Тема 5В. Критерии проверки параметрических гипотез. Различение двух простых гипотез.

1. Критерии проверки параметрических гипотез.

Пусть совокупность наблюдаемых величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ имеет неизвестную функцию распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta^*)$, принадлежащую параметрическому семейству $\wp$ функций распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$, получаемых при всевозможных допустимых значениях параметра θ:

$$\wp = \{F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta) : \theta \in \Theta\},$$

где θ – параметр и Θ – множество допустимых значений параметра.

Основная гипотеза H_0 заключается в том, что неизвестная функция распределения величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ принадлежит некоторому заданному, фиксированному подмножеству $\wp_0 \subseteq \wp$:

$$H_0: F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta) \in \wp_0.$$

Поскольку каждой функции из множества $\wp$ соответствуют определенное значение параметра θ, то множеству функций $\wp_0$ соответствует подмножество параметров $\Theta_0 \subseteq \Theta$ такое, что:

$$\wp_0 = \{F(x_1,..., x_n) : F(x_1,..., x_n) = F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta), \theta \in \Theta_0\}.$$

Отсюда следует, что гипотеза H_0 может быть переформулирована в терминах параметра θ, гипотеза H_0 заключается в том, что неизвестное значение параметра $\theta^* \in \Theta_0$:

$$H_0: \theta^* \in \Theta_0.$$

Именно поэтому гипотезу H_0 принято называть параметрической.

Альтернативная гипотеза H_1 в данном случае образована множеством всех функций $\wp_1$, которые не попали в множество $\wp_0$:

$$H_1: F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta) \in \wp_1,$$

$$\wp_1 = \wp \setminus \wp_0.$$

В терминах параметра θ альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что:

$$H_1: \theta^* \in \Theta_1,$$

$$\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0.$$

Предположим, что имеется статистический критерий K проверки гипотезы H_0, тогда для каждой реализации $(x_1,..., x_n)$ величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ критерий K либо принимает гипотезу H_0, либо отклоняет гипотезу H_0 (принимает гипотезу H_1). Пусть X – множество всех возможных реализаций величин $(\xi_1,..., \xi_n)$:

$$X = \{(x_1,..., x_n) : (x_1,..., x_n) = (\xi_1(\omega),..., \xi_n(\omega)), \omega \in \Omega\},$$

тогда в множестве X можно выделить подмножество реализаций $X_0 \subseteq X$, для которых критерий K принимает гипотезу H_0, и подмножество реализаций $X_1 = X \setminus X_0$, для которых критерий K принимает гипотезу H_1. Легко видеть, что множества X_0 и X_1 образуют разбиение множества X:

$$X_0 \cup X_1 = X,$$

$$X_0 \cap X_1 = \varnothing,$$

поскольку критерий для всякой реализации из X принимает либо H_0, либо H_1, и для одной и той же реализации из X критерий не может принимать H_0 и H_1 одновременно. Таким образом, каждый критерий однозначно определяет разбиение множества X, обратное так же верно, всякое разбиение X_0 и X_1 множества X однозначно определяет некоторый критерий, поэтому формально можно считать, что критерий и есть некоторое разбиение множества X : $K = (X_0, X_1)$.

С каждым критерием связаны две ошибки: ошибка первого рода – критерий отклоняет гипотезу H_0 в том случае, когда она верна, ошибка второго рода – критерий принимает гипотезу H_0 в том случае, когда она не верна (верна альтернативная гипотеза H_1).

Определение 5В.1.

Для критерия $K = (X_0, X_1)$ *вероятностью ошибки первого рода* $\alpha(\theta_0, K)$ называется вероятность:

$$\alpha(\theta_0, K) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1 \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\},$$

$$\theta_0 \in \Theta_0,$$

где вероятность вычисляется при условии, что функция распределения величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ есть функция $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$.

Действительно, если гипотеза H_0 верна, то истинное значение параметра $\theta \in \Theta_0$, и критерий отклоняет гипотезу H_0, если реализация величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ попадает в множество X_1, поэтому вероятность ошибки первого рода $\alpha(\theta_0, K)$ есть вероятность того, что вектор величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ окажется в множестве X_1, которая вычисляется с функцией распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$ при значении параметра θ_0. Заметим, что вероятность ошибки первого рода $\alpha(\theta_0, K)$, вообще говоря, зависит от значения параметра $\theta_0 \in \Theta_0$, и поэтому может оказаться различной при различных значениях параметра.

Определение 5В.2.

Для критерия $K = (X_0, X_1)$ *вероятностью ошибки второго рода* $\beta(\theta_1, K)$ называется вероятность:

$$\beta(\theta_1, K) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0 \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\},$$

$$\theta_1 \in \Theta_1,$$

где вероятность вычисляется при условии, что функция распределения величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ есть функция $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$.

Действительно, если гипотеза H_0 не верна, тогда истинное значение параметра $\theta \in \Theta_1$, и критерий принимает гипотезу H_0, если реализация величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ попадает в множество X_0, поэтому вероятность ошибки второго рода $\beta(\theta_1, K)$ есть вероятность того, что вектор величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ окажется в множестве X_0, которая вычисляется с функцией распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$ при значении параметра θ_1. Заметим, что опять же вероятность ошибки второго рода $\beta_0(\theta_1, X_0)$ зависит от значения параметра $\theta_1 \in \Theta_1$ и поэтому может оказаться различной при различных значениях параметра.

Поскольку каждый критерий однозначно определяет разбиение множества X на подмножества X_0 и X_1, то с каждым критерием однозначно связаны функции ошибок первого и второго родов. Крайне желательно, чтобы вероятности ошибок были как можно меньше, поэтому следует стремиться построить такой критерий, для которого вероятности принимают наименьшее значение.

В общем случае функции вероятностей ошибок первого и второго родов не связаны каким-либо строгим соотношением, поскольку вычисляются при различных функциях распределения $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_0)$ и $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_1)$, которые могут быть никак не связаны между собой. Тем не менее, как правило, попытки уменьшения значений вероятностей одной ошибки приводят к увеличению значений вероятностей другой ошибки. Этот эффект возникает из-за того, что функции вероятности ошибок связаны через множества X_0 и X_1. Уменьшение вероятностей ошибок первого рода $\alpha(\theta_0, K)$ в большинстве случаев возможно только за счет «сужения» множества X_1, которое приводит к «расширению» множества $X_0 = X \setminus X_1$, и как следствие, совершенно точно не приводит к уменьшению вероятностей ошибок второго рода $\beta(\theta_1, K)$, а в большинстве случаев приводит к увеличению.

В силу невозможности одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода иногда поступают следующим образом: изначально задаются некоторым уровнем значимости α и рассматривают множество критериев K_α, для которых функция вероятности ошибки первого рода $\alpha(\theta, K)$ не превосходит значения α:

$$K_\alpha = \{K = (X_0, X_1) : \alpha(\theta, K) \le \alpha, \theta \in \Theta_0\}.$$

Далее сравнивают функции вероятностей ошибок второго рода всех критериев из множества K_α. В общем случае критерии $K^* = (X_0^*, X_1^*) \in K_\alpha$ и $\tilde{K} = (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1) \in K_\alpha$ из множества K_α могут оказаться несравнимыми, поскольку вполне возможно что при одних значениях параметра θ имеет место неравенство $\beta(\theta, K^*) \le \beta(\theta, \tilde{K})$, а при других значениях параметра θ наоборот $\beta(\theta, K^*) > \beta(\theta, \tilde{K})$, тем не менее некоторые критерии все же оказываются сравнимыми.

Определение 5В.3.

Критерий $K^* = (X_0^*, X_1^*) \in K_\alpha$ *равномерно мощнее* критерия $\tilde{K} = (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1) \in K_\alpha$, если:

1) $\forall\, \theta \in \Theta_1$: $\beta(\theta, K^*) \le \beta(\theta, \tilde{K})$,

2) $\exists\, \theta \in \Theta_1$: $\beta(\theta, K^*) < \beta(\theta, \tilde{K})$.

Определение 5В.4.

Критерий $K^* \in K_\alpha$ называется *равномерно наиболее мощным критерием в классе* K_α, если критерий K^* равномерно мощнее любого другого критерия в классе K_α.

В случае если множество Θ_1 состоит из одной точки θ_1, то равномерно наиболее мощный критерий иногда называют *наиболее мощным критерием* (опуская слово равномерно).

В некоторых случаях равномерно наиболее мощного критерия может не существовать.

2. Задача различения двух простых гипотез и критерий отношения вероятностей.

Представим, что множество допустимых значений параметра Θ состоит всего из двух значений:

$$\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}.$$

Отсюда функция распределения $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta^*)$ либо совпадает с $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_0)$, либо совпадает с $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_1)$. Пусть основная гипотеза H_0 заключается в том, что функция распределения $F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta^*) = F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_0)$ или, что тоже самое, $\theta^* = \theta_0$:

$$H_0: F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta^*) = F_\xi(x_1,...,x_n\,|\,\theta_0),$$

$$H_0: \theta^* = \theta_0.$$

Альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta^*) = F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$ или $\theta^* = \theta_1$:

$$H_1:\ F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta^*) = F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1),$$

$$H_1:\ \theta^* = \theta_1.$$

Задача проверки гипотезы H_0 против H_1 в указанной постановке называется *задачей различения двух простых гипотез*.

