

The background of the slide features a serene sunset scene over a body of water. A wooden pier or dock extends from the right side into the water. The sky is a mix of soft pinks, oranges, and blues, with wispy clouds. The water reflects the colors of the sky and the structure of the pier. A large, semi-transparent brown shape, resembling a stylized mountain or a large letter 'V', is centered in the upper half of the image, serving as a backdrop for the text.

07

空间插值

空间插值



?

现给一个土壤施肥，
这块地的土壤养分如何？
不同地方该施多少肥料呢？



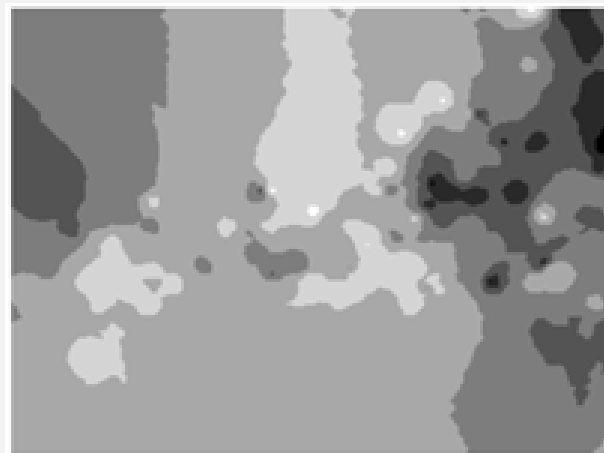
密集采样

- 耗时，耗力，耗财
- 仍是点数据
- 未采样处仍未知



有选择的采样

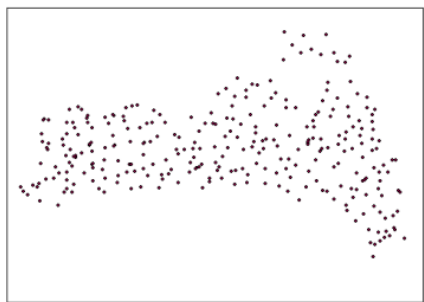
- ✓ 选取特征样点
- ✓ 针对性



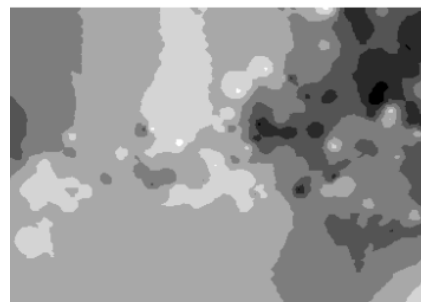
空间插值

- ✓ 得到连续曲面

空间插值定义



离散数据



插值结果

对象

已知空间数据

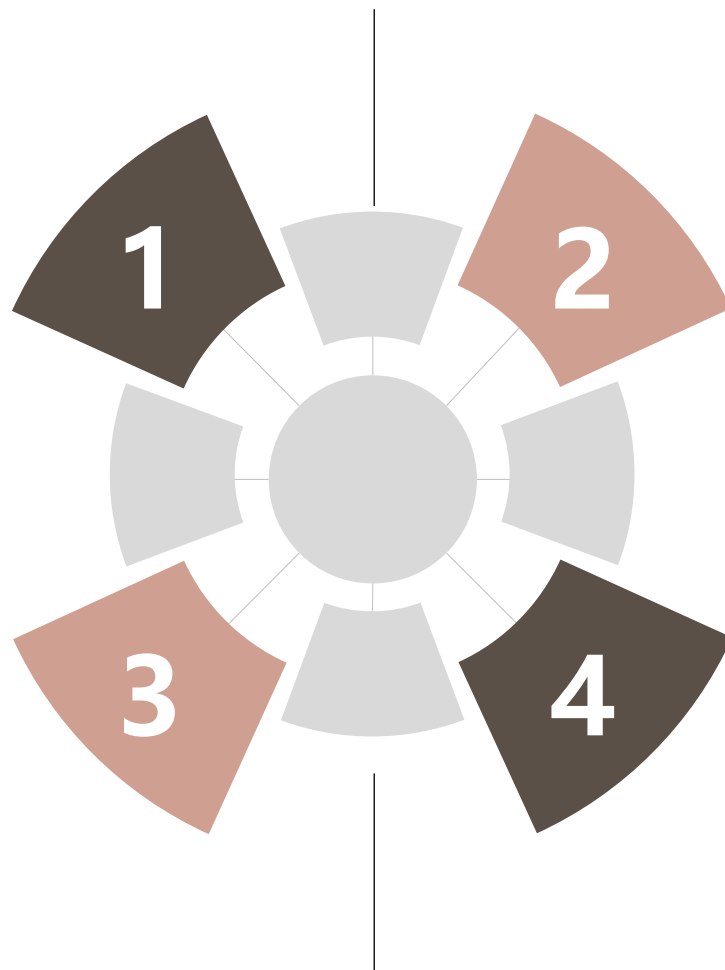
- 离散点形式
- 分区数据形式

关系

函数关系式

- 最好地逼近已知的空间数据
- 能根据函数关系式推求推求出区域范围内其它任意点或任意分区的值

空间插值分类



➤ 空间内插法——推求**同一**区域

➤ 空间外推法——推求**其他**区域

➤ 整体插值法——**所有**样点
全局特征

➤ 局部插值法——**邻近**样点
局部估计

➤ 点插值法——点插值**点**

➤ 面插值法——点插值**面**
(区域插值)

➤ 确定性插值——相似性或平滑程度
利用数学函数

➤ 克里金插值——空间自相关程度
线性无偏最优估计
(地统计插值)

章节内容

空间插值

确定性插值

整体插值

土地利用回归法

特例

变换函数法

趋势面分析法

局部插值

移动拟合法

局部多项式插值法

核密度估计法

泰森多边形插值法

三角剖分插值法

反距离加权法

样条函数插值法

克里金插值

理论基础

区域化变量

协方差与变异函数

理论假设

变异函数结构分析

常见方法

普通克里金法

简单克里金法

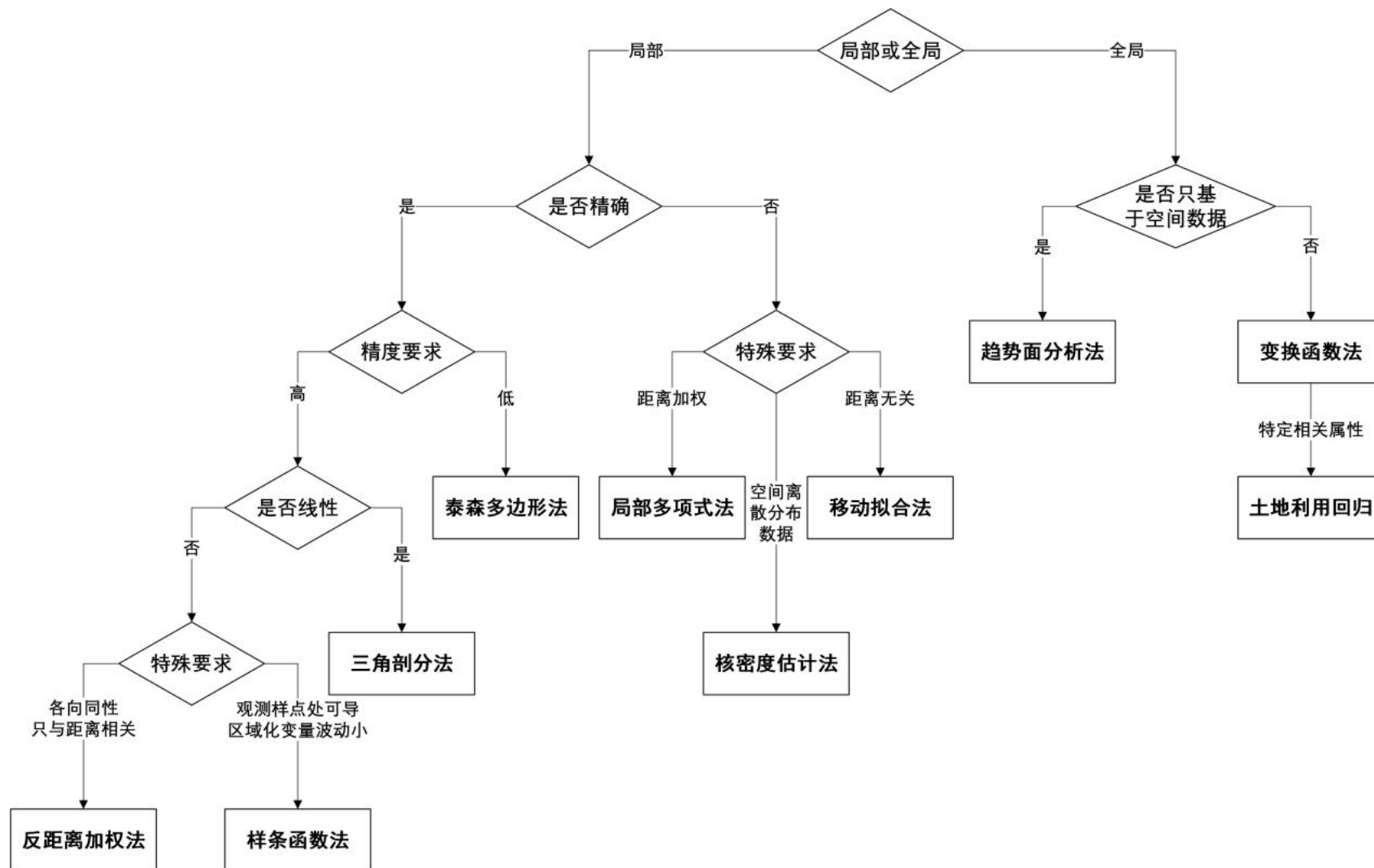
泛克里金法

对数正态克里金法

指示克里金法

协同克里金法

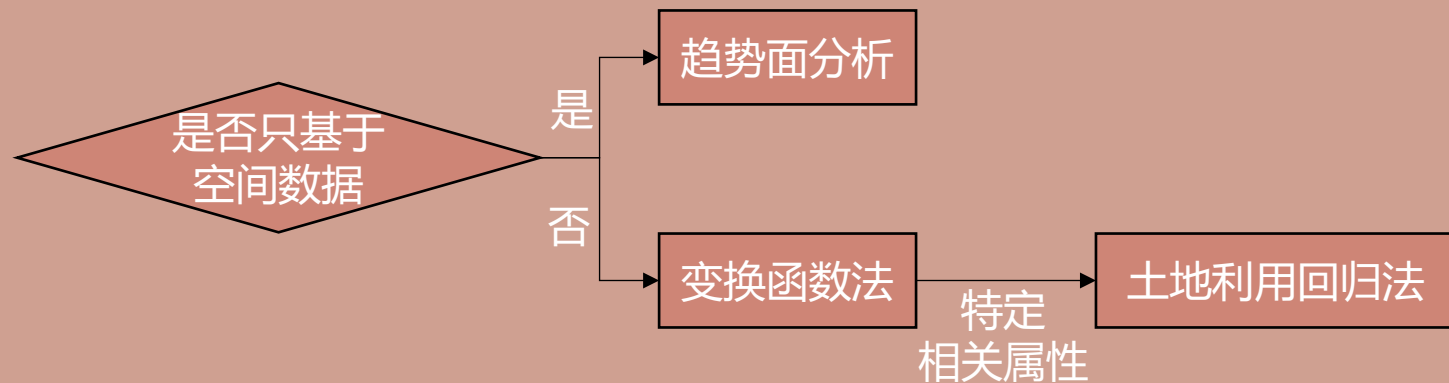
确定性插值



1. 趋势面分析法
2. 变换函数法
3. 土地利用回归
4. 移动拟合法
5. 局部多项式插值法
6. 核密度估计
7. 泰森多边形插值
8. 三角剖分插值
9. 反距离加权法
10. 样条函数插值法

