组合数学复习题

考点以及题目

基本排列组合问题求解

- 题目：（1）计算数字为1，2，3，4，5且满足以下两个性质的4位数的个数：(a)数字全不相同；(b)数为偶数
- （2）6位男生和6位女生围着圆桌就座，如果要求男女相间而坐，可以有多少种围坐的方式?
- （3）在2n个球中，有n个球相同。求从这2n个球中选取n个球的方案数。

（1）解答：因为所求的数为偶数，所以个位只有2种选择：2或4。因为4位数字全不相同，所以剩余3位数只能是1，2，3，4，5中去掉用于个位数的数字之后的4个数字的3排列，因此共有2×P(4,3)=48个这样的数。

（2）解答：先女的排好，有5！种，再将男的插进去空位，有6！种方法，一共有5！*6！=86400种方法

（3）解答：

有n个相同就有n个不相同，取n个不相同和0个相同的为C(n,n)，取n-1个不相同的球和1个相同的球为C(n,n-1)，....等等。

所以总的方案数为 $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$

或者直接考虑n个不相同的球的选择方案(可选0,1,…,n个)，共有2^n个方案。

不相邻、多项式系数

- 题目：（1）书架上有一套《资治通鉴》共20卷，从中选出4卷使得任意两本的卷号都不相邻的选法有多少种?
- （2）将英文字母表中的26个字母排序，要求任意两个元音字母不能相邻，则有多少种排序方法?
- （3）求$(x_0+3x_1-2x_2)^6$展开式中项$x_0{}^2x_1{}^3x_2$的系数。
- （4）求 $(x-y-2z+w)^8$展开式中$x^2y^2z^2w^2$ 项的系数。

解：

（1）就是不相邻组合，因此为C(n-r+1,r)，此处n=20,r=4，代入得到C(20-4+1,4)=C(17,4)=2380

（2）先排21个辅音字母，共有21！， 再将5个元音插入到22个空隙中(首尾)有P(22,5)，故所求为21!×P(22,5)

（3） $\binom{6}{2\ 3\ 1}3^3(-2)=3240$

（4）$\binom{8}{2\quad 2\quad 2\quad 2}\times 1^2\times(-1)^2\times(-2)^2\times 1^2=\frac{8!}{4}$

路径问题求解

- （1）甲乙两人在5月份共进行了15局围棋比赛，最后甲以9:6的赢棋局数比分获胜，若在整个比赛期间，甲的得分一直不少于乙的得分，试问有多少种不同的比分纪录?
- （2）在一局乒乓球比赛中，运动员甲以11:7战胜运动员乙，若在比赛过程中甲的得分一直不少于乙的得分，求有多少种可能的比分记录?

（1）相当于从（0，1）出发到（6，10）的所有路径减去从（1，1）出发到（6，10）的所有路径，故结果为C(15,6)-C(15,5)=C(14,5)

（2）解答：
根据题意，由乒乓球球赛规则，因此实际求的是求从点(0,0)到点(7,10)—(7,11）且从上方不穿过y=x的非降路径数，参见书p32页结果，m=7,n=10,代入结果为C(m+n,m)-C(m+n,m-1)=C(17,7)-C(17,6)

利用母函数求解问题—注意区分组合型和排列型

- **题目：** 用字符集{a,b,c,d,e}组成一个n位字符串，要求其中c,e出现的次数为偶数，其它字符出现的次数不加限制，请问这样的n位字符串共有多少个?

