

武汉大学国家网络安全学院
2024-2025 学年度第 1 学期
《算法设计与分析》期末考试试卷 (A 卷)

专业: _____ 学号: _____ 姓名: _____

说明: 答案请全部写在答题纸上, 写在试卷上无效。

未经主考教师同意, 考试试卷、答题纸、草稿纸均不得带离考场, 否则视为违规。

题号	一	二	三	四	五		总分
分值							

一、选择题 (共 15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分)

B A C C D B C C D A D C C B A

二、简答计算题 (共 4 小题, 共 30 分)

1. 证明 $\sum_{i=1}^n \log i = \Theta(n \log n)$ 。(6 分)

证明:

先证明上界 O , 上界的证明比较简单, 只要将求和里的每一项 $\log i$ 替换成 $\log n$,

即可:

$$\sum_{i=1}^n \log i \leq \sum_{i=1}^n \log n = n \log n$$

$\sum_{i=1}^n \log i = O(n \log n)$ 得证。

$$\sum_{i=1}^n \log i > \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \log \frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log \frac{n}{2}$$

可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \log i &= \Omega(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log \frac{n}{2}) \\ &= \Omega(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \\ &= \Omega(n \log n) \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n \log i = \Theta(n \log n)$ 得证。

2. 有递归复杂度表达式 $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$, 请 1) 用主方法求解该复杂度 (3 分); 2) 用递归树的方法进行验证 (4 分)。

解: 1) $a=3, b=2, x=2$, 所以 $a < b^x$, $T(n) = \Theta(n^2)$

2)

第 1 层 (根层): $T(n)$

- 根节点的工作量是 n^2 。
- 有 1 个节点。

第 2 层 (递归调用): $3T(n/2)$

- 在这一层, 递归调用了 3 个子问题, 每个子问题的规模是 $n/2$ 。
- 每个子问题的工作量是 $(n/2)^2 = n^2/4$ 。
- 因此, 第 2 层的总工作量是 $3 \times \frac{n^2}{4} = \frac{3n^2}{4}$ 。

第 3 层 (递归调用): $9T(n/4)$

- 在这一层, 递归调用了 9 个子问题, 每个子问题的规模是 $n/4$ 。
- 每个子问题的工作量是 $(n/4)^2 = n^2/16$ 。
- 因此, 第 3 层的总工作量是 $9 \times \frac{n^2}{16} = \frac{9n^2}{16}$ 。

递归树的每一层的节点数和每个节点的工作量逐渐变化。一般而言, 第 k 层的工作量为:

$$\text{第 } k \text{ 层的总工作量} = 3^k \times \frac{n^2}{4^k} = \frac{3^k n^2}{4^k}$$

总的工作量是各层工作量的和:

$$\text{总工作量} = n^2 + \frac{3n^2}{4} + \frac{9n^2}{16} + \frac{27n^2}{64} + \dots$$

这是一个等比数列, 首项为 n^2 , 公比为 $\frac{3}{4}$ 。

该等比数列的和为:

$$\text{总工作量} = n^2 \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = n^2 \times 4 = 4n^2$$

所以 $T(n) = \Theta(n^2)$

3. 设图的初始矩阵为:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

请用 Floyd 算法求解多源最短路径, 要求给出中间过程的所有矩阵 (8 分)。

解:

1) 加入节点 1:

$$D_1 = D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

2) 加入节点 2:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 7 \\ \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

1) 加入节点 3:

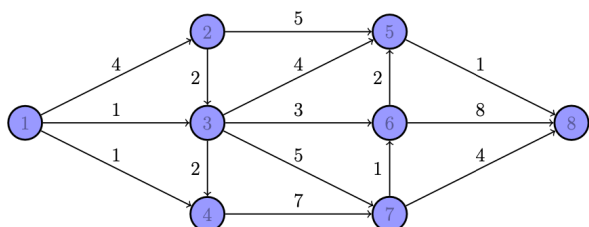
$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 7 \\ \infty & 0 & 4 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

2) 节点 4 加入

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 7 \\ \infty & 0 & 4 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