全局非精确插值

- ◆ **全局**：研究区所有采样点数据拟合
- ◆ **非精确**：拟合曲面不通过所有观测点



1

趋势面分析

- 只考虑空间因素，利用数学曲面模拟地理要素在空间上的分布及变化
- 适于模拟大范围空间分布，检测总趋势和与趋势的最大偏离

2

变换函数法

- 用与被预测属性相关的其他属性建立回归方程来进行空间整体插值
- 适于对数据生成方法比较熟悉的情况

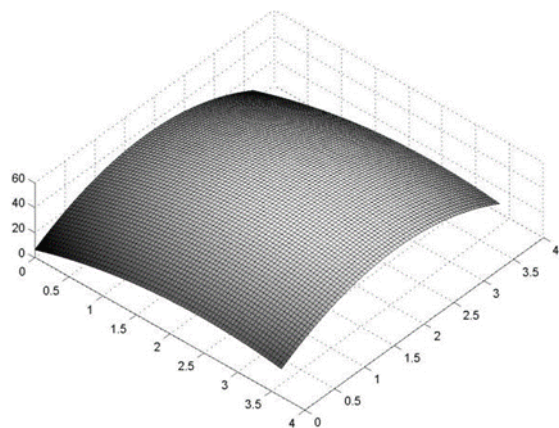
3

土地利用回归法

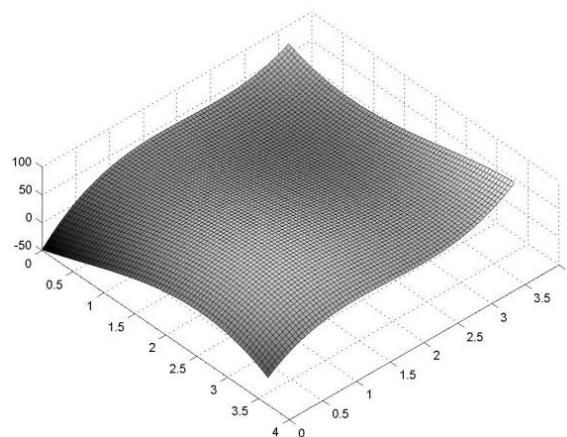
- 变换函数的典型例子
- 适于通过建立与土地利用间回归方程，模拟大气污染浓度分布

趋势面分析 概述

序号	降水量Z(mm)	横坐标x (10 ⁴ m)	纵坐标y (10 ⁴ m)
1	27.6	0	1
2	38.4	1.1	0.6
3	24	1.8	0
4	24.7	2.95	0
5	32	3.4	0.2
6	55.5	1.8	1.7
7	40.4	0.7	1.3
8	37.5	0.2	2
9	31	0.85	3.35
10	31.7	1.65	3.15
11	53	2.65	3.1
12	44.9	3.65	2.55



二次项多项式趋势面



三次项多项式趋势面

别名

全局多项式插值

用数学公式表达地理要素上一种渐变趋势

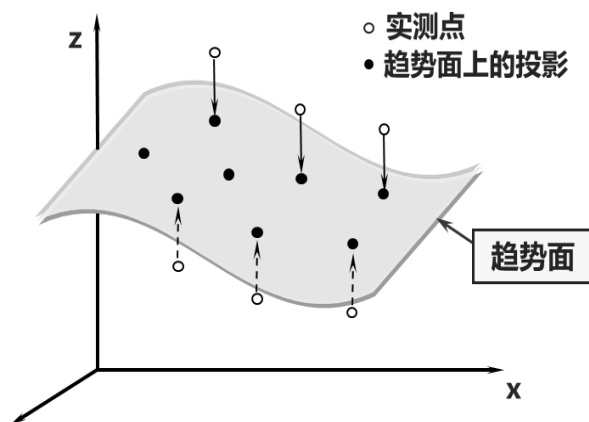
实质

通过回归分析原理，运用最小二乘法拟合一个**二维非线性函数**，模拟地理要素在空间上的分布规律

实例

以流域降水量的地理坐标X,Y为自变量，降水量为因变量Z进行趋势面分析

趋势面分析 原理



实际曲面 = 趋势面 + 剩余面

趋势面——地理要素宏观分布规律，属于确定性因素作用

剩余面——反映局部性变化特点，受局部因素和随机因素的影响
(局部异常、随机干扰、模型本身误差)

要求：趋势值最大，剩余值最小，从而保证拟合精度

01 建立趋势面模型：

实际值 = 趋势面拟合值 + 剩余值 (残差值)

$$z_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n) = \hat{z}_i(x_i, y_i) + \varepsilon_i$$

03 推算趋势面的方式：

多项式函数 (常用) | 傅里叶级数

02 从实际值推算趋势面：

采用回归分析方法，使得残差平方和趋于最小

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n [z_i(x_i, y_i) - \hat{z}_i(x_i, y_i)]^2 \rightarrow \min$$

趋势面分析 原理

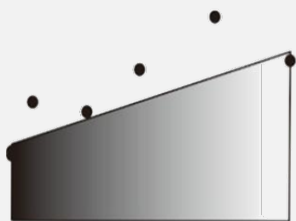
任一函数都可在适当范围内用多项式逼近，且调整多项式的次数，可使所求的回归方程适合实际问题的需要

问题!

趋势面次数增加——拟合的曲面逐渐接近采样点，
实际值与拟合值间偏差越小

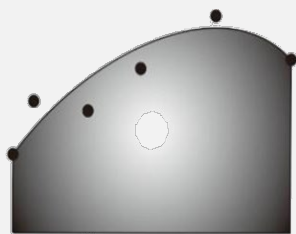
趋势面次数增加——趋势面方程越复杂，
越难以解释自然现象/过程的物理意义

适度检验



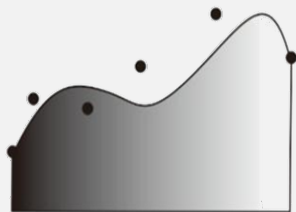
一次趋势面模型

$$z = a_0 + a_1x + a_2y$$



二次趋势面模型

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$



三次趋势面模型

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$$

趋势面分析 适度检验

01 R^2 检验

趋势面与实际面的拟合度系数 R^2 ——
测定回归模型拟合优度的重要指标

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_D}{SS_T} \quad SS_D = \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2$$

SS_D : 剩余平方和
 SS_R : 回归平方和
 SS_T : 总离差平方和

$$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2$$

$$SS_T = SS_D + SS_R$$

02 显著性F检验

对趋势面回归模型整体的显著性检验

$$F = \frac{SS_R/p}{SS_D/(n-p-1)}$$

p : 非线性函数转为线性形式后的自变量个数

n : 样本数

➤ 在显著性水平 α 下, 查F分布表判断显著性

03 逐次检验

检验多项式次数增高, 是否对回归产生新贡献
即判断F值是否显著

具体步骤:

1

求较高次多项式方程的SSR与
较低次多项式方程的SSR之差

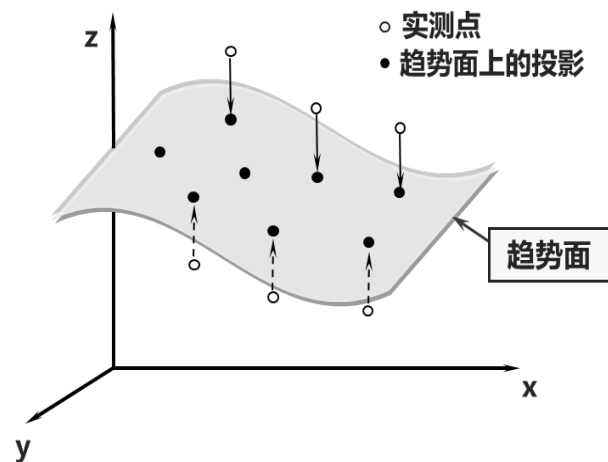
2

将此差除以SSR的自由度之差,
得出由于多项式次数增高所产生的回归均方差

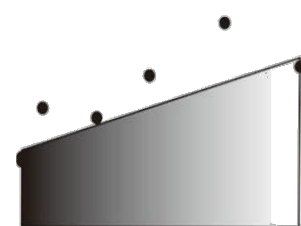
3

将此均方差除以较高次多项式的剩余均方差,
得出相继两个阶次趋势面的适度性比较检验值F

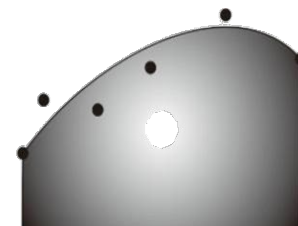
趋势面分析 小结



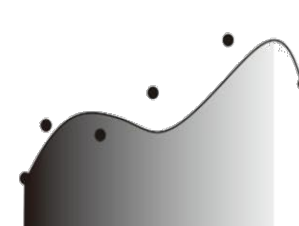
从实际值出发推算**趋势面**
并使**残差平方和**趋于最小



一次多项式



二次多项式



三次多项式

趋势面适度性检验方法

R^2 检验

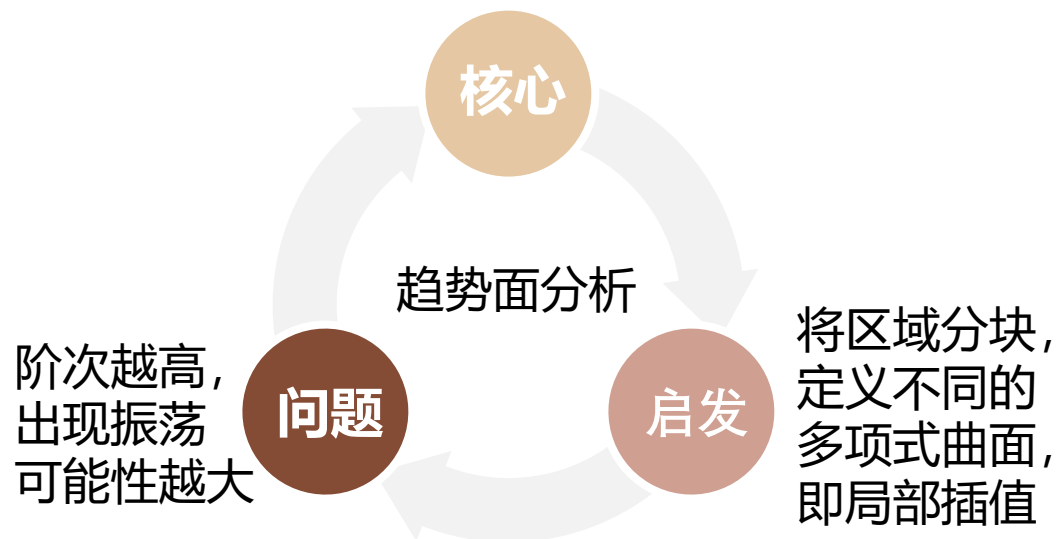
R^2 越大
回归拟合优度越高

显著性F检验

对趋势面的模型
整体的显著性检验

逐次检验

检验多项式次数增高,
是否对回归产生新贡献
即F是否显著



变换函数法

02.实例

问题：冲积平原的土壤重金属污染

方程： $z(x) = b_0 + b_1p_1 + b_2p_2 + \varepsilon$

$z(x)$:是某种重金属含量； $b_{0,1,2}$:回归系数
 p_1 是距河流的距离因子； p_2 是高程因子

因子选择原因：

- 便于获取
- 与因变量相关，模型具有物理意义

01 变换函数法 (经验方程)