Легко видеть, что в данном случае множество значений параметра Θ_0, определяемых гипотезой H_0:

$$\Theta_0 = \{\theta_0\},$$

отсюда,

$$\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0 = \{\theta_1\},$$

поэтому вероятности ошибок первого и второго рода для любого критерия $K = (X_0, X_1)$:

$$\alpha(K) = \alpha(\theta_0, K) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1 \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\},$$

$$\beta(K) = \beta_0(\theta_1, K) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0 \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\},$$

являются функциями только разбиения X_0 и X_1. Отсюда следует, что для каждого критерия K вероятности ошибок первого и второго рода являются числовыми значениями (а не функциями параметра θ), что существенно упрощает сравнение критериев.

Критерии можно сравнивать по величинам ошибок: для каждого критерия $K = (X_0, X_1)$ однозначно определяется наибольшая из двух величин ошибок $\max\{\alpha(K), \beta(K)\}$, поэтому можно считать, что из двух критериев лучше тот, у которого упомянутая наибольшая величина оказывается меньше. Принятый способ сравнения приводит к следующему определению.

Определение 5В.5.

Критерий $K = (X_0, X_1)$ называется *минимаксным критерием,* если для любого критерия $\tilde{K} = (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$:

$$\max\{\alpha(K), \beta(K)\} \le \max\{\alpha(\tilde{K}), \beta(\tilde{K})\}.$$

Другой способ сравнения критериев основан на функции потерь: предположим, что при ошибке первого рода «происходит потеря» в размере a_0 ($a_0 > 0$), а при ошибке второго рода «происходит потеря» в размере b_0 ($b_0 > 0$), тогда средняя величина потерь $L(X_0, X_1)$ для всякого критерия $K = (X_0, X_1)$:

$$L(K) = a_0\alpha(K) + b_0\beta(K).$$

Из двух критериев будем считать лучшим тот, для которого средняя величина потерь меньше. Подобный способ сравнения приводит к следующему определению.

Определение 5В.6.

Критерий $K = (X_0, X_1)$ называется *байесовским критерием*, если для всякого другого критерия $\tilde{K} = (\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)$:

$$L(K) \le L(\tilde{K}).$$

Указанные способы сравнения критериев не сообщают методов построения «наилучших» критериев – минимаксного, байесовского и рассмотренного ранее наиболее мощного. Заметим, что для построения любого критерия, как было замечено выше, достаточно указать разбиение (X_0, X_1) множества всех возможных реализаций X.

Выбор разбиения может быть основан на следующем простом рассуждении: пусть получена реализация $(x_1,..., x_n)$, сравним вероятность получения этой реализации в случае, когда верна гипотеза H_0, и в случае, когда верна гипотеза H_1. Если вероятность получения реализации $(x_1,..., x_n)$ при верной гипотезе H_0 оказывается больше вероятности получения этой же реализации при верной гипотезе H_1, тогда предпочтение следует отдать гипотезе H_0, считая, что реализация $(x_1,..., x_n)$ свидетельствует против гипотезы H_1. Наоборот, если вероятность получения реализации $(x_1,..., x_n)$ при верной гипотезе H_0 оказывается меньше вероятности получения этой же реализации при верной гипотезе H_1, то предпочтение следует отдать гипотезе H_1, считая, что реализация $(x_1,..., x_n)$ свидетельствует против гипотезы H_0.

Для придания приведенному рассуждению формального смысла ограничимся рассмотрением только простого случая, удовлетворяющего условиям:

(С1) при $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ функция распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$.

(С2) во всем множестве X функции плотности вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$ и $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$ нигде не равны нулю:

$$\forall (x_1,..., x_n) \in X : f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) > 0 \text{ и } f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) > 0 .$$

Основная гипотеза H_0 утверждает, что функция плотность вероятности величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ есть функция $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$, а альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что функция плотности вероятности величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ есть функция $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$.

Поскольку в силу предположения (С2) плотность вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) \neq 0$ для всех точек из X, то во всех точках X определено отношение $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)}$.

Определение 5В.7.

Отношением правдоподобия называется функция $Z(\xi_1,..., \xi_n)$:

$$Z(\xi_1,..., \xi_n) = \frac{f_\xi(\xi_1,..., \xi_n \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi_1,..., \xi_n \mid \theta_0)}.$$

Общий подход к выделению множества X_0 критерия основан на сравнении значений отношения правдоподобия $Z(x_1,..., x_n)$ с некоторым неотрицательным числом h ($h \geq 0$). Если значение отношения правдоподобия в некоторой точке оказывается больше числа h, то значит в этой точке плотность вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$ по крайней мере в h раз больше плотности вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$.

Определение 5В.8.

Критерий $K_r(h) = (X_0(h), X_1(h))$ называется *критерием отношения вероятностей,* если при некотором действительном неотрицательном h ($h \geq 0$):

$$X_0(h) = \left\{ (x_1,..., x_n) : \frac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < h \right\},$$

$$X_1(h) = X \setminus X_0(h) = \left\{ (x_1,..., x_n) : \frac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} \geq h \right\}.$$

Критерии отношения вероятностей по отношению к другим критериям обладают важным свойством.

Утверждение 5В.9.

Пусть совокупность величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ имеет функцию распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$, для которой выполнены условия (C1) и (C2). Если

1) $K_r(h) = (X_0(h), X_1(h))$ – критерий отношения вероятностей при некотором фиксированном h такой, что $X_0(h) \neq \varnothing$;

2) $K^* = (X_0^*, X_1^*)$ – произвольный критерий, отличающийся от $K_r(h_0)$, такой, что $X_1^* \neq \varnothing$,

Тогда:

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) > h(\alpha(K_r(h)) - \alpha(K^*)) .$$

Доказательство:

Рассмотрим разность $\beta(K^*) - \beta(K_r(h))$:

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) =$$

$$= P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0^* \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} - P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_0) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} .$$

В силу условия (C1) вероятности могут быть вычислены с помощью функции плотности вероятности:

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) = \int_{X_0^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n - \int_{X_0(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n \qquad (5B.1)$$

Поскольку множества $X_0(h)$ и $X_1(h)$ образуют разбиение множества X:

$$X = X_0(h) \cup X_1(h) ,$$

и $X_0^* \subseteq X$, то

$$X_0^* = X_0^* \cap X = X_0^* \cap (X_0(h) \cup X_1(h)) = (X_0^* \cap X_0(h)) \cup (X_0^* \cap X_1(h))$$

отсюда

$$\int_{X_0^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n = \int_{X_0^* \cap X_0(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n + \int_{X_0^* \cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n .$$

Аналогично,

$$X_0(h) = (X_0(h) \cap X_0^*) \cup (X_0(h) \cap X_1^*) ,$$

поэтому

$$\int_{X_0(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n = \int_{X_0(h) \cap X_0^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n + \int_{X_0(h) \cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n .$$

Таким образом, из (5B.1):

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) =$$

$$= \int_{X_0^* \cap X_0(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n + \int_{X_0^* \cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n +$$

$$- \int_{X_0(h) \cap X_0^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n - \int_{X_0(h) \cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n =$$

$$= \int_{X_0^* \cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n - \int_{X_0(h) \cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n . \qquad (5B.2)$$

Поскольку $K_r(h)$ – критерий отношения вероятностей, то на множестве $X_1(h)$ отношение правдоподобия $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} \geq h$ или $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) \geq h f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$, тогда:

$$\int_{X_0^* \cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1...dx_n \geq h \int_{X_0^* \cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) dx_1...dx_n . \qquad (5B.3a)$$

Опять же в силу того, что $K_r(h)$ – критерий отношения вероятностей на множестве $X_0(h)$ отношение правдоподобия $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < h$ или $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) < hf_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)$, тогда:

$$\int\limits_{X_0(h)\cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)dx_1...dx_n < h \int\limits_{X_0(h)\cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n \qquad (5В.3б)$$

Неравенство (5В.3б) в условиях утверждения всегда справедливо и всегда является строгим, поскольку по условию утверждения $X_0(h) \neq \varnothing$ и $X_1^* \neq \varnothing$, и в силу условия (С2) подынтегральные функции $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) > 0$ и $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) > 0$. Если бы нарушалось хотя бы одно из этих условий, то в неравенстве (5В.3б) оказались бы или интегралы по пустому множеству или от функций равных нулю в области интегрирования $X_0(h) \cap X_1^*$, и то и другое могло бы привести к очевидно ложному неравенству $0 < 0$.

Из (5В.2) с учетом полученных неравенств (5В.3а) и (5В.3б):

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) > h \int\limits_{X_0^*\cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n - h \int\limits_{X_0(h)\cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n =$$

$$= h \int\limits_{X_0^*\cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n + h \int\limits_{X_1^*\cap X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n -$$

$$- h \int\limits_{X_1(h)\cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n - h \int\limits_{X_0(h)\cap X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n =$$

$$= h \int\limits_{X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n - h \int\limits_{X_1^*} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n = h(\alpha(K_r(h)) - \alpha(K^*)).$$

Таким образом,

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h)) > h(\alpha(K_r(h)) - \alpha(K^*)).$$

Утверждение доказано.

