



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова



Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Компьютерный практикум по курсу
«Непрерывные математические модели»**

**«Аналитическое и численное исследование нелинейной динамической
системы Лотки-Вольтерры»**

ОТЧЁТ

о выполненном задании

студента ВМ-124 учебной группы факультета ВМК МГУ кафедры математики филиала города
Саров

Яблонского Дмитрия Дмитриевича

Вариант: 4

Дата подачи: 28.04.2025

Саров, 2025 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	3
3	Исследование устойчивости системы	4
3.1	Аналитическое решение	4
3.1.1	Стационарные точки	4
3.1.2	Линеаризация и матрица Якоби	4
4	Математические методы	5
4.1	Аналитическое решение	5
4.2	Численные методы	5
4.2.1	Метод Эйлера (явный, первого порядка)	5
4.2.2	Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (модифицированный Эйлер)	5
4.2.3	Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	6
4.2.4	Особенности реализации	6
5	Результаты работы методов	7
5.1	Фазовые портреты	7
5.2	Динамика популяций со временем	9
5.3	Устойчивость методов Рунге-Кутты второго и четвёртого порядка	11
6	Усложнённая модель Лотки-Вольтерры с внутривидовой конкуренцией	13
6.1	Стационарные точки и их устойчивость	13
6.1.1	Нахождение стационарных точек	13
6.1.2	Линеаризация и анализ устойчивости	13
6.2	Классификация стационарных точек	14
6.3	Динамика системы	14
7	Заключение	15

1 Введение

Модель Лотки-Вольтерры, предложенная Альфредом Лоткой в 1925 году и независимо развитая Вито Вольтеррой в 1926 году, является классической математической моделью для описания динамики взаимодействия двух биологических видов: хищников и жертв. Эта система нелинейных дифференциальных уравнений демонстрирует циклические колебания популяций, что соответствует наблюдаемым в природе явлениям, таким как периодические изменения численности рыси и зайца в экосистемах Канады. Модель имеет фундаментальное значение в экологии и теории динамических систем, так как позволяет исследовать механизмы устойчивости биоценозов и влияние внешних факторов на их равновесие.

Основная система уравнений модели имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (1.0.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad (1.0.2)$$

где:

- $x(t)$ — популяция жертв,
- $y(t)$ — популяция хищников,
- $\alpha > 0$ — коэффициент размножения жертв,
- $\beta > 0$ — коэффициент смертности жертв от хищника,
- $\gamma > 0$ — коэффициент смертности хищника от голода,
- $\delta > 0$ — коэффициент того, что хищнику хватит пропитания.

Целью данной работы является исследование модели методами аналитической и вычислительной математики. Задачи включают:

- Поиск аналитического решения системы с использованием символьных вычислений (библиотека SymPy),
- Реализацию численных методов: явного метода Эйлера, методов Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядков,
- Сравнение точности и устойчивости численных решений с аналитическим решением
- Визуализацию фазовых портретов и временных зависимостей для анализа динамики системы.

2 Постановка задачи

В рамках исследования модели Лотки-Вольтерры были поставлены следующие задачи:

1. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений:

- Использовать библиотеку SymPy для символьного вывода общего решения системы:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy\end{aligned}$$

- Получить выражение для первого интеграла системы методом разделения переменных.
- Реализовать возможность варьирования параметров модели $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и начальных условий (x_0, y_0) .

2. Численное моделирование:

- Реализовать три метода решения систем ОДУ:
 - Метод Эйлера (первого порядка точности)
 - Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (модифицированный метод Эйлера)
 - Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
- Исследовать влияние времени и шага интегрирования h на точность и устойчивость методов.

3. Сравнение решений:

- Провести сравнение численных решений с аналитическим.
- Исследовать устойчивость для методов Эйлера, РК2 и РК4 относительно аналитического решения с изменением времени и шага интегрирования.
- Сравнить фазовые траектории и амплитудно-частотные характеристики численных решений и аналитического.

4. Визуализация результатов:

- Построить временные зависимости популяций $x(t)$ и $y(t)$ для всех методов.
- Создать фазовые портреты $(y(x))$.

Начальные условия:

- Параметры модели: $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$.
- Начальные условия: $x_0 = 1.0$, $y_0 = 0.25$.
- Временной интервал: $t \in [0, 50]$ с шагом $h = 0.05$.
- Анализ устойчивости: проверить сохранение цикличности решений при длительном моделировании.

3 Исследование устойчивости системы

3.1 Аналитическое решение

Для модели Лотки-Вольтерры:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad (3.1.2)$$

устойчивость исследуется через анализ стационарных точек, которые находятся при приравнении к нулю обоих равенств.

$$0 = \alpha x - \beta xy \quad (3.1.3)$$

$$0 = -\gamma y + \delta xy \quad (3.1.4)$$

3.1.1 Стационарные точки

- **Тривиальная точка** $(0, 0)$: Исчезновение обоих видов.
- **Нетривиальная точка** $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$: Равновесие популяций.