解答：设满足条件的n位数的个数为a_n，则$\{a_n\}$对应的指数型母函数为

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3=\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)^2(e^x)^3=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(5^n+2\cdot3^n+1\right)\frac{x^n}{n!}$$

所以：$a_n=\dfrac{1}{4}(5^n+2\cdot3^n+1)$

题目：

- （a）有红、黄、蓝球各两个，绿、紫球各3个，从中取出7个球，试问有多少种不同的取法。
- （b）一个n位十进制数中，要求4和6都出现偶数次，3和7出现奇数次，8至少出现1次，问这样的n位数有多少个？（首位不能是0）

（a）解答：其对应的母函数为$G(x)=(1+x+x^2)^3(1+x+x^2+x^3)^2$

其中x^7的系数为

$$(-1)^7\binom{-5}{7}+(-2)(-1)^3\binom{-5}{3}+(-3)(-1)^4\binom{-5}{4}+(-3)(-2)+3(-1)^1\binom{-5}{1}=71$$

（b）设其方案为a_n，考虑对应的允许首字符为0的字符串的方案为b_n,，

显然有$a_n=b_n-b_{n-1}$(当 $n\geq 2$时候)，$a_1=0, a_2=0$

考虑序列$\{b_n\}$对应的母函数为$G_e(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2(e^x-1)e^{5x}$

$$b_n=\frac{1}{16}(10^n-9^n-2*6^n+2*5^n+2^n-1)$$

$$a_n=b_n-b_{n-1} \qquad \frac{1}{16}(9*10^{n-1}-8*9^{n-1}-10*6^{n-1}+8*5^{n-1}+2^{n-1})$$

$$a_1=0$$

题目：一个$1\times n$的方格图形用红、蓝、绿和黄四种颜色涂色，如果有偶数个方格被涂成红色，还有偶数个方格被涂成绿色，求有多少种方案?

解答：其染色方案有$a_n=\begin{cases}4^{n-1}+2^{n-1} & n>0\\ 1 & n=0\end{cases}$，故所求方案数为$4^{n-1}+2^{n-1}$种

题目: (a) 求由a, b, c这3个字母所组成的18-组合的个数，其中在每个18-组合中，a, b的个数至少为3，至多为10，c的个数至少为2。

(b) 由数字1,2,3,4可组成多少个含奇数个1，偶数个2且至少含1个3的n位数?

(c) 求方程$x_1+x_2+2x_3=5,\ 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 2,\ x_3\ge 0$整数解的个数。

解答: (a) 54

（b） $a_n=\frac{1}{4}(4^n-3^n+(-1)^n)$ $(n\ge 2)$

（c） 3

常系数线性递推关系求解(母函数、特征根、差分)

➢**题目：** 解下列递推关系

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}, n \geq 3 \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

解答：由 $a_n - a_{n-1} - 9a_{n-2} + 9a_{n-3} = 0$

有特征方程 $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

特征根 $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -3.$

通解为 $a_n = A_1 \bullet 1^n + A_2 \bullet 3^n + A_3 \bullet (-3)^n$

代入初始条件得方程组

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 + 3A_2 - 3A_3 = 1 \\ A_1 + 3^2 A_2 + (-3)^2 A_3 = 2 \end{cases}$$

利用消元法得 $A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = 1/3, A_3 = -1/12.$

故 $a_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \bullet 3^n - \frac{1}{12} \bullet (-3)^n$

题目：

- （a）解下列递推关系$a_n + a_{n-2} = 0, a_0 = 0, a_1 = 2$

（a）方法一，特征方程为$x^2+1=0$,其两个根为$r_{1,2} = \cos\frac{\pi}{2} \pm \sin\frac{\pi}{2}$

故递推关系的通解为$a_n = A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}$

代入初始条件 $a_0 = 0$，求解得$a_0 = A\cos 0 + B\sin 0$，即A=0,

代入初始条件 $a_1 = 2$，求解得$a_1 = A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2}$，即B=2,

故递推关系的解为$a_n = 2\sin\frac{n\pi}{2}$, $n = 0,1,2,\ldots$

方法二，由$a_n + a_{n-2} = 0$，故$a_n = -a_{n-2}$，

由初始条件$a_0 = 0$,即当n=2k时候，$a_n = 0$

初始条件$a_1 = 2$,即当n=2k+1时候，$a_n = (-1)^k$

故递推关系的通解为$a_n = \begin{cases} 0 & \text{当}n = 2k\text{时} \\ (-1)^k & \text{当}n = 2k+1\text{时} \end{cases}$