Заметим, что каждый критерий отношения вероятностей $K_r(h)$ полностью определяется величиной h (действительно, по h однозначно определяется множество $X_0(h)$, и, следовательно, однозначно определяется и множество $X_1(h) = X \setminus X_0(h)$), поэтому вероятность ошибки первого рода $\alpha(K_r(h))$ и вероятность ошибки второго рода $\beta(K_r(h))$ для критериев отношения вероятностей являются функциями h:

$$\alpha_r(h) = \alpha(K_r(h)),$$

$$\beta_r(h) = \beta(K_r(h)).$$

Утверждение 5В.10.

Пусть совокупность величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ имеет функцию распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ для которой выполнены условия (С1) и (С2). Пусть $\alpha_r(h)$ – функция вероятности ошибки первого рода и $\beta_r(h)$ – функция вероятности ошибки второго рода критериев отношения вероятности $K_r(h)$, тогда:

1) $\alpha_r(0) = 1$;

2) $\alpha_r(h)$ монотонно не возрастает: из $h_1 \le h_2$ следует $\alpha_r(h_1) \ge \alpha_r(h_2)$;

3) существует $\lim\limits_{h\to\infty} \alpha_r(h) = 0$;

4) $\beta_r(0) = 0$;

5) $\beta_r(h)$ монотонно не убывает: из $h_1 \le h_2$ следует $\beta_r(h_1) \le \beta_r(h_2)$.

Доказательство:

1) Легко видеть, что при $h = 0$ у критерия $K_r(0) = (X_0(0), X_1(0))$ множество $X_0(0) = \varnothing$, поскольку нет ни одной точки $(x_1,..., x_n)$, в которой $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < 0$. Отсюда следует, что $X_1(0) = X \setminus X_0(0) = X$, тогда:

$$\alpha_r(0) = \alpha(K_r(0)) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} = 1,$$

$$\beta_r(0) = \beta(K_r) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in \varnothing \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = 0.$$

Тем самым пункты 1) и 4) доказаны.

2) Пусть h_1 и h_2 – числа такие, что $h_1 \le h_2$. Поскольку из неравенства $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < h_1$ следует неравенство $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < h_2$, то каждая точка принадлежащая множеству $X_0(h_1)$ также принадлежит множеству $X_0(h_2)$, то есть:

$$X_0(h_1) \subseteq X_0(h_2). \tag{5B.4}$$

Откуда следует вложенность событий:

$$\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_1)\} \subseteq \{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_2)\},$$

и неравенство для вероятностей:

$$P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_1) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} \le P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_2) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\}$$

$$\beta_r(h_1) \le \beta_r(h_2).$$

Тем самым доказан пункт 5).

Из (5B.4) также следует:

$$X_1(h_2) = (X \setminus X_0(h_2)) \subseteq (X \setminus X_0(h_1)) = X_1(h_1),$$

откуда следует вложенность событий:

$$\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_2)\} \subseteq \{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_1)\},$$

и неравенство для вероятностей:

$$P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_2) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} \le P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_1) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\}.$$

$$\alpha_r(h_2) \le \alpha_r(h_1).$$

Тем самым доказан пункт 2).

3) Заметим, что в силу условия (C1):

$$\alpha_r(h) = \alpha(K_r(h)) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} = \int\limits_{X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) dx_1 ... dx_n$$

На множестве $X_1(h)$ выполняется неравенство $\dfrac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} \ge h$ или $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) \le \dfrac{1}{h} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)$, тогда:

$$\alpha_r(h) = \int\limits_{X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) dx_1 ... dx_n \le \frac{1}{h} \int\limits_{X_1(h)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1 ... dx_n \le$$

$$\le \frac{1}{h} \int\limits_X f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1 ... dx_n \le \frac{1}{h}.$$

По определению $\alpha_r(h)$ есть вероятность, поэтому $0 \le \alpha_r(h)$, так что $0 \le \alpha_r(h) \le \dfrac{1}{h}$ и, следовательно, существует предел:

$$\lim_{h \to \infty} \alpha_r(h) = 0.$$

Тем самым доказан пункт 3).

Утверждение доказано.

Очевидно, что в общем случае произвольный критерий $K = (X_0, X_1)$ может быть построен совершенно произвольным образом, и поэтому не обязательно является критерием отношения вероятностей. Тем не менее, класс всех критериев отношения вероятностей обладает важным свойством, а именно, содержит в себе «наилучшие» критерии: и минимаксный, и байесовский и наиболее мощный критерии. Этот факт доказывает приводимая далее теорема: утверждение 1 говорит о том, что при специальном выборе числа h критерий отношения вероятностей $K_r(h)$ является минимаксным критерием, в утверждении 2 доказывается, что при специальном выборе числа h критерий отношения вероятностей является байесовским, наконец, утверждение 3 заключает, что в классе критериев K_α с ограниченной сверху вероятностью ошибки первого рода содержится такой критерий отношения вероятностей $K_r(h)$, который является наиболее мощным критерием в классе K_α.

Теорема 5В.11.

Пусть совокупность величин $(\xi_1,..., \xi_n)$ имеет функцию распределения $F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta)$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ для которой выполнены условия (C1) и (C2), основная гипотеза H_0 заключается в том, что $\theta = \theta_0$, альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что $\theta = \theta_1$, и для критериев отношения вероятностей функция вероятности ошибки первого рода $\alpha_r(h) = \alpha(K_r(h))$ является непрерывной, тогда:

1. $K_r(h_m)$ является минимаксным, если h_m выбрано так, что $\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m)$;
2. $K_r(h_b)$ является байесовским, если $h_b = \dfrac{a_0}{b_0}$;
3. $K_r(h_\alpha)$ является наиболее мощным критерием в классе K_α, $0 < \alpha < 1$:

$$K_\alpha = \{\tilde{K} : \alpha(\tilde{K}) \le \alpha\},$$

если h_α выбрано так, что $\alpha_r(h_\alpha) = \alpha$ (лемма Неймана-Пирсона).

(Непрерывность функции $\alpha_r(h)$ используется только при доказательстве пунктов 1 и 3).

Доказательство:

1) Прежде всего, покажем, что действительно существует число h_m такое, что $\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m)$, для этого покажем, что функция $\alpha_r(h) - \beta_r(h)$ непрерывна и принимает значения разных знаков, следовательно, обязательно пересекает ось абсцисс в некоторой точке h_m.

Можно показать, что из условия непрерывности функции $\alpha_r(h)$ следует непрерывность функции $\beta_r(h)$. Точнее, если в некоторой точке h^* функция $\beta_r(h)$ имеет разрыв первого рода (функция $\beta_r(h)$ не может иметь разрыв второго рода, поскольку по определению $0 \le \beta_r(h) \le 1$), тогда в той же самой точке h^* функция $\alpha_r(h)$ тоже имеет разрыв первого рода, что противоречит исходному условию о непрерывности $\alpha_r(h)$. Из непрерывности функций $\alpha_r(h)$ и $\beta_r(h)$ следует непрерывность функции $\alpha_r(h) - \beta_r(h)$.

В силу утверждения 5В.10 пункты 1 и 4:

$$\alpha_r(0) - \beta_r(0) = 1 - 0 = 1.$$

В силу утверждения 5В.10 пункт 1 и 3:

$$\alpha_r(0) = 1,$$

$$\lim_{h \to \infty} \alpha_r(h) = 0,$$

поэтому в силу непрерывности функции $\alpha_r(h)$, существует значение h_0 такое, что:

$$\alpha_r(h_0) < 1,$$

$$\alpha(K_r(h_0)) < 1,$$

$$P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_0) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} < 1.$$

Отсюда следует, что $X_1(h_0) \neq X$, действительно, если бы $X_1(h_0) = X$, тогда:

$$\alpha_r(h_0) = \alpha(K_r(h_0)) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_0) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} =$$

$$= P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)\} = 1,$$

что противоречило бы $\alpha_r(h_0) < 1$.

Поскольку $X_0(h_0) = X \setminus X_1(h_0)$, то из $X_1(h_0) \neq X$ следует $X_0(h_0) \neq \varnothing$, поэтому в силу (C1) и (C2):

$$P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_0) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = \int\limits_{X_0(h_0)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1 ... dx_n > 0,$$

$$\beta(K_r(h_0)) > 0,$$

$$\beta_r(h_0) > 0$$

Поскольку $\lim\limits_{h \to \infty} \alpha_r(h) = 0$, то найдется число $h_1 \geq h_0$ такое, что $\alpha_r(h_1) < \beta_r(h_0)$, тогда в силу монотонного не убывания функции $\beta_r(h)$, $\beta_r(h_0) \leq \beta_r(h_1)$ (утверждение 5В.10 пункт 5):

$$\alpha_r(h_1) - \beta_r(h_1) < \beta_r(h_0) - \beta_r(h_1) \leq 0.$$

Таким образом, функция $\alpha_r(h) - \beta_r(h)$ непрерывна, $\alpha_r(0) - \beta_r(0) = 1 > 0$ и $\alpha_r(h_1) - \beta_r(h_1) < 0$, поэтому по известной теореме анализа существует точка h_m в которой функция $\alpha_r(h) - \beta_r(h)$ равна нулю:

$$\alpha_r(h_m) - \beta_r(h_m) = 0,$$

$$\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m).$$

Таким образом, значение h_m существует, и существует критерий $K_r(h_m)$. Заметим, что в критерии $K_r(h_m)$ множество $X_0(h_m) \neq \varnothing$, действительно, если бы $X_0(h_m) = \varnothing$, тогда $\beta_r(h_m) = 0$ и $X_1(h_m) = X \setminus X_0(h_m) = X$, откуда $\alpha_r(h_m) = 1$, что противоречило бы равенству $\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m)$.