3.1.2 Линеаризация и матрица Якоби

Матрица Якоби системы:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}.$$

Для тривиальной точки $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = \gamma$. Значит точка $(0, 0)$ — седло.

Для нетривиальной точки $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. Значит данная стационарная точка - центр — система сохраняет циклы.

4 Математические методы

4.1 Аналитическое решение

Для системы уравнений Лотки-Вольтерры:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad (4.1.2)$$

применено разделение переменных. Для этого уравнения преобразуются в отношение производных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta xy - \gamma y}{\alpha x - \beta xy} = \frac{y(\delta x - \gamma)}{x(\alpha - \beta y)}.$$

После разделения переменных:

$$\int \frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \int \frac{\delta x - \gamma}{x} dx,$$

интегрирование приводит к первому интегралу:

$$-\alpha \ln |y| + \beta y + \delta x - \gamma \ln |x| = C,$$

где C — константа, определяемая начальными условиями. Для параметров $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$:

$$-1 \ln |y| + 1y + 0.5x - 0.5 \ln |x| = C,$$

Это уравнение описывает замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим колебаниям популяций.

4.2 Численные методы

4.2.1 Метод Эйлера (явный, первого порядка)

Простейший метод для решения ОДУ:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n),$$

где h — шаг интегрирования, f — правая часть системы. Метод имеет локальную погрешность $O(h^2)$, но глобальную $O(h)$. Из недостатков: накопление ошибки при больших t и неустойчивость для жестких систем.

4.2.2 Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (модифицированный Эйлер)

Улучшает точность за счёт промежуточного шага:

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2.$$

Локальная погрешность $O(h^3)$, глобальная $O(h^2)$. Подходит для систем с умеренной нелинейностью.

4.2.3 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Наиболее распространённый метод для задач высокой точности:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(t_n, y_n), \\k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$

Локальная погрешность $O(h^5)$, глобальная $O(h^4)$. Обеспечивает высокую точность даже при больших интервалах моделирования.

4.2.4 Особенности реализации

- Для векторных систем как модель Лотки-Вольтерры методы применяются к каждому уравнению одновременно.
- Устойчивость методов исследовалось на различных временных отрезках с различным шагом интегрирования.
- Библиотека SymPy позволяет получить аналитическое решение нелинейной динамической системы в неявном виде из которого можно построить фазовый портрет $y(x)$, также с ней можно найти стационарные точки системы и определить их тип, решив характеристическое уравнение, но не позволяет найти и выявить зависимость изменения переменных x и y от времени t . Поэтому для интегрирования по времени необходимо воспользоваться методом `odeint` из библиотеки `scipy`.

5 Результаты работы методов

5.1 Фазовые портреты

Были построены фазовые портреты системы. Вокруг стационарной точки образуются предельные циклы. По графикам можно сразу заметить, что явный метод Эйлера очень быстро накапливает погрешность, теряет свою устойчивость и решение становится неточным.

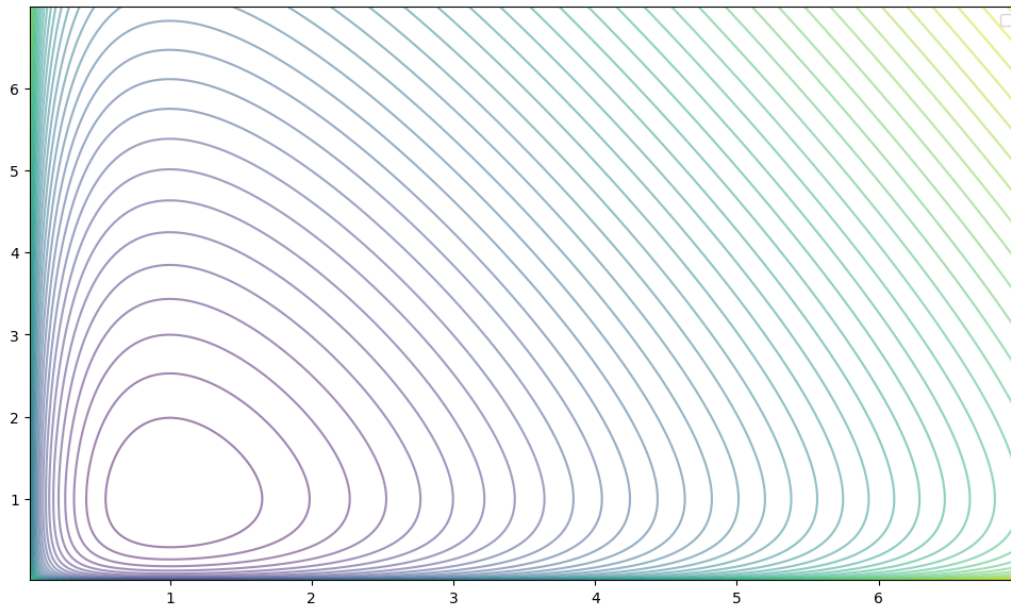


Рис. 1: Фазовый портрет аналитического решения.