用与被预测属性相关的其他属性建立回归方程，进行空间预测。

除用到空间坐标信息外，经常用到高度、距离、地形因子等其他相关空间属性参量

土地利用回归法

01 定义:

模拟城市大气污染物浓度
空间分异的通用模型

本质为 **变异函数法**

02 常用模型对比:

(1) MODIS遥感反演

基于AOD与污染物浓度间关系

➢ 时间、空间分辨率低

(2) 大气扩散模拟

需假定扩散模式

需地形、排放数据等数据输入

➢ 复杂, 难大范围推广

03 模型建立:

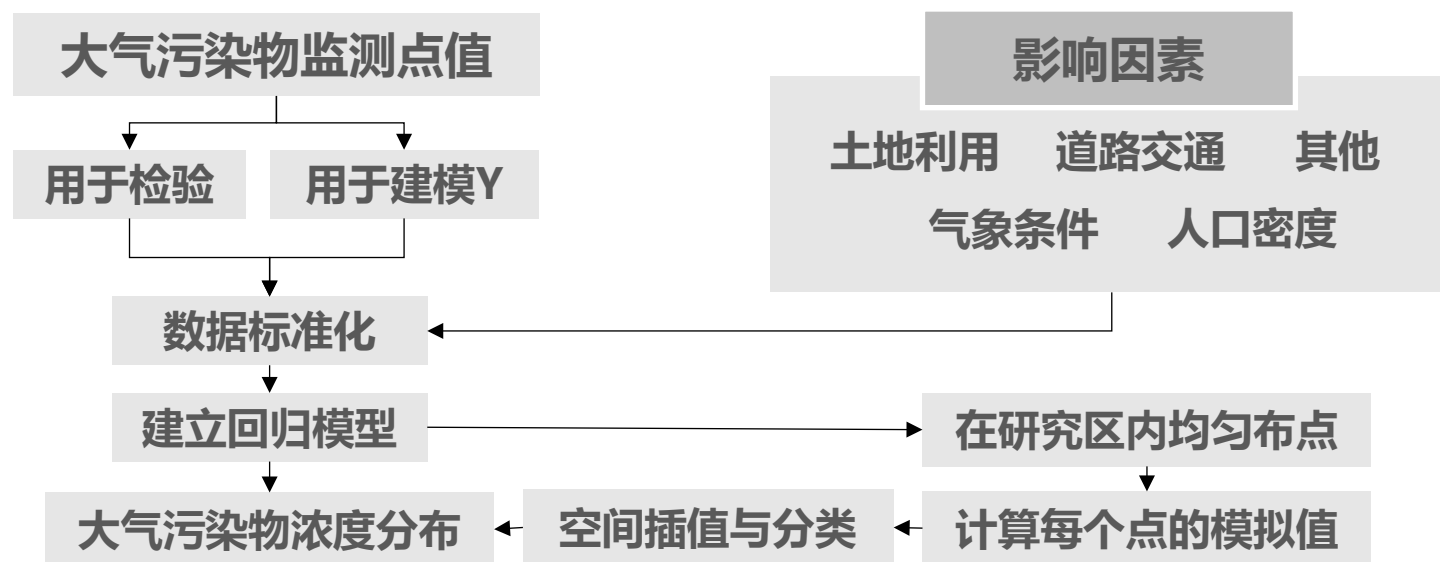
因变量:

采样点大气污染物浓度数据

建立回归模型分析因素影响
利用模型估计污染物浓度

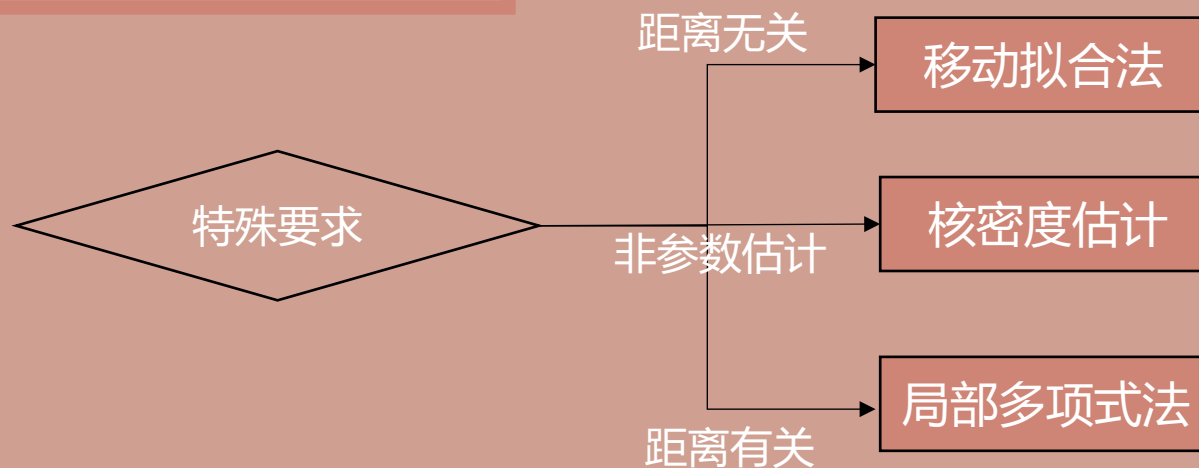
自变量:

站点周边土地利用/交通/人口密度等



局部非精确插值

- ◆ **局部**：使用邻近数据估计未知点
- ◆ **非精确**：拟合曲面不通过所有观测点



4

移动拟合法

- 以待插点为中心，用局部数学模型拟合周围点，数据点范围随待插点位置变化而移动

5

局部多项式法

- 移动拟合法的基础上考虑**距离权重**
- 适于如高程起伏较大的局部变化明显的情况

6

核密度估计法

- 采用平滑峰值函数（核）拟合数据，对真实概率分布曲线进行模拟
- 适于获取犯罪情况报告，发现对城镇等地造成影响的道路或管线

移动拟合法

01 移动拟合法 (单点移面内插)

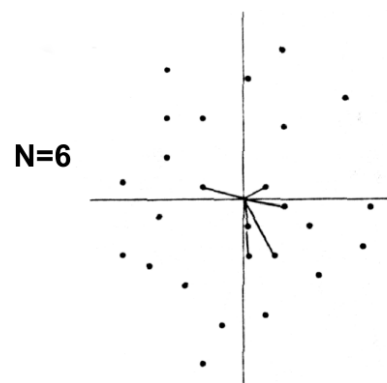
以待插值点为中心，
定义局部数学模型去拟合周围的数据点
数据点的范围随待插点位置的变化而移动。

02 插值步骤:

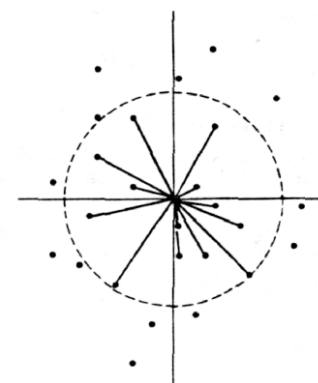
- ① 定义内插点领域范围——覆盖极大极小值
- ② 确定落入领域内的采样点
- ③ 选定内插数学模型——是否考虑空间权重
- ④ 计算待插点

03 领域范围的考虑因素:

- ① 范围，即采用多大面积范围内的采样点计算被插点的值
范围可为矩形也可为圆
- ② 点数，即选择多少采样点参与计算，一般选择4~12个采样点
不规则采样分布，采样点应多些。

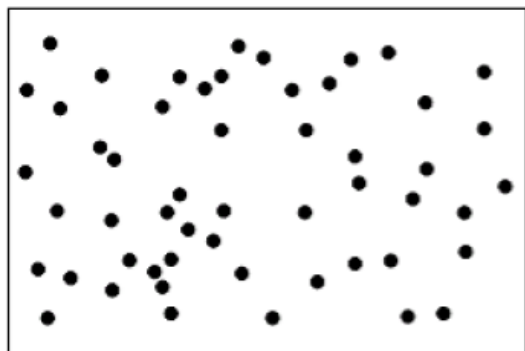


基于点的数量选择



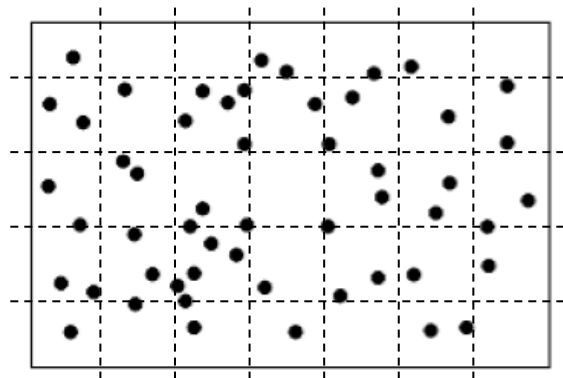
基于点的范围选择

局部多项式插值



区域分块

→
每一分块定义不同的多项式曲面



01 局部多项式插值 (移动内插法)

利用局部“窗口”内的数据及其权重，
通过不断移动窗口来拟合多个多项式
以表达和解释局部趋势和变异

02 窗口大小影响

- 小窗口将**增强近**距离数据的影响
不考虑**远**距离数据
- 大窗口将**增强远**距离数据的影响
减小近距离数据的影响

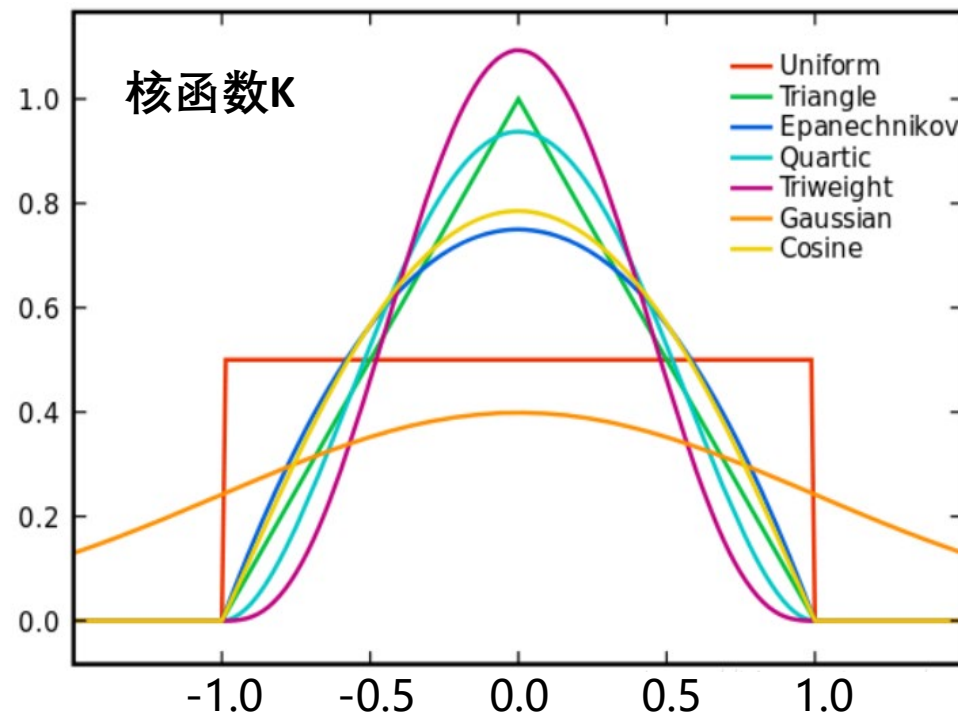
核密度估计

01核密度估计定义:

由给定样本点集合求解随机变量的分布密度函数
概率密度函数 f 的非参数估计:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

x_1, x_2, \dots, x_n 为独立同分布 $K(\cdot)$ 的 n 个样本点
是一个加权平均, 核函数 是一个权函数
核密度估计的好坏依赖于核函数和带宽 h 的选取



02常见核函数:

通常关于原点对称的且其积分为1

核函数的选取对核估计的影响
远小于带宽 h 的选取

均匀核函数(Uniform) $\frac{1}{2}I(|t| \leq 1)$

Epanechnikov $\frac{3}{4}(1-t^2)I(|t| \leq 1)$

高斯函数(Gaussian) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Quartic $\frac{15}{16}(1-t^2)^2I(|t| \leq 1)$

核密度估计

03.1 带宽 h ——影响

- 邻域点权重, h 越大, 权重越小
- 曲线平滑程度, h 越大, 越平滑

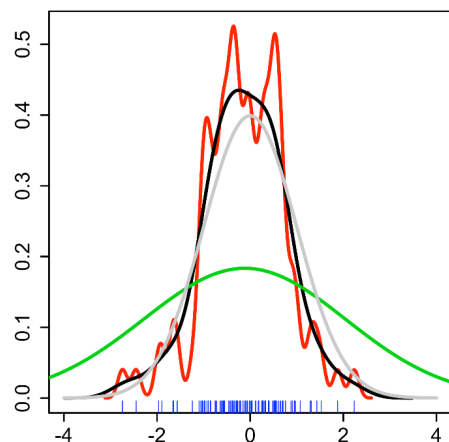
带宽的选择很大程度上取决于主观判断

03.2 带宽 h ——判断依据

最小化积分均方误差 $MISE(h)$,
平衡核密度估计的方差与偏差

03.3 带宽 h ——选择方法

- (1) 拇指法则 (2) Plug-in 方法



蓝色: 样本点
灰色: 真实概率密度
红色: 过小的带宽 h
绿色: 过大的带宽 h

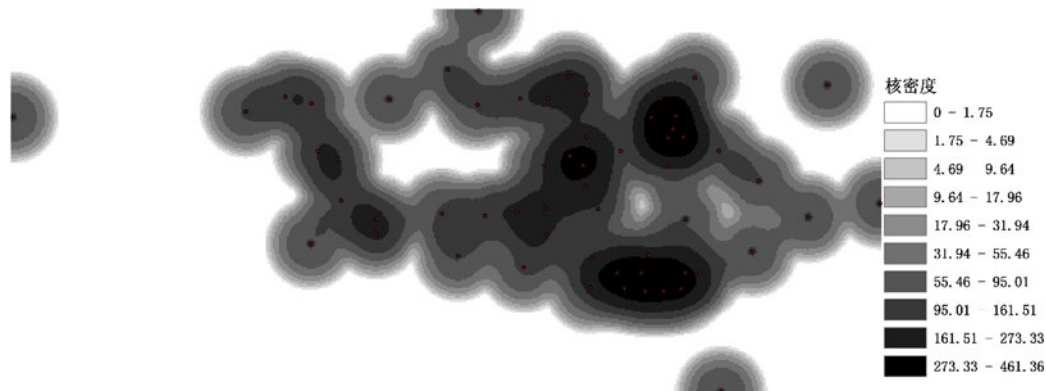
04 几点补充

◆ 非参数估计

不利用有关数据分布的先验知识, 无需先验假设
从数据样本本身出发研究数据分布特征

◆ 在估计边界区域时易出现边界效应

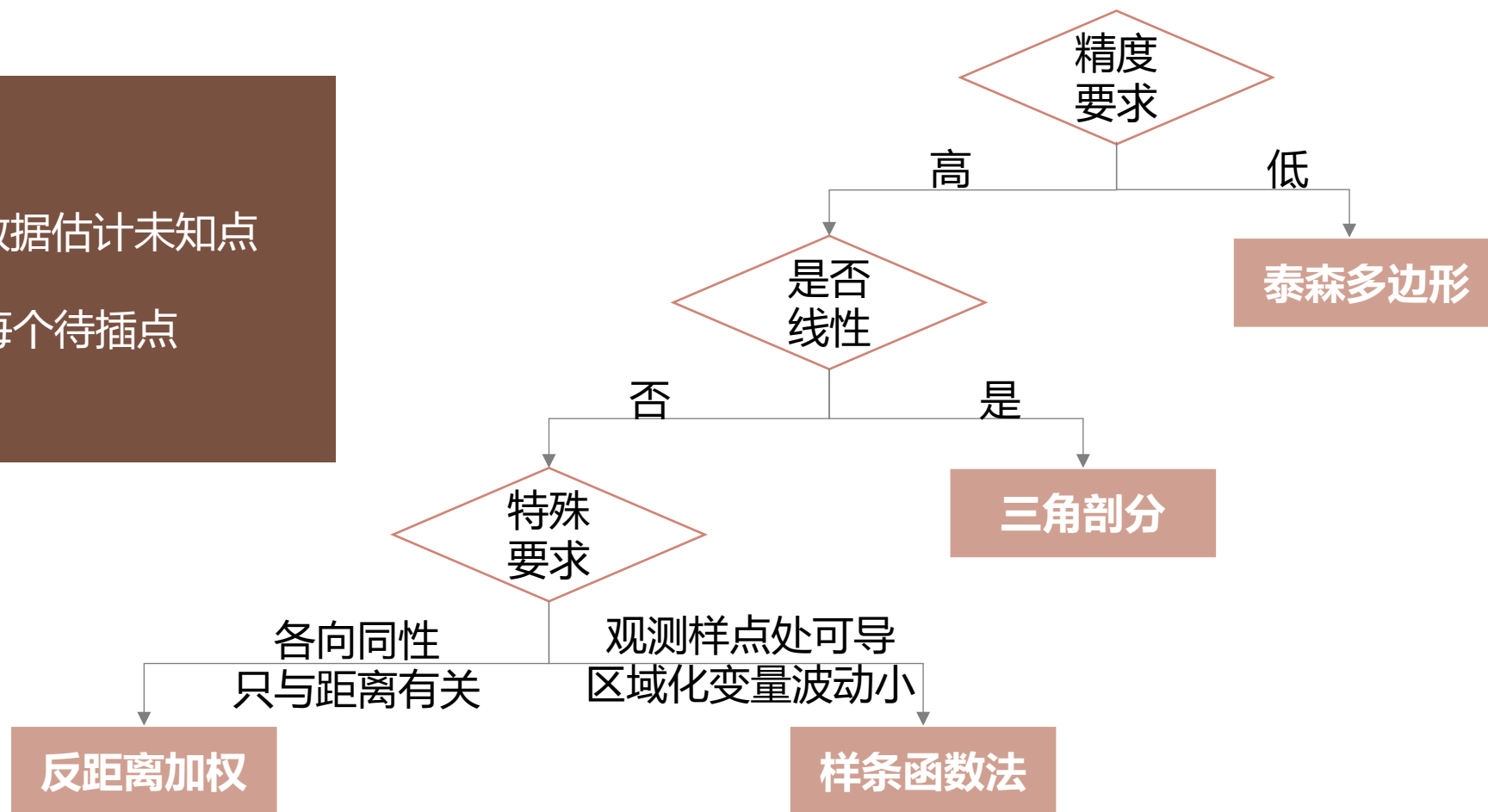
- 用于测量建筑密度
- 获取犯罪情况报告
- 发现对城镇或野生动物栖息地造成影响的道路或公共设施管线



局部精确插值

◆ **局部**：使用邻近数据估计未知点

◆ **精确**：精确计算每个待插点



三角剖分法

01 派生于三角测量

将参考点用直线与其相邻点连接成三角形，
三角形内部不包括任何参考点（采样点）

02 常用三角网 *Delaunay*

- 最小角度是最大
- 每个三角形外接圆不包括其他点
- 三角网具有唯一性

03

- 未测点只能在三角形内或边线上
- 线性插值求得
- 只由三个实测值得到，无误差估计
- 易导致三角形边斜率产生突变

三角形区域内点 $p(x, y)$ ，插值计算如下：

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i f(x_i, y_i)$$

λ_i 表示在三角形当中，第 i 个点的权重，
 $f(x_i, y_i)$ 表示第 i 个观测点的属性

$$\lambda_1 = \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_0 - y_3)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)}$$

(x_i, y_i) 三角形顶点 i 的坐标，
 λ_2 、 λ_3 的计算以此类推

泰森多边形法

01

原理

最近邻点法, 边界内插法

假定任何重要的变化发生在区域的边界上, 边界内的变化则是均匀的、同质的。

02

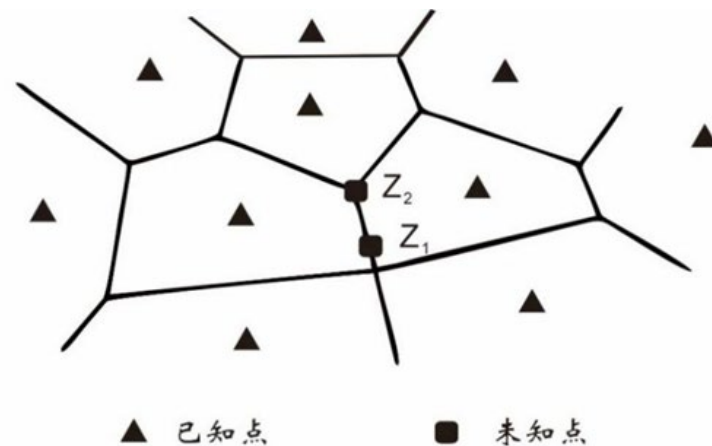
方法

依据参考点构建泰森多边形
判断待求点所落入的多边形,
由控制该多边形的参考点推算待求点

03

适用

较小的区域内变量变化趋势不明显
优点: 不需前提条件, 简单高效
缺点: 受样本点影响大



04

泰森多边形构建步骤

- 连接所有参考点, 形成Delaunary三角网
- 做所有边的垂直平分线,
- 即形成泰森多边形, 即Voronoi图

反距离加权

01 原理:

反距离加权法 (Inverse Distance Weight, IDW)

以插值点与样本点之间距离为权重的插值方法

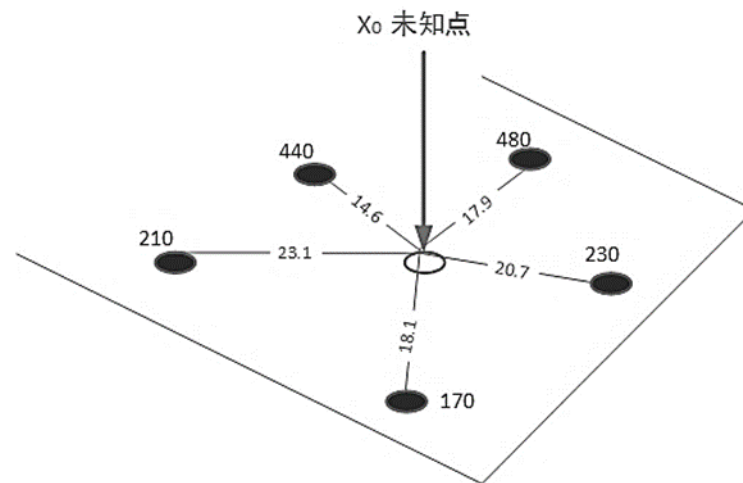
假定实测点对预测结果的影响
随离预测点距离的增加而减少

02 优点:

- 适合变化大的数据值, 结果易解释
- 插值面上最大最小值点只可能出现在采样点

03 不足:

- 权重选择敏感
- 易造成孤立点明显高于周围数据点, 呈现多极中心



$$z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad \lambda_i = d_{i0}^{-p} / \sum_{i=1}^N d_{i0}^{-p} \text{ 且 } \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

d_{i0}^{-p} 是预测点与每个实测点的距离,
幂函数 p 是实测值对预测值的影响等级

P越大, 距离远的点权重更小

P可由RMSE确定, 常为2

样条函数

分段函数

可修改某一段
保留细微特征，插值速度快

弹性力学条件

相邻分块边界上 $n-1$ 次导数连续
保证曲面间光滑

精确插值

经过每一个点

适用场景

高程、水体污染、气象数据

特点

类别

薄板样条插值

表面上每个点的
二阶导数项平方和最小，
即表面具有最小曲率

规则样条插值

使用可能位于
样本数据范围之外的值
来创建渐变的平滑表面

张力样条插值

使用受样本数据范围
约束更严格的值
来创建不太平滑的表面

局部精确插值 小结

7

泰森多边形

- 根据最近邻原则，将区域的值全部设为泰森多边形中心点值
- 插值精度低，得到连续的面，适于较小区域内空间变异不明显的情况

8

三角剖分法

- 每个预测值只由三个实测值得到，无误差估计
- 方法简单，易导致三角形边上斜率产生突变

9

反距离加权法

- 两点间距离作为权重，距离越大权重越小，极值只出现在采样点上
- 适于呈均匀分布且密集程度足以反映局部差异的样点数据集

10

样条函数法

- 保证局部连续，在观测点处可导，即在局部多项式插值基础上引入类似于水位高度等连续渐变的特征
- 适于生成平缓变化表面，如高程等

克里金插值

Krige, 1951

南非地质学家

克里金
插值

提出

发展
深化

Matheron, 1976

法国地理数学学家

插值
方法

利用区域化变量的原始数据和变异函数的结构特点，
对未采样点的区域化变量的取值进行
线性无偏最优估计的一种方法

地统计
理论基础

区域化变量

协方差函数
和变异函数

理论假设

变异函数
结构

1

• 普通克里金法

2

• 简单克里金法

3

• 泛克里金法

4

• 对数正态克里金法

5

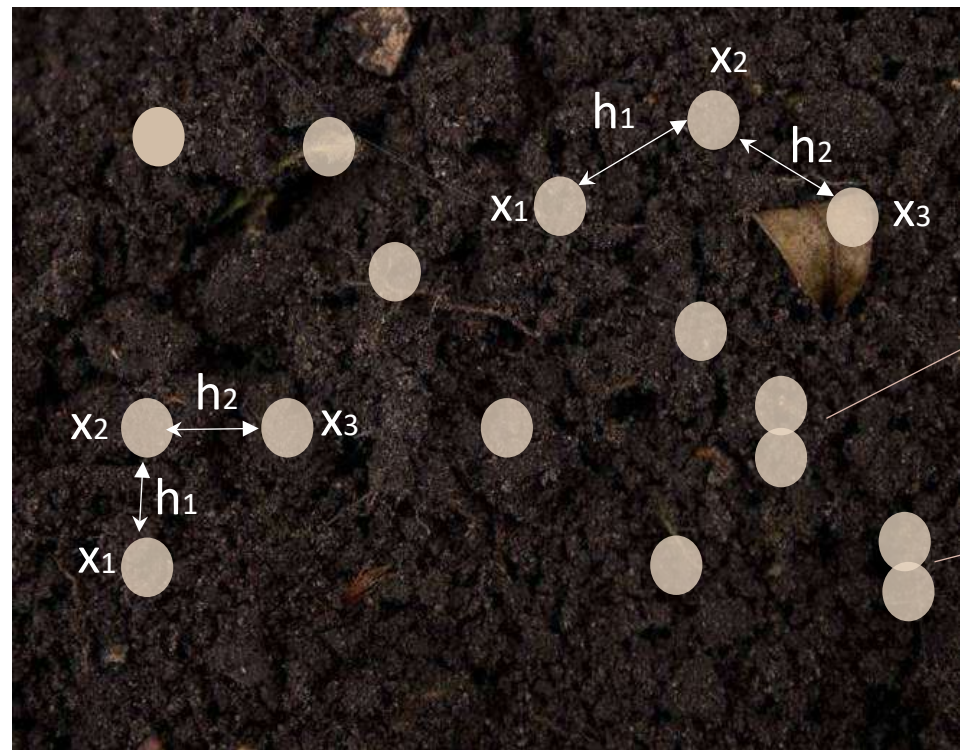
• 指数克里金法

6

• 协同克里金法

区域化变量

我的值我做主



我们差不多

我们差不多

我们差很多

虽然 $h_1 = h_2$
但 $|x_1 - x_2| \neq |x_2 - x_3|$

我是石头，没有值

当一个变量呈空间分布时，称之为“区域化”。

区域化变量的性质

随机性

局部的、随机的、异常的

结构性

变量在点 X 与点 $X+h$ 处的值具自相关性

空间局限性

一定范围外，变量属性为0

不同程度的连续性

用相邻样点之间的变异来度量

不同类型的各向异性

各个方向上的性质变化不相同

区域化变量

变量的取值根据其在在一个域内的位置不同而取值

变量不能重复观测，不太可能在同一位置取两次样本

样本间具有空间自相关性

既有随机性又有结构性

区域化变量



变量取值

变量观测次数

样本间距离

性质

对比

变量的取值符合某种概率分布

变量可无限次重复观测或进行大量重复观测试验

要求每次抽样必须独立进行，样本中各取值之间相互独立

随机性

普通随机变量

协方差函数

当 $Z(x)$ 为区域化变量， x 为空间点的位置， h 为空间两点的距离，则协方差函数 $C(x, x+h)$ 为：

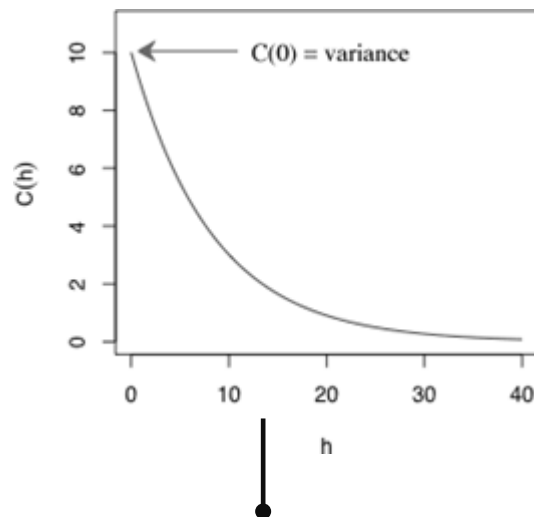
$$\text{Cov}[Z(x), Z(x+h)] = E(\{Z(x) - E[Z(x)]\}\{Z(x+h) - E[Z(x+h)]\})$$

当 $h=0$ 时，协方差函数 $C(x, x+h) = \text{Var}[Z(x)]$

若 $Z(x)$ 满足**二阶平稳假设**，协方差函数计算公式如下：

$$C^*(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - \overline{Z(x_i)}][Z(x_i + h) - \overline{Z(x_i + h)}]$$

$\overline{Z(x_i)}$ 和 $\overline{Z(x_i + h)}$ 分别为 $Z(x_i)$ 和 $Z(x_i + h)$ 的算术平均值， $N(h)$ 是样本的对数。



分析空间自相关性的变化
但有可能小于0

变异函数

01 定义:

通常区域化变量 $Z(x)$ 描述二维和三维现象,
则变异函数是指在任一方向 α ,
相距 $|h|$ 的两个区域化变量值 $Z(x)$ 与 $Z(x+h)$
的增量的方差:

$$\begin{aligned}\gamma(x,h) &= \frac{1}{2} \text{Var}[Z(x) - Z(x+h)] \\ &= E\{[Z(x) - Z(x+h)]^2\} - \{E[Z(x)] - E[Z(x+h)]\}^2\end{aligned}$$

式中, $\gamma(x,h)$ 称为半变异函数, 但也称变异函数

02 性质

- ✓ $|h| \rightarrow \infty$ 时, $\gamma(h) \rightarrow C(0)$, 即当空间上样点间距离无限大时, 变异函数接近先验方差
- ✓ $\gamma(h) = \gamma(-h)$, 即变异函数是一个偶函数
- ✓ $\gamma(h) \geq 0$, 即变异函数值只能大于或等于零
- ✓ $|h| \rightarrow \infty$ 时, $\gamma(h) \rightarrow C(0)$, 即当空间上样点间距离无限大时, 变异函数接近先验方差
- ✓ $[-\gamma(h)]$ 必须是一个条件非负定函数

理论假设

区域化变量在同一地点不能重复取值

平稳假设

随机函数的性质不随位置移动而改变，严格平稳的，也称平移不变性

$$F_{x_1, \dots, x_n}(z_1, \dots, z_n) = F_{x_1+h, \dots, x_n+h}(z_1, \dots, z_n)$$

二阶平稳假设

- 条件1：随机函数的均值为一常数
- 条件2：随机变量间的协方差依赖于两者之间的距离和方向

$$E[Z(x)] = m$$

$$\text{Cov}[Z(x), Z(x+h)] = C(h)$$

本征假设 (内蕴假设)

- 条件1：较小距离上，随机变量的增量数学期望为0
- 条件2：方差函数只依赖于增量间的距离和方向

$$E[Z(x) - Z(x+h)] = 0$$

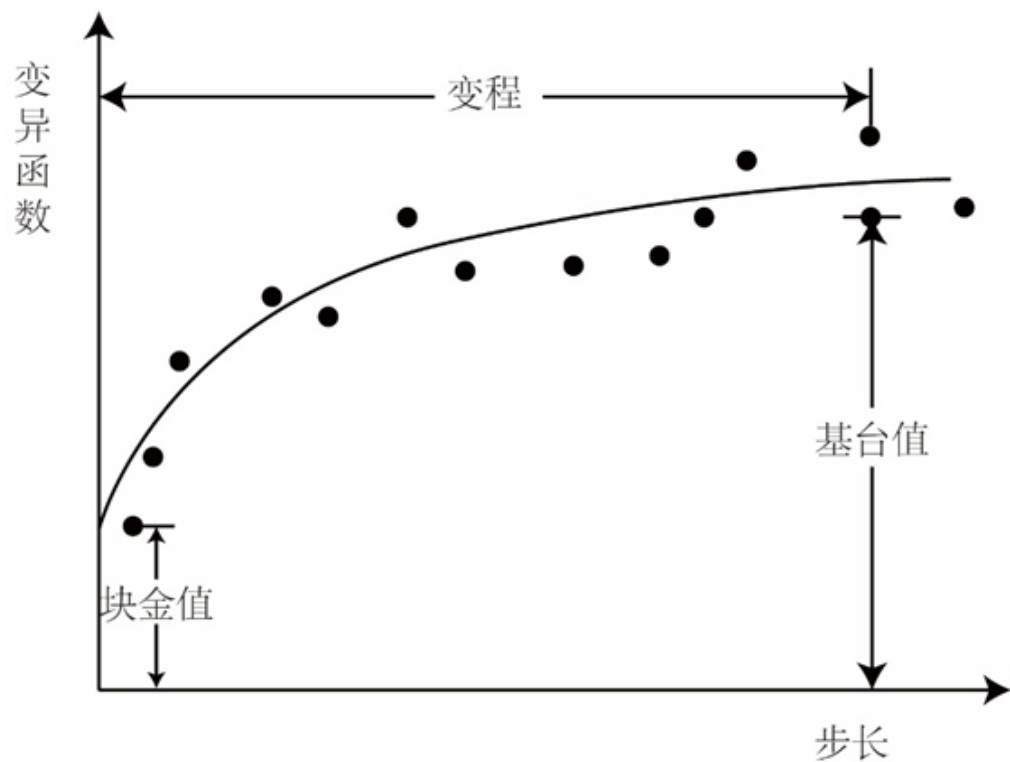
$$\text{Var}[Z(x) - Z(x+h)] = 2\gamma(h)$$