Теперь покажем, что критерий $K_r(h_m)$ является минимаксным критерием, для этого рассмотрим любой другой критерий $K^* = (X_0^*, X_1^*)$ и покажем, что:

$$\max\{\alpha_r(h_m), \beta_r(h_m)\} \leq \max\{\alpha(K^*), \beta(K^*)\}.$$

В критерии K^* либо $X_1^* = \varnothing$, либо $X_1^* \neq \varnothing$.

а) Пусть $X_1^* = \varnothing$, тогда $X_0^* = X \setminus X_1^* = X$, тогда:

$$\beta(K^*) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0^* \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = 1,$$

отсюда,

$$\max\{\alpha_r(h_m), \beta_r(h_m)\} \leq 1 = \beta(K^*) = \max\{\alpha(K^*), \beta(K^*)\},$$

поскольку $\alpha_r(h_m)$ и $\beta_r(h_m)$ являются вероятностями, и вероятности не больше 1.

б) Пусть $X_1^* \neq \varnothing$, тогда для критерия K^* либо $\alpha_r(h_m) \leq \alpha(K^*)$ либо $\alpha_r(h_m) > \alpha(K^*)$.

б1) Пусть $\alpha_r(h_m) \leq \alpha(K^*)$, тогда с учетом $\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m)$:

$$\max\{\alpha_r(h_m), \beta_r(h_m)\} = \max\{\alpha_r(h_m), \alpha_r(h_m)\} = \alpha_r(h_m) \leq \alpha(K^*) \leq \max\{\alpha(K^*), \beta(K^*)\}.$$

б2) Пусть $\alpha_r(h_m) > \alpha(K^*)$, тогда применим к критерию $K_r(h_m)$ (с $X_0(h_m) \neq \varnothing$) и критерию K^* (с $X_1^* \neq \varnothing$) утверждение 5В.11, согласно которому:

$$\beta(K^*) - \beta_r(h_m) > h_m(\alpha_r(h_m) - \alpha(K^*)) \geq 0,$$

$$\beta_r(h_m) < \beta(K^*),$$

тогда учитывая равенство $\alpha_r(h_m) = \beta_r(h_m)$,

$$\max\{\alpha_r(h_m), \beta_r(h_m)\} = \max\{\beta_r(h_m), \beta_r(h_m)\} = \beta_r(h_m) \le \beta(K^*) \le \max\{\alpha(K^*), \beta(K^*)\} .$$

Таким образом, для критерия $K_r(h_m)$ и любого другого критерия K^* всегда справедливо:

$$\max\{\alpha_r(h_m), \beta_r(h_m)\} \le \max\{\alpha(K^*), \beta(K^*)\} ,$$

Откуда следует, что критерий $K_r(h_m)$ является минимаксным.

2) Для доказательства пункта 2 построим в явном виде байесовский критерий $K^* = (X_0^*, X_1^*)$, который доставляет минимальное значение функции средней потери $L(K^*)$:

$$L(K^*) = \min_K L(K) .$$

Преобразуем выражения для функции средней потери $L(K)$ следующим образом:

$$L(K) = a_0\alpha(K) + b_0\beta(K) = a_0\int_{X_1} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1... dx_n + b_0\int_{X_0} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)dx_1... dx_n =$$

$$= a_0\left(1 - \int_{X_0} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1...dx_n\right) + b_0\int_{X_0} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)dx_1...dx_n =$$

$$= a_0 - a_0\int_{X_0} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)dx_1... dx_n + b_0\int_{X_0} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)dx_1... dx_n =$$

$$= a_0 + \int_{X_0}(b_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) - a_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0))\,dx_1... dx_n$$

Отсюда легко видеть, что функция средней потери $L(K)$ принимает наименьшее значение в том случае, когда наименьшее значение принимает интеграл:

$$\int_{X_0}(b_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) - a_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0))\,dx_1... dx_n \to \min .$$

Для того чтобы значение интеграла было наименьшим, очевидно, достаточно в множество X_0 поместить те и только те точки, в которых подынтегральная функция отрицательна, поэтому в байесовском критерии $K^* = (X_0^*, X_1^*)$ множество X_0^* определяется условием:

$$X_0^* = \{(x_1,..., x_n) : b_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) - a_0 f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) < 0\}$$

В силу условия (C2) плотность вероятности $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0) > 0$, поэтому:

$$X_0^* = \left\{(x_1,..., x_n) : \frac{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)}{f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_0)} < \frac{a_0}{b_0}\right\} .$$

Заметим, что множество X_0^* есть в точности множество $X_0(h_b)$ критерия отношения вероятностей $K_r(h_b)$ при $h_b = \dfrac{a_0}{b_0}$, поэтому критерий $K_r(h_b) = K^*$ и следовательно $K_r(h_b)$ байесовский критерий.

3) Для доказательства пункта 3 прежде всего покажем, что для всякого α такого, что $0 < \alpha < 1$ всегда найдется значение h_α такое, что $\alpha_r(h_\alpha) = \alpha$. Действительно, в силу утверждения 5В.10:

$$\lim_{h\to\infty} \alpha_r(h) = 0 .$$

Отсюда следует, что каковы бы ни было число $\alpha > 0$ для $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ всегда найдется число h_0 такое, что для всех $h \ge h_0$:

$$\alpha_r(h) < \varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha .$$

В силу условия теоремы $\alpha_r(h)$ является непрерывной функцией, в том числе и на отрезке $[0, h_0]$, причем значение функции $\alpha_r(0) = 1$ (в силу утверждения 5В.10 пункт 1) и $\alpha_r(h_0) < \alpha$, отсюда по известной теореме анализа всегда найдется точка h_α такая, что $\alpha_r(h_\alpha) = \alpha$.

Критерий отношения вероятностей $K_r(h_\alpha) \in K_\alpha$, поскольку $\alpha(K_r(h_\alpha)) = \alpha_r(h_\alpha) = \alpha$. Покажем, что $K_r(h_\alpha)$ наиболее мощный критерий в классе K_α, для этого покажем, что для любого другого критерия $K^* = (X_0^*, X_1^*) \in K_\alpha$, критерий $K_r(h_\alpha)$ равномерно мощнее K^*, то есть выполняется неравенство:

$$\beta(K_r(h_\alpha)) < \beta(K^*) \tag{5В.5}$$

Заметим, что $X_1(h_\alpha) \neq \varnothing$ и $X_1(h_\alpha) \neq X$, действительно, если бы $X_1(h_\alpha) = \varnothing$, тогда $\alpha(K_r(h_\alpha)) = 0$, что противоречит $\alpha(K_r(h_\alpha)) = \alpha > 0$, если бы $X_1(h_\alpha) = X$, тогда $\alpha(K_r(h_\alpha)) = 1$, что опять же противоречит $\alpha(K_r(h_\alpha)) = \alpha < 1$.

Поскольку $X_0(h_\alpha) = X \setminus X_1(h_\alpha)$, тогда $X_0(h_\alpha) \neq \varnothing$, действительно, если бы $X_0(h_\alpha) = \varnothing$, тогда $X_1(h_\alpha) = X$, что противоречило бы установленному ранее $X_1(h_\alpha) \neq X$.

Из $X_1(h_\alpha) \neq X$ и условий (С1) и (С2) следует, что $\beta(K_r(h_\alpha)) < 1$, действительно:

$$P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0(h_\alpha) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} + P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_1(h_\alpha) \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = 1,$$

$$\beta(K_r(h_\alpha)) + \int\limits_{X_1(h_\alpha)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1 ... dx_2 = 1,$$

$$\beta(K_r(h_\alpha)) = 1 - \int\limits_{X_1(h_\alpha)} f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) dx_1 ... dx_2 < 1,$$

поскольку $X_1(h_\alpha) \neq \varnothing$ и $f_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1) > 0$.

Теперь докажем (5В.5), заметим, что в критерии K^* либо $X_1^* = \varnothing$, либо $X_1^* \neq \varnothing$.