➢ （b）求S_n=$1^3+2^3+\ldots+n^3$的通项公式。（要求不能直接使用立方和公式，解答需要有中间求解过程，否则不得分）

（b）解答：由$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = (n+1)^3$，故$s_n$是n的4次多项式，

故设$s_n = A\binom{n}{4} + B\binom{n}{3} + C\binom{n}{2} + D\binom{n}{1} + E$

由初始条件$s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 9, s_3 = 36, s_4 = 100$

代入$s_0 = 0 = E$

代入$s_1 = 1 = D$，解得D=1

代入$s_2 = 9 = C + 2D$，解得C=7

代入$s_3 = 36 = B + 3C + 3D$，解得B=12

代入$s_4 = 100 = A + 4B + 6C + 4D$，解得A=6

故有$s_n = 6\binom{n}{4} + 12\binom{n}{3} + 7\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$

有重根、非齐次

- 解下列递推关系

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n, n \geq 2 \\ a_0 = 5, a_1 = 2 \end{cases}$$

解答：其对应的特征方程为:$x^2-x-6=0$,即为$(x-3)(x+2)=0$，

其特征根为$r_1=3,r_2=-2$;

由于3是其特征根，因此特解形如$Cn3^n$，代入方程得到

$$Cn3^n - C(n-1)3^{n-1} - 6C(n-2)3^{n-2} = 3^n$$

解得$C=\frac{3}{5}$

故方程的通解形如$a_n = A(-2)^n + B3^n + \frac{3}{5}n3^n$，代入初始条件

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A + 3B + \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 3 = 2 \end{cases} \text{---》} \begin{cases} A = \frac{74}{25} \\ B = \frac{51}{25} \end{cases}$$

可得$a_n = \frac{74}{25}(-2)^n + \frac{51}{25}3^n + \frac{3}{5}n3^n$

题目：

- 求非齐次递推关系$a_n - 10a_{n-1} + 21a_{n-2} = 4 \times 3^n$ 的满足$\mathrm{a}_0 = 0, \mathrm{a}_1 =- 5$的解.

解答： $a_n = 7^n - 3^n - 3n3^n \ (n \geq 0)$

非齐次

- 解下列递推关系
- $$\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 6n - 5, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 5,\ a_1 = 13 \end{cases}$$

解答：特征方程为

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

解之得 $x_1 = 3,\ x_2 = 4$。

相应齐次递推关系的通解为：$\boldsymbol{A3^n + B4^n}$

因为1不是特征方程的根，故其特解的形式为：$Cn + D$。代入递推关系得

$$(Cn + D) - 7(C(n-1) + D) + 12(C(n-2) + D) = 6n - 5 \ \Rightarrow\ 6Cn - 17C + 6D = 6n - 5 \quad \Rightarrow \quad C = 1, D = 2$$

于是特解为$n + 2$。从而递推关系通解为

$$\boldsymbol{a_n = A3^n + B4^n + n + 2}$$

由$a_0 = 5,\ a_1 = 13$ 得方程组

$$\begin{cases} A + B + 2 = 5 \\ 3A + 4B + 3 = 13 \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

所求递推关系的解为：$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^n + 4^n + n + 2,\quad n \geq 0}$

容斥原理应用---求解非负整数解的个数

- **题目：** 求方程 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ 1\le x_1\le 4, 2\le x_2\le 6, 0\le x_3\le 2 \end{cases}$ 的非负整数解的个数

