Занятие 1. Оценки и основные свойства оценок.

Домашнее задание.

Глава 19, задачи: 98, 99, 101, 102, 103 (только несмещенность), 107, 108, 109.

Задача 1.1.

Неформально: имеется $n = 5$ приборов, которые испытываются до первого отказа. Времена работы приборов до первого отказа равны $x_1 = 110$, $x_2 = 96$, $x_3 = 98$, $x_4 = 87$, $x_5 = 103$ часов соответственно. Оценить среднее время работы до отказа.

Формально: пусть $(\xi_1, ..., \xi_n)$ – выборка из показательного распределения $E(\theta)$ с неизвестным параметром θ ($0 < \theta < \infty$). Каждая величина ξ_i соответствует времени работы i-го прибора до первого отказа. Требуется:

1) построить «хорошую» оценку величины $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$, являющейся среднем временем работы прибора до первого отказа;

2) вычислить оценку на основе заданных числовых данных x_i, $i = \overline{1, n}$;

3) определить свойства несмещенности, состоятельности, оптимальности построенной оценки.

Решение:

1) Используя метод моментов, построим оценку $T(\xi_1, ..., \xi_n)$:

$$T(\xi_1, ..., \xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

и определим свойства оценки $T(\xi_1, ..., \xi_n)$.

2) Вычислим оценку $T(\xi_1, ..., \xi_n)$, считая, что в результате эксперимента реализовалось некоторое элементарное событие ω^*, при котором $\xi_i(\omega^*) = x_i$:

$$T(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(110 + 96 + 98 + 87 + 103) = \frac{494}{5} = 98.8$$

3) Вычислим математическое ожидание оценки $T(\xi_1, ..., \xi_n)$:

$$M_\theta[T(\xi_1, ..., \xi_n)] = M_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_\theta[\xi_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta} = \frac{1}{n} n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Заметим, что математическое ожидание зависит от параметра θ, поэтому символ математического ожидания снабжен нижним индексом «θ». Вычисленное математическое ожидание показывает, что при любом значении параметра θ математическое ожидание оценки $T(\xi_1, ..., \xi_n)$ всегда равно $\dfrac{1}{\theta}$, откуда по определению несмещенной оценки следует, что $T(\xi_1, ..., \xi_n)$ является несмещенной оценкой величины $\tau(\theta) = \dfrac{1}{\theta}$.

Заметим, что случайные величины ξ_1, …, ξ_n независимы, поскольку $(\xi_1, ..., \xi_n)$ по условию является выборкой, и имеют одинаковые функции распределения и одинаковое конечное математическое ожидание $\dfrac{1}{\theta}$. Следовательно, к последовательности ξ_1, …, ξ_n при неограниченном возрастании n, $n \to \infty$, применима теорема Хинчина, согласно которой:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow{P} \frac{1}{\theta}, \text{ при } n \to \infty.$$

Откуда по определению состоятельной оценки следует, что оценка $T(\xi_1,..., \xi_n)$ является состоятельной оценкой величины $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Не трудно убедиться в том, что линейная по наблюдениям ξ_1, …, ξ_n оценка с минимальной дисперсией в точности совпадает с оценкой $T(\xi_1,..., \xi_n)$, откуда с учетом несмещенности оценки $T(\xi_1,..., \xi_n)$ следует, что оценка $T(\xi_1,..., \xi_n)$ является оптимальной в классе несмещенных линейных оценок.

Ответ:

1) $T(\xi_1,...,\xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$;

2) 98.8 часов;

3) несмещенная, состоятельная, оптимальная в классе линейных оценок.

Задача 1.2.

Неформально: для определения точности измерительного прибора систематическая ошибка которого равна 0 было проведено 5 независимых измерений одного и того же расстояния m, в результате получены значения $x_1 = 2781$, $x_2 = 2836$, $x_3 = 2807$, $x_4 = 2763$, $x_5 = 2858$ метров. Оценить дисперсию случайной ошибки прибора σ^2, если:

1) измеряемое расстояние известно, $m = 2810$ метров;

2) измеряемое расстояние неизвестно.

