**武汉大学计算机学院**

**2023-2024学年度第二学期2022级**

**《随机过程》期末考试试卷（A）--闭卷**

**姓名： 学号： 专业： 成绩：**

**（注：①考试时间为120分钟；②**所有的题目的解答均写在答题纸上，需写清楚题目的序号。每张答题纸都要写上姓名和序号**。）**

一 名词解释。（每小题5分，共20分）

（1）随机过程的协方差函数

对于随机过程，称

为随机过程的协方差函数。

（2）复合Poisson过程

称随机过程为复合Poisson过程，如果对于，可以表示为

其中是一个Poisson过程，是一族独立同分布的随机变量，并且与也是独立的。

（3）更新过程

设是一列独立同分布的非负随机变量，分布函数为，令。我们把由

定义的计数过程称为更新过程。

（4）常返状态

对于任何状态，以记从出发经步后首次到达的概率，则有

,

令，若，称状态为常返状态。

二 计算题。（每小题10分，共60分）

1. 设是独立同分布的随机变量序列，，该过程的滑动平均定义为

试求协方差函数。

解：

（2）设某医院专家门诊，从早上8:00开始就已有无数患者等候，而每次专家只能为一名患者服务，服务的平均时间为10分钟，且每名患者的服务时间服从独立的指数分布。则8：00到12：00门诊结束时接受过治疗的患者平均在医院停留了多长时间。

解 由题意知，接受服务的患者人数是强度为6的Poisson过程。

设8：00为0时刻，第个呼唤者在医院停留的时间为，则在时间内接受过治疗的患者平均在医院停留的时间为

又

且，所以

即接受过治疗的患者平均在医院停留了2小时。

（3）设是独立同分布的随机变量序列定义的更新过程，，，计算，和。

解 计算

（4）已知Markov链的状态空间，其一步转移概率为，

试确定其状态的常返性，周期性和遍历性。

解：

所以状态1是正常返态，周期为1，是遍历态。因为状态是互通的，所以状态都是正常返态，周期为1，是遍历态。

（5）考虑定货问题。设某商店使用定货策略，每天早上检查某商品的剩余量，设为，则定购额为

设定货和进货不需要时间，每天的需求量独立同分布且 。试从上述问题中寻找一个Markov链，并且给出其一步转移概率。

解：令为第天结束时的存货量，则

因此是Markov链，它的转移概率为

（6）设有三个盒子装有红白两种颜色球，装球情况如下:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 盒子 | 红球 | 白球 |
| 甲 | 80 | 20 |
| 乙 | 40 | 60 |
| 丙 | 50 | 50 |

做下面的抽取：在甲盒中随机抽取1个球，记下它的颜色，然后重新放回一个与它不同颜色的球，在乙盒中随机抽取后记下颜色再放回，在丙盒中抽取后只记颜色不放回。现在某人随机选中一个盒子，按与此盒相应的抽取方式得到了一个如下记录（红，红，红，红，白），则他最可能选取的是哪一个盒子。

解：设表示抽球后甲盒中的红球数，则是一个非时齐的Markov链，

状态空间为，转移概率为

设表示抽球后乙盒中的红球数，状态空间，转移概率为

设表示抽球后丙盒中的红球数，状态空间，转移概率为

分别计算三种情况下，抽取如下记录（红，红，红，红，白）的概率：

可见，故最可能选取甲盒。

三 证明题。（每小题10分，共20分）

（1）Poisson过程中已知在内A只发生了一次的前提下，A发生的时刻在上是均匀分布。

证明：

（2）设一只蚂蚁在直线上爬行，原点处一只蜘蛛在等待捕食，处有一档板， 蚂蚁到后只能返回。设蚂蚁向左爬和向右爬的概率分别为和。开始它处于。证明：蚂蚁被吃掉的概率为1.

证明：设为蚂蚁在时刻所处的位置，则过程是Markov链，其转移概率矩阵为



不难看出，此Markov链有两类：{0}，。因为

所以0是吸收态，,则有，故蚂蚁被吃掉的概率为1。