第3章

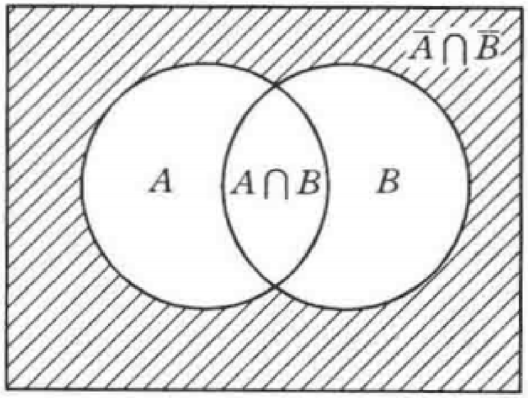
容斥原理和鸽巢原理

3.1 De Morgan定理

- **De Morgan定理：**
- **若A和B是集合U的子集，则**

  （1）$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  （2）$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



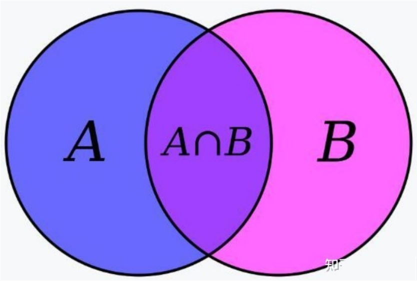
- **推广到一般形式：**

  （1）$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$

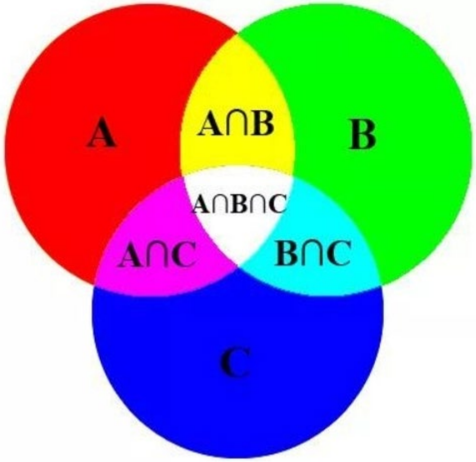
  （2）$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

3.2 容斥原理

- 假定|A|表示集合A的元素个数，在此我们主要讨论有限集合。
- 定理3-1.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
- $-|A \cap B| - |B \cap \boldsymbol{C}| - |A \cap \boldsymbol{C}|$
- $+|A \cap B \cap \boldsymbol{C}|$



容斥原理

- 例3-2.一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理、化学的22人；同时修三门课的学生3人，问这学校共有多少人（每人必须至少选一门课）？

解:设M为修数学课学生的集合；P为修物理课学生的集合；C为修化学课学生的集合。

容斥原理

由题意知，

$|M| = 170$ $|P| = 130$ $|C| = 120$ $|M \cap P| = 45$

$|M \cap C| = 20$ $|P \cap C| = 22$ $|M \cap P \cap C| = 3$

所求人数为

$$|M \cup P \cup C| = 170 + 130 + 120 - 45 - 20 - 22 + 3 = 336$$

容斥原理

- **例3-3.N={1,2,…,500}，求N中能被2，3，5整除的数的个数。**

解 设 A_1, A_2, A_3 **分别为被2、3、5整除的数的集合。那么有**

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250 \qquad |A_2| = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100 \qquad |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 83$$

容斥原理

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{10} \right\rfloor = 50 \qquad |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor = 16$$

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2| \\
&\qquad\qquad\qquad - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 250 + 166 + 100 - 83 - 50 - 33 + 16 = 366
\end{aligned}$$

容斥原理

- 结合De Morgan定理作为上述法则的第一个推广：令S是一个有限集合，P_1, P_2是S中每个的元素可能具有的两个性质。 A_1，A_2 分别表示S中具有性质P_1，P_2的元素的集合 $A_i = \{x|P_i(x) \wedge x\epsilon S\}$ $i = 1,2$ ，那么有

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

容斥原理

- 更一般地，设P_1，P_2，…，P_n是S中每个的元素可能具有的n个性质。令$A_i(i=1,2,\ldots,n)$是S中具有性质P_i的元素的集合 $A_i=\{x|P_i(x)\wedge x\epsilon S\}\quad i=1,2,\ldots,n$ ，
- 则有

$$
\begin{aligned}
&|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n| \\
&=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&\qquad-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|
\end{aligned}
$$

容斥原理

- **定理3-2：**

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

证 任取S中的一个元素a，

(1) 若a不具有这n个性质中的任何一个，则a对方程左端的贡献为1，而对方程右端的贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^n 0 = 1$$

容斥原理

- **方程右端各项：**

$$|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ -\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

- **(2) 若a具有这n个性质中的m个，则a对方程左端的贡献为0，而对方程右端的贡献为**

$$\binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}$$

$$=(1-1)^m=0$$

容斥原理

- **推论：**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- **证**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}|$$
$$= |\mathrm{S}| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$$

3.3 容斥原理举例

- 例3-4.求a,b,c,d,e,f 六个字母的全排列中不允许出现 ace 和 df 图象的排列数。

解 A_1为出现ace图象的排列的集合，A_2为出现df图象的排列的集合，那么有

$$|A_1| = 4! \qquad |A_2| = 5! \qquad |A_1 \cap A_2| = 3!$$

所求排列数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = 6! - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$= 6! - 4! - 5! + 3! = 582$$

3.3 容斥原理举例

- 例3-5.求由a, b, c, d四个字符构成的n位符号串中，a, b, c至少出现一次的符号串的数目。

证 设 A_1, A_2, A_3 分别表示不出现a, b, c的n位符号串的集合。则

$$|A_i| = 3^n, \qquad i = 1,2,3 \qquad |A_i \cap A_j| = 2^n, \qquad i \neq j, i, j = 1,2,3$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$\begin{aligned}&|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\ &= 4^n - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| \\ &\qquad + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1\end{aligned}$$

3.3 容斥原理举例

- **另解：设** $a_n(n=0,1,2,\ldots)$ **为所求的n位符号串数目，则{a_n}的指数型母函数为**

$$G(x)=(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots)(\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots)^3$$

$$=e^x(e^x-1)^3=e^x(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1)$$

$$=e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-3\cdot 3^n+3\cdot 2^n-1)\frac{1}{n!}x^n$$

$a_n=(4^n-3\cdot 3^n+3\cdot 2^n-1)$ n=0,1,...

3.3 容斥原理举例

- 例3-7. 用26个英文字母作不允许重复的全排列，要求排除dog, god, gum, depth, thing字样的出现，求满足这些条件的排列数。

解 设A_1为出现dog的排列的集合；

A_2为出现god的排列的集合；

A_3为出现gum的排列的集合；

A_4为出现depth的排列的集合；

A_5为出现thing的排列的集合。

3.3 容斥原理举例

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 24!$ $\quad$ $|A_4| = |A_5| = 22!$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_4| = |A_1 \cap A_5| = |A_2 \cap A_3| = 0$ $\quad$ $|A_1 \cap A_3| = 22!$

$|A_2 \cap A_4| = |A_2 \cap A_5| = |A_3 \cap A_4| = |A_3 \cap A_5| = 20!$

$|A_4 \cap A_5| = 19!$ $\quad$ $|A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 17!$

所求的排列数为

$$\begin{aligned}&|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5|\\&= 26! - 3 \cdot 24! - 2 \cdot 22! + 22! + 4 \cdot 20! + 19!\\&- 17!\end{aligned}$$

3.3 容斥原理举例

例3-8.求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解 设n个布尔变量为 x_i, $i=1,2,\cdots,n$ ，自变量可能的取值有 2^n个，n个布尔变量的布尔函数有 2^{2^n} 个。

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个布尔函数，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不依赖于变量 x_i 是指对于每一 $(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 都有 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$

- 不依赖于某个布尔变量的布尔函数有 $2^{2^{n-1}}$个。
- …

不依赖于k个布尔变量的布尔函数有 $2^{2^{n-k}}$ 个。

3.3 容斥原理举例

- **设** $A_i, \quad i = 1,2,\cdots,n$ **为不依赖于布尔变量x_i的函数的集合，那么所求函数的个数为**

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$$
$$= 2^{2^n} - C(n,1)2^{2^{n-1}} + C(n,2)2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^n C(n,n)2$$

当n=2时

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = 2^{2^2} - C(2,1)2^2 + C(2,2)2 = 16 - 8 + 2 = 10$$

这10个完全二元的布尔函数是:

$x_1 \wedge x_2$， $x_1 \wedge \bar{x}_2$， $\bar{x}_1 \wedge x_2$， $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$， $x_1 \vee x_2$，
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$， $x_1 \vee \bar{x}_2$， $\bar{x}_1 \vee x_2$， $(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$，
$(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$

3.3 容斥原理举例

- **例3-9.欧拉函数** $\phi(n)$ **表示不大于n，且与n互素的正整数的个数。**

$\phi(1)=1$ $\phi(2)=1$ $\phi(3)=2$ $\phi(4)=2$ $\phi(5)=4$

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ **(n因式分解),** $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ **表示从1到n中能被** p_i **整除的数的集合，那么有**

$$|A_i|=\frac{n}{p_i}, \quad i=1,2,\cdots,k$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=\frac{n}{p_ip_j},i,j=1,2,\cdots,k,i\neq j$$

，

…

3.3 容斥原理举例

$$\phi(n) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k|$$

$$
\begin{aligned}
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) \\
&\quad + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\
&\quad - \cdots \\
&\quad \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}
\end{aligned}
$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

3.3 容斥原理举例

- **例** $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$$\phi(n) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16$$

3.3 容斥原理举例

- **例3-10. 错排问题**

设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ **表示i在第i位排列的集合，则有**

$$|A_i|=(n-1)!,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!,\qquad i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$$ **，…**

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|$$
$$=n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!-\cdots+(-1)^nC(n,n)1!$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

3.3 容斥原理举例

- **例3-11.在8个字母A,B,C,D,E,F,G,H的全排列中，求使A,C,E,G四个字母不在原来位置上的排列的数目。**

解 设A_1,A_2,A_3,A_4分别表示A,C,E,G在原来位置上排列的数目。所求数目为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$$
$$= 8! - C(4,1)7! + C(4,2)6! - C(4,3)5! + C(4,4)4!$$

$$= 40320 - 20160 + 4320 - 480 + 24 = 24024$$

习题

- 1.某甲参加一种会议，会上有6位朋友,某甲和其中每一个人在会上各相遇12次,每两个人各相遇6次,每3人各相遇4次,每4人各相遇3次,每5人各相遇 2.次,每6人各相遇1次,1人也没遇见的有5次,问某甲共参加几次会议?
- 2.求从1～500的整数中被3和5整除但不被7整除的数的个数.
- 3. 一年级有100名学生参加中文、英语和数学的考试,其中92人通过中文考试,75人通过英语考试，65人通过数学考试;其中65人通过中,英文考试,54人通过中文和数学考试,45人通过英语和数学考试,求通过3门学科考试的学生数.

