4\\ -3\end{bmatrix}U\\ Y_a = 0\end{cases}$$

8-28　设被控系统状态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 10\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$。可否用状态反馈任意配置闭环极点？求状态反馈阵，使闭环极点位于$-10, -1\pm j\sqrt{3},$ ，并画出状态变量图。

解：

$$P_c = \begin{bmatrix}B & \vdots & AB & \vdots & A^2B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 10\\ 0 & 10 & 90\\ 10 & 100 & 990\end{bmatrix}$$

$rank\ P_c = 3 = n$ ，

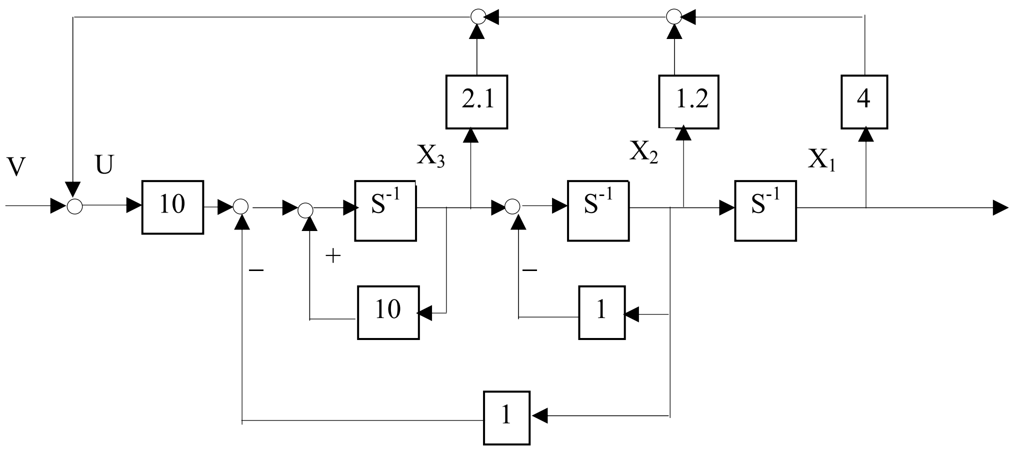
$$\left|sI-(A-Bk)\right| = (s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})$$

即：

$$\left|\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix} - \left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 10\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\right\}\right| = s^3+12s^2+24s+40$$

$$s^3+(10k_3-9)s^2+(10k_3+10k_2-9)s+10k_1 = s^3+12s^2+24s+40$$

$$\begin{cases}k_1 = 4\\ k_2 = 1.2\\ k_3 = 2.1\end{cases}$$



8-29 设系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

试设计全维状态观测器，使其闭环极点位于$-r,-2r(r>0)$，并画出状态变量图。

解：

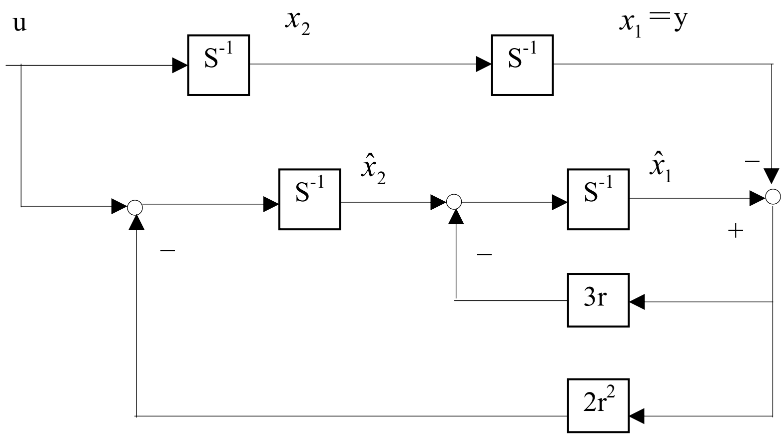
$$P_c=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$rank\ P_c=2=n$ ，可观，可设计全维状态观测器。

观测器系统阵： $A-HC=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}-h_0 & 1\\ -h_1 & 0\end{bmatrix}$

令 $\left|sI-(A-HC)\right|=\begin{vmatrix}s+h_0 & -1\\ h_1 & s\end{vmatrix}=s^2+h_0s+h_1=(s+r)(s+2r)=s^2+3rs+2r^2$

解得：$\begin{cases}h_0=3r\\ h_1=2r^2\end{cases}$



8-30 设系统传递函数为 $\dfrac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ 能否利用状态反馈将传递函数变成

$\dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}$ 若有可能，求出状态反馈阵 K，并画出状态变量图。（提示：状态反馈不改变传递函数的零点）。

解：　能。

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\frac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$$