解答：等价于求集合S0＝{3.A,4.B,2.C,∞.D}的所有7-组合构成的集合。
令集合S为 $\{\infty\cdot A,\infty\cdot B,\infty\cdot C,\infty\cdot D\}$ 的所有7-组合构成的集合。
则有 |S|=C(10,7) = 120。
令 A_1表示S中至少含有4个A的元素构成的集合，A_2表示S中至少含有5个B的元素构成的集合，A_3表示S中至少含有2个C的元素构成的集合，
于是 $|A_1|=\mathrm{C}(6,3)=20$ $|A_2|=\mathrm{C}(5,2)=10$ $|A_3|=\mathrm{C}(7,4)=35$

$|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$ $|A_1\cap A_3|=$ 1

由容斥原理，所求的7-组合数为

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$ =56

解法:(母函数求解)

其的对应的母函数为:

$$G(x)=(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2)(1+x+x^2+\ldots)$$

$$=\frac{x(1-x^4)}{(1-x)}*\frac{x^2(1-x^5)}{(1-x)}*\frac{(1-x^3)}{(1-x)}*\frac{1}{(1-x)}$$

$$=x^3(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x)^{-4}$$

$$=x^3(1-x^3-x^4-x^5+x^7+x^8+x^9-x^{12})(1-x)^{-4}$$

求解其中x^{10}的系数

题目：

- （1）求满足下列条件：$x_1+x_2+x_3=40$，

  $6\le x_1\le 15,\ 5\le x_2\le 20,\ 10\le x_3\le 25$,的整数解数目。

解答：做变换 $y_1=15-x_1,\ y_2=20-x_2,\ y_3=25-x_3$,则原方程等价于求
$y_1+\ y_2+\ y_3=15+20+25-x_1-x_2-x_3=20$
且$0\le y_1\le 9,\ 0\le y_2\le 15,\ 0\le y_3\le 15$的整数解数目，

则所求为$|\bar{A}\ \cap\bar{B}\cap\bar{C}\ |=|U|-|A\cup B\cup C|$

$$=|U|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|C\cap B|+|A\cap C|)-|A\cap B\cap C|$$

=C(22,2)-(C(12,2)+ C(6,2)+ C(6,2))+0-0

=135

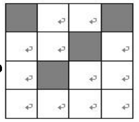
题目： 求方程$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=18 \\ 1\le x_i\le 9,\ i=1,2,3,4 \end{cases}$的整数解组的个数

解答：456

题目： 求方程$x_1+x_2+x_3=14$,满足条件$1\le \mathrm{x}_1\le 5,1\le \mathrm{x}_2\le 4,3\le \mathrm{x}_3\le 7$整数解的个数

解答：6

有限制排列—棋盘多项式

- （1）图形的棋盘多项式是________________

（1）解答： $1+4x+5x^2+2x^3$

鸽巢原理典型题目求解

➢**题目：** 设正整数序列$a_1,a_2,\ldots,a_{25}$满足$a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_{i+5}\le 6$，$i=0,1,\ldots 20$。试证明至少存在正整数$h$、$k$（$1\le h<k\le 25$），使得$a_h+a_{h+1}+\ldots+a_k=19$。

证明：作序列$s_1=a_1$，$s_2=a_1+a_2$，$\cdots$，$s_{25}=a_1+a_2+\cdots+a_{25}$

由于$a_i>0$，故 $s_1<s_2<\cdots<s_{25}$

$$s_{25}=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(a_6+a_7+\cdots+a_{10})+\cdots+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{25})$$
$$\le 6\times 5=30$$

考虑$s_1,s_2,\cdots,s_{25}$；　$s_1+19,s_2+19,\cdots,s_{25}+19$

由$s_{25}+19\le 30+19=49$知至少有两项相等。但

$s_1<s_2<\cdots<s_{25}$，$s_1+19<s_2+19<\cdots<s_{25}+19$

所以存在 $s_h,s_k(1\le h<k\le 25)$，使得

$$s_k=s_h+19$$

即有

$$s_k-s_h=(a_1+a_2+\cdots+a_k)-(a_1+a_2+\cdots+a_h)$$
$$=a_{h+1}+a_2+\cdots+a_k=19$$

➢**题目：** 证明：在边长为1的等边三角形内任取5点，试证至少有两点的距离小于1/2。

证明： 将等边三角形各边中点相连,将该三角形分成4个边长为1/2的小等边三角形,则5个点必有2个点落在其中一个小三角形内,且此两点中至少有一点不在原三角形的边上,所以这两点的矩离必小于1/2.