地统计学中对随机函数的基本假设

变异函数 结构分析

主要目的:

指导如何根据**实际观测数据**建立有效且合适的**变异函数模型**，并对模型进行**理论分析**和专业解释。



变程(Range):

通常变异函数为单调递增函数，当步长(h)超过某一数值(a , $a > 0$)后，变异函数值不再继续单调增大，而往往稳定在一个极限值附近，这种现象称为“跃迁现象”， a 称为变程

基台值(Sill):

当变异函数随步长增加到一个相对稳定的水平所对应的变异函数的值

块金常数(Nugget):

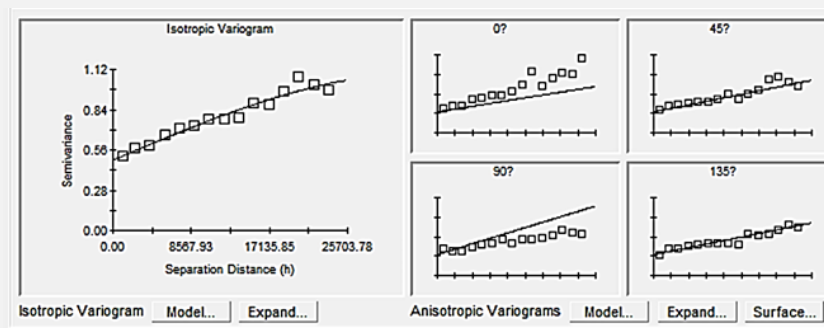
对于变异函数 $\gamma(h)$ ，当 $h \rightarrow 0$ 时， $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0$ ($C_0 > 0$), 即为常数，这种现象称为块金效应， C_0 称为块金常数

变异函数 结构分析

功能

- ☑ 变程——影响范围
- ☑ 基台值——变异强度
- ☑ 块金值——随机性
- ☑ 原点处性状——空间连续性
- ☑ 不同方向变异函数图——各向异性
(各向同性是相对的, 各向异性是绝对的)

区域化变量**随机性来源**主要有:
微观结构 (即变量在小于抽样尺度 h 时所具有的变异性)
采样、测量和分析等误差



各向同性变异函数图 (左图) :

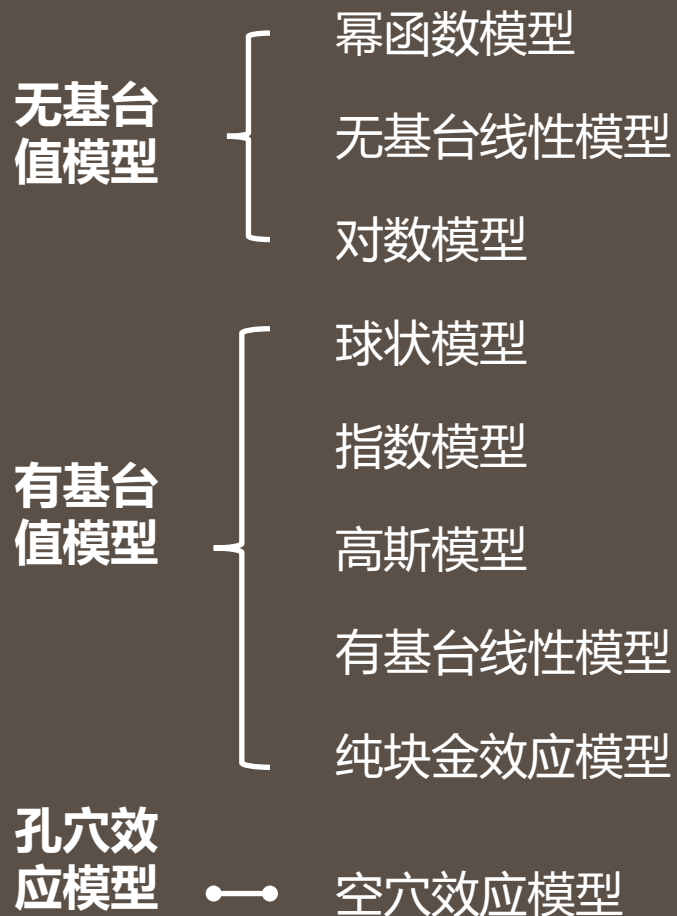
随样本间距离 h 的增加, 变异函数逐渐增大, 说明距离越近点的属性越相似

四个方向的变异函数图 (右图) :

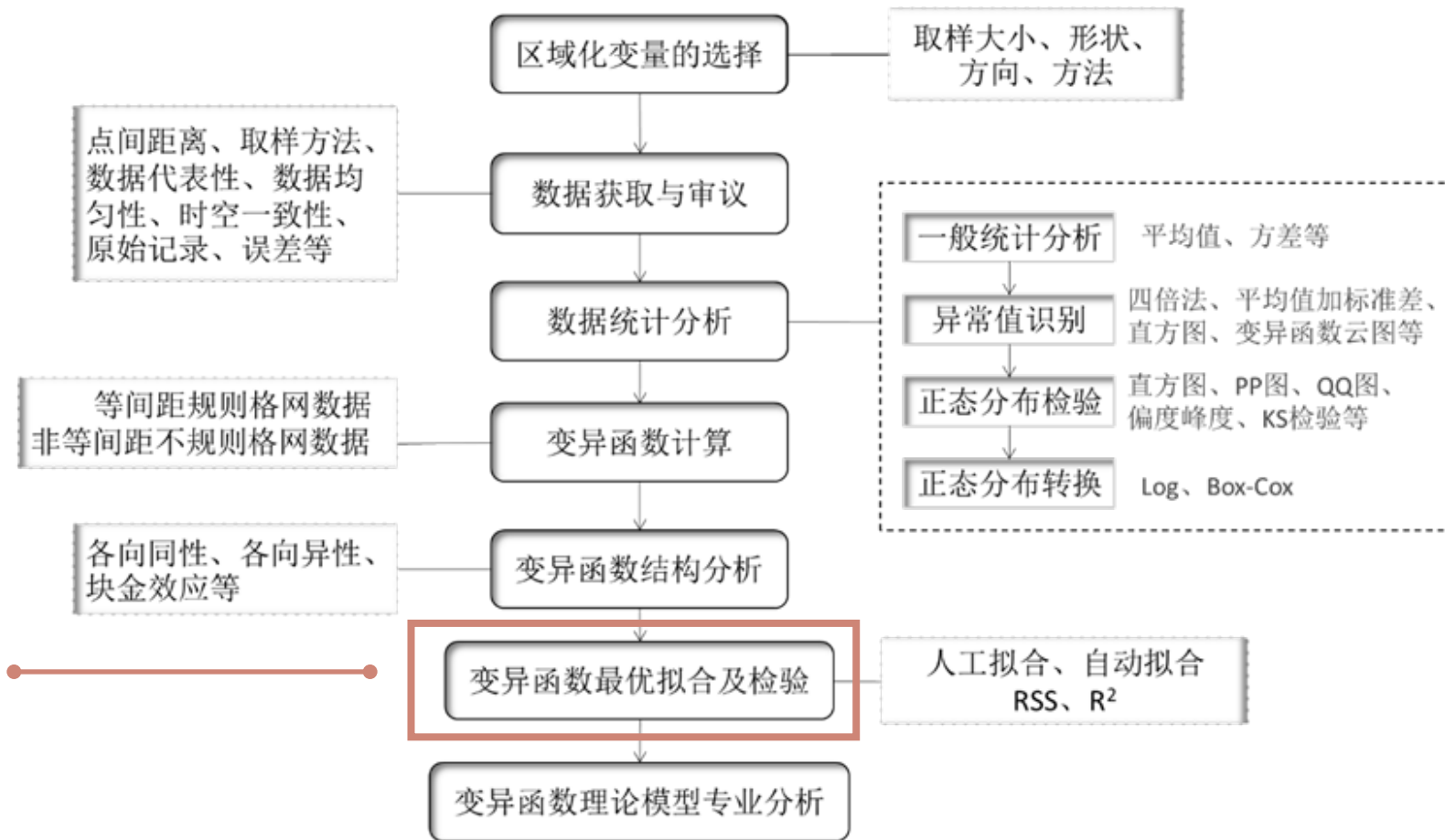
四个方向上 (0° 、 45° 、 90° 、 135°) 的变异函数走势不相同, 说明样本在各个方向上的变异性不同

变异函数理论模型

变异函数理论模型类型



变异函数结构分析步骤



变异函数理论模型

函数理论模型类型

有基台值模型

球状模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ C_0 + C(\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\frac{h^3}{a^3}), & 0 \leq h \leq a \\ C_0 + C, & h > a \end{cases}$$

指数模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ C_0 + C(1 - e^{-\frac{h}{a}}), & h > 0 \end{cases}$$

高斯模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ C_0 + C(1 - e^{-\frac{h^2}{a^2}}), & h > 0 \end{cases}$$

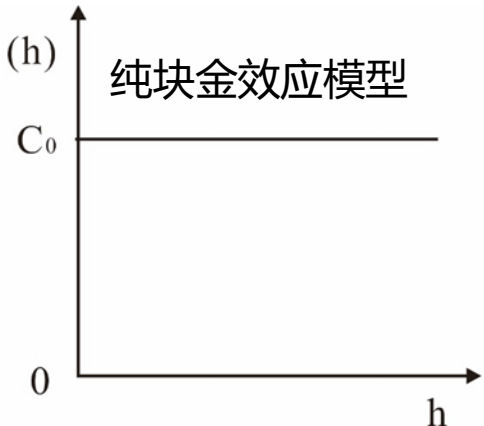
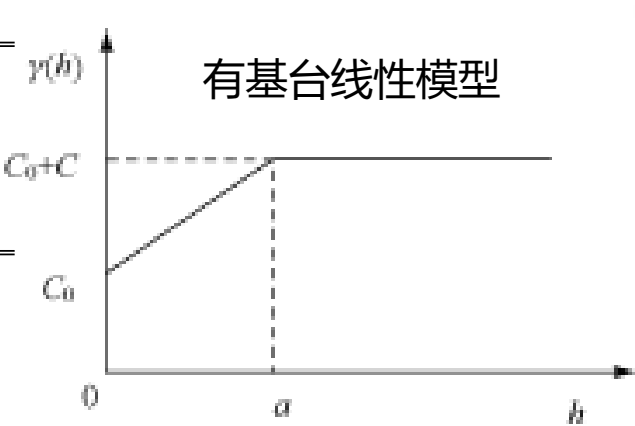
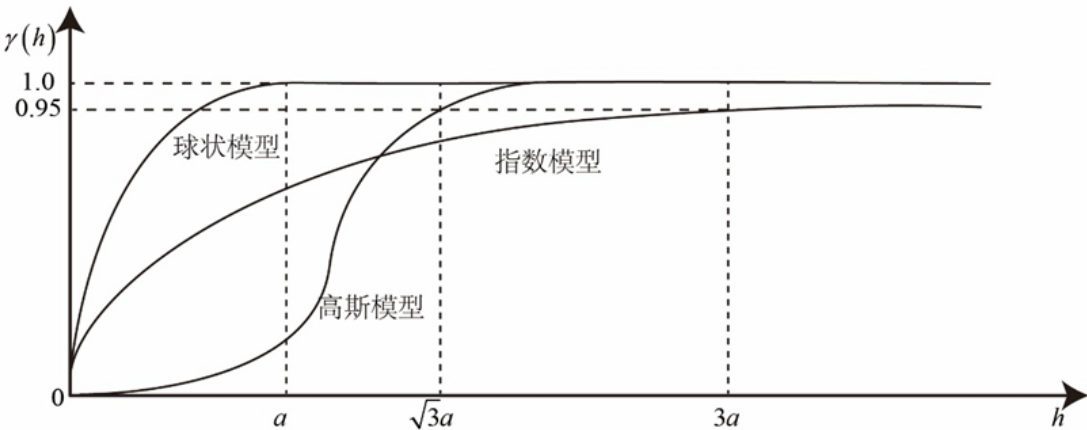
有基台线性模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 & h = 0 \\ Ah & 0 < h \leq a \\ C_0 + C & h > a \end{cases}$$