Формально: $(\xi_1,..., \xi_n)$ – выборка (измерения независимые) объема $n = 5$, в которой $M[\xi_i] = m$ (систематическая ошибка прибора равна 0) и $D[\xi_i] = \sigma^2 < \infty$ (дисперсия случайной ошибки прибора σ^2). Построить оценки σ^2, если:

1) математическое ожидание m известно;

2) математическое ожидание m неизвестно.

Решение:

1) Если математическое ожидание m известно, то в качестве оценки σ^2 допустимо использовать статистику $\hat{s}^2(\xi_1,...,\xi_n)$:

$$\hat{s}^2(\xi_1,...,\xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2,$$

которая является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии σ^2, действительно:

$$M_{\sigma^2}[\hat{s}^2(\xi_1,...,\xi_n)] = M_{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M_{\sigma^2}[(\xi_i - m)^2] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_{\sigma^2}[\xi_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2,$$

откуда по определению следует, что $\hat{s}^2$ является несмещенной оценкой σ^2. Состоятельность оценки $\hat{s}^2$ может быть получена на основе теоремы Хинчина: случайные величины $(\xi_i - m)^2$ независимы и одинаково распределены, поскольку $(\xi_1,..., \xi_n)$ – выборка, и имеют одинаковое конечное математическое ожидание $M_{\sigma^2}[(\xi_i - m)^2] = D_{\sigma^2}[\xi_i] = \sigma^2$, откуда по теореме Хинчина:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \text{ при } n \to \infty.$$

Вычисление оценки $\hat{s}^2$ приводит к следующему результату:

$$\hat{s}^2(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\frac{1}{5}[(-29)^2+26^2+(-3)^2+(-47)^2+48^2]=\frac{6039}{5}=1207.8$$

$$\sqrt{\hat{s}^2(x_1,\dots,x_n)}\approx 34.75 .$$

2) Если математическое ожидание m не известно, то, предварительно оценив математическое ожидание выборочным средним $\hat{m}(\xi_1,\dots,\xi_n)$:

$$\hat{m}(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i ,$$

возьмем в качестве оценки дисперсии σ^2 исправленную выборочную дисперсию $\tilde{\mu}_2(\xi_1,\dots,\xi_n)$:

$$\tilde{\mu}_2(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\hat{m}(\xi_1,\dots,\xi_n))^2 .$$

Исправленная выборочная дисперсия $\tilde{\mu}_2(\xi_1,\dots,\xi_n)$ как известно является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии σ^2. Вычисление оценок и $\tilde{\mu}_2$ приводит к следующему результату:

$$\hat{m}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{5}(2781+2836+2807+2763+2858)=2809 ,$$

$$\tilde{\mu}_2(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}(x_1,\dots,x_n))^2=$$

$$=\frac{1}{4}[(-28)^2+27^2+(-2)^2+(-46)^2+49^2]=\frac{6034}{4}\approx 1508.5 ,$$

$$\sqrt{\tilde{\mu}_2(x_1,\dots,x_n)}\approx 38.83 .$$

Ответ:

1) $\hat{s}^2(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m)^2$, $\hat{s}^2(x_1,\dots,x_n)=1207.8$;

2) $\tilde{\mu}_2(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\hat{m}(\xi_1,\dots,\xi_n))^2$, $\hat{m}(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $\tilde{\mu}_2(x_1,\dots,x_n)=1508.5$.

Задача 1.3.

Задана выборка $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ из некоторого распределения, для оценки неизвестной дисперсии $\sigma^2=D_{\sigma^2}[\xi_i]$ используется статистика $d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)$:

$$d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)=c(n)\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 .$$

Найти такую функцию $c(n)$, при которой статистика d_c будет несмещенной оценкой σ^2.