题目：

- （1）（一名实验员在50天里每天至少做一次实验，而实验总次数不超过75。证明一定存在连续的若干天，她正好做了24次实验。
- （2）证明：平面上任取5个坐标为整数的点，则其中至少有两个点，由它们所连线段的中点的坐标也是整数。
- （3）用红、蓝两种颜色对一个3×9的棋盘中的方格随意着色，证明：必有两列方格，它们的着色是一样的。
- （4）任取5个整数，试求其中必存在3个数，其和能被3整除。

证明：略

题目：

- （a）证明：不同身高的26个人随意排成一行，那么，总能从中挑出6个人，让其出列后，他们的身高必然是由低到高或由高到低排列的。
- （b）张三决定在50天里共对局70盘围棋，每天至少对局1盘，证明：必有连续若干天，张三在这几天里共对局了29盘围棋。

（a）证明：设这26个人的身高为$a_1,a_2,\ldots a_{26}$,且均不相等，要求从中必然能选出长为6的单增子序列或单减子序列。

不妨设l_i为以a_i为首的最长单增子序列的长度（i=1,2,..,26）,若存在$l_i\geq 6$（$1\leq i\leq 26$），则选取以i为首的长为l_i的单增子序列即可。否则若所有$1\leq l_i\leq 5$（i=1,2,..,26），则由鸽巢原理，这26个l_i（i=1,2,..,26）中必然存在$1\leq j\leq 5$，至少有$\left\lfloor\frac{26-1}{5}\right\rfloor+1=6$个元素等于j，设其为$l_{i1}=l_{i2}=l_{i3}=l_{i4}=l_{i5}=l_{i6}=j$，且$i1<i2<i3<i4<i5<i6$,则$a_{i1}>a_{i2}>a_{i3}>a_{i4}>a_{i5}>a_{i6}$（否则，若$a_{i1}<a_{i2}$，则将$a_{i1}$添加到以$a_{i2}$为首的最长单增子序列中，这样获得一个以$a_{i1}$为首长度为$j+1$的单增子序列，这与$l_{i1}=j$矛盾，其余同理证明）,该子序列即为所求。

（b）证明：设张三每天的对局数为$a_1,a_2,\ldots a_{50}$,则令$s1=a_1$, $s2=a_1+a_2,\ldots$, $s50=a_1+a_2+\ldots+a_{50}$,由每天至少对局1盘，故$1\leq s_1<s_2<\ldots<s_{50}<70$,考虑$s_1+29<s_2+29<\ldots<s_{50}+29<99$，则100个元素在1到99之间，故由鸽巢原理，必然有两个不同的元素相等，又由序列$1\leq s_1<s_2<\ldots<s_{50}<70$，故存在$s_i=s_j+29$（i>j），即$s_i-s_j=a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_j=29$。

Polya定理应用

- 题目：一正立方体的六个面用g,r,b,y四种颜色涂染，有多少种不同的方案?另外其中两个面用色g,两个面用色y,其余一面用b,一面用r的方案数有多少?