习题

- **4. 1,2,…,n的全排列中不出现12,23,…,n(n-1)的排列数等于多少?**
- **5.1,2,…,n的圆排列,求不出现12,23,…,n(n-1),n1的排列数.**

3.4 棋盘多项式与有限制的排列

- **例3-12. 在4个x，3个y，2个z的全排列中，求不出现xxxx、yyy、zz图象的排列数。**

解 设 A_1, A_2, A_3 **分别为出现 xxxx、 yyy、 zz图象的全排列的集合。则**

$$|A_1| = \frac{6!}{3!\,2!} \qquad |A_2| = \frac{7!}{4!\,2!} \qquad |A_3| = \frac{8!}{4!\,3!} \qquad |A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{2!}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \frac{5!}{3!} \qquad |A_2 \cap A_3| = \frac{6!}{4!} \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$$

有限制的排列

- 所有全排列的个数为：$\frac{9!}{4!\,3!\,2!}$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$$

$$= \frac{9!}{4!\,3!\,2!} - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

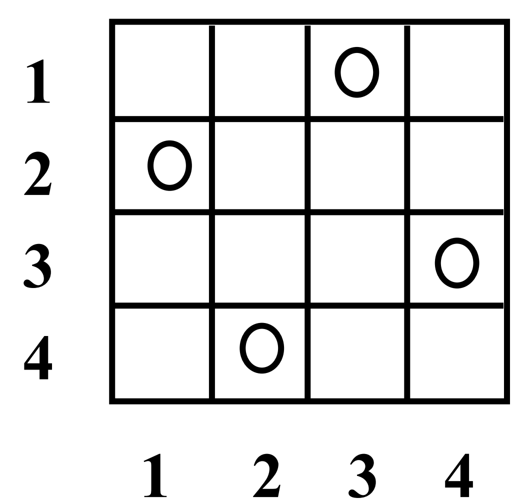
$$= \frac{9!}{4!\,3!\,2!} - \frac{6!}{3!\,2!} - \frac{7!}{4!\,2!} - \frac{8!}{4!\,3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{6!}{4!} - 3!$$

$$= 1260 - 60 - 105 - 280 + 12 + 20 + 30 - 6 = 871$$

棋盘多项式

- n个元素的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 可以看作是n个棋子在 $n\times n$ 的棋盘上的一种布局：每行每列有且仅有一个棋子，其中 p_i 是棋盘第 i 行棋子所在的列数。

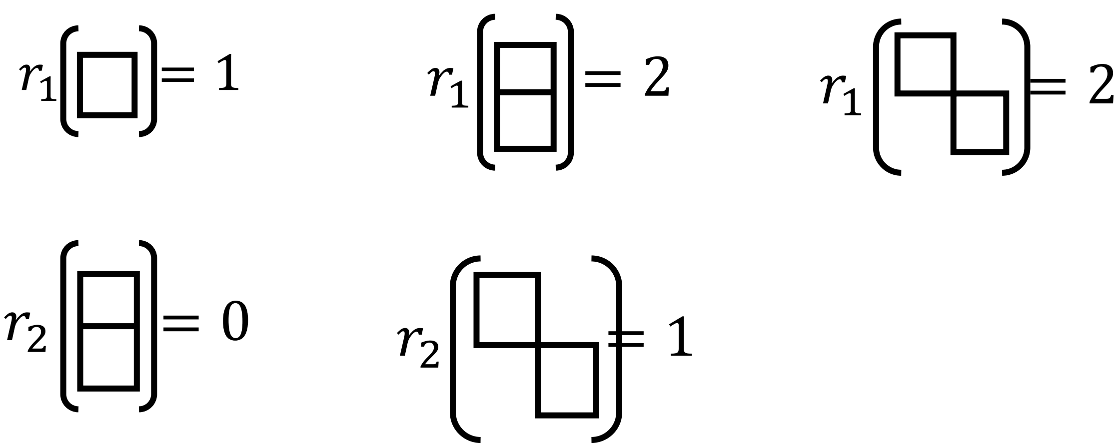
例如.排列3 1 4 2所对应的棋盘布局如下图所示



棋盘多项式

- 可以把棋盘C推广到任意形状($n \times n$ 棋盘若干棋格形成的残缺棋盘)。

  令 $r_k(C)$ 表示k只棋子布到棋盘C的不同的方案数，规则是当一个棋子置于棋盘的某一格子时，则这一格子所在的行和列都不能再布任何棋子。



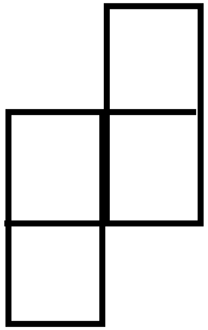
棋盘多项式

- 对于给定的棋盘C，称下列多项式

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k$$

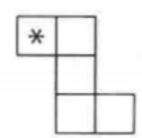
为棋盘C的棋盘多项式，其中n为棋盘C可以分布的最大格子数，并定义 $r_0(C)=1$ 。

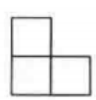
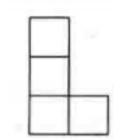
例如对右图所示的棋盘，其棋盘多项式为



$$R(C)=1+4x+3x^2$$

棋盘多项式

- 在棋盘C上选定一个格子，令$C_{(i)}$表示从棋盘C中删除所选定格子所在的行和列后所得到的棋盘，而$C_{(e)}$表示从棋盘C中删除所选定格子后所得到的棋盘。
- 例如：
- C: 

- 去除有*号的格子后有：
- $C_{(i)}$:  $C_{(e)}$: 

棋盘多项式

- 在棋盘C上选定一个格子，$r_k(C)$ 的所有分布方案可以分为两类：

(1)该格子放置棋子：有 $r_{k-1}(C_{(i)})$ 种放法；

(2)该格子不放置棋子:有 $r_k(C_{(e)})$ 种放法.

故有 $r_k(C) = r_{k-1}(C_{(i)}) + r_k(C_{(e)})$

棋盘多项式

- 由上述关系得

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)\,x^k \quad = r_0(C)+\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k$$

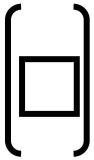
$$=r_0(C)+\sum_{k=1}^{n}(r_{k-1}(C_{(i)})+r_k(C_{(e)}))x^k$$

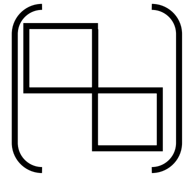
$$=\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_{(i)})x^k+r_0(C_{(e)})+\sum_{k=1}^{n} r_k(C_{(e)})x^k$$

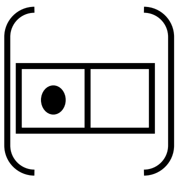
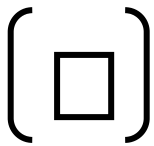
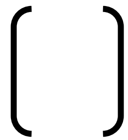
$$=x\sum_{k=1}^{n}(r_{k-1}(C_{(i)})x^{k-1}+\sum_{k=0}^{n}(r_k(C_{(e)})x^k$$

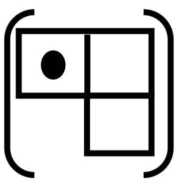
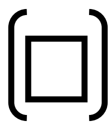
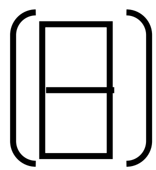
$$=xR(C_{(i)})+R(C_{(e)})$$

棋盘多项式

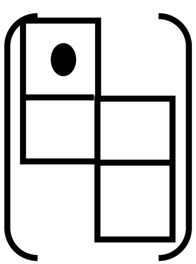
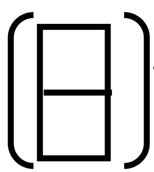
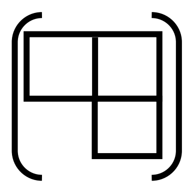
R  $= 1 + x$

R  $= 1 + 2x + x^2$

R  $= R$  $+ \mathrm{x}R$  $= x + (1 + x) = 1 + 2x$

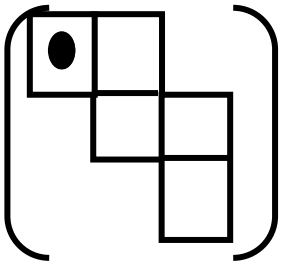
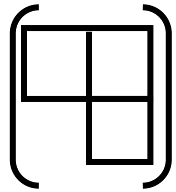
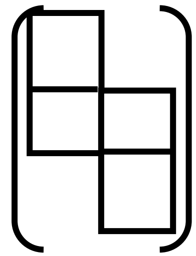
R  $= xR$  $+ R$  $= x(1 + x) + (1 + 2x)$

$= 1 + 3x + x^2$

R  $= xR$  $+ R$ 

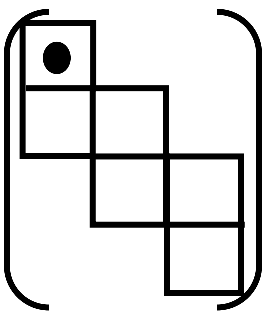
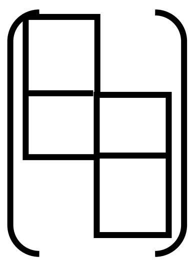
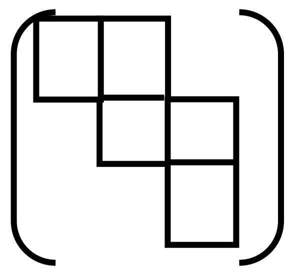
$= x(1 + 2x) + (1 + 3x + x^2)$ $= 1 + 4x + 3x^2$

棋盘多项式

R  $= xR$  $+ R$ 

$$= x(1+3x+x^2)+(1+4x+3x^2)$$

$$= 1+5x+6x^2+x^3$$

R  $= xR$  $+ R$ 

$$= x(1+4x+3x^2)+(1+5x+6x^2+x^3)$$

$$= 1+6x+10x^2+4x^3$$

棋盘多项式

- 若棋盘是由两个部分棋盘C_1和C_2组成，其中C_1中的任一格子与C_2中的任一格子均不在同一行或同一列中，那么有

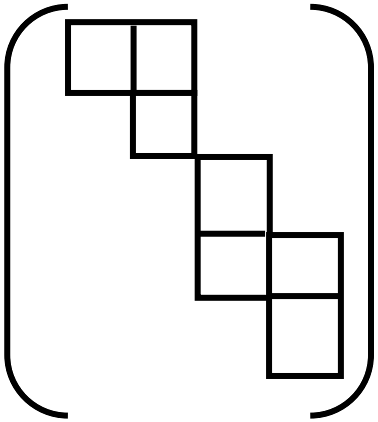
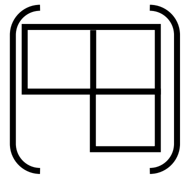
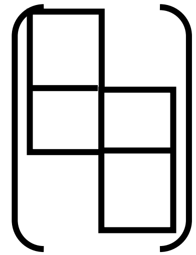
$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$$

这时有

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)\right)x^k$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)x^j\right)=R(C_1)R(C_2)$$

棋盘多项式

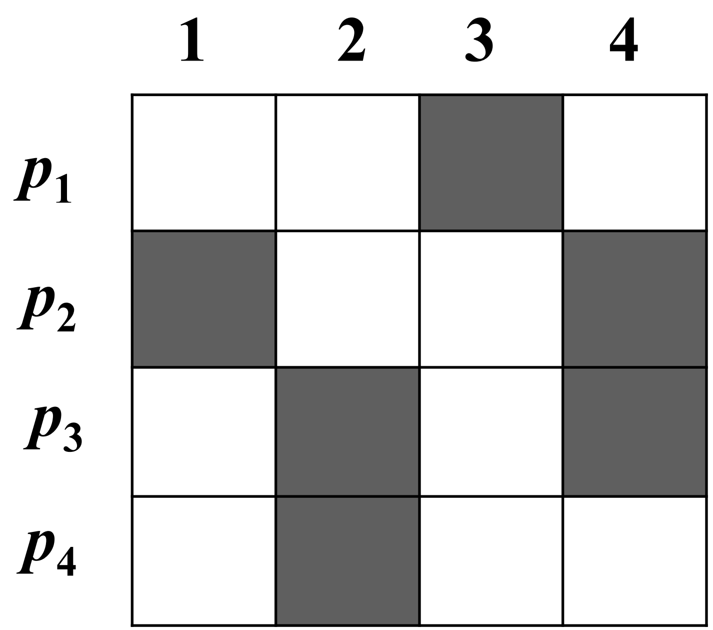
R  $= R$  $*$ R 

$$= (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 3x^2)$$

$$= 1 + 7x + 16x^2 + 13x^3 + 3x^4$$

3.5 有禁区的排列

- 例 考虑1，2，3，4的排列， 要求 p_1 不能为3，p_2 不能为1和4，p_3 不能为2和4， p_4不能为2。可以用如下的棋盘表示限制条件：



3.5 有禁区的排列

- **定理3-3. 有禁区的排列数为**

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n$$

其中 r_i 是有 i 个棋子布置到禁区部分的方案数。

证：设A_i(i=1,2,…,n)为第i行的棋子落在禁区内的方案数，那么有

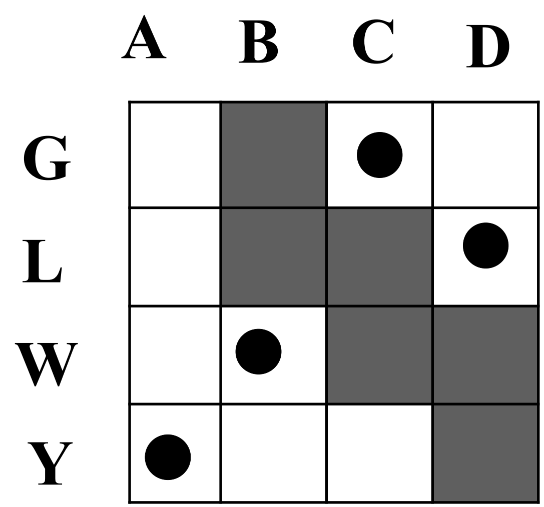
$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| \\ = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots \\ + (-1)^n r_n$$

有禁区的排列

- 例3-14.有G,L,W,Y 4位工作人员，A,B,C,D为四项任务，但G不能从事任务B；L不能从事任务B，C；W不能从事任务C，D；Y不能从事任务D。若要求每人从事各自力所能及的一项工作，试问有多少种不同的方案?