纯块金效应模型

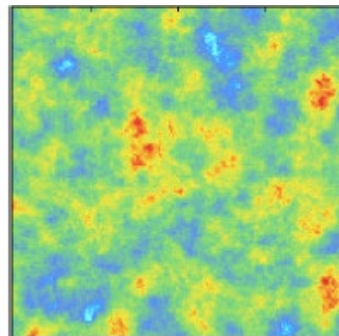
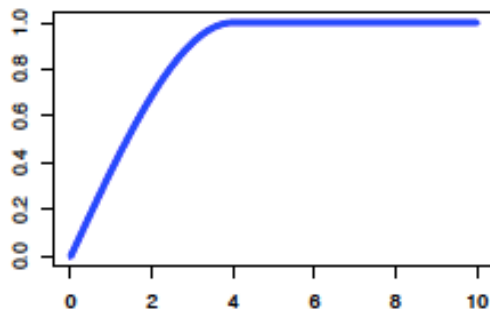
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ C_0, & h > 0 \end{cases}$$

C_0 为块金常数; C 为拱高; $C_0 + C$ 为基台值; a 为变程; A 为常数, 表示直线斜率; h 为步长, 即两点间距离

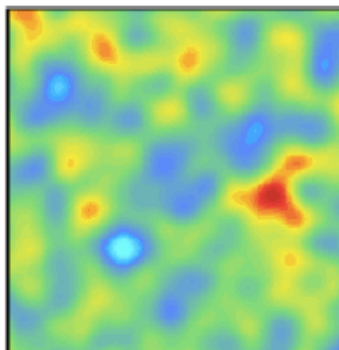
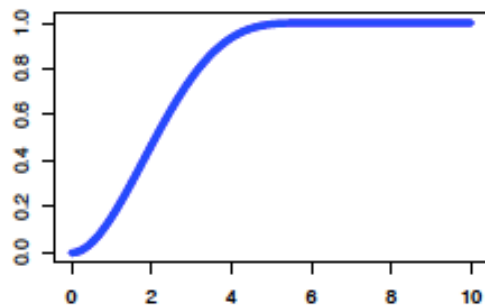


变异函数 理论模型

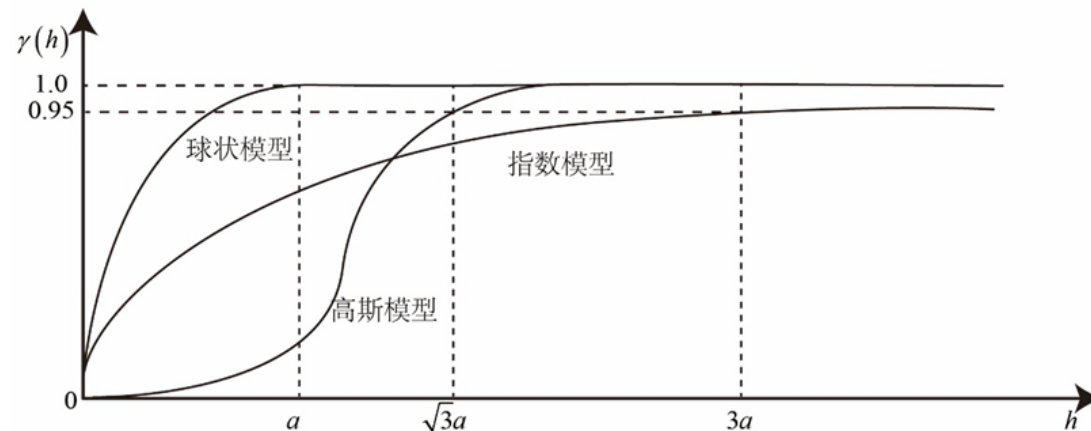
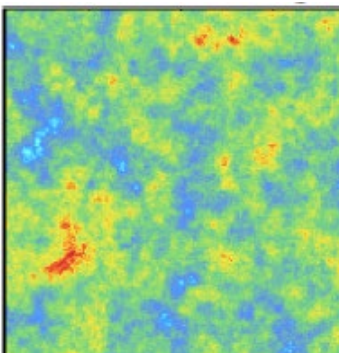
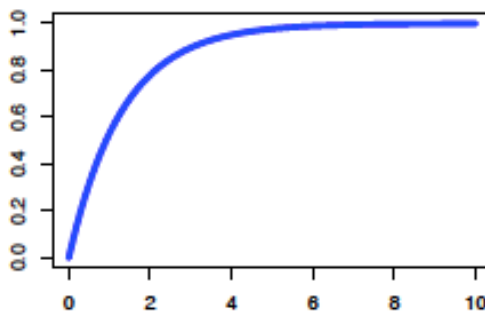
球状模型



指数模型



高斯模型



变程——

球状模型适合变量影响范围小、采样点数较多
指数模型适合变量影响范围大、采样点数较少

原点处性状——

高斯模型，抛物线，高度连续性，矿层厚度
球状和指数模型，直线，平均意义连续性，金属品位

变异函数理论模型

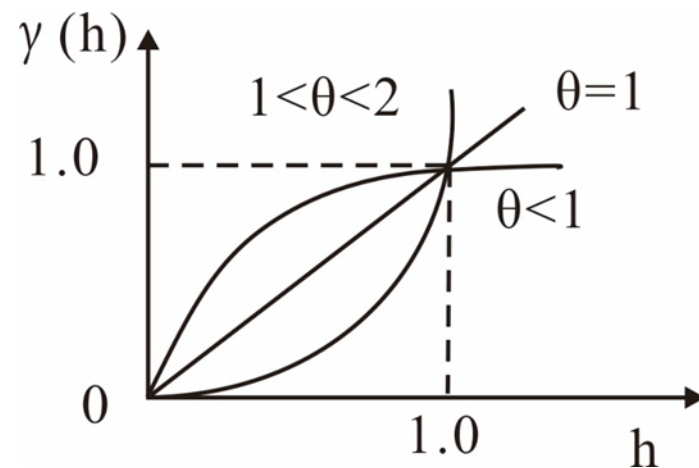
变异函数理论模型类型

无基台值模型

幂函数模型

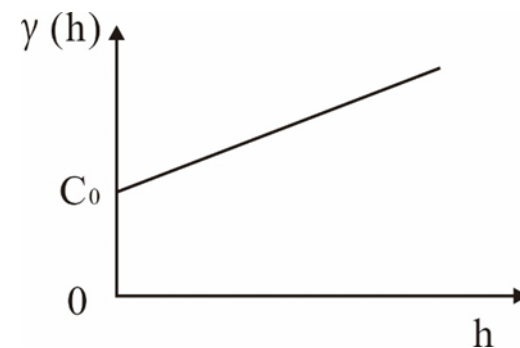
$$\gamma(h) = Ah^\theta, 0 < \theta < 2$$

A为变异强度,
 θ 为幂指数, 表示曲率



无基台线性模型

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ Ah, & h > 0 \end{cases}$$



孔穴效应模型

当变异函数在 h 大于一定距离后并非单调递增, 而是以一定的周期 b 进行波动时, 变异函数曲线显示出一种“孔穴效应(hole effect)”

克里金插值

确定性插值的敏感性问题：

- ◆ 需要计算平均值数据点的数目
- ◆ 是否有比计算简单距离函数更好的估计权重系数的方法
- ◆ 搜索数据点的邻域大小、方向和形状如何确定
- ◆ 与插值有关的误差问题

与反距离加权法对比：

- ◆ 相同点：局部估计的加权平均
- ◆ 不同点：权重的确定
 - 反距离加权基于距离
 - 克里金插值基于变异函数，即半方差分析

克里金插值定义：

基于采样数据反映出区域化变量的结构信息，
(由变异函数或协方差函数提供)

根据待估点或块段有限邻域内的采样点数据，
考虑样本点间与待估点间的空间相互位置关系，
对待估点进行无偏最优估计。

普通克里金

01

假定 $Z(x)$ 是满足本征假设的一个随机过程,
 n 个观测值 $z(x_i)$, 预测未采样点 x_0 处的值 $Z^*(x_0)$

局部线性:
$$z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad (1)$$

02

最优权重的确定: 预测无偏并有最小方差

无偏条件:
$$E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0 \quad (2)$$

最优条件:
$$Var[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = \min \quad (3)$$

03

将式(1)取代式(2)的等号左边部分, 得到:

$$E[Z^*(x_0) - Z(x_0)]E[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(x_i)] - E[Z(x_0)] \quad (4)$$

普通克里金插值——单个变量的局部线性 最优 无偏估计

普通克里金

04

在本征假设条件下, $E[Z(x_i)] = E[Z(x_0)] - m$, 进一步推导公式 (4) 可得:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(x_i)] - E[Z(x_0)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i m - m = m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) = 0 \quad (5)$$

上述成立, 必须满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

**本征假设
(内蕴假设)**

- 条件1: 较小距离上, 随机变量的增量数学期望为0
- 条件2: 方差函数只依赖于增量间的距离和方向

$$E[Z(x) - Z(x + h)] = 0$$

$$Var[Z(x) - Z(x + h)] = 2\gamma(h)$$

地统计学中对随机函数的基本假设

普通克里金

05

$Var[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = \min$ 左边进一步表示为:

$$Var[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = E[\{Z^*(x_0) - Z(x_0)\}^2] = E[\{\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) - Z(x_0)\}^2]$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j)$$

$\gamma(x_i, x_j)$ 是数据点 x_i 与 x_j 之间的半方差值;

$\gamma(x_i, x_0)$ 是数据点 x_i 与预测点 x_0 之间的半方差值

06

根据方差最小原则, 借助**拉格朗日乘子** φ 得到

预测方程组为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \varphi(x_0) = \gamma(x_j, x_0) \end{cases}$$

预测方差为:

$$\sigma^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \varphi$$

拉格朗日乘子法

- 寻找有等式约束条件的函数的最优值(最大或最小)的最优化方法。
- 在求取函数最优值的过程中, 约束条件通常会给求取最优值带来困难

若 x_0 恰好为实测点 x_j , 则当 $\lambda(x_i) = 1$ 时且其他所有的权重等于0时 $\sigma^2(x_0)$ 最小且为0, 即 $z(x_0) = z(x_j)$
普通克里金是精确的插值方法!!