解答：其置换群的循环指标为 $P_G(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\frac{1}{24}(x_1^6+6x_1^2x_4+3x_1^2x_2^2+8x_3^2+6x_2^3)$
故所求着色方案数为：

$$P_G(4,4,\cdots,4)=\frac{1}{24}(4^6+6\cdot4^3+3\cdot4^4+8\cdot4^2+6\cdot4^3)=240$$

着色方案为：

$$\begin{aligned}P=\frac{1}{24}[&(r+b+g+y)^6+6(r+b+g+y)^2(r^4+b^4+g^4+y^4)\\&+3(r+b+g+y)^2(r^2+b^2+g^2+y^2)^2\\&+8(r^3+b^3+g^3+y^3)^2+6(r^2+b^2+g^2+y^2)^3]\end{aligned}$$

其中g^2y^2br的系数为

$$\frac{1}{24}\left(\frac{6!}{2!2!1!1!}+3\frac{2!}{1!1!0!0!}\frac{2!}{0!0!1!1!}\right)=8$$

题目：

➤一个项链由7颗珠子装饰而成的，其中2颗珠子是红的，3颗是蓝的，其余2颗是绿的，问有多少种不同的装饰方案？

解答：

其对应的置换群G的循环指标为$P_G(x_1,x_2,\cdots,x_7)=\frac{1}{14}\left(x_1^7+7x_1x_2^3+6x_7\right)$

设r、g、b分别表示红、绿、篮这3种颜色，因此实际要求的是

$$P(b,g,r)=\frac{1}{14}[(b+g+r)^7+6(b^7+g^7+r^7)^1+7(b+g+r)^1(b^2+g^2+r^2)^3]$$

中$b^3g^2r^2$的系数，故有

$$\frac{1}{14}\left[\binom{7}{3\ \ 2\ \ 2}+6\cdot 0+7\cdot 1\cdot\binom{3}{1\ \ 1\ \ 1}\right]$$

$$=\frac{1}{14}\left[\frac{7!}{3!2!2!}+7\frac{3!}{1!1!1!}\right]$$

$=18$（种）

组合恒等式证明

➢**题目：** （1）$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

（1）解答：等式左边表示从2n个不同的球中取两个球的方法数。
我们把2n个球平均分成A，B两组，选球的方法有以下两类：
取自同一组的选法数为$N1=2C(n, 2)$;
取自不同组的球的方法数为$N2=[C(n, 1)]^2=n^2$

➢**题目：证明：** $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

解答：根据二项式定理：

$$(1+x)^n = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n-1)x^{n-1} + C(n,n)x^n,$$

两边求导，得：

$$n(1+x)^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2)x + \cdots + (n-1)C(n,n-1)x^{n-2} + nC(n,n)x^{n-1},$$

令 $x=1$，即得 $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$

题目：

➢ 证明：设n为大于或等于2的整数，则

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\times n\binom{n}{n}=0$$

题目：证明

➢ （1） $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

➢ （2） $\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+3\binom{n}{3}^2+\cdots+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$

题目：证明

➢ （1） $\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}$

➢ （2） $\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{r}$

答：略

证明题

证明第2类Stirling数具有如下性质

(a) $S(n,2)=2^{n-1}-1$

（b）$S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$

（a）解答：证明：对某个元素a放到一个盒子中，考虑其余的元素与a是否同盒，这样由乘法法则有2^{n-1}种方案，再由于不允许空盒，因此去掉都和元素a同盒的情况，故$S(n,2)=2^{n-1}-1$。

（b）分情况讨论，可分为

（1）3个元素一组、其余元素一个各一组，其有$\binom{n}{3}$种方案

（2）有4个元素分两组（每组2个）、其余元素一个各一组；

则选4个元素的方案是$\binom{n}{4}$种，再考虑其中一个元素和其余3个元素两两组合有3种情况，因此由乘法法则共有$3\binom{n}{4}$

再由加法法则有$S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$

题目：

- 证明：从集合A到集合B的所有满射函数的个数为

  $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$,其中$|A|$=n,$|B|$=m。

题目：

- 令S={1，2，…，n+1}, n≥2, $T=\{(x,y,z)|x,y,z\in S,$ 且$x<z,y<z\}$

  试证：$|T|=1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2=C(n+1,2)+2C(n+1,3)$

证明：略