解：如图有下列的工作方案：

G	L	W	Y
C	D	B	A



有禁区的排列

- 图中禁区的棋盘多项式为

$$1+6x+10x^2+4x^3$$

故所求的方案数为：

$$N=4!-6\cdot 3!+10\cdot 2!-4\cdot 1!$$

$$=24-36+20-4=4$$

有禁区的排列

- **例3-15. 错排问题。**

解答：其对应的禁区棋盘为所有禁区格子在对角线上

$$R\begin{pmatrix}\square & & \\ & \square & \\ & & \square\end{pmatrix} = (1+x)^n = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n$$

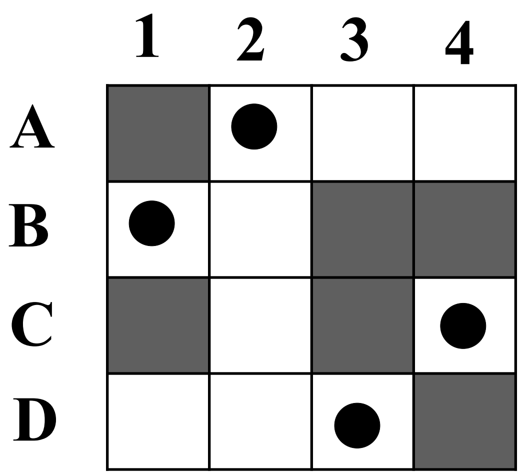
故错排的个数为：

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)0!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

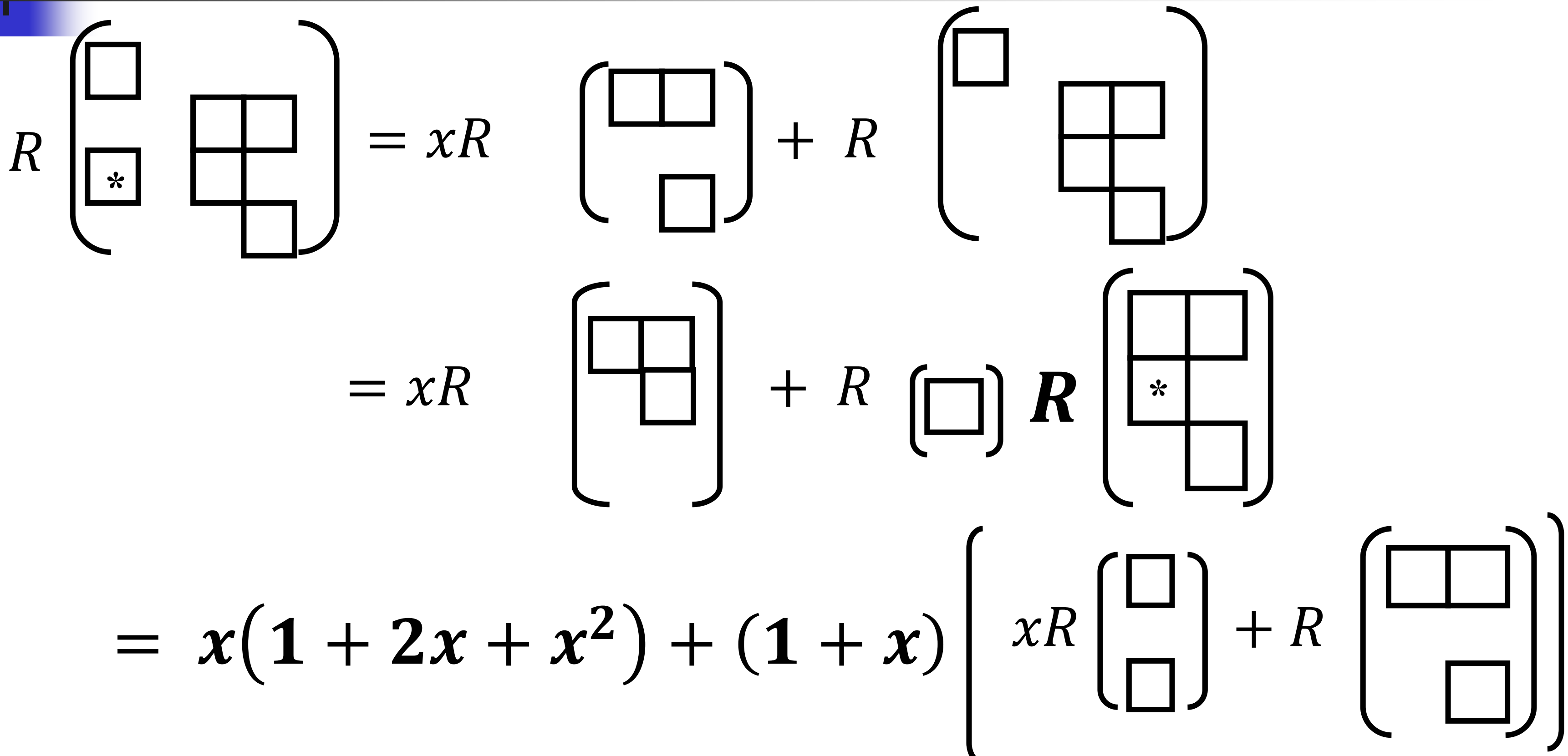
有禁区的排列

- 例3-16.设4种材料A,B,C,D拟分配去做1,2,3,4这4种产品。若A不宜于1的产品；B不宜于3,4的产品；C不宜于1,3的产品；D不宜于4的产品。试问有多少种分配方案，使每种产品有一种其适宜的材料？



A	B	C	D
2	1	4	3

有禁区的排列

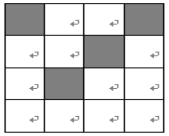


$$= x + 2x^2 + x^3 + (1+x)[x(1+2x) + (1+3x+x^2)]$$

$$= 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

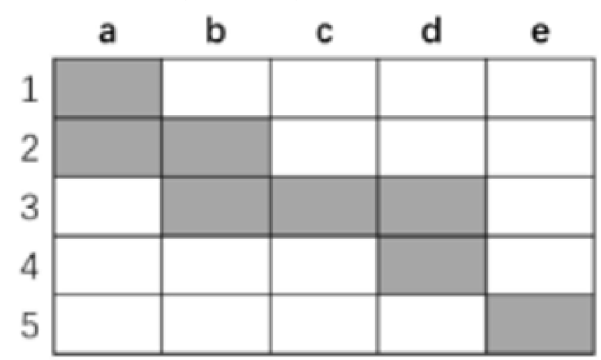
所求分配方案数为 $4! - 6\cdot 3! + 10\cdot 2! - 4\cdot 1! = 4$

习题

- 6.图形  的棋盘多项式是________________.

- 7. A,B,C三种材料用作产品I，II，III的原料,但要求I禁止用B和C作原料，II不能用B作原料，不允许用A作原料,问有多少种安排方案(假定每种材料只作一种产品的原料)?

- 8.有5名旅客1,2,3,4,5希望去5座城市 a,b,c,d,e旅行，任意2名旅客不能去相同的城市，但是旅客1不愿意去城市a，旅客2不愿意去城市a,b，旅客3不愿意去城市 b,c,d，旅客4不愿意去城市d，旅客5不愿意去城市e。该问题若采用棋盘表示:



(1)求该问题的棋子多项式。

* (2)求旅客4去城市c的概率。

3.6 广义容斥原理

- 设P_1, P_2，…，P_n是集合S中每个的元素可能具有的n个性质。令$A_i(i=1,2,\ldots,n)$是S中具有性质P_i的元素的集合.

记 $\alpha(0) = |S|$

$$\alpha(1) = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

$$\alpha(2) = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$$

……

$$\alpha(n) = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

3.6 广义容斥原理

令β(m)为恰好有m个性质的元素总和，m=0,1,2...,n。
则：

$$\beta(0) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$$

$$\beta(1) = |A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| + |\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cdots \cap \bar{A}_n| + \cdots + |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n|$$

$$\beta(2) = |A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cdots \cap \bar{A}_n| + |A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| \cdots + |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$$

……

$$\beta(n) = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

3.6 广义容斥原理

- **定理 3-4：**

$$\beta(m) = \alpha(m) - \binom{m+1}{m}\alpha(m+1) + \binom{m+2}{m}\alpha(m+2) - \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha(n)$$

$$m = 0,1,2,\cdots,n$$

3.6 广义容斥原理

- 证：任取一个元素a。

  若a有少于m个性质，那么a对方程的左端和右端的贡献都为0。

  若a恰有m个性质，那么a对方程的左端和右端的贡献都为1。

  若a恰有 $t > m$ 个性质，那么a对等式的左端贡献为0，而对等式的右端的贡献为

3.6 广义容斥原理

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}, \qquad k$$

$\geq r$

$$\binom{t}{m}-\binom{m+1}{m}\binom{t}{m+1}+\binom{m+2}{m}\binom{t}{m+2}-\cdots+(-1)^{t-m}\binom{t}{m}\binom{t}{t}$$

$$=\binom{t}{m}-\binom{t}{m}\binom{t-m}{1}+\binom{t}{m}\binom{t-m}{2}-\cdots+(-1)^{t-m}\binom{t}{m}\binom{t-m}{t-m}$$

$$=0$$

$$=\binom{t}{m}\left[\binom{t-m}{0}-\binom{t-m}{1}+\binom{t-m}{2}-\cdots+(-1)^{t-m}\binom{t-m}{t-m}\right]$$

3.6 广义容斥原理

- 例3-17. 某学校有12位教师，已知教数学、物理、化学课教师分别有8位，6位，5位，其中有5位既教数学又教物理，有4位兼教数学和化学，兼教物理和化学的有3位；有3位教师教3门课，试问教数、理、化以外课的教师有几位？只教一门课的教师有几位？正好教两门课的教师有几位？

解 设A_1, A_2 , A_3分别表示教数学、物理、化学课教师的集合。则

$|A_1| = 8$ $|A_2| = 6$ $|A_3| = 5$ $|A_1 \cap A_2| = 5$

$|A_1 \cap A_3| = 4$ $|A_2 \cap A_3| = 3$ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