Решение:

Для того чтобы статистика $d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)$ была несмещенной оценкой σ^2 согласно определению несмещенной оценки достаточно, чтобы:

$$\forall\sigma^2:\ M_{\sigma^2}[d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)]=\sigma^2 \qquad (1.1)$$

Вычислим $M_{\sigma^2}[d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)]$:

$$M_{\sigma^2}[d_c(\xi_1,\dots,\xi_n)]=M_{\sigma^2}\left[c(n)\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2\right]=c(n)\sum_{i=1}^{n-1}M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1}-\xi_i)^2]$$

Поскольку $(\xi_1,..., \xi_n)$ является выборкой, то функции распределения всех случайных величин ξ_i одинаковы, откуда следует, что равны между собой математические ожидания всех величин ξ_i:

$$M[\xi_i] = M[\xi_j],$$

$$i, j = \overline{1,n},$$

в том числе $M[\xi_{i+1}] = M[\xi_i]$, при $i = \overline{1,n-1}$. Таким образом:

$$c(n)\sum_{i=1}^{n-1} M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1} - \xi_i)^2] = c(n)\sum_{i=1}^{n-1} M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1} - M[\xi_{i+1}] + M[\xi_i] - \xi_i)^2] =$$

$$= c(n)\sum_{i=1}^{n-1} M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1} - M[\xi_{i+1}])^2 + 2(\xi_{i+1} - M[\xi_{i+1}])(\xi_i - M[\xi_i]) + (\xi_i - M[\xi_i])^2] =$$

$$= c(n)\sum_{i=1}^{n-1} \left(M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1} - M[\xi_{i+1}])^2] + 2M_{\sigma^2}[(\xi_{i+1} - M[\xi_{i+1}])(\xi_i - M[\xi_i])] + M_{\sigma^2}[(\xi_i - M[\xi_i])^2] \right) =$$

$$= c(n)\sum_{i=1}^{n-1} \left(D_{\sigma^2}[\xi_{i+1}] + 2\operatorname{cov}_{\sigma^2}(\xi_{i+1}, \xi_i) + D_{\sigma^2}[\xi_i] \right).$$

Случайные величины ξ_{i+1} и ξ_i при $i = \overline{1,n-1}$ независимы, поскольку $(\xi_1,..., \xi_n)$ является выборкой, откуда следует, что все ковариации $\operatorname{cov}_{\sigma^2}(\xi_{i+1}, \xi_i) = 0$ при $i = \overline{1,n-1}$, тогда:

$$c(n)\sum_{i=1}^{n-1} \left(D_{\sigma^2}[\xi_{i+1}] + 2\operatorname{cov}_{\sigma^2}(\xi_{i+1}, \xi_i) + D_{\sigma^2}[\xi_i] \right) = c(n)\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sigma^2 + 0 + \sigma^2 \right) = c(n)\cdot(n-1)2\sigma^2.$$

Таким образом,

$$M_{\sigma^2}[d_c(\xi_1,..., \xi_n)] = c(n)\cdot(n-1)2\sigma^2,$$

и из (1.1) следует, что функция $c(n)$ должна удовлетворять уравнению:

$$c(n)(n-1)2\sigma^2 = \sigma^2,$$

$$c(n) = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Ответ:

$$c(n) = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Задача 1.4.

Задана выборка $(\xi_1,..., \xi_n)$ из нормального распределения $N(m,\sigma^2)$, для оценки неизвестной величины σ используется статистика $\sigma_c(\xi_1,..., \xi_n)$:

$$\sigma_c(\xi_1,..., \xi_n) = c(n)\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i - \hat{m}_1(\xi_1,..., \xi_n)\right|,$$

$$\hat{m}_1(\xi_1,..., \xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Найти такую функцию $c(n)$, при которой статистика $\sigma_c(\xi_1,..., \xi_n)$ будет несмещенной оценкой σ.

