

组合数学习题选讲

第一章

题：证明 $nC(n-1, r) = (r+1)C(n, r+1)$, 并给予组合解释.

代数证明：

$$nC(n-1, r) = n \frac{(n-1)!}{r! (n-r-1)!} = \frac{(r+1) \cdot n!}{(r+1) \cdot r! (n-r-1)!} = \frac{(r+1) \cdot n!}{(r+1)! (n-r-1)!} = (r+1)C(n, r+1)$$

所以左边等于右边

组合意义：

等式左边： n 个不同的球，先任取出1个标号为1，再从余下的 $n-1$ 个中取 r 个；

等式右边： n 个不同球中任意取出 $r+1$ 个，并指定其中任意一个标号为1。

所以两种方案数相同。

题：有N个不同的整数，从中间取出两组来，要求第1组的最小数大于另一组的最大数。

解答：

(1) 从N个不同的整数中取k个，方案为 $C(N, k)$ $k=2, 3, \dots, N$

(2) 以上 k个数分为2组有 $(k-1)$ 种分法

故有：

$$\sum_{k=2}^N (k - 1)C(N, k)$$

题：8个盒子排成一列，5个有标志的球放到盒子中，每盒最多放一个球，要求空盒不相邻，问有多少种排列方案？

解答：（盒子无区别！）

题：令 $S = \{1, 2, \dots, n+1\}$, $n \geq 2$, $T = \{(x, y, z) | x, y, z \in S, x < z, y < z\}$, 试证：

$$|T| = \sum_{k=1}^n k^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3}$$

解答：

- (1) 先考虑Z的取值
- (2) 分析X, Y的取值

题：6位男宾，5位女宾围一圆桌而坐，

- (1) 女宾不相邻有多少种方案？
- (2) 所有女宾在一起有多少种方案？
- (3) 一女宾A和两位男宾相邻又有多少种方案？

解答：

- (1) 若5位女宾不相邻，先考虑6位男宾围圆桌而做的方案数，
- (2) 把5位女宾看成一个整体
- (3)

题：凸十边形的任意三条对角线不共点。
试求这凸十边形的对角线相交于多少个点？

解答： $C(10,4)$

题：给出

$$\binom{n}{m} \binom{r}{0} + \binom{n-1}{m-1} \binom{r+1}{1} + \binom{n-2}{m-2} \binom{r+2}{2} + \dots + \binom{n-m}{0} \binom{r+m}{m} = \binom{n+r+1}{m}$$

的组合意义

解答：

题：证明 $(m,0)C(m,n)+C(m,1)C(m-1,n-1)+\dots+C(m,n)C(m-n,0)=2^n C(m,n)$

解答：

题：(a)用组合方法证明 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 都是整数。

(b)证明 $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整数。

解答：

- (a) 设有 $2n$ 个不同球放入 n 个不同的盒子里，每盒两个，这个方案数应该是整数。同理 $3n$ 个不同球
(b) 有 n^2 个不同的球，放入 n 个相同的盒子里

题：(1)在有5个0，4个1组成的字符串中，出现01或10的总次数为4的字符串，有多少个？

(2)在有m个0，n个1组成的字符串中，出现01或10的总次数为k的字符串，有多少个？

解答：**01或10的总次数如何计算？**

第二章

题：求序列{ 0, 1, 8, 27, ..., n^3 , ...}的母函数。

解答：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

题：已知序列 $\left\{ \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \dots, \binom{n+3}{3}, \dots \right\}$ ，求母函数。

解答：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+3} + \dots$$

题：已知母函数 $G(x) = \frac{3 + 78x}{1 - 3x - 54x^2}$ ，求序列 $\{a_n\}$ 。

解答：

题：求序列{1, 0, 2, 0, 3, 0, ...}的母函数。

解答：

题：已知 $\{a_n\}$ 的母函数为 $\frac{1}{1-x+x^2}$ ，求序列 $\{a_n\}$ 的递推关系以及 a_0, a_1 。

解答：

题：有红、黄、蓝、白球各两个，绿、紫、黑的球各3个，问从中取出10个球，试问有多少种不同的取法？

解答：（用指类型母函数，可得母函数 x^{10} 系数即为所求。）

题：求n位四进制数中2和3必须出现偶次的数目。

解答：

题：求由A,B,C,D组成的允许重复的排列中 AB至少出现一次的排列数目。

解答：

设 a_n 为所求个数， b_n 为不出现AB的串的个数

$$a_n + b_n = 4^n,$$

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2},$$

$$a_n = 4a_{n-1} + b_{n-2},$$

$$b_1 = 4, b_2 = 15, b_0 = 1, b_3 = 56.$$

题：试求由a,b,c三个文字组成的n位符号串 中不出现aa图像的符号串的数目。

解答：设不出现aa的字符串的排列数为 a_n

在所有符合要求的n位串中，最后一位是a，则n-1位是b或c，最后一位不是a，则是b或c.故有

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_0 = 1.$$

题：求长度为n的0、1符号串，只在最后两位才出现00的符号串总数.？？？

解答：设所求的串的个数为 a_n ,相邻不同为0的串的个数为 b_n

题：求 $1^4+2^4+3^4+\dots+n^4$ 的和。

解答： $\because \Delta S_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (1+n)^4$ 是 n 的 4 次方

$$S_n = 1\binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}$$

题： 设 $S(n,k)$ 是第二类stirling数， 证明： $S(n+1,m)=\sum_{k=m-1}^n {n \choose k} S(k,m-1)$

n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中， 要求无一空盒， 其不同的方案数用 $S(n,m)$ 表示， 称为第二类Stirling数。

解答：

第三章

题：求从1到500的整数中被3和5整除但不被7整除的数的个数.