3.6 广义容斥原理

- 教数、理、化以外课的教师的人数为

$$\beta(0) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$$

$$= 12 - (8 + 6 + 5) + (5 + 4 + 3) - 3 = 2$$

- 只教一门课的教师的人数为

$$\beta(1) = \alpha(1) - C(2,1)\alpha(2) + C(3,1)\alpha(3)$$

$$= (8 + 6 + 5) - 2(5 + 4 + 3) + 3 \cdot 3 = 4$$

- 正好教两门课的教师的人数为

$$\beta(2) = \alpha(2) - C(3,2)\alpha(3) = (5 + 4 + 3) - 3 \cdot 3 = 3$$

3.7 广义容斥原理的应用

- 问题：求满足线性方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的数目。

上述方程的非负整数解与 r 个无区别的球放进n个有标志的盒子 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 并允许重复的方案一一对应。

故上述方程非负解的个数为 $\binom{n+r-1}{r}$

3.7 广义容斥原理的应用

- 例3-18.考虑下列问题：求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15, \qquad 0 \le x_1 \le 5, \qquad 0 \le x_2 \le 6, \qquad 0 \le x_3 \le 7$$

的整数解的数目。

解答：若无上界条件，方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15, \qquad x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0$$

则非负整数解的数目为

$$\binom{3+15-1}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2}$$

3.7 广义容斥原理的应用

- 令 A_1，A_2，A_3 分别为所有非负整数解中满足 $x_1 \geq 6$，$x_2 \geq 7$，$x_3 \geq 8$ 的解的集合。
- 则所求解的个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = \binom{17}{2} - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= \binom{17}{2} - \left(\binom{3+9-1}{9} + \binom{3+8-1}{8} + \binom{3+7-1}{7}\right) + \left(\binom{3+2-1}{2} + \binom{3+1-1}{1} + \binom{3+0-1}{0}\right) - 0$$

$$= 10$$

[例 3-18] 对于问题

$$x_1+x_2+x_3=15$$

$$0\leqslant x_1\leqslant 5,\quad 0\leqslant x_2\leqslant 6,\quad 0\leqslant x_3\leqslant 7$$

求整数解数目.

若不附加上界条件的解根据公式(*)应为

$$\binom{15+3-1}{15}=\binom{17}{15}=\binom{17}{2}=272/2=136$$

对于有上界的问题只要作一变换

$$\xi_1=5-x_1,\quad \xi_2=6-x_2,\quad \xi_3=7-x_3$$

$$\begin{aligned}\xi_1+\xi_2+\xi_3&=5-x_1+6-x_2+7-x_3\\&=18-(x_1+x_2+x_3)=3,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 5\end{aligned}$$

导致 $\xi_1=5-x_1\geqslant 0$,同理 $\xi_2\geqslant 0$,$\xi_3\geqslant 0$

于是问题变成

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=3,$$

$$\xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0$$

整数解的数目

$$\binom{2+3}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$$

P139方法的适用条件？

3.7 广义容斥原理的应用

- **考虑下列问题：求方程**

$x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 满足 $1\le x_i\le 8\,(1\le i\le 4)$

的整数解的数目。

解1：作变换 $y_i=x_i-1, i=1,2,3,4$，则方程组变化为

$$\begin{gathered} y_1+y_2+y_3+y_4=14 \\ 0\le y_i\le 7, i=1,2,3,4 \end{gathered}$$

作变换 $Z_i=7-y_i$，$i=1,2,3,4$？

解2：作变换 $y_i=8-x_i$， $i=1,2,3,4$，则方程组变化为

$$\begin{gathered} y_1+y_2+y_3+y_4=14 \\ 0\le y_i\le 7, i=1,2,3,4 \end{gathered}$$

作业

- **9. 求满足条件的**

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20, \qquad 3 \le x_1 \le 9, \qquad 0 \le x_2 \le 8, \qquad 7 \le x_3 \le 17$$

整数解数目.

- **10. 求满足条件的**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \qquad 1 \le x_1 \le 5, \qquad 0 \le x_2 \le 7, \qquad 4 \le x_3 \le 8, \qquad 2 \le x_3 \le 6$$

整数解数目.

- **11. 4位十进制数abcd ,满足 a＋b+c十d=17, 1≤a≤3, 2≤b≤4, 3≤c≤5,4 ≤d≤6, 试求这样的数的数目.**

3.8 第2类司特林数展开式

- n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数用S(n,m)表示，称为第二类Stirling数。
- 我们先考虑另一个问题：
- n个有区别的球放到m个不同的盒子中，要求无一空盒，求不同的方案数。
- 等价于:求从A到B的所有满射函数的个数,其中

  |A|=n,|B|=m(离散数学课中的习题)

3.8 第2类司特林数展开式

设A_i为使第i个盒子为空的方案的集合，i=1,2,…,m。则有

$$\alpha(0)=m^n$$

$$\alpha(1)=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|=\binom{m}{1}(m-1)^n$$

$$\alpha(2)=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\cdots+|A_{m-1}\cap A_m|=\binom{m}{2}(m-2)^n$$

$$\alpha(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$$

$$=\binom{m}{k}(m-k)^n,\qquad k=0,1,2,\cdots,m$$

3.8 第2类司特林数展开式

- 则n个有区别的球放到m个不同的盒子中，无一空盒的方案数为

$$N=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_m|=\beta(0)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\alpha(k)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$$

则由两个问题之间的区别知有： $N=m!\,S(n,m)$

故 $S(n,m)=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$

3.8 第2类司特林数展开式

- 例

$$S(n,2)=\frac{1}{2!}\left[\binom{2}{0}2^n-\binom{2}{1}1^n\right]\quad=\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$$

$$S(n,3)=\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{0}3^n-\binom{3}{1}2^n+\binom{3}{2}1^n\right]$$

$$=\frac{1}{3!}(3^n-3\cdot 2^n+3)\quad=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1}$$

3.8 第2类司特林数展开式

- **推论 1**

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n=0,\qquad n<m$$

- **推论 2 由** $S(m,m)=1$ **，**

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^m=m!$$

3.9 欧拉函数$\emptyset(n)$

- 欧拉函数

  $\emptyset(n)$ = 小于等于 n 且与 n 互质的正整数的个数。

- **定理3-5.已知**$= \boldsymbol{n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}$，**则**

- $\boldsymbol{\emptyset(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_1})}$.

- **证明：**定义 A_i: $1\sim n$中为p_i倍数的数的集合, 于是 $|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2,\cdots,k$.

  对于两个集合 A_i 、A_j **的交集，** $p_i \neq p_j$ **时，**

$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$ 。**多个集合的交集，公式类似。**

3.9 欧拉函数$\emptyset(n)$

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap .. \cap \overline{A_k}| \\
&= n - |A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_k| \\
&= n - (\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_k|) \\
&= n - (\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}) + (\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}) \\
&\quad + \ldots \pm (\frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}) \\
&= n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})
\end{aligned}
$$

3.9 欧拉函数$\emptyset(n)$

- 欧拉函数的性质：
  - (1) $\emptyset(\boldsymbol{n})$是积性函数：当 n 和 m 互质时， $\emptyset(\boldsymbol{mn})$ $=\emptyset(\boldsymbol{m})$ $\emptyset(\boldsymbol{n})$
  - (2) n 为质数则 $\emptyset(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$
  - (3) n 为奇数则 $\emptyset(\mathbf{2}\boldsymbol{n}) = \emptyset(\boldsymbol{n})$
  - (4)若 a 为质数, $\mathrm{b} \equiv \mathrm{a} \bmod 0$, 则$\emptyset(\boldsymbol{ab}) = \mathbf{a}\emptyset(\boldsymbol{b})$
  - (5)n为p^k 则$\emptyset(n) = p^k - p^{k-1}$
  - (6)$\sum_{d|n} \emptyset(d) = n$

欧拉函数可以用线性筛来求!

*3.11 Möbius反演定理

- 容斥原理是Möbius反演(Möbius Inversion)在有限偏序集上的一个实例。
- 定理3-6.设$f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数，若

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)$$

则 $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$

- 反之亦然。

- 其中 $\mu(d)=\begin{cases}1\text{，若d}=\text{偶数个不同素数之积}\\-1\text{，若d}=\text{奇数个不同素数之积}\\0\text{，}\qquad\text{其他}\end{cases}$

3.11 Möbius反演定理

- 称μ(n)为Möbius函数，即正整数n分解为质因数后，若n有多个相同的质因子，则μ(n)=0。当n的质因子各不相同时，若n有偶数个质因子，则μ(n)=1，若n有奇数个质因子，则μ(n)=−1。
- 例如：
- $\mu(1)=1$，$\mu(2)=-1$，$\mu(3)=-1$，
- $\mu(4)=0$，$\mu(8)=0$
- 对于单个数字的Möbius函数，可以直接用试除法分解质因数求解，时间复杂度为O($\sqrt{n}$)。若要求求解1~n的所有Möbius函数，则可以配合线性筛求解

3.11 Möbius反演定理

所有因子之和

- **例3-21.已知**

$$f(n)=\sum_{d|n} d,\ f(1)=1,\ \ f(2)=1+2=3$$

$$f(4)=1+2+4=7, f(6)=1+2+3+6=12$$

根据反演定理， $g(n)=n$**可得**

$$n=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$$

不同因子个数

- **例3-22.已知**

$$f(n)=\sum_{d|n} 1,\ f(1)=1,\ \ f(2)=1+1=2$$

$$f(4)=3, f(8)=4, \ldots,$$

根据反演定理， $g(n)=1$**可得**

$$1=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$$

3.11 Möbius反演定理

- **例3-23(圆周排列问题).从集合A=$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$中取n个作周期为n的允许重复的排列，其排列数记为M_n.**
- **当d|n时，每一个周期为d的允许重复的排列**

$$\underbrace{\underbrace{a_1a_2\cdots a_d}\ \underbrace{a_1a_2\cdots a_d}\ \cdots\ \underbrace{a_1a_2\cdots a_d}}_{\text{重复}\frac{n}{d}\text{次}}$$

- **这种排列的每一个正好对应d个不同的线排列**

$$\begin{array}{cccc}
a_1a_2\cdots a_d & a_1a_2\cdots a_d & \cdots & a_1a_2\cdots a_d \\
a_2a_3\cdots a_1 & a_2a_3\cdots a_1 & \cdots & a_2a_3\cdots a_1 \\
 & \vdots & & \\
\end{array}$$

$$\underbrace{\underbrace{a_da_1\cdots a_{d-1}}\ \underbrace{a_da_1\cdots a_{d-1}}\ \cdots\ \underbrace{a_da_1\cdots a_{d-1}}}_{\frac{n}{d}\text{组}}$$

3.11 Möbius反演定理

- 而且是一一对应的，所以周期为d的允许重复长度为n的线排列的总数是dM_d，对所有周期求和得

$$\sum_{d|n} dM_d = r^n$$

- 令$f(n) = r^n, g(d) = dM_d$
- 根据Möbius反演定理，得

$$nM_n = \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}$$

3.11 Möbius反演定理

- 例3-24.令r=5,n=12,长度为12的圆周排列的周期p有1,2,3,4,6,12,

$$\mu(1)=1,\mu(2)=-1,\mu(3)=-1,$$
$$\mu(4)=0,\mu(6)=1,\mu(12)=0$$

- 所以
- $M_1=1\cdot 5^1=5$
- $M_2=\frac{1}{2}\left[1\cdot 5^{\frac{2}{1}}+(-1)\cdot 5^{\frac{2}{2}}\right]=\frac{1}{2}[25-5]=10$
- $M_3=\frac{1}{3}\left[1\cdot 5^{\frac{3}{1}}+(-1)\cdot 5^{\frac{3}{3}}\right]=\frac{1}{3}[125-5]=40$

3.11 Möbius反演定理

- $M_4 = \frac{1}{4}\left[1 \cdot 5^{\frac{4}{1}} + (-1) \cdot 5^{\frac{4}{2}} + (0) \cdot 5^{\frac{4}{4}}\right]$
- $= \frac{1}{4}[625 - 25] = 150$
- $M_6 = \frac{1}{6}\left[1 \cdot 5^{\frac{6}{1}} + (-1) \cdot 5^{\frac{6}{2}} + (-1) \cdot 5^{\frac{6}{3}} + (1) \cdot 5^{\frac{6}{6}}\right]$
- $= \frac{1}{6}[15625 - 125 - 25 + 5] = 2580$
- $M_{12} = \frac{1}{12}\left[1 \cdot 5^{\frac{4}{1}} + (-1) \cdot 5^{\frac{4}{2}} + (0) \cdot 5^{\frac{4}{4}}\right]$
- $= \frac{1}{12}[625 - 25] = 150$

思考题

- **Möbius函数μ(333333333)=__________.**

习题

- *12. 试证欧拉函数有$\phi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$

其中求和是对n的所有除数,包括1和n进行的.