上式无零极点对消，因此可控，可任意配置极点。

用可控标准型实现： $\dot{x}=Ax+Bu$ ； $y=Cx$

其中： $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&-2\end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ， $C=\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}$

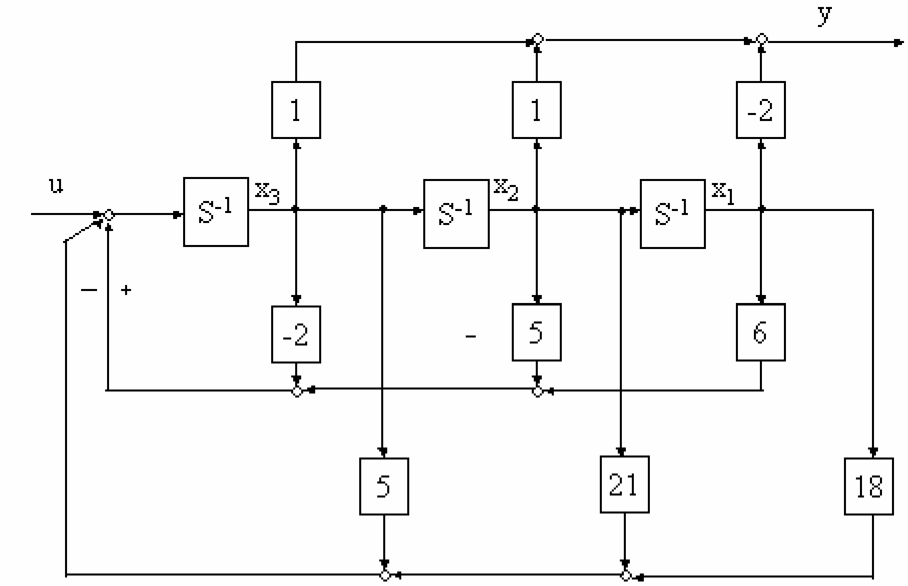
为使传递函数变为 $\dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}$ ，需配置极点，使得

$$D(s)=(s+2)^2(s+3)=s^3+7s^2+16s+12$$

令： $A-Bk=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6-k_1&5-k_2&-2-k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\12&-16&-7\end{bmatrix}$

解得： $\begin{cases}k_1=18\\k_2=21\\k_3=5\end{cases}$

配置极点后出现零极点对消，系统不可观。但传递函数只描述外部特性，故可达到目的。



8-31　　设被控系统动态方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&5\\1&0&1\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-2&0\\1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x$$

试判别被控系统可控性，可观测性，求出至输入的反馈矩阵，使闭环极点位于-0.57，$-0.22\pm j1.3$，并画出状态变量图。

解：　$$P_c=\begin{bmatrix}B&\vdots&AB&\vdots&A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0&5&5&-10\\1&-2&1&1&1&3\\0&1&1&-5&-7&11\end{bmatrix}$$

$rank\quad P_c=3=n$，　系统可控

$$P_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\0&-3&10\end{bmatrix}$$

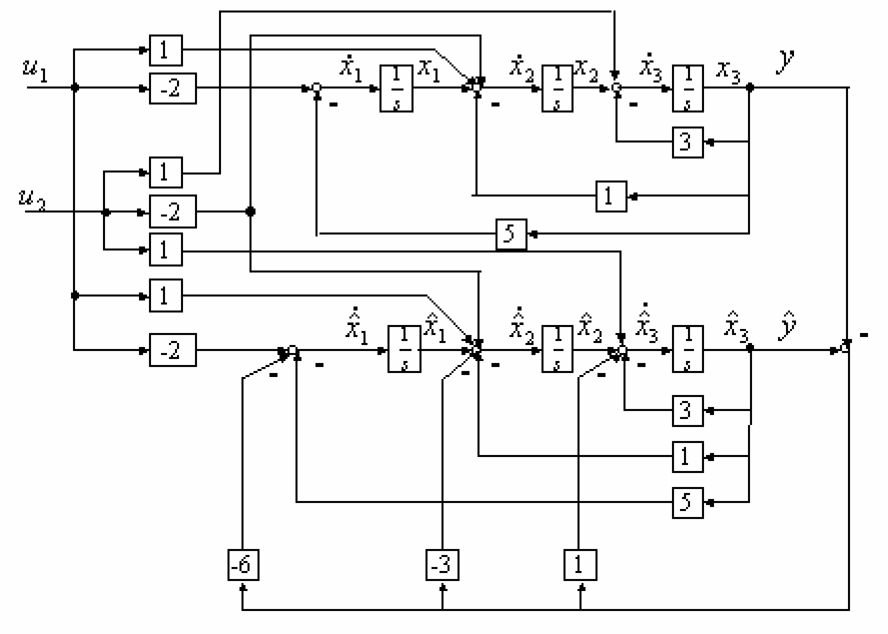
$rank\ P_0=3=n$，　系统可观测。

$$A-HC=\begin{bmatrix}0&0&5\\1&0&1\\0&1&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_0\\h_1\\h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&5-h_0\\1&0&1-h_1\\0&1&-3-h_2\end{bmatrix}$$