从A到B的最短路径是 3；从A到C的最短路径是 7；从A到D的最短路径是 7；从B到C的最短路径是 4；从B到D的最短路径是 6；从C到D的最短路径是 2；

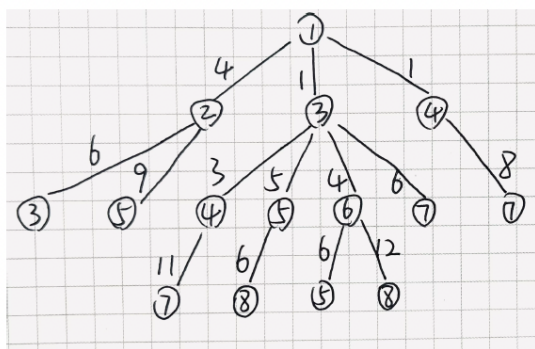
4. 用分支限界算法求解有向图上源节点（1）到目的节点（8）的最短路径，要求 1) 给出界的定义（2 分）；2) 画出搜索树（5 分）；3) 给出 1 到 8 的最短路径（2 分）。



1) 界的定义：假设当前路径长度为 $g(x)$ ，从当前节点到其他活跃节点的最短边长度为 min ，界定义为：

$$f(x) = g(x) + min$$

2)



3) 最短路径：1->3->5->8；路径长度为6。

三、综合分析题 (2 小题, 共 25 分)

1. 现有一辆卡车, 总载重量为 10 吨, 可以运送的货品有 A(1,1), B(2,3), C(4,6), D(5, 8), E(8, 10), (m,n) 表示重量为 m 吨, 价值为 n 万元。选取哪些物品能让一次运送的价值最大? 请 1) 分析问题是否具有最优子结构性质 (2 分); 2) 给出最优解的递归式 (3 分); 3) 自底向上的计算过程上述例子 (5 分); 4) 给出最优解 (2 分)。

解:

1) 该问题为 0-1 背包问题, 所以具有最优子结构性质;

2) 递归式为:

$$m(n, C) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0 \text{ or } C = 0 \\ \max\{m(n-1, C), m(n-1, C-w_n) + v_n\}, & w_n \leq C \\ m(n-1, C), & w_n > C \end{cases}$$

3) 自低向上的计算

i / w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	3	4	4	4	4	4	4	4
3	0	1	3	3	6	7	9	9	10	10	10
4	0	1	3	3	6	8	9	11	11	14	15
5	0	1	3	3	6	8	9	11	11	14	15

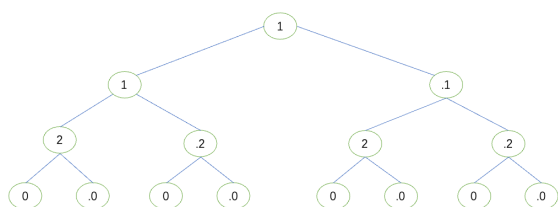
4) 最优解

包含物品: A, C, D; 总重量为: 10 总价值为: 15

2. 对一些数字字符串, 在适当的位置添加 “.”, 可以得到合法的 IP 地址。IP 地址 由 4 个 0 到 255 间的整数组成, 且不含前导 0。例如, 对“2552501213”可以得到“255.250.12.13”和“255.250.121.3”都是合法的 IP 地址, 但“255.25.012.13”是不合法的, 因为第 3 个整数 012 存在前导 0。请用回溯算法求“112013”的一个合法 IP 地址, 要求 1) 如何构造搜索树, 并画出搜索树 (部分画出即可) (6 分); 2) 当访问树中的节点时, 需要判断是否继续访问, 请给出判断条件 (3 分); 3) 给出回溯伪代码 (5 分)。

解:

- 1) 完全二叉树, 每一层表示去一个字符或者字符前面加点, 根节点取第一个字符, 第 1 层表示取 ‘1’ 或者 ‘.1’, 第二层表示取 ‘2’ 或者 ‘.2’, 以此类推。



- 2) 判断条件, 非法: a) 以 0 开头的数字, 例如: 192.031.2.1, b) IP 段数值大于 255, c) ‘.’ 不等于 3 个

3)

初始化 k=1, X=2 X[k]=1 表示左子节点, X[k]=0 表示右子节点

While k>0 do

X[k]=X[k]-1;

If x[k]=1

```

    IP=IP+str[k];
Elseif x[k]=0
    IP=IP+'.str[k]';
endif
If X[k] >=0
    If IP 是合法值（通过上面的判断条件判断）
        If k=n \\叶子节点
            找到一个合法的 IP 地址；
            K=k-1;
        Else
            K=k+1
        Endif
    Else
        X[k]=2, k=k-1
    Endif
Endwhile

```