- *13. 设f满足f(mn)=f(m)f(n), $g(n)=\sum_{d|n}f(d)$

试证:g(mn)=g(m)g(n)

- *14.n是正整数,n的正除数的数目用$\tau(n)$来表示,试证:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right)=1$$

3.12 鸽巢原理

- 鸽巢原理：若n+1个鸽子飞入n个鸽巢，则至少有一个鸽巢中有两只鸽子。
- 例如：
- (1)367个人中必然至少存在两人有相同的生日。
- (2)抽屉里有10双手套散开放着,从中任取出11只，其中至少有一对是成双的。 ---鸽巢原理因此也叫抽屉原则
- (3)某次会议有n位代表列席，每位代表认识其中某些人，则至少有两人认识的人数相等。
- (4)给定5个不同的正整数,其中至少有3个数的和被3除尽。

鸽巢原理

- **例3-25.从1到2n的正整数中任取n+1个，则这n+1个数中至少有一对数，其中的一个数是另一个数的倍数。**

解 设所取的n+1个数是： $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ **。令**

$$a_i = 2^{s_i} r_i, \qquad (i = 1,2,\cdots,n+1)$$

其中 r_i**为奇数。**

例如：68=$2^2 \times 17$

鸽巢原理

- 由于1到2n的正整数中只有n个奇数，故

$$r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$$

中至少有两个相等。

设 $r_i = r_j$ ，那么当 $s_i > s_j$ 时，a_i 是 a_j 的倍数，否则 a_j 是 a_i 的倍数。

可以看出，**应**用**鸽**巢原理可以巧妙的解**决**看似**复杂**的**问题**，其**关键**是如何去**构**造**问题**中的“**鸽**子”和“**鸽**巢”.

鸽巢原理

- **例3-26. 设**$a_1, a_2, \cdots, a_m$**是正整数序列，则至少存在整数 k和** $l,\quad 0 \le k < l \le m$ **，使得**

$$m|(a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l)$$

证 构造一个部分和序列：

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \cdots, \qquad s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

$$\boldsymbol{s_1 < s_2 < \cdots < s_m}$$

考虑这m个数关于模m(mod m)的余数，则分为：

(1) 若存在h，使得 $m|s_h$ **，此时取** $k = 0, l = h$ **，即可.**

鸽巢原理

(2)若不存在h，使得 $m|s_h$，这时存在 $s_t, s_r(r>t)$，其被m除所得的余数相等，即$s_r \equiv s_t \bmod m$，所以

$$m|(s_r - s_t) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_t + a_{t+1} + \cdots + a_r) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_t)$$

$$= a_{t+1} + \cdots + a_r$$

- 令k=t, l=r即为所求

鸽巢原理

- 例3-28.设 a_1,a_2,a_3 为三个任意的整数，$b_1b_2b_3$ 为 a_1,a_2,a_3 的任一排列，则 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个是偶数。

证：a_1,a_2,a_3 中至少有两个数的奇、偶性相同。

不妨设 a_1,a_2 同为奇数。

故 b_1,b_2 中至少有一个是奇数。

所以 a_1-b_1,a_2-b_2 中至少有一个是偶数。

鸽巢原理

- **例3-29. 设** $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ **是由1,2组成的序列，已知从其中任意一个数开始的顺序10个数的和不超过16，即对** $1 \le i \le 91$**，恒有**

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9} \le 16$$

则存在 h和$k, k > h$ **，使得**

$$a_{h+1} + a_{h+1} + \cdots + a_k = 39$$

证明：作部分和序列

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad \cdots, \qquad s_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$$

鸽巢原理

- 由于 $a_i > 0$ ，故 $s_1 < s_2 < \cdots < s_{100}$ 。

$$s_{100} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}) + \cdots + (a_{91} + a_{92} + \cdots + a_{100}) \le 10 \times 16 = 160$$

考虑 $s_1, s_2, \cdots, s_{100}$ ； $s_1 + 39, s_2 + 39, \cdots, s_{100} + 39$

由 $s_{100} + 39 \le 160 + 39 = 199$ 知至少有两项相等。但

$s_1 < s_2 < \cdots < s_{100}$ ，

$s_1 + 39 < s_2 + 39 < \cdots < s_{100} + 39$

鸽巢原理

- 所以存在 $s_h, s_k (1 \le h < k \le 100)$ ，使得

$$s_k = s_h + 39$$

即有

$$s_k - s_h = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_h)$$
$$= a_{h+1} + a_2 + \cdots + a_k = 39$$

鸽巢原理

- 例3-30：X是9个正整数的集合，$E\subseteq X, S(E)$是集合E中所有元素的和.设n是X的元的最大值.求n的值，使X至少存在两个集合A和B，使$S(A)= S(B)$.

证明：E是X的任意子集，

$$S(E)\leq n+(n-1)+(n-2)+..+(n-8)=9n-36$$

这说明不同的S(E)值最多为9n-36个.

X的非空子集的数目为$2^9-1=511$.根据鸽巢原理，

$$511\geq 9n-36$$

是至少存在两个子集的和相等的充分条件.

故有$9\leq n\leq 60$.

习题

- 15. 在边长为1的正方形内任取5点,试证其中至少有两点,其间距离小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 16. 在边长为1的等边三角形内任取5点,试证至少有两点距离小于1/2.
- 17. A是{1,2,…,2n}中任意n＋1个数,试证至少存在一对a和b∈A,使a与b互素.
- 18. 三维空间中9个坐标为整数的点,试证在两两相连的线段内,至少有一个坐标为整数的内点.
- 19. 二维空间的(x,y)点的坐标x和y都是整数的点称为格点.任意5个格点的集合A,试证A中至少存在两点,它们的中点也是格点.
- 20. 每边长为3的等边三角形内径取10个点,试证至少有一对点距离小于1.

3.14 鸽巢原理的推广

- **推论:设k和n都是正整数，若至少有kn+1只鸽子分配在n个鸽巢里，则至少存在一个鸽巢，使得该鸽巢中至少有k+1只鸽子。**

3.14 鸽巢原理的推广

- 推论 1. m只鸽子，n个鸽子巢，则至少有一个鸽子巢里有不少于 $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ 只鸽子。

证 若每个鸽巢中至多有 $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ 只鸽子，则n个鸽巢中最多有

$$n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq m-1$$

只鸽子，与假设矛盾。

3.14 鸽巢原理的推广

- **推论2. 将** $n(m-1)+1$ **个球放入n个盒子，则至少有一个盒子有m个球。**

推论3. 若 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ **是n个正整数，而且**

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} > r-1$$

则中至少有一个数不小于r。

应用举例

- **例3-31.设** $A = a_1a_2\cdots a_{20}$ **是由10个0和10个1组成的20位二进制数串；** $B = b_1b_2\cdots b_{20}$ **是任意的20位二进制数串。现将A、B分别记入如图(A)、(B)两个20个格子，分别得到(A)、(B)两种图象，并把两个B连接得40位二进制数** $C = b_1\cdots b_{20}b_1\cdots b_{20}$ **,它的图象为(C)。**

(A)

a1	a2		…	a19	a20

(B)

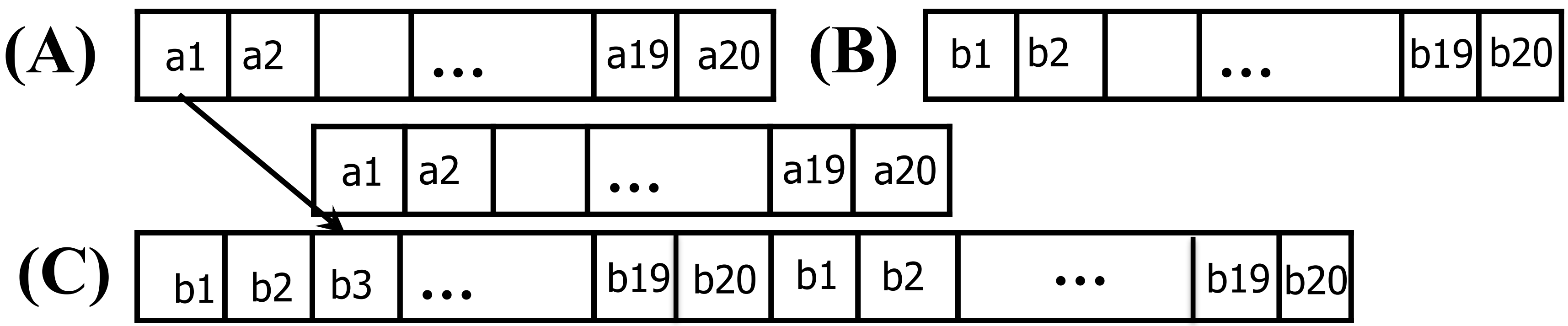
b1	b2		…	b19	b20

(C)

b1	b2		…	b19	b20	b1	b2	…	b19	b20

应用举例

- 则存在某一配合可以使图象(C)上某相连的20格正好和图象(A)的20格中至少10位对应数字相同。



应用举例

- 证明 将(A)的第1格对应(C)的第i格(i=1,2,…,20)。在这个过程中，图象(B)的每一格和(A)的每一格比较相同了10次，相同的数字数目之和为 $20 \times 10 = 200$ ，

平均每次有相同数字的格数为

$$\frac{200}{20} = 10$$

故至少有一次，其中相同的数字的格数不少于10。

应用举例

- 定理3-7. 任意n^2+1个不同的实数

  $$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$$

  组成的序列中，必有一个长度为n+1的单调增子序列或单调减子序列。

- 给定序列 5, 3, 16, 10, 15, 14, 9, 11, 6, 7

  单调增子序列

  5, 16； 5, 10, 15； 3, 9, 11； 3, 6, 7；

  单调减子序列

  5, 3； 16, 10, 9, 6； 16, 15, 14, 11, 6；

应用举例

- 证明1：假定没有长度为n+1的单调增子序列，下面证明必有长度为n+1的单调降子序列。

设 l_i 表示从 $a_i(i=1,2,\cdots,n^2+1)$ 开始的最长的单调增子序列的长度，由假设知

$$1 \le l_i \le n \ \ (i=1,2,\ldots,n^2+1)$$

- 由鸽巢原理知，至少有 $\left\lfloor\frac{(n^2+1)-1}{n}\right\rfloor+1=n+1$

- 个 $l_{k_1},l_{k_2},\cdots,l_{k_{n+1}}$，使得

$$l_{k_1}=l_{k_2}=\cdots=l_{k_{n+1}}=l$$

应用举例

- 不失一般性，假设 $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$ ，则有

?

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}$$

即存在一个长度为n+1的单调减子序列。

应用举例

证明２：（反证法）

设以a_i为首的最长单增子序列以及单减子序列的长度分别为l_i，m_i，其构成序偶对(l_i,m_i),i=1,2,…, n^2+1.