а) Если $X_1^* = \varnothing$, тогда $X_0^* = X \setminus X_1^* = X$ и тогда:

$$\beta(K^*) = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X_0^* \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = P\{(\xi_1,..., \xi_n) \in X \mid F_\xi(x_1,..., x_n \mid \theta_1)\} = 1,$$

но $\beta(K_r(h_\alpha)) < 1$, поэтому выполняется неравенство:

$$\beta(K_r(h_\alpha)) < 1 = \beta(K^*) .$$

б) Если $X_1^* \neq \varnothing$, тогда к критерию $K_r(h_\alpha)$ (с $X_0(h_\alpha) \neq \varnothing$) и критерию K^* (с $X_1^* \neq \varnothing$) применимо утверждение 5В.10, согласно которому:

$$\beta(K^*) - \beta(K_r(h_\alpha)) > h_\alpha(\alpha(K_r(h_\alpha)) - \alpha(K^*)) = h_\alpha(\alpha - \alpha(K^*)) \geq 0,$$

поскольку $K^* \in K_\alpha$ и следовательно по определению класса K_α, $\alpha(K^*) \leq \alpha$. Отсюда следует, что:

$$\beta(K_r(h_\alpha)) < \beta(K^*) .$$

Таким образом, для всех критериев $K^* \in K_\alpha$, отличающихся от $K_r(h_\alpha)$, справедливо неравенство (5В.5), поэтому $K_r(h_\alpha)$ является наиболее мощным критерием в классе K_α .

Теорема доказана.

3. Задача различения двух простых гипотез и последовательный критерий отношения вероятностей.

В параграфах 1 и 2 рассматривались задачи проверки параметрических гипотез, в которых количество случайных величин n в векторе $(\xi_1,..., \xi_n)$ являлось фиксированным числом.

Представим себе задачу проверки параметрической гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_1, в которой количество величин n не фиксирован и величины можно получать последовательно: на нулевом шаге величины отсутствуют, на первом шаге наблюдаемой является лишь одна случайная величина ξ_1, на втором шаге наблюдаемыми являются две случайные величины (ξ_1, ξ_2), и так далее, на k-ом шаге наблюдаемыми является величины вектора $(\xi_1,..., \xi_k)$, и при этом количество шагов ничем не ограничено.

Подобная трактовка совокупности наблюдаемых величин приводит к новому классу критериев, которые называются *последовательные критерии* (раздел статистики, в котором изучаются последовательные критерии, называется *последовательный анализ*). На каждом шаге последовательный критерий принимает в точности одно из следующих решений:

1. остановиться и принять гипотезу H_0 (отклонить H_1);

2. продолжить и получить следующую величину;

3. остановиться и принять гипотезу H_1 (отклонить H_0).

Наилучшие критерии, рассмотренные в предыдущих параграфах (минимаксный, байесовский и равномерно наиболее мощный), в каком-то смысле тоже являются последовательными критериями, которые на первых $n-1$ шагах выбирают «продолжить и получить следующую величину», а на n шаге принимают H_0 либо H_1 и останавливаются. Каждый из рассмотренных критериев оказывался «наилучшим» в некотором смысле: минимаксный критерий минимизировал наибольшую из двух вероятностей ошибок, байесовский критерий минимизировал значение функции средних потерь, равномерно наиболее мощный минимизировал вероятность ошибки второго рода при условии ограниченной вероятности ошибки первого рода.

Каждый последовательный критерий, как и всякий критерий, также обладает величинами вероятностей ошибок первого и второго родов, и дополнительно характеризуется средним количеством шагов, проделанных до момента остановки и принятия одной из гипотез. Очевидно, что в классе последовательных критериев с заданными величинами вероятностей ошибок первого и второго родов наилучшим следует считать тот критерий, который в среднем требует наименьшего числа шагов до остановки. Оказывается, в некоторых случаях такие критерии существуют и могут быть получены в явном виде как *последовательные критерии отношения вероятностей*.

Рассмотрим основные положения последовательного анализа на примере следующей простой задачи различения двух простых гипотез. Поскольку количество наблюдаемых случайных величин не ограничено, то следует считать, что задана последовательность случайных величин $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),...)$ для которой определена последовательность функций распределения $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ первых k случайных величин:

$$F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta) = P_\theta\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1,..., \xi_k(\omega) < x_k\},$$

$$\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}.$$

Будем считать, что каждая из функций $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ удовлетворяет условиям (C1) и (C2) (указанным в параграфе 2).

Основная гипотеза H_0 заключается в том, что $\theta = \theta_0$, а альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что $\theta = \theta_1$.

Каждый последовательный критерий K на k-ом шаге располагает вектором $(\xi_1,..., \xi_k)$, образованным первыми k случайными величинами последовательности (при $k = 0$ наблюдаемых величин нет), на основе которого принимает в точности одно из следующих решений:

1. остановиться и принять H_0;

2. продолжить и перейти к вектору $(\xi_1,..., \xi_k, \xi_{k+1})$;

3. остановиться и принять H_1.

Пусть множество X есть множество всех возможных реализаций $(x_1, x_2,...)$ последовательности $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),...)$:

$$X = \{(x_1, x_2,...) : (x_1, x_2,...) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),...),\ \omega \in \Omega\} .$$

Для каждого k определим множества $X_{0,k}$ и $X_{1,k}$: пусть $X_{0,k}$ – множество таких последовательностей $(x_1, x_2,...)$, для которых критерий K выбрал остановку на шаге k и принял гипотезу H_0, а множество $X_{1,k}$ – множество таких последовательностей $(x_1, x_2,...)$, для которых критерий K выбрал остановку на шаге k и принял гипотезу H_1.

Вполне очевидно, что при всех k и m :

$$X_{0,k} \cap X_{1,m} = \varnothing ,$$

$$X_{0,k} \cap X_{0,m} = \varnothing ,\ k \neq m ,$$

$$X_{1,k} \cap X_{1,m} = \varnothing ,\ k \neq m ,$$

поскольку критерий не может для одной и той же последовательности $(x_1, x_2,...)$ принять и H_0 на шаге k и принять гипотезу H_1 на шаге m, и критерий не может для одной и той же последовательности $(x_1, x_2,...)$ одновременно остановится на шаге k и на шаге $m \neq k$.

Каждому последовательному критерию K соответствуют конечные или счетные совокупности множеств $\{X_{0,k}\}_k$ и $\{X_{1,k}\}_k$, и наоборот, задание двух совокупностей $\{X_{0,k}\}_k$ и $\{X_{1,k}\}_k$ множеств (удовлетворяющих условиям $X_{0,k} \cap X_{1,m} = \varnothing$, $X_{0,k} \cap X_{0,m} = \varnothing$ и $X_{1,k} \cap X_{1,m} = \varnothing$ при всех $k \neq m$) однозначно определяет некоторый последовательный критерий K, поэтому в дальнейшем формально будем считать, что критерий $K = (\{X_{0,k}\}_k, \{X_{1,k}\}_k)$.

В соответствии с определением множеств $X_{0,k}$ и $X_{1,k}$, множество $X_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}$ есть множество последовательностей $(x_1, x_2,...)$, при которых критерий K останавливается и принимает гипотезу H_0, множество $X_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}$ есть множество последовательностей $(x_1, x_2,...)$, при которых критерий K останавливается и принимает гипотезу H_1. Очевидно, что $X_0 \cap X_1 = \varnothing$, но не обязательно $X_0 \cup X_1 = X$.

В случае, когда $X_0 \cup X_1 \neq X$ для всякой последовательности $(x_1, x_2,...) \in X \setminus (X_0 \cup X_1)$ критерий K никогда не останавливается (на каждом шаге критерий K принимает решение продолжить и получить следующую величину). К сожалению, такие критерии тоже попадают в класс последовательных критериев, поэтому при формулировке последовательного критерия следует отдельно рассматривать вопрос об остановке критерия за конечное число шагов.

Согласно определению вероятность ошибки первого рода критерия – это вероятность принять гипотезу H_1 в случае, когда верна гипотеза H_0. Последовательный критерий принимает гипотезу H_1, когда $(\xi_1, \xi_2,...) \in X_1$, а если верна гипотеза H_0, то $\theta = \theta_0$, поэтому вероятность ошибки первого рода критерия $K = (\{X_{0,k}\}_k, \{X_{1,k}\}_k)$:

$$\alpha(K) = P_{\theta_0}\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X_1\},\ X_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k} .$$

где вероятность вычисляется при значении $\theta = \theta_0$.

Вероятность ошибки второго рода – это вероятность принять гипотезу H_0 в случае, когда верна гипотеза H_1. Последовательный критерий принимает гипотезу H_0, когда

$(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_0$, а если верна гипотеза H_1, то $\theta = \theta_1$, поэтому вероятность ошибки второго рода критерия $K = \left(\{X_{0,k}\}_k, \{X_{1,k}\}_k\right)$:

$$\beta(K) = P_{\theta_1}\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_0\}, \; X_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k} .$$

Определение 5В.12.