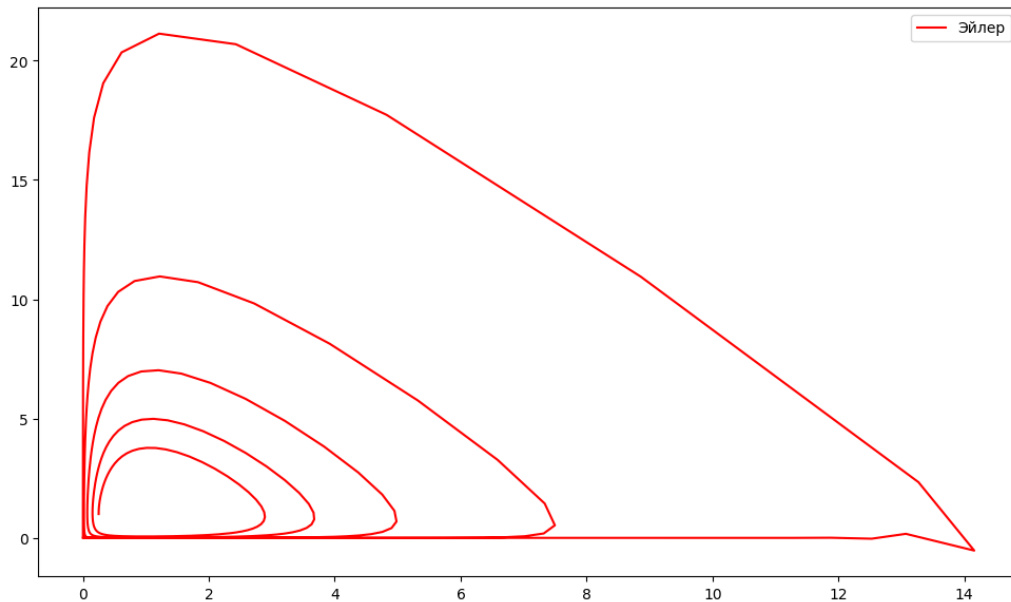


Рис. 2: Фазовый портрет численного решения методом Эйлера.

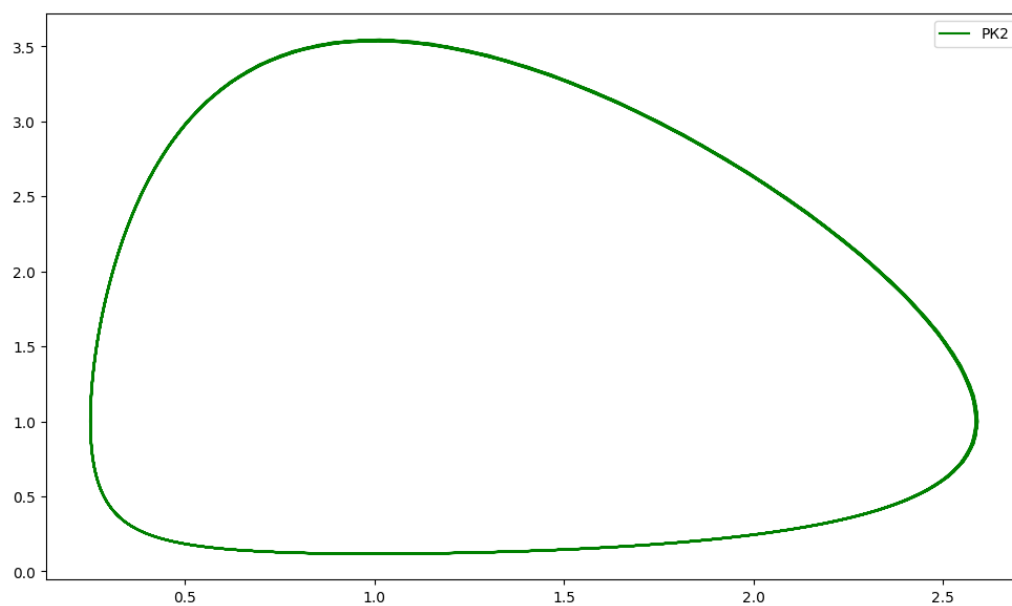


Рис. 3: Фазовый портрет численного решения методом Рунге-Кутты второго порядка.