若对任意$i\in${i=1,2,…, n^2+1}，均有$1\le l_i, m_i, \le n$,则n^2+1个序偶对(l_i,m_i)的不同取值至多为n^2种，
则由鸽巢原理至少存在 一对$1\le j<k\le n$，
满足$(l_j, m_j)=(l_k, m_k)$,即$l_j=l_k$，$m_j=m_k$,此时：

应用举例

(1)若$a_j < a_k$，则a_j与以a_k为首的长为l_k的单增子列构成一个以a_j为首的长为(l_k+1)的单增子序列，那么由 l_j 和 l_k的定义有$l_k < l_k+1 \le l_j$，这与$l_j = l_k$ 相矛盾。

(2)若$a_j > a_k$，则a_j与以a_k为首的长为m_k的单减子列构成一个以a_j为首的长为(m_k+1)的单减子序列，那么由 m_j 和m_k的定义有$m_k < m_k+1 \le m_j$，这与$m_j = m_k$ 相矛盾。

故假设不成立要么存在l_i>n,要么存在m_i >n。

应用举例

- **例3-32.将1~67的正整数任意分成4部分,其中必有一部分至少有一个元素是某两个元素之差.**
- **证： 用反证法．设命题不真．**
- **即存在划分$P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \{1,2,..,67\}$，$P_i$中不存在一个数是$P_i$中两数之差，$i$=1,2,3,4.**

一个数是另外两数之差?

应用举例

(1)由鸽巢原理，故有一划分，其中至少有 $\lfloor (67-1)/4 \rfloor + 1 = 17$ 个数，不妨设该划分为P_1，设这17个数从小到大为

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{16} < a_{17} \ .$$

不妨设集合 $A=\{a_1, \ldots, a_{17}\} \subseteq P_1$。

令$b_i = a_{i+1} - a_1$，则$1 \le b_i < 67$，$i = 1, \cdots, 16$。

则由假设$b_1, b_2, \ldots, b_{16}$ 均不属于P_1,

则$b_1, b_2, \ldots, b_{16}$属于P_2，P_3或 P_4。

应用举例

(2) 由$b_1, b_2, \ldots, b_{16}$属于P_2，P_3或 P_4，由鸽巢原理，存在以上一个划分中至少有$\lfloor(16-1)/3\rfloor+1=6$ 个数，不妨设该划分为P_2，设这6个数从小到大为

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_5 < c_6 \ .$$

不妨设集合 $B=\{c_1, \ldots, c_6\}\subseteq P_2$。

令$d_i = c_{i+1} - c_1$，且$1 \le d_i < 67$，$i = 1, \cdots, 5$。

则由假设$d_1, d_2, \ldots, d_5$ 均不属于P_2也不属于P_1, ？

则$d_1, d_2, \ldots, d_5$属于P_3或 P_4。

应用举例

(3) 由$d_1, d_2, \ldots, d_5$属于P_3或 P_4,

由鸽巢原理，存在以上一个划分中至少有

$\lfloor (5-1)/2 \rfloor + 1 = 3$ 个数，不妨设该划分为P_3，

设这3个数从小到大为

$$e_1 < e_2 < e_3 .$$

不妨设集合 $C=\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq P_3$。

令$f_i = e_{i+1} - e_1$，且$1 \le f_i < 67$， $i = 1,2$。

则由假设f_1, f_2 均不属于P_3,也不属于P_2,也不属于P_1,?

则f_1, f_2 属于P_4。

(4)考虑 $g = f_2 - f_1$,则有$1 \le g < 67$，然而由假设g不属于P_4,也不属于P_3,也不属于P_2,也不属于P_1,

这与划分$P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \{1,2,..,67\}$矛盾。

应用举例

- 例3-34.设A={1,2,…,99}，X是A的子集，且 $|X| = 10$ ，则可以找到X的两个互不相交的真子集Y和Z，使得Y中元素之和等于Z中元素之和。

解 由于 $|X| = 10$ ，所以X有 $2^{10} - 2 = 1022$ 个非空真子集，但X的非空真子集S中的元素之和满足

$$1 \leq \sum_{a_i \in S} a_i \leq 99 + 98 + \cdots + 91 = 855$$

应用举例

- 现在有1022只鸽子，855个鸽巢，故至少有两个鸽巢中的鸽子数相等。设这两个子集为B和C，则

(1) 当 $B \cap C = \emptyset$ 时，令 Y=B，Z=C即可；

(2)当 $B \cap C \neq \emptyset$ 时，令

$$Y = B - B \cap C, \qquad Z = C - B \cap C$$

即可。

应用举例

- 例3-36 一个抽屉里有20件衬衫，其中4件是蓝的，7件是灰的，9件是红的。试问应从中随意抽取多少件能保证有4件是同色的？又应抽取多少件能保证有5，6，7，8，9件是同色的？

解 由鸽巢原理：n个鸽巢，kn+1只鸽子，则至少存在一个鸽巢，使得该鸽巢中至少有k+1只鸽子。

(1) 这时n=3，k+1=4，所以k=3，于是

$$kn + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

即随意抽取10件能保证有4件是同色的。

应用举例

(2) 此时不能直接用鸽巢原理。考虑一种最坏的情形，在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时n=2，k+1=5，所以k=4，于是应抽取

$$4 + kn + 1 = 4 + 4 \cdot 2 + 1 = 13$$

即随意抽取13件能保证有5件是同色的。

应用举例

(3) 同样假设在所抽取的衬衫中有4件是蓝的。

这时n=2，k+1=6，所以k=5，于是应抽取

$$4+kn+1=4+5\cdot 2+1=15$$

即随意抽取15件能保证有6件是同色的。

同理可证，随意抽取17，19，20件能保证有7，8，9件是同色的。

应用举例

- 韩信点兵：

  3人一排余2人
  5人一排余3人
  7人一排余2人

  这是**同余式**:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ \ mod\ 3 \\ x \equiv 3 \ \ mod\ 5 \\ x \equiv 2 \ \ mod\ 7 \end{cases}$$

应用举例

- 解这个同余式，有以下两种方法：
- (1) 列出$3a+2, 5b+3, 7c+2$这三个集合，取交集
- (2) 构造法

记 s 是 5 和 7 的公倍数，且除 3 余 1， s=70，则 2s 是 5,7 的公倍数且除 3 余 2。

记 t 是 3 和 7 的公倍数，且除 5 余 1， t=21，则 3t 是 3,7 的公倍数且除 5 余 3。

记 h 是 3 和 5 的公倍数，且除 7 余 1， h=15，则 2h 是 3,5 的公倍数且除 7 余 2。

则$2s+3t+2h=2*70+3*21+2*15=233$ 满足同余式。若要找最小的，答案为 233 % (3*5*7)

应用举例

- **中国剩余定理:**

m 和 n 为互质正整数，对任意非负整数 a, b($a < m, b < n$)，必存在正整数 x，使得下式成立：

$$\begin{cases} x = pm + a \\ x = qn + b \end{cases} p, q \geq 0$$

证明方法是**鸽巢原理**：

考虑 n 个整数：$a, m+a, 2m+a, \ldots, (n-1)m+a$，均模 m 余 a(满足第一式)

其中若存在模 n 余数相同的两个数，则不能保证对任意 b 成立。

若此 n 个数模 n 均不同，则可以保证对任意 b 成立。

假设有相同的情况：$im + a$ 和 $jm + a$, $(0 \leq i \leq j \leq n-1)$

$(j-i)m = (q_j - q_i)n$，n 是 (j - i)m 的因子，但是 m, n 互质并且 $0 \leq i \leq j \leq n-1$，n 不可能是 $(j-i)m$ 的因子。

应用举例

中国剩余定理的推广

$m_1, \ldots, m_k$ 两两互质: $gcd(m_i, m_j) = 1, i \neq j$

则以下**同余式**有解:

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \mod m_1 \\ x \equiv b_k \mod m_2 \\ \ldots \\ x \equiv b_k \mod m_k \end{cases}$$

3.14 鸽巢原理的推广

- **定理3-8.设** $q_1, q_2, \cdots, q_n$**都是正整数，若有**

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$$

只鸽子飞入n个鸽巢，则存在 $j\ (1 \le j \le n)$ **，使得第j个鸽巢中至少有** q_j **只鸽子。**

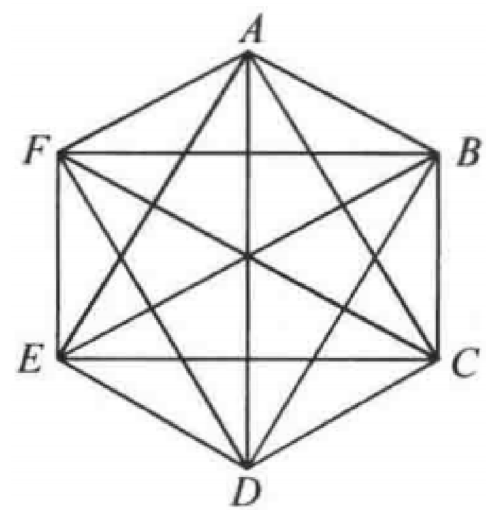
作业

- 21. 把从1~326的326个整数任意分为5个部分,试证其中有一部分至少有一个数是某两个数之和,或是另一个数的两倍.
- 23. 边长为1的正方形内任取9点,试证存在3个不同的点,由此构成的三角形面积不超过1/8.
- 24. X={0,1,2,…,9,10},从X中任取7个元素,则其中必有两个元素之和等于10.
- 25. 任取7个不同的正整数,其中至少存在两个整数a和b使得a-b或a+b被10除尽.

3.15 Ramsey数

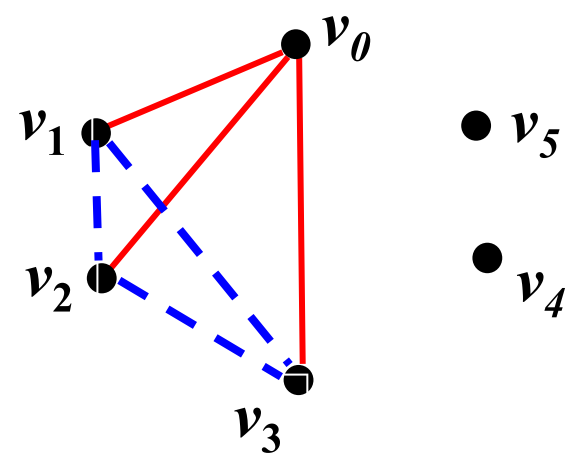
- **Ramsey问题：任意6个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。**

每个人用一个顶点表示，若两个人互相认识，则对相应的两个顶点之间的边着红色，若两个人互相不认识，则对相应的两个顶点之间的边着蓝色。这样问题就转化为图论中问题：
给定一个6个顶点的完全图K6，用红、蓝两色对其边任意着色，那么或者存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。



