武汉大学 2024-2025 学年第二学期期末考试
线性代数 A（A 卷）参考答案

姓名____________ 学号____________

一、（10 分）计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，这里 $a_i \neq 1, i=1,2,\cdots n.$

解：$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\text{第3行}-\text{第1行} \\ \cdots\cdots \\ \text{第n行}-\text{第1行}}]{\text{第2行}-\text{第1行}} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a_1 & a_2-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a_1 & 0 & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{(i=2,3,}\cdots\text{,n)}]{\text{第1列+第i列}\times\frac{a_1-1}{a_i-1}} \begin{vmatrix} a_1+\frac{a_1-1}{a_2-1}+\cdots+\frac{a_1-1}{a_n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+\frac{a_1-1}{a_2-1}+\cdots+\frac{a_1-1}{a_n-1})(a_2-1)\cdots(a_n-1)$$

$$=(1+\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n-1})(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1)$$

二、（10 分）已知 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 分别求 $A_{41}+A_{42}$ 与 $A_{43}+A_{44}$ 的值。

解：$A_{41}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}=12$

$A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_4-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-9$

三、（12 分）设 A、B 均是同阶方阵，B 是可逆矩阵，且满足 $A^2+AB+B^2=0$，证

明 A 、 A^2+B^2 以及 $A^{-1}+B^{-1}$ 都是可逆矩阵。

证： 因为 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$，则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2\neq 0$

所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而 A 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆。

注意到 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{AB}$，$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right|=\left|-\boldsymbol{AB}\right|=\left|-\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$，因而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆。

注意到 $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})BB^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，

$$\left|A^{-1}+B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|\left|(A+B)\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 A 、 B、$A+B$ 均可逆，故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0,|\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$

所以有 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0$ ， 即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。

四、（12 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解，求参数 a, b 的值及方程组的通解。

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}$

增广矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1-r_2]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ a-2 & 0 & 0 & b+3 & 0 \end{pmatrix}$

显然 $r(A)\geq 2$，又因为线性方程组有 3 个线性无关的解，所以对应的齐次线性方程组有两个线性无关的解，说明 $n-r(A)\geq 2$，即 $r(A)\leq 2$，所以 $r(A)=2$，进一步得到 $a=2,\quad b=-3$

（也可以通过增广矩阵分情况讨论）

通解为 $x=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2\in R$

五、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩和向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

即向量组的秩为3，一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$\alpha_3=2\alpha_1$,

$\alpha_5=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$

六、（10 分）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$是$R^n$中$n-1$个线性无关的向量，$\beta_i$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$均正交$(i=1,2)$，证明：$\beta_1,\beta_2$线性相关。

证明：　　因为$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$，$\beta_1,\beta_2$是$n+1$个$n$维向量，故必线性相关，存在

$k_1,\cdots,k_{n-1},\ell_1,\ell_2$使得　$k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0\quad\cdots\cdots(1)$

因$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关，故$\ell_1,\ell_2$不全为0　　用$\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2$与$(1)$式两边作内积得

$[\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2\ ,\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2]=0$　故$\ell_1\beta_1+\ell_2\beta_2=0$，$\ell_1,\ell_2$不全为0，$\beta_1,\beta_2$线性相关。

七、（12 分）在四维实向量构成的向量空间R^4中, 已知：$\gamma=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

（1）求γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标；

（2）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵$P$；

（3）求γ在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标。

解：（1）γ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，

（2）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，则

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&-1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，

则 $P=A^{-1}B=B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&-1&-1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,

（3）γ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标 $P^{-1}x=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

或利用 γ 由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性表示，通过求解线性方程组得到。

八、（12 分）设 n 阶矩阵 A 的 n^2 个元素全为 1，试求一可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出与 A 相似的对角矩阵。

解：A 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$，

对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

可逆阵 $P=\left(\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n\right)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

对角矩阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

九、（12 分）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3,$$

（1）写出二次型 f 对应的矩阵 A；

（2）求正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵。

（3）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在 $\|x\|=2$ 时的最大值和最小值

解：（1）二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

A 的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$。

由 $(E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

由 $(-2E-A)x=0$，求得对应 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

因 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是分别属于三个不同特征值的特征向量，故正交。令 $Q=\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}$，

经过正交变换 $x=Qy$,

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^TQ^TAQy=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

(3) 最大值为 4，最小值-8

注：正交矩阵不唯一