Решение:

Для того чтобы статистика $\sigma_c(\xi_1,..., \xi_n)$ была несмещенной оценкой σ согласно определению несмещенной оценки достаточно, чтобы:

$$\forall \sigma: M_{(m,\sigma^2)}[\sigma_c(\xi_1,..., \xi_n)] = \sigma \qquad (1.2)$$

Вычислим математическое ожидание $M_{(m,\sigma^2)}[\sigma_c(\xi_1,\dots,\xi_n)]$:

$$
\begin{aligned}
M_{(m,\sigma^2)}[\sigma_c(\xi_1,\dots,\xi_n)] &= M_{(m,\sigma^2)}\left[c(n)\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\hat{m}_1(\xi_1,\dots,\xi_n)\right|\right] = \\
&= c(n)\sum_{i=1}^{n} M_{(m,\sigma^2)}\left[\left|\xi_i-\hat{m}_1(\xi_1,\dots,\xi_n)\right|\right].
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Введем новые случайные величины η_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\eta_i=\xi_i-\hat{m}_1(\xi_1,\dots,\xi_n)=\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\ .$$

Легко видеть, что случайные величины η_i являются суммой независимых нормальных случайных величин, поэтому по известному свойству нормального распределения случайные величины η_i имеют нормальное распределение со следующими параметрами:

$$M_{(m,\sigma^2)}[\eta_i]=M_{(m,\sigma^2)}\left[\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right]=M_{(m,\sigma^2)}[\xi_i]-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M_{(m,\sigma^2)}[\xi_j]=m-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}m=m-\frac{1}{n}nm=0\ ,$$

$$
\begin{aligned}
D_{(m,\sigma^2)}[\eta_i] &= D_{(m,\sigma^2)}\left[\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right]=D_{(m,\sigma^2)}[\xi_i]-2\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}\left(\xi_i,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)+D_{(m,\sigma^2)}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right]= \\
&= \sigma^2-2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_i,\xi_j)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_j,\xi_k)\ .
\end{aligned}
$$

Поскольку $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ – выборка, то случайные величины ξ_i и ξ_j независимы при $i\neq j$, откуда следует, что $\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_i,\xi_j)=0$ при $i\neq j$, тогда:

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2-2\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_i,\xi_j)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_j,\xi_k)= \\
&=\sigma^2-2\frac{1}{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_i,\xi_i)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}_{(m,\sigma^2)}(\xi_j,\xi_j)=\sigma^2-2\frac{1}{n}D_{(m,\sigma^2)}[\xi_i]+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}D_{(m,\sigma^2)}[\xi_j]= \\
&=\sigma^2-2\frac{1}{n}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2-2\frac{1}{n}\sigma^2+\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\sigma^2-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\ .
\end{aligned}
$$

Таким образом, случайные величины η_i имеют распределение $N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$.

Обозначим σ_η среднеквадратичное отклонение η_i, $\sigma_\eta=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$, тогда:

$$
\begin{aligned}
M_{(m,\sigma^2)}[\eta_i] &= \int_{-\infty}^{\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy=\int_{-\infty}^{0}(-y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy+\int_{0}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy= \\
&=\int_{0}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy+\int_{0}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\int_{0}^{\infty}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}dy=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}(-\sigma_\eta^2)e^{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}}\Bigg|_{0}^{\infty}= \\
&=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\sigma_\eta^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_\eta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\ .
\end{aligned}
$$

Таким образом, из (1.3):

$$M_{(m,\sigma^2)}[\sigma_c(\xi_1,\dots,\xi_n)]=c(n)\sum_{i=1}^{n}M_{(m,\sigma^2)}\left[\left|\xi_i-\hat{m}_1(\xi_1,\dots,\xi_n)\right|\right]=c(n)\sum_{i=1}^{n}M_{(m,\sigma^2)}\left[\left|\eta_i\right|\right]=$$

$$= c(n)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma = c(n)n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma = c(n)\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}\sigma .$$

Из условия (1.2) следует, что функция $c(n)$ должна удовлетворять уравнению:

$$c(n)\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\pi}}\sigma = \sigma ,$$

откуда,

$$c(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} .$$

Ответ:

$$c(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} .$$