Ramsey数

- 证： 选定K_6的一个顶点v_0，顶点v_0有5条边, 由鸽巢原理知，至少有

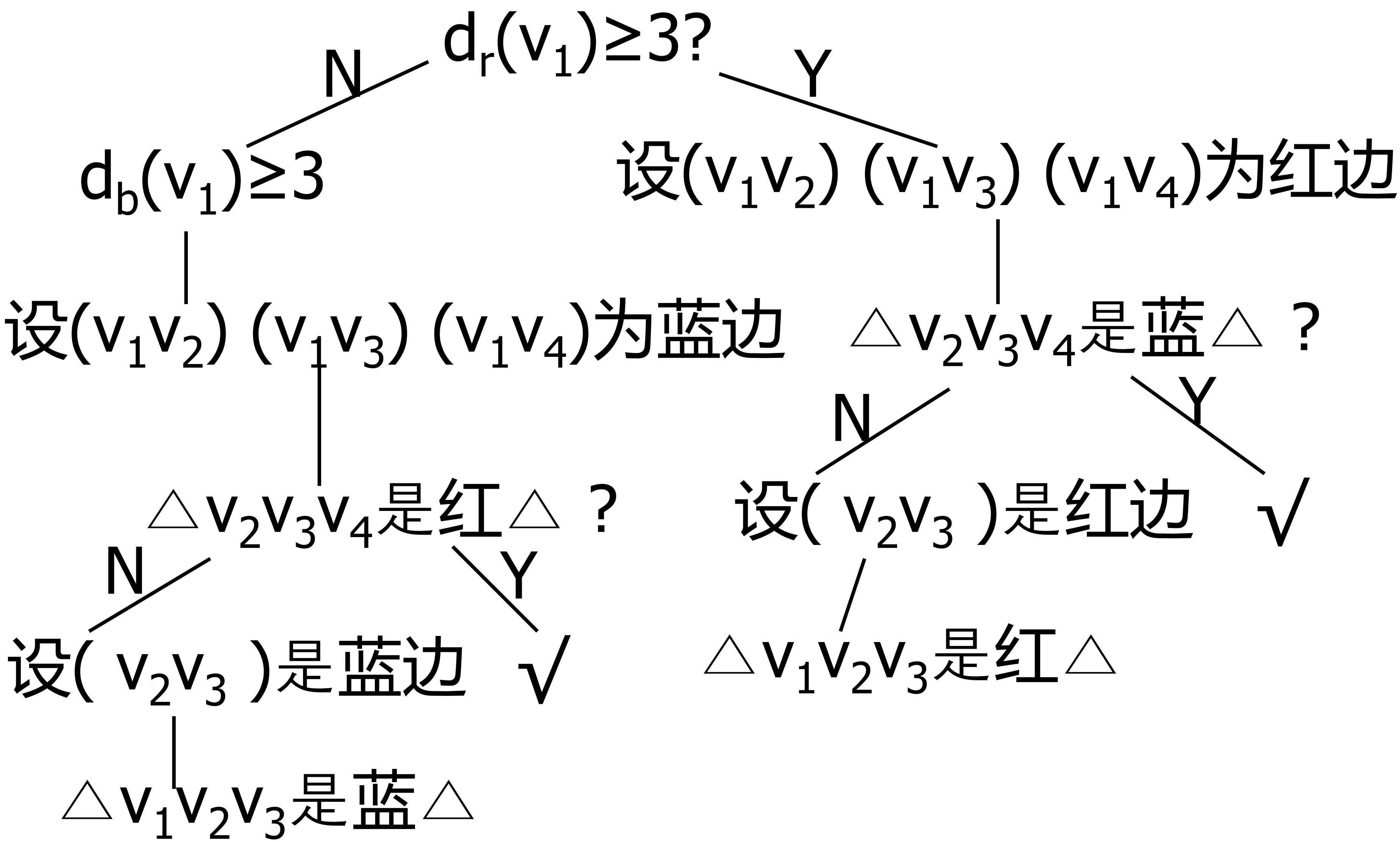


$$\left\lceil \frac{5-1}{2} \right\rceil + 1 = 3$$

条同色边，设为红色。设这三条边的另一个端点分别为 v_1,v_2,v_3。 若v_1,v_2,v_3之间有一条红色边，则已得到一个红色边三角形，否则，则得到一个蓝色边三角形。

Ramsey数

可以用一个判定树形象地表示分析过程：



Ramsey数

- 若干推论

(a) 对6个顶点的完全图K_6的边用红、蓝两色任意着色，那么至少有两个同色三角形。

证明：由ramsey问题，则必然有一个同色三角形。不妨设为红色三角形。

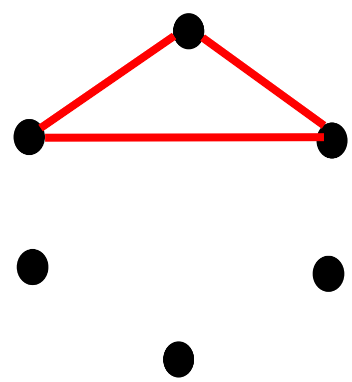


图1

Ramsey数

下面对红色三角形的三个顶点边的情况进行讨论：

(1) 若红色三角形的某个顶点的其它三条边均为蓝色，如图2

(2) 若红色三角形的某个顶点的其它三条边中至少有两条为红色，如图3；

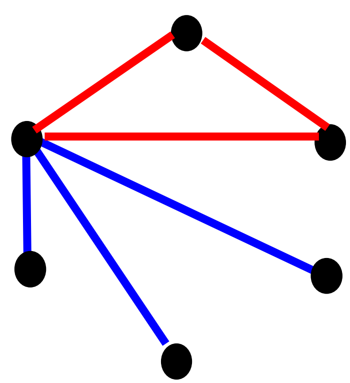


图2

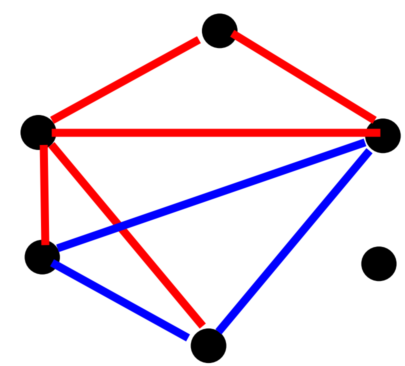
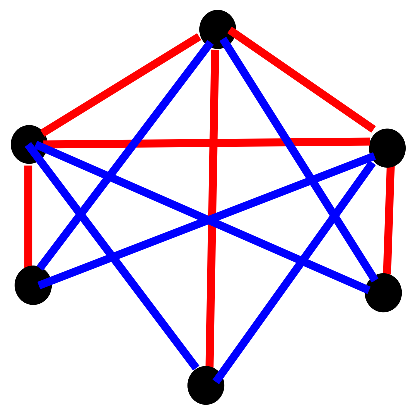


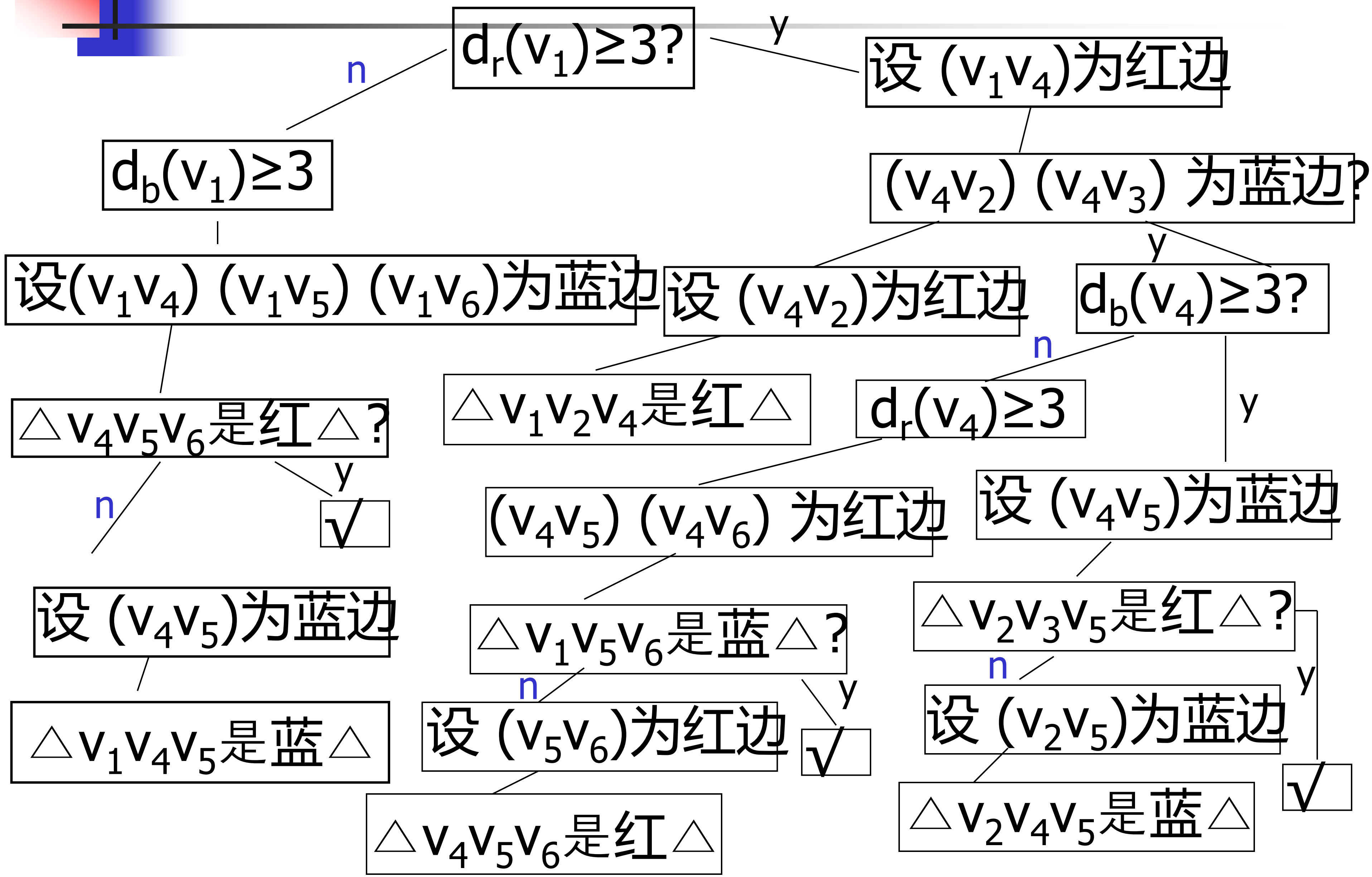
图3

Ramsey数

(3) 若红色三角形的任一个顶点的其它三条边中恰有一条边为红色。



Ramsey数

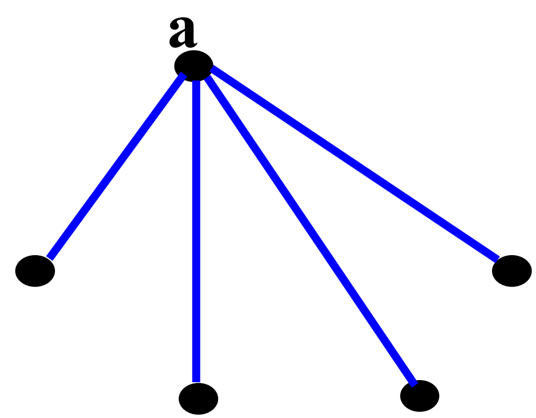

$d_r(v_1)\geq 3$?
y
n
设 (v_1v_4)为红边
$d_b(v_1)\geq 3$
(v_4v_2) (v_4v_3) 为蓝边?
设(v_1v_4) (v_1v_5) (v_1v_6)为蓝边
设 (v_4v_2)为红边
$d_b(v_4)\geq 3$?
y
n
△$v_4v_5v_6$是红△?
△$v_1v_2v_4$是红△
$d_r(v_4)\geq 3$
y
y
n
√
(v_4v_5) (v_4v_6) 为红边
设 (v_4v_5)为蓝边
设 (v_4v_5)为蓝边
△$v_1v_5v_6$是蓝△?
△$v_2v_3v_5$是红△?
n
y
n
y
△$v_1v_4v_5$是蓝△
设 (v_5v_6)为红边
√
设 (v_2v_5)为蓝边
√
△$v_4v_5v_6$是红△
△$v_2v_4v_5$是蓝△