令：$|sI-(A-HC)|=(s+0.57)(s+0.22+j1.3)(s+0.22-j1.3)$

即：$\begin{vmatrix}s&0&h_0-5\\-1&s&h_1-1\\0&-1&s+3+h_2\end{vmatrix}=s^3+(3+h_2)s^2+(h_1-1)s+(h_0-5)=s^3+s^2+2s+1$

解得：$\begin{cases}h_0=6\\h_1=3\\h_2=-2\end{cases}$



8-32 已知系统动态方程各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}$$

试检查可观测性，设计 $(n-p)$ 维观测性，并使所有极点配置在 -4 。

解：检查可观测性：$P_0=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

$rank\ P_0=3=n$，可观测。设计 $n-q=3-1=2$ 维降维观测器：

构造Q阵，求Q^{-1}。

$$Q=\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

经Q^{-1} 变换后系统方程为：

$$\dot{\overline{X}}=\overline{A}\overline{X}+\overline{B}u \qquad ; y=\overline{y}=\overline{C}\overline{X}$$

其中：$\overline{A}=QAQ^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 4 & -2 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \overline{B}=QB=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\overline{C}=CQ^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 4 & -2 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$\overline{y}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}=\overline{x}_3$$

降维观测器方程为：

$$\dot{w}=(\overline{A}_{11}-H\overline{A}_{21})w+(\overline{B}_1-H\overline{B}_2)u+\left[(\overline{A}_{11}-H\overline{A}_{21})H+\overline{A}_{12}-H\overline{A}_{22}\right]\overline{y}$$

$$\overline{A}_{11}-H\overline{A}_{21}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3h_0 & 2+2h_0\\ 4-3h_1 & -2+2h_1\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}_1-H\overline{B}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}-h_0\\ -h_1\end{bmatrix}$$

$$\left[(\overline{A}_{11}-H\overline{A}_{21})H+\overline{A}_{12}-H\overline{A}_{22}\right]=\begin{bmatrix}-3h_0^{\ 2}+2h_0h_1+2h_1\\ 2h_1^{\ 2}-3h_0h_1+4h_0-3h_1+1\end{bmatrix}$$

$$\dot{w}=\begin{bmatrix}1-3h_0 & 2+2h_0\\ 4-3h_1 & -2+2h_1\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-3h_0^{\ 2}+2h_0h_1+2h_1\\ 2h_1^{\ 2}-3h_0h_1+4h_0-3h_1+1\end{bmatrix}\overline{y}$$ 由观测器特征方程，令：

$$\left|sI-(\overline{A}_{11}-H\overline{A}_{21})\right|=(s+4)^2$$

即：
$$\begin{vmatrix}s-1+3h_0 & -2-2h_0\\ -4+3h_1 & s+2-2h_1\end{vmatrix}=s^2+8s+16$$

解得：
$$\begin{cases}h_0=5.4\\ h_1=4.6\end{cases}$$

所以：
$$\dot{w}=\begin{bmatrix}-15.2 & 12.8\\ -9.8 & 7.2\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}-5.4\\ -4.6\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-28.6\\ -23.4\end{bmatrix}\overline{y}$$

$$\hat{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\hat{\overline{x}}_1\\ \hat{\overline{x}}_2\\ \cdots\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\overline{x}}_1\\ \hat{\overline{x}}_2\\ \cdots\\ \hat{\overline{x}}_3\end{bmatrix}$$

将 $\hat{\overline{x}}$ 变换回原状态空间：

$$\hat{\overline{x}}=\begin{bmatrix}w_1+5.4\overline{y}\\ w_2+4.6\overline{y}\\ \overline{y}\end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = Q^{-1}\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\\ \hat{\bar{x}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_1 + 5.4\bar{y}\\ w_2 + 4.6\bar{y}\\ w_1 - w_2 + 1.8\bar{y}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\bar{y} = \bar{x}_3\\ \begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix} = w + H\bar{y} = \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5.4\\ 4.6\end{bmatrix}\bar{x}_3 = \begin{bmatrix}w_1 + 5.4\bar{x}_3\\ w_2 + 4.6\bar{x}_3\end{bmatrix}\end{cases}$$