解答：设 A_3 : 被3整除的数的集合 A_5 : 被5整除的数的集合 A_7 : 被7整除的数的集合 所以

$$\begin{aligned}& |\overline{A_7} \cap A_5 \cap A_3| \\&= |A_3 \cap A_5| - |A_7 \cap A_5 \cap A_3| \\&= \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 33 - 4 = 29\end{aligned}$$

题：一年级有100名学生参加中文、英语和数学的考试，其中92人通过中文考试，75人通过英语考试，65人通过数学考试；其中65人通过中、英文考试，54人通过中文和数学考试，45人通过英语和数学考试，求通过3门学科考试的学生数。

解答：

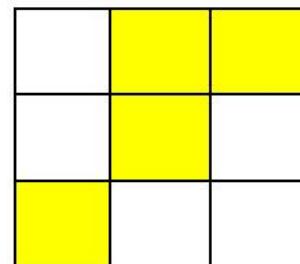
题：1,2,...,n的全排列中不出现相邻的排列数等于多少？

解答：

题：1,2,...,n的全排列中不出现相邻的排列数，包含不出现n和1相邻的情况等于多少？

题：A、B、C三种材料用作产品I、II、III的原料，但要求I禁止用B、C作原料，II不能用B作原料， III不允许用A作原料，问有多少种安排方案？（假定每种材料只做一种产品的原料）

解答：按题意可得如下的带禁区的棋盘，其中有阴影的表示禁区。



棋盘多项式为： $R(\)=R(\)R(\)=(1+x)(1+3x+x^2)=1+4x+4x^2+x^3$

故方案数 $=3!-4\cdot2!+4\cdot1!-1\cdot0!=1$

题：求满足下列条件 $x_1+x_2+x_3=20$, $3 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 8$, $7 \leq x_3 \leq 1$ 的整数解数目。

解答：

题：4位十进制数a b c d，试求 $a+b+c+d=31$ 的数的数目。

解答：

题： n 个代表参加会议，试证其中至少有2人各自的朋友数相等。

解答：

题：在边长为1的正方形内任取5个点试证其中至少有两点，其间距离小于 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

解答：

题：在边长为1的等边三角形内任取5个点试证其中至少有两点，之间距离小于 $1/2$.

题：边长为1的正方形内任取9点，试证存在3个不同的点，由此构成的三角形面积不超过 $1/8$.

题：每边长为3的等边三角形内任取10个点，试证至少有一对点距离小于1.

题： $m+1$ 行 $\left[m\binom{m+1}{2}+1\right]$ 列的格子用 m 种颜色着色，每格着一种颜色，其中必有一个4角同色的矩形。

题：任给5个整数，试证其中必存在3个数的和被3除尽。

解答：

题：A是n+1个数的集合，试证其中必存在两个数，它们的差被n除尽。

题： $X=\{0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ 从X中任意取7个元素，则其中必有两个元素之和等于10.

题：把从1到326的326个整数任意分为5个部分，试证其中有一部分至少有一个数是某两个数之和，或是另一个数的两倍。

解答：

第四章

题：若 x 是群 G 的一个元素，存在一最小的正整数 m ，使 $x^m=e$ ，则称 m 为 x 的阶，
试证： $C=\{e, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ 是 G 的一个子群。

解答：

题： G 是有限群， x 是 G 的元素，则 x 的阶必除尽 G 的阶。

题：若 G 是阶为 n 的循环群，求群 G 的母元素的数目，即 G 的元素可表示 a 的幂： $a^1, a^2 \dots a^n$ 的元素 a 的数目。

解答：

题：若 H 是 G 的子群， x 和 y 是 G 的元素，试证 $xH \cap yH$ 或为空，或为 $xH = yH$

解答：

题：若 H 是 G 的子群， $|H|=k$ ，试证 $|xH|=k$ ，其中 $x \in G$

题：有限群 G 的阶为 n ， H 是 G 的子群，则 H 的阶必除尽 G 的阶。

题：

解答：

题： S_5 群中不同格式及其个数

解答：

题：对正六角形的6个顶点用5种颜色进行涂色，试问有多少种不同的方案

解答：

题：用b, r, g三种颜色的的 5 个珠子镶成的圆环共有几种不同的方案数。

题：一个项链由7颗珠子装饰成的，其中两颗珠子是红色的，3颗是蓝色的，其余两颗是绿色的，问有多少种装饰方案？

题：有一个 3×3 的正方形棋盘，若用红、蓝色对这9个格进行染色，要求两个格着红色，其余染蓝色，问有多少种着色方案？

解答：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

题：在正四面体的每个面上都任意引一条高，有多少种方案。

解答：问题相当于在4个面上用3种颜色着色

题：一个正6面体的6个面用g, r, b, y 四种颜色涂染，求其中两个面用色g，两个面用色y，其余一面用b, 一面用r的方案数。

解答：

题：对一个正6面体的8个顶点，用y和r两种颜色染色，使其中有 5 个顶点用色y，其余 3 个顶点用色r，求其方案数。