Критерий K является *критерием силы* (α, β), если:

$$\alpha(K) = \alpha ,$$

$$\beta(K) = \beta .$$

Кроме вероятностей ошибок первого и второго родов, каждый последовательный критерий K характеризуется случайной величиной количества шагов до остановки, $\nu(K)(\omega)$. Если для элементарного события ω последовательность величин $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ...) \in X_{0,k} \cup X_{1,k}$, то это означает, что критерий K остановился на шаге с номером k, то есть количество шагов $\nu(K)(\omega) = k$. Отсюда следует определение для случайной величины $\nu(K)(\omega)$:

$$\nu(K)(\omega) = k \text{ , если } (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ...) \in X_{0,k} \cup X_{1,k} .$$

Поскольку для каждого последовательного критерия K количество шагов до остановки $\nu(K)$ является величиной случайной, то для $\nu(K)$ определена функция распределения $P_\nu(k \mid \theta) = P\{\nu(K) = k \mid \theta\}$, зависящая от параметра θ, и в некоторых случаях определено математическое ожидание:

$$M_\theta[\nu(K)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_\nu(k \mid \theta) .$$

Заметим, что при различных значениях параметра θ математические ожидания $M_{\theta_0}[\nu(K)]$ и $M_{\theta_1}[\nu(K)]$ могут оказаться различными.

Пусть α $(0 < \alpha < 1)$ и β $(0 < \beta < 1)$ заданные величины вероятностей ошибок первого и второго родов соответственно, рассмотрим класс последовательных критериев силы (α, β), с конечными средними количествами шагов до остановки:

$$K_{\alpha,\beta} = \{K : \alpha(K) = \alpha, \beta(K) = \beta, M_{\theta_0}[\nu(K)] < \infty, M_{\theta_1}[\nu(K)] < \infty\} .$$

В классе $K_{\alpha,\beta}$ «наилучшим» критерием является критерий с наименьшими возможными значениями $M_{\theta_0}[\nu(K)]$ и $M_{\theta_1}[\nu(K)]$. Можно показать, что существует критерий $K^* \in K_{\alpha,\beta}$, который одновременно минимизирует оба математических ожидания, то есть для любого критерия $K \in K_{\alpha,\beta}$:

$$M_{\theta_0}[\nu(K^*)] \le M_{\theta_0}[\nu(K)] ,$$

$$M_{\theta_1}[\nu(K^*)] \le M_{\theta_1}[\nu(K)] ,$$

и таким образом критерий K^* является «наилучшим» в классе $K_{\alpha,\beta}$. Кроме того, можно показать, что наилучший критерий K^* является последовательным критерием отношения вероятностей.

Определение 5В.13.

Последовательный критерий $K_s(A_0, A_1)$ является *последовательным критерием отношения вероятностей* (ПКОВ), если

и при всяком $k \ge 1$:

1. $X_{0,0} = X_{1,0} = \varnothing$,
2. $k \ge 1$:

$$X_{0,k} = \left\{ (x_1, x_2, ...) : \frac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)} \le A_0, A_0 < \frac{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_1)}{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_0)} < A_1, 1 \le j \le k-1 \right\},$$

3. $k \ge 1$:

$$X_{1,k} = \left\{ (x_1, x_2, ...) : \frac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)} \ge A_1, A_0 < \frac{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_1)}{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_0)} < A_1, 1 \le j \le k-1 \right\},$$

где $f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ – функция плотности вероятности функции распределения $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ из условия (С1).

Из определения ПКОВ следует:

1. ПКОВ останавливается на шаге k и принимает гипотезу H_0, если отношение правдоподобия $\frac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)} \le A_0$, и ПКОВ не остановился ранее, то есть для всех j $(1 \le j \le k-1)$: $A_0 < \frac{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_1)}{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_0)} < A_1$.
2. ПКОВ останавливается на шаге k и принимает гипотезу H_1, если отношение правдоподобия $\frac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)} \ge A_1$, и ПКОВ не остановился ранее, то есть для всех j $(1 \le j \le k-1)$: $A_0 < \frac{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_1)}{f_{\xi,j}(x_1,..., x_j \mid \theta_0)} < A_1$.
3. ПКОВ не останавливается и получает следующую величину, если отношение правдоподобия $A_0 \le \frac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)} \le A_1$.

Рассмотрим первые два шага ПКОВ: на первом шаге ($k = 1$) ПКОВ анализирует первое число из последовательности x_1, сравнивает величину $\frac{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_1)}{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_0)}$ с заданными значениями A_0 и A_1:

1. если $\frac{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_1)}{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_0)} \le A_0$, то ПКОВ останавливается и принимает гипотезу H_0;
2. если $A_1 \le \frac{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_1)}{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_0)}$, то ПКОВ останавливается и принимает гипотезу H_1;
3. если $A_0 < \frac{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_1)}{f_{\xi,1}(x_1 \mid \theta_0)} < A_1$, то ПКОВ не останавливается, получает следующее значение x_2 и переходит ко второму шагу.

На втором шаге ($k = 2$) ПКОВ анализирует первые два числа из последовательности (x_1, x_2), сравнивает величину $\frac{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_1)}{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_0)}$ с заданными значениями A_0 и A_1:

1. если $\frac{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_1)}{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_0)} \le A_0$, то ПКОВ останавливается и принимает гипотезу H_0;
2. если $\frac{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_1)}{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_0)} \ge A_1$, то ПКОВ останавливается и принимает гипотезу H_1;

3. если $A_0 \le \dfrac{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_1)}{f_{\xi,2}(x_1, x_2 \mid \theta_0)} \le A_1$, то ПКОВ продолжается, получает следующее значение x_3 и переходит к третьему шагу.

Таким образом, ПКОВ на каждом шаге вычисляет отношение правдоподобия $\dfrac{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta_0)}$ и как только вычисленное значение окажется меньше или равно A_0 или больше или равно A_1, то ПКОВ сразу же останавливается и принимает соответствующую гипотезу.

Рисунок 5В.1. Реализация отношения правдоподобия.

Примечательно, что минимальность математических ожиданий $M_{\theta_0}[\nu(K^*)]$ и $M_{\theta_1}[\nu(K^*)]$ обеспечивается способом построения ПКОВ, основанным на сравнении именно отношения правдоподобия с двумя пороговыми значениями A_0 и A_1, в то время как выбор постоянных A_0 и A_1 полностью определяет вероятности ошибок первого $\alpha(K^*)$ и второго $\beta(K^*)$ родов критерия. К сожалению, в большинстве случаев крайне сложно установить точные выражения, связывающие величины A_0 и A_1 ПКОВ с вероятностями ошибок $\alpha(K^*)$ и $\beta(K^*)$. Тем не менее, для некоторых ПКОВ удается установить оценки снизу и сверху для постоянных A_0 и A_1, в которых фигурируют вероятности ошибок $\alpha(K^*)$ и $\beta(K^*)$.

Утверждение 5В.14.

Пусть для последовательности случайных величин $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),...)$ функции распределения $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ первых k величин последовательности удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Пусть ПКОВ $K_s^* = K_s(A_0, A_1)$ с вероятностью 1 останавливается за конечное число шагов при любом значении параметра $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$, тогда:

$$\frac{\beta(K_s^*)}{1-\alpha(K_s^*)} \le A_0, \; A_1 \le \frac{1-\beta(K_s^*)}{\alpha(K_s^*)}.$$

Доказательство:

1) Пусть ПКОВ $K_s^* = \left(\{X_{0,k}\}_k, \{X_{1,k}\}_k\right)$, тогда множество $X_f = \bigcup_{k=0}^{\infty}(X_{0,k} \cup X_{1,k})$ есть множество тех последовательностей $(x_1, x_2,...)$, при которых ПКОВ K_s^* останавливается за конечное число шагов. Действительно, если для заданной последовательности $(x_1, x_2,...)$ ПКОВ K_s^* останавливается на некотором конечном шаге $m < \infty$, то $(x_1, x_2,...) \in X_{0,m} \cup X_{1,m}$ и тогда $(x_1, x_2,...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(X_{0,k} \cup X_{1,k}) = X_f$.

Множество $X_{if} = X \setminus X_f$ есть множество тех последовательностей $(x_1, x_2,...)$ для которых ПКОВ K_s^* никогда не останавливается. Легко видеть, что $X = X_f \cup X_{if}$ и множества $X_f \cap X_{if} = \varnothing$, тогда:

$$P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X\} = P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in (X_f \cup X_{if})\} = P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X_f\} + P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X_{if}\}.$$

По условию утверждения ПКОВ K_s^* останавливается за конечное число шагов с вероятностью 1, это по определению означает, что $P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X_{if}\} = 0$, тогда:

$$P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X\} = P_\theta\{(\xi_1, \xi_2,...) \in X_f\}.$$

Легко видеть, что $X_f = \bigcup_{k=0}^{\infty}(X_{0,k} \cup X_{1,k}) = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right)$, поэтому:

$$P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X\} = P_\theta\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right)\right\}.$$

Поскольку множества $X_{0,k}$ и $X_{1,k}$ попарно не пересекаются, то $\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right) = \varnothing$, и следовательно:

$$P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X\} = P_\theta\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right\} + P_\theta\left((\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right),$$

$$1 = P_\theta\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right\} + P_\theta\left((\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right) \qquad (5В.6а)$$

Поскольку множества $X_{0,k}$ попарно не пересекаются, то в силу счетно-аддитивности меры P_θ :

$$P_\theta\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{0,k}\} \qquad (5В.6б)$$