Ramsey数

- 例3-38.对10个顶点的完全图K_{10}的边用红、蓝两色任意着色,那么或者有一红色K_4,或者有一蓝色K_3。

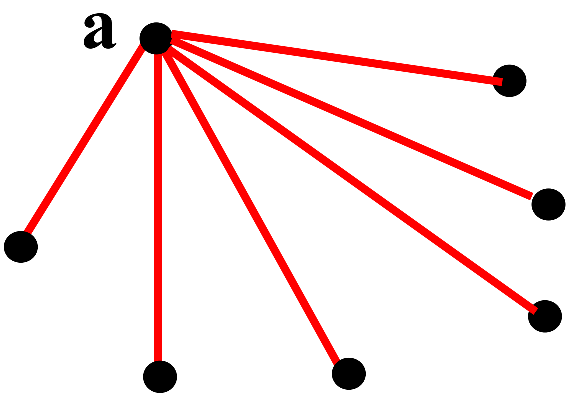
证 设a是K_{10}的一个顶点，与a关联的9条边中，或者有6条红边, 或者有4条蓝边。

(1)若与a关联的9条边中有4条蓝边；



Ramsey数

- (2) 若与a关联的9条边中有6条红边。这时与a邻接的6个顶点所组成的完全图中或有一个红色的K_3，或有一个蓝色的K_3。若有红色的K_3，则该K_3与顶点a所组成的K_4是一个红色的K_4；否则有一个蓝色的K_3。



Ramsey数

- 例3-39.对9个顶点的完全图K_9的边用红、蓝两色任意着色，那么或者有一红色K_4，或者有一蓝色K_3。

- 结论1：对18个顶点的完全图K_{18}的边用红、蓝两色任意着色，那么或者有一红色K_4，或者有一蓝色K_4。

Ramsey数

- **定义 对于任意给定的两个正整数a和b，如果存在最小的正整数 $R(a,b)$，使得当 $N \geq R(a,b)$ 时，对 K_N 中的边用红、蓝两色任意着色，K_N 中或者有红色 K_a，或者有蓝色 K_b，则称 $R(a,b)$ 为Ramsey数。**

例如： $R(3,3)=6, R(3,4)=9, R(4,4)=18$

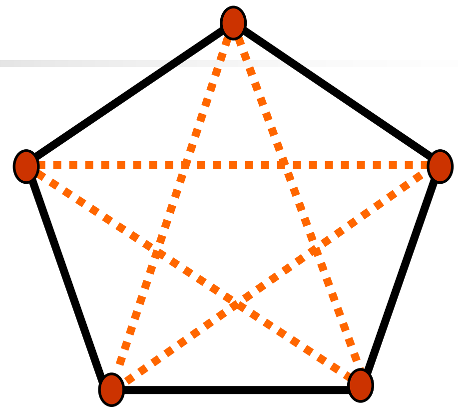
关键：如何证明所得的数是最小的正整数

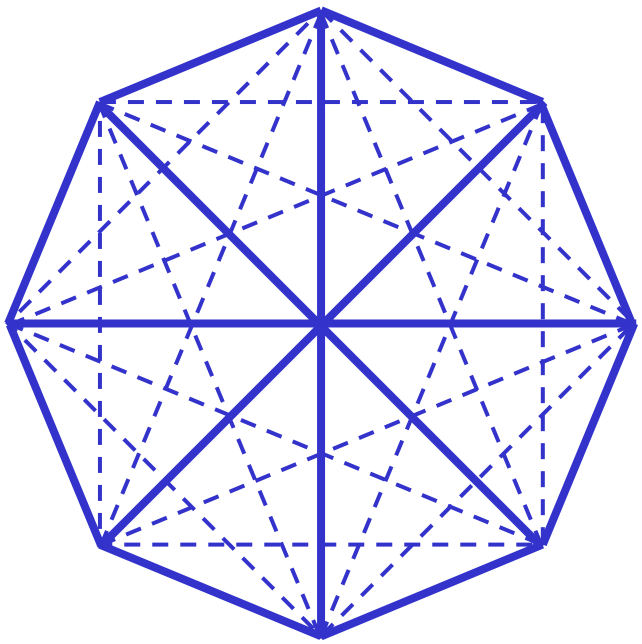
Ramsey数

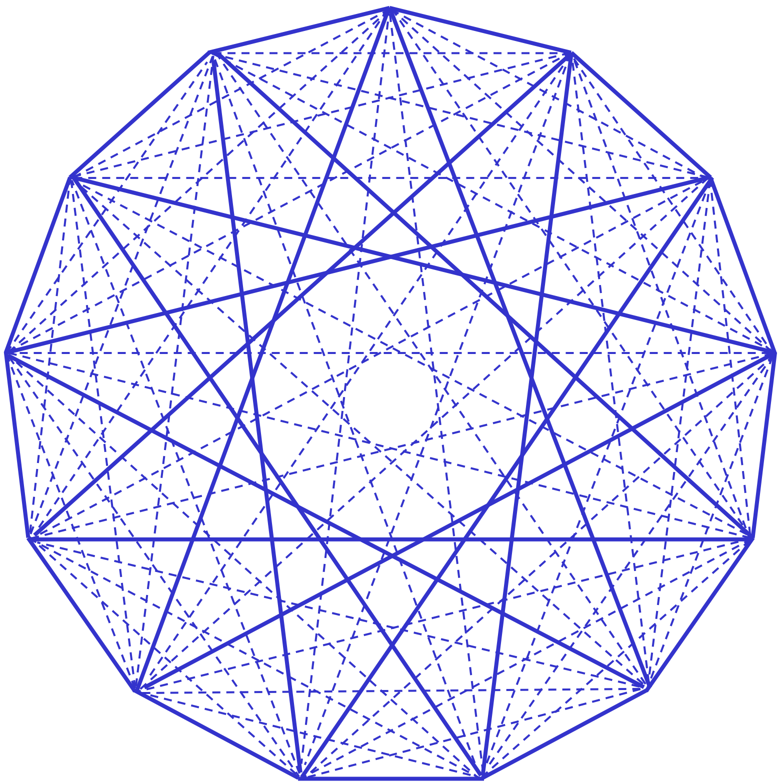
$R(3,3)=6$

$R(3,4)=R(4,3)=9$

$R(3,5)=R(5,3)=14$







Ramsey数

- **定理3-9** $R(a,b)=R(b,a)$ ，$R(a,2)=a$ 。

定理3-10 对任意整数 $a\ge 2, b\ge 2$，$R(a,b)$ **存在。**

定理3-11. 对任意正整数 $a\ge 3, b\ge 3$ ，**有**

$$R(a,b)\le R(a-1,b)+R(a,b-1)$$

证 令$N=R(a-1,b)+R(a,b-1)$ **，对K_N中的边用红、蓝两色任意着色。设x是K_N的一个顶点，在K_N中与x关联的边共有**$R(a-1,b)+R(a,b-1)-1$ **条,**

Ramsey数

- 在这些边中, 或者至少有 $R(a-1,b)$ 条 红边,或者至少有 $R(a,b-1)$ 条蓝边。

(1) 有 $R(a-1,b)$ 条红边。

在这些红边与x关联的 $R(a-1,b)$ 个顶点构成的完全图中, 或者有一个红色 K_{a-1} ,或者有一个蓝色 K_b .

若有红色 K_{a-1} ，则该红色 K_{a-1} 加上顶点x以及x与顶点之间的红边，构成一个红色 K_a ；否则有一个蓝色 K_b 。

Ramsey数

- (2) 有条 $R(a,b-1)$ 蓝边

在这些蓝边与x关联的 $R(a,b-1)$ 个顶点构成的完全图中，或有一个红色 K_a，或有一个蓝色 K_{b-1}。

若有蓝色 K_{b-1}，则该蓝色加上顶点x以及x与顶点之间的蓝边，构成一个蓝色 K_b ;否则有一个红色 K_a 。

由(1)、(2)知 $R(a,b) \leq N$ 。

Ramsey数

- **定理 3-13 对任意正整数** $a \geq 2, b \geq 2$ **，有**

$$R(a,b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!\,(b-1)!}$$

证 对a+b用归纳法。

当a+b=4时，定理显然成立。

假设对一切满足 $4 \leq a+b < m+n$ **的a, b，定理成立，那么有**

Ramsey数

$$R(m,n) \le R(m-1,n) + R(m,n-1)$$

$$\le \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} \quad = \binom{m+n-2}{m-1}$$

这就归纳地证明了定理。

Ramsey数

- **定理（$R(\mathrm{k},\mathrm{k})$的下界）：**

  若 $\boldsymbol{C_n^k 2^{1-C_k^2} < 1}$**，则** $R(\mathrm{k},\mathrm{k}) > \boldsymbol{n}$ **。**

证明：略

--- Erdos给出了一个非常具有启发意义的证明。其意义远远超过了“估计Ramsey数下界”，而是将**概率的方法**引入了组合数学的研究中。

Ramsey数

- **已经探明的Ramsey数或其上界如下表所示:**

b \ a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	51 60	59 69	66 78	73 89
4		18	25	35 41	49 61	53 84	69 115	80 149	96 191	106 238	118 291	129 349	134 417
5			43 49	58 87	80 143	95 216	114 316	442					
6				102 165	298	495	780	1171					
7					205 540	1031	1713	2826					
8						1870	282 3583	6090					
9							6625	565 12715					
10								23854	798				

Ramsey数

- **Ramsey数 ---百度百科**
- **https://baike.baidu.com/item/%E6%8B%89%E5%A7%86%E9%BD%90%E6%95%B0/19138224?fr=aladdin**

拉姆齐数(Ramsey number)是图论的重要函数之一。它是一个以两个正整数作为变量的函数。设m和n为正整数。所谓拉姆齐数，常用r(m ,n)表示，是指符合一定条件的p(图的阶数)的最小值。任何一个p阶的图G，若不含完全图Km作为一个子图，则必有一个含n个节点的独立集。一个(m,n)拉姆齐图是指阶为r(m,n)-1，既不含m个节点的完全图作为子图，也不含n个节点的独立集的图。设k□1,k2,...,kq是q个正整数，所谓广义拉姆齐数r(k1,k2,.. ,kq)，是指符合下列条件的p的最小值：对于p阶完全图Kp，用q种色(cl,c2,...cq)对Kp的边任意着色，则存在某一色ci，所有着这一种色的边的导出子图包含Kki作为一子图。对于正整数m,n，所谓边拉姆齐数rl(m,n)，就是指符合如下条件的p的最小值：对于任何一个p阶的图，其上必有m条边两两互不相邻，或有n条边以同一节点为端点。关于r(m,n)的存在性，是由拉姆齐(Ramsey , F. P.)首先给出的。 [2]

Ramsey理论本质含义就是当数量充分大之后，总是包含指定的子结构，即无序中总是包含着有序。
而寻找ramsey数某种意义上是在找某种平衡点。


白羊座
♈3月21日-4月19日

金牛座
♉4月20日-5月20日

双子座
♊5月21日-6月21日

巨蟹座
♋6月22日-7月22日

狮子座
♌7月23日-8月22日

处女座
♍8月23日-9月22日

天枰座
♎9月23日-10月23日

天蝎座
♏10月24日-11月22日

射手座
♐11月23日-12月21日

摩羯座
♑12月22日-1月19日

水瓶座
♒1月20日-2月18日

双鱼座
♓2月19日-3月20日
NO:20111020142748429181

天猫座
小熊座
天龙座
御夫座
双子座
鹿豹座
仙王座
武仙座
英仙座
仙后座
天琴座
蝎虎座
天鹅座
仙女座
狐狸座
三角座
金牛座
天箭座
白羊座
海豚座
猎户座
飞马座
小马座
天鹰座
盾牌座
双鱼座
人马座
天兔座
波江座
鲸鱼座
宝瓶座
摩羯座
玉夫座
南鱼座
天炉座
显微镜座
天鹅座
凤凰座

- **星座图**

Ramsey数的推广

- 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为正整数，对N个顶点的完全图 K_N 中的边用 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ k种颜色进行着色，则 K_N 中或有 c_1 颜色的 K_{a_1}，或有 c_2 颜色的 K_{a_2}，…，或有 c_k 颜色的 K_{a_k}，满足上述性质的N的最小值记为 $R(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 。