简单克里金

简单克里金

满足二阶平稳假设，即平均值已知且为**常数**，协方差函数（变异函数）存在且平稳

与普通克里金一样，是单一变量的局部线性、无偏、最优估计

主要区别在于简单克里金数学期望已知

二阶平稳假设

- 条件1：随机函数的均值为一常数
- 条件2：随机变量间的协方差依赖于两者之间的距离和方向

$$E[Z(x)] = m$$

$$\text{Cov}[Z(x), Z(x+h)] = C(h)$$

简单克里金

预测公式:
$$Z_{sk}^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) + (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) \mu$$

权重计算:
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_j) = \gamma(x_0, x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_1) & \gamma(x_1, x_2) & \cdots & \gamma(x_1, x_n) \\ \gamma(x_2, x_1) & \gamma(x_2, x_2) & \cdots & \gamma(x_2, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma(x_n, x_1) & \gamma(x_n, x_2) & \cdots & \gamma(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_0) \\ \gamma(x_2, x_0) \\ \cdots \\ \gamma(x_n, x_0) \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

相比于普通克里金

$$\text{无 } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

无拉格朗日乘子

预测方差:
$$\sigma_{sk}^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0)$$

简单克里金

- 预测方差稍小于普通克里金
原因: 均值的引入提高了预测精度

- 实际中, 均值很难得到
所以, 很少直接用于估计

- 常用于其他克里金中,
如指示、协同克里金,
原因: 数据进行了转换, 平均值已知

泛克里金

1 原理假设

假设数据中存在主导趋势，
且该趋势可以用一个确定的函数或多项式来拟合

2 方法步骤

Step 1 分析数据中存在的变化趋势，获得拟合模型

Step 2 对残差数据（原始数据减趋势数据）
进行普通克里金分析

Step 3 将趋势面分析和残差分析的克里金结果加和，
得到最终结果

3 精度比较

克里金方法明显优于趋势面分析，
泛克里金的结果一般优于普通克里金

$$Z(x) = m(x) + \varepsilon(x)$$

$m(x)$: 主导趋势
 $\varepsilon(x)$: 残差数据

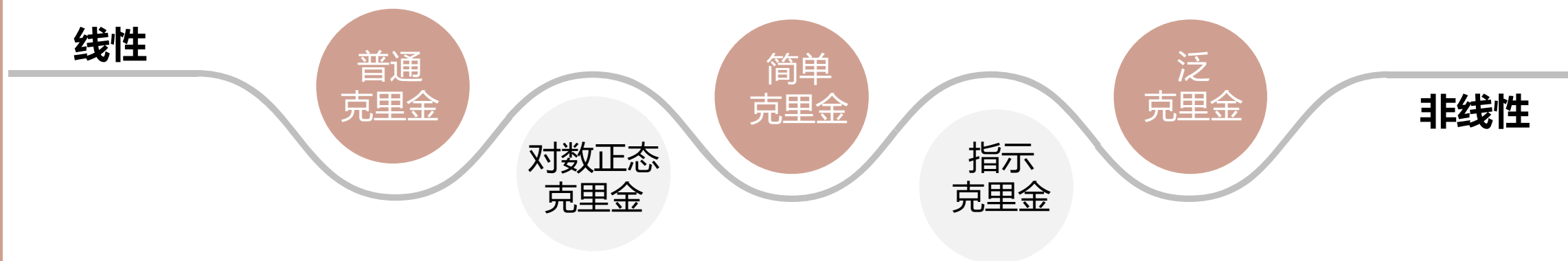
4 实际应用

研究对象是否平稳，取决于观测尺度的
大小和数据的密集程度

在1:500和1:50万不同尺度的地形图下，
小山包地区的高程变化明显程度便不同

整体上	局部范围	适用方法
主导趋势	平稳的	普通克里金
平稳的	主导趋势	泛克里金

对数正态克里金



对数正态克里金

将实测数据转换为对数，使其服从近似正态分布后，进行普通或简单克里金插值
适用于采样数据严重偏斜，呈非正态分布的情况

令目标点 x_0 处的自然对数的克里金预测结果为 $\hat{Y}(x_0)$ ，其方差为 $\sigma^2(x_0)$ ，则有：

1. 简单克里金的回转公式：

$$\hat{Z}_{SK}(x_0) = \exp\{\hat{Y}_{SK}(x_0) + \sigma_{SK}^2(x_0)/2\}$$

2. 普通克里金的回转公式：

$$\hat{Z}_{CK}(x_0) = \exp\{\hat{Y}_{CK}(x_0) + \sigma_{CK}^2(x_0)/2 - \psi\}$$

ψ 为普通克里金法中的朗格拉日乘子

指示克里金

适用场景：

区域化变量 $Z(x)$ 在某地超过给定阈值 z 的概率：
如评价土壤重金属污染问题

$$\begin{aligned} \text{Prob}[Z(x_0) > z | z(x_i); i = 1, 2, \dots, N] \\ = 1 - \text{Prob}[Z(x_0) \leq z_c | z(x_i)] \end{aligned}$$

指示码：

仅有0和1两个值
表示某种物质存在和不存在或是否大于某个阈值

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{如 } z(x) \leq z_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义多个阈值：

为每个阈值生成一个新的指示变量。
如定义 S 个阈值为 $z_{c(s)}$ $s=1, 2, \dots, S$
得到指示变量 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1, & \text{若 } z(x) \leq z_{c(1)}, \text{其他为 } 0 \\ \omega_2 &= 1, & \text{若 } z(x) \leq z_{c(2)}, \text{其他为 } 0 \\ &\dots \\ \omega_s &= 1 & \text{若 } z(x) \leq z_{c(s)}, \text{其他为 } 0 \end{aligned}$$

这些可以被当作是相应的随机函数 $\Omega_c(x)$, $s = 1, 2, \dots, S$ 的实现, 对这个随机函数, 如果 $z(x) \leq z_{c(s)}$ 则有 $\Omega_c(x) = 1$, 否则 $\Omega_c(x) = 0$

指示克里金

指示半方差:

指示随机函数的变异函数形式
类似于连续变量的变异函数:

$$\gamma_{Z_c}^{\Omega}(h) = \frac{1}{2} E[\{\Omega[Z(x; z_c)] - \Omega[Z(x + h; z_c)]\}^2]$$

半方差值通过转化后的指示数据计算:

$$\gamma_{Z_c}^{\Omega}(h) = \frac{1}{2m(h)} \sum_{i=1}^{m(h)} \{\tilde{\omega}(x_i; z_c) - \tilde{\omega}(x_i + h; z_c)\}^2$$

指示克里金:

对每一个目标点或块段, 利用指示变量建立其预测值计算公式: $\hat{\Omega}(x_0; z_c) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \omega(x_i; z_c)$

指示值通常是有界限的, 它的样品平均 ($\bar{\omega}; z_c$) 通常是作为它的期望, 后续可用简单克里金法预测
预测位置得到的插值结果为一个0和1之间的数, 表示 $\Omega(x_0) = 1$ 时的条件概率

总结:

将连续的变量转换为二进制的形式,
是**非线性、非参数统计**的克里金预测方法

非参数统计方法

- 无需假设数值来自某种特定分布的总体 (正态分布)
- 无需考虑异常值,
- 无需对原始数据进行变换 (如对数转换)

协同克里金

在**统计意义**及**空间位置**上均具有某种程度相关性，并且定义于同一空间域中的区域化变量

$$\gamma_{KK'}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1, j=1}^{N(h)} [Z_{K'}(x) - Z_{K'}(x+h)][Z_K(x) - Z_K(x+h)]$$

理论上与普通克里金相同——
数学期望未知的线性无偏最优估计

协同
区域化

定义

利用**多个变量**间的相互关系，
建立**交叉变异函数**，
用易观测的变量局部估计不易观测的变量

交叉
变异函数

适用
场景

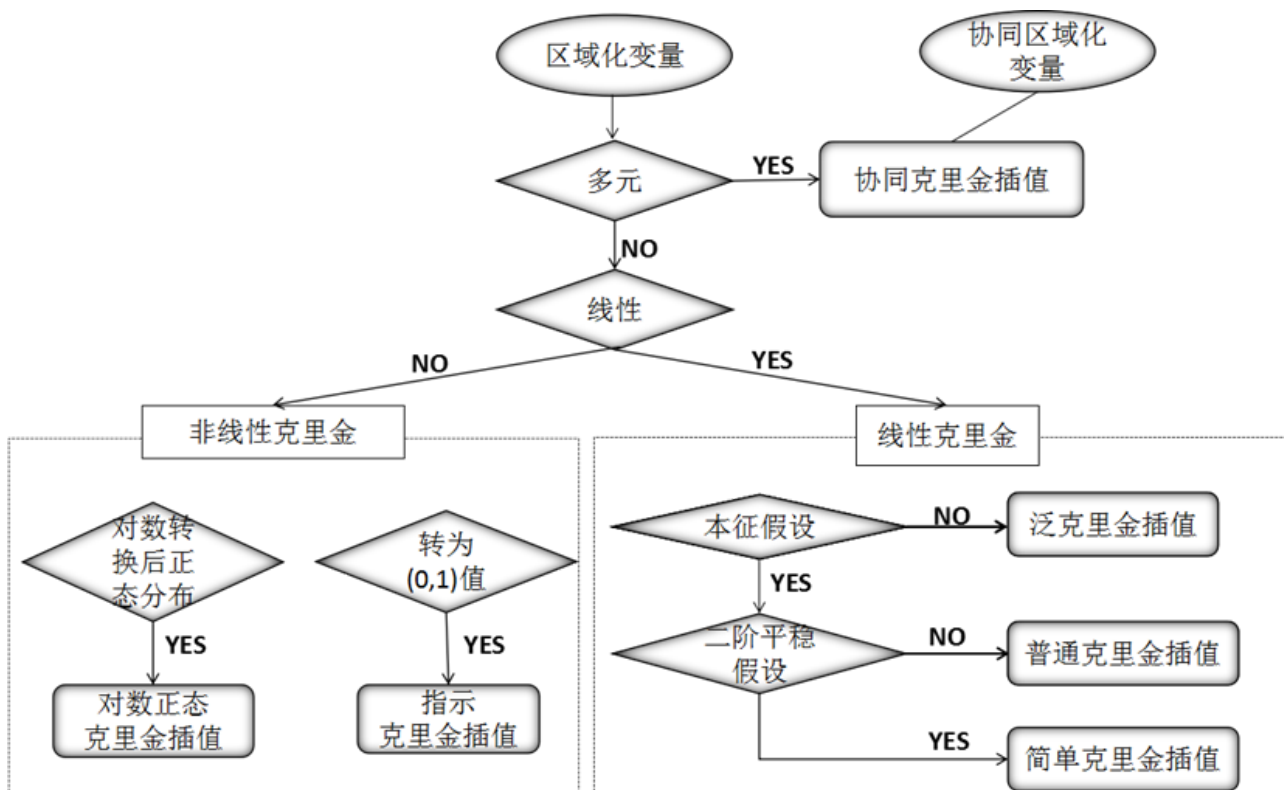
如气温与海拔呈负相关，同时研究气温和海拔时，一旦某地缺乏气温的观测值，可用海拔所提供的信息研究气温

协同
克里金估值

优势

能用一种变量的信息去弥补所遗漏或提供另一变量的信息

克里金插值 小结



普通克里金

满足本征假设，区域化变量的平均值是未知的常数

简单克里金

满足二阶平稳假设，变量的平均值是已知的常数

泛克里金

变量的数学期望是未知的变化值，即样本非平稳

对数正态克里金

数据不服从正态分布时使用

指数克里金

有真实的特异值，需估计风险、概率分布时

协同克里金

适合于相互关联的多元区域化变量

Thank you