Множества $X_{1,k}$ также попарно не пересекаются, поэтому в силу счетно-аддитивности меры P_θ :

$$P_\theta\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{1,k}\} \qquad (5В.6в)$$

Из (5В.6а), (5В.6б) и (5В.6в) следует, что:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{0,k}\} + \sum_{k=0}^{\infty} P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{1,k}\} = 1 \qquad (5В.7)$$

2) Заметим, что вероятности ошибок первого и второго родов критерия K_s^* из (5В.6в) и (5В.6б):

$$\begin{aligned} \alpha(K_s^*) &= P_{\theta_0}\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{1,k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_0}\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{1,k}\}, \\ \beta(K_s^*) &= P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_{0,k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_1}\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{0,k}\}. \end{aligned} \qquad (5В.8)$$

3) Согласно (5В.8):

$$\alpha(K_s^*) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_0}\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{1,k}\},$$

причем из условия (С1) следует, что:

$$P_\theta\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in X_{1,k}\} = \int_{X_{1,k}} f_{\xi,k}(x_1, ..., x_k \mid \theta) dx_1 ... dx_k .$$

Для всех $(x_1, ..., x_k) \in X_{1,k}$:

$$\frac{f_{\xi,k}(x_1, ..., x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1, ..., x_k \mid \theta_0)} \ge A_1$$

$$f_{\xi,k}(x_1, ..., x_k \mid \theta_0) \le \frac{f_{\xi,k}(x_1, ..., x_k \mid \theta_1)}{A_1},$$

тогда,

$$P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{1,k}\} = \int\limits_{X_{1,k}} f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_0)dx_1...dx_k \le$$

$$\le \frac{1}{A_1}\int\limits_{X_{1,k}} f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_1)dx_1...dx_k = \frac{1}{A_1}P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{1,k}\},$$

откуда с учетом (5В.7) и (5В.8):

$$\alpha(K_s^*) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{1,k}\} \le \frac{1}{A_1}\sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{1,k}\} =$$

$$= \frac{1}{A_1}\left(1-\sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\}\right) = \frac{1}{A_1}\left(1-\beta(K_s^*)\right),$$

$$\alpha(K_s^*) \le \frac{(1-\beta(K_s^*))}{A_1},$$

$$A_1 \le \frac{(1-\beta(K_s^*))}{\alpha(K_s^*)}.$$

5) Аналогично, согласно (5В.8):

$$\beta(K_s^*) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\},$$

причем, из условия (С1) следует, что:

$$P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\} = \int\limits_{X_{0,k}} f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_1)dx_1...dx_k.$$

Для всех $(x_1,...,x_k)\in X_{0,k}$:

$$\frac{f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_0)} \le A_0,$$

$$f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_1) \le A_0 f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_0),$$

тогда,

$$P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\} = \int\limits_{X_{0,k}} f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_1)dx_1...dx_k \le$$

$$\le \int\limits_{X_{0,k}} A_0 f_{\xi,k}(x_1,...,x_k \mid \theta_0)dx_1...dx_k = A_0 P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\}.$$

Откуда в силу (5В.7) и (5В.8):

$$\beta(K_s^*) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_1}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\} \le A_0\sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{0,k}\} =$$

$$= A_0\left(1-\sum_{k=0}^{\infty} P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in X_{1,k}\}\right) = A_0\left(1-\alpha(K_s^*)\right).$$

$$\beta(K_s^*) \le A_0(1-\alpha(K_s^*)),$$

$$\frac{\beta(K_s^*)}{(1-\alpha(K_s^*))} \le A_0.$$

Утверждение доказано.

Предположим, требуется построить ПКОВ заданной силы (α,β) (определение 5В.12), где $0<\alpha<1$. Величины α и β определяют постоянные A_0 и A_1 ПКОВ $K_s^* = K_s(A_0,A_1)$, однако выражения для A_0 и A_1 через α и β неизвестны, и построить ПКОВ K_s^* с вероятностями ошибок точно равными α и β не представляется возможным. Тем не менее, из утверждения 5В.14 известны оценки для A_0 и A_1, воспользовавшись которыми можно построить ПКОВ $\tilde{K}_s = K_s\left(\frac{\beta}{1-\alpha}, \frac{1-\beta}{\alpha}\right)$. Конечно вероятности ошибок $\alpha(\tilde{K}_s)$ и $\beta(\tilde{K}_s)$ критерия $\tilde{K}_s$ в общем случае не совпадают с заданными α и β, тем не менее, можно надеется, что эти величины будут различаться несущественно.

Утверждение 5В.15.

Пусть для последовательности $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ...)$ случайных величин функции распределения $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ первых k величин последовательности удовлетворяют условиям (С1) и (С2). Пусть заданы числа α и β, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, и известно, что ПКОВ $\tilde{K}_s = K_s\left(\frac{\beta}{1-\alpha}, \frac{1-\beta}{\alpha}\right)$ с вероятностью 1 останавливается за конечное число шагов при любом значении параметра $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$, $0 < \alpha(\tilde{K}_s) < 1$ и $0 < \beta(\tilde{K}_s) < 1$, тогда:

$$\alpha(\tilde{K}_s) \le \frac{\alpha}{1-\beta},$$

$$\beta(\tilde{K}_s) \le \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$\alpha(\tilde{K}_s) + \beta(\tilde{K}_s) \le \alpha + \beta .$$

Доказательство:

В условиях утверждения справедливо утверждение 5В.14, согласно которому для ПКОВ $\tilde{K}_s$, с $A_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ и $A_1 = \frac{1-\beta}{\alpha}$:

$$\frac{\beta(\tilde{K}_s)}{1-\alpha(\tilde{K}_s)} \le A_0 = \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{5В.9а}$$

$$\frac{1-\beta}{\alpha} = A_1 \le \frac{1-\beta(\tilde{K}_s)}{\alpha(\tilde{K}_s)} \tag{5В.9б}$$

Из (5В.9а) следует:

$$\beta(\tilde{K}_s) \le \frac{\beta(\tilde{K}_s)}{1-\alpha(\tilde{K}_s)} \le \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Из (5В.9б) следует:

$$\frac{\alpha(\tilde{K}_s)}{1-\beta(\tilde{K}_s)} \le \frac{\alpha}{1-\beta},$$

$$\alpha(\tilde{K}_s) \le \frac{\alpha(\tilde{K}_s)}{1-\beta(\tilde{K}_s)} \le \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Из (5В.9а) и (5В.9б) следует:

$$\beta(\tilde{K}_s)(1-\alpha) \le \beta(1-\alpha(\tilde{K}_s)),$$

$$(1-\beta)\alpha(\tilde{K}_s) \le \alpha(1-\beta(\tilde{K}_s)) .$$

Складывая неравенства, получим:

$$\beta(\tilde{K}_s)(1-\alpha) + (1-\beta)\alpha(\tilde{K}_s) \le \beta(1-\alpha(\tilde{K}_s)) + \alpha(1-\beta(\tilde{K}_s)),$$

$$\beta(\tilde{K}_s) - \alpha\beta(\tilde{K}_s) + \alpha(\tilde{K}_s) - \beta\alpha(\tilde{K}_s) \le \beta - \beta\alpha(\tilde{K}_s)) + \alpha - \alpha\beta(\tilde{K}_s)),$$

$$\beta(\tilde{K}_s) + \alpha(\tilde{K}_s) \le \beta + \alpha .$$

Утверждение доказано.

Заметим, что величины α и β, как правило, очень малы, поэтому $1-\alpha \approx 1$ и $1-\beta \approx 1$, следовательно:

$$\alpha(\tilde{K}_s) \le \frac{\alpha}{1-\beta} \approx \alpha \ ,$$

$$\beta(\tilde{K}_s) \le \frac{\beta}{1-\alpha} \approx \beta \ ,$$

поэтому даже если вероятности ошибок ПКОВ $\tilde{K}_s = K_s\left(\frac{\beta}{1-\alpha}, \frac{1-\beta}{\alpha}\right)$ превышают заданные значения α и β, то не на много. Кроме того, согласно неравенству:

$$\alpha(\tilde{K}_s) + \beta(\tilde{K}_s) \le \alpha + \beta$$

даже если $\alpha(\tilde{K}_s) > \alpha$, тогда $\beta(\tilde{K}_s) < \beta$. Уменьшение вероятностей ошибок ПКОВ $\tilde{K}_s$ по сравнению с заданными α и β совершенно точно не уменьшает средние количества шагов до остановки, то есть у ПКОВ $\tilde{K}_s$ математические ожидания количества шагов до остановки $M_\theta[\nu(\tilde{K}_s)]$ скорее всего окажутся больше аналогичных математических ожиданий $M_\theta[\nu(K_s^*)]$ ПКОВ K_s^* с вероятностями ошибок точно равных α и β. Причем разница математических ожиданий, по-видимому, будет тем больше, чем больше различаются вероятности $\alpha_0(\tilde{K}_s)$ и α, и вероятности $\beta_0(\tilde{K}_s)$ и β.

Построение ПКОВ $\tilde{K}_s$ основано на утверждениях 5В.14 и 5В.15 справедливых для тех ПКОВ, которые с вероятностью 1 останавливаются за конечное число шагов. В общем случае, задача подсчета вероятности остановки произвольного ПКОВ за конечное число шагов может оказаться весьма сложной, поэтому перейдем к рассмотрению более простой задачи, введя дополнительное условие (С3):

(С3) Пусть при всех k и $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$:

$$f_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta) = \prod_{i=1}^{k} f_\xi(x_i \mid \theta) .$$

Другими словами условие (С3) означает, что в последовательности случайных величин $(\xi_1, \xi_2,...)$ все величины имеют одинаковую плотность вероятности $f_\xi(x \mid \theta)$ и любая конечная совокупность величин является совместно независимой.

В условиях (С1), (С2) и (С3) отношение правдоподобия на шаге k принимает вид:

$$\frac{f_{\xi,k}(\xi_1,..., \xi_k \mid \theta_1)}{f_{\xi,k}(\xi_1,..., \xi_k \mid \theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{k} f_\xi(\xi_i \mid \theta_1)}{\prod_{i=1}^{k} f_\xi(\xi_i \mid \theta_0)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{f_\xi(\xi_i \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi_i \mid \theta_0)} ,$$

тогда условие продолжения на шаге k ПКОВ $\tilde{K}_s$ имеет вид:

$$\frac{\beta}{1-\alpha} < \prod_{i=1}^{k} \frac{f_\xi(\xi_i \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi_i \mid \theta_0)} < \frac{1-\beta}{\alpha} .$$

Поскольку все величины в неравенстве положительные, то вычисляя логарифм от всех частей, получим неравенство:

$$\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) < \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi_i \mid \theta_0)}\right) < \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) .$$

Утверждение 5В.16.

Пусть для последовательности случайных величин $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),...)$ функции распределения $F_{\xi,k}(x_1,..., x_k \mid \theta)$ первых k величин последовательности удовлетворяют условиям (С1), (С2) и (С3), причем дисперсии $D_\theta\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi\mid\theta_0)}\right)\right]>0$, где ξ – случайная величина с плотностью вероятности $f_\xi(x\mid\theta)$ $(\theta\in\{\theta_0,\theta_1\})$.

Тогда для любых конечных A_0 и A_1 ПКОВ $K_s(A_0,A_1)$ с вероятностью 1 останавливается за конечное число шагов.

Без доказательства.

Следствие

В условиях утверждения 5В.16 можно показать, что все моменты случайной величины количества шагов до остановки $\nu(K_s(A_0,A_1))$ конечны.

Среди всех последовательных критериев заданной силы (α,β) ПКОВ K_s^* силы (α,β) имеет наименьшие возможные значения математических ожиданий $M_\theta[\nu(K_s^*)]$ $(\theta\in\{\theta_0,\theta_1\})$. Вычисление величин $M_\theta[\nu(K_s^*)]$ в общем случае представляет сложную задачу, тем не менее, в некоторых случаях может быть получено простое приближенное выражение.

Утверждение 5В.17. (тождество Вальда)

Пусть в последовательности случайных величин $(\zeta_1,\zeta_2,...)$ все случайные величины имеют одинаковое распределение и конечное математическое ожидание $M[\zeta_n(\omega)]<\infty$, случайная величина $\nu(\omega)$ принимает значения из множества натуральных чисел, имеет конечное математическое ожидание $M[\nu(\omega)]<\infty$, и при любом натуральном k событие $\{\omega:\nu(\omega)\le k\}$ зависит только от случайных величин ζ_1, ..., ζ_k. Тогда случайная величина $s(\omega)$:

$$s(\omega)=\sum_{i=1}^{\nu(\omega)}\zeta_i(\omega)$$

имеет математическое ожидание $M[s(\omega)]$:

$$M[s(\omega)]=M[\zeta_1(\omega)]\cdot M[\nu(\omega)].$$

Если дополнительно $M[\zeta_1^2(\omega)]<\infty$, тогда:

$$D[s(\omega)]=D[\zeta_1(\omega)]\cdot M[\nu(\omega)].$$

Без доказательства.

В момент остановки критерия $\tilde{K}_s$ шаг k равен случайной величине $\nu(\omega,\tilde{K}_s)$, поэтому случайная величина $s(\omega)$:

$$s(\omega)=\sum_{i=1}^{\nu(\omega,\tilde{K}_s)}\ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_0)}\right) \tag{5В.10}$$

является значением логарифма отношения правдоподобия в момент остановки критерия $\tilde{K}_s$.

Если существует $M_\theta\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_0)}\right)\right]<\infty$, тогда к последовательности случайных величин $\ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_0)}\right)$ и случайной величине $\nu(\omega,\tilde{K}_s)$ применимо утверждение 5В.17 (тождество Вальда), откуда следует, что:

$$M_\theta[s(\omega)]=M_\theta\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_0)}\right)\right]M_\theta[\nu(\omega,\tilde{K}_s)] \tag{5В.11}$$

где $\xi(\omega)$ является случайной величиной с плотностью вероятности $f_\xi(x\mid\theta)$.

Поскольку величины α и β как правило малы, то диапазон между пороговыми значениями $\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)$ и $\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$ оказывается очень широким, если при этом отдельные слагаемые $\ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_0)}\right)$ в сумме оказываются с большой вероятностью небольшими величинами, то в момент выхода суммы $\sum_{i=1}^{k}\ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_0)}\right)$ из интервала $\left(\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right),\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\right)$, образованного пороговыми значениями, значение суммы (5В.10) незначительно отличается от самого порогового значения. В частности если математические ожидания и дисперсии случайной величины $\ln\left(\frac{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi_i(\omega)\mid\theta_0)}\right)$ (где $\xi_i(\omega)$ имеет плотность вероятности $f_\xi(x\mid\theta_0)$ либо $f_\xi(x\mid\theta_1)$) оказываются малыми величинами по сравнению с разностью $\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)-\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$, то в момент остановки отношение правдоподобия примерно совпадает с пороговыми значениями:

$$s(\omega)\approx\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right),\ \text{если}\ (\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_0\ \ (\text{принимается}\ H_0),$$

$$s(\omega)\approx\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right),\ \text{если}\ (\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_1\ \ (\text{принимается}\ H_1),$$

где $\tilde{X}_0$ – множество числовых последовательностей, для которых критерий $\tilde{K}_s$ останавливается и принимает гипотезу H_0, а множество $\tilde{X}_1$ – множество числовых последовательностей, для которых критерий $\tilde{K}_s$ останавливается и принимает гипотезу H_1.

Если верна гипотеза H_0, то есть $\theta^*=\theta_0$, тогда:

$$M_{\theta_0}[s(\omega)]\approx\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_0\}+\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_1\},$$

$$M_{\theta_0}[s(\omega)]\approx\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\left(1-P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_1\}\right)+\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_1\},$$

где $P_{\theta_0}\{(\xi_1,\xi_2,...)\in\tilde{X}_1\}$ есть вероятность ошибки первого рода критерия $\tilde{K}_s$, которая приближенно равна α, тогда:

$$M_{\theta_0}[s(\omega)]\approx\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)(1-\alpha)+\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\alpha \qquad (5\text{В}.12\text{a})$$

Приравнивая правые части (5В.11) и (5В.12а) получим:

$$M_{\theta_0}\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_0)}\right)\right]M_{\theta_0}[\nu(\omega,\tilde{K}_s)]\approx\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)(1-\alpha)+\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\alpha,$$

$$M_{\theta_0}[\nu(\omega,\tilde{K}_s)]\approx\frac{\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)(1-\alpha)+\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\alpha}{M_{\theta_0}\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega)\mid\theta_0)}\right)\right]},$$

где $\xi(\omega)$ – случайная величина, имеющая плотность вероятности $f_\xi(x\mid\theta_0)$.

Аналогично, если верна гипотеза H_1, то есть $\theta^* = \theta_1$, тогда:

$$M_{\theta_1}[s(\omega)] \approx \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \tilde{X}_0\right\} + \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \tilde{X}_1\right\},$$

$$M_{\theta_1}[s(\omega)] \approx \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \tilde{X}_0\right\} + \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\left(1 - P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \tilde{X}_0\right\}\right),$$

где $P_{\theta_1}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \tilde{X}_0\right\}$ есть вероятность ошибки второго рода критерия $\tilde{K}_s$, которая приближенно равна β, тогда:

$$M_{\theta_1}[s(\omega)] \approx \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\beta + \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)(1-\beta) \qquad (5В.12б)$$

Приравнивая правые части (5В.11) и (5В.12б) получим:

$$M_{\theta_1}\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega) \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega) \mid \theta_0)}\right)\right] M_{\theta_1}[\nu(\omega, \tilde{K}_s)] \approx \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\beta + \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)(1-\beta),$$

$$M_{\theta_1}[\nu(\omega, \tilde{K}_s)] \approx \frac{\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\beta + \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)(1-\beta)}{M_{\theta_1}\left[\ln\left(\frac{f_\xi(\xi(\omega) \mid \theta_1)}{f_\xi(\xi(\omega) \mid \theta_0)}\right)\right]},$$

где $\xi(\omega)$ – случайная величина, имеющая плотность вероятности $f_\xi(x \mid \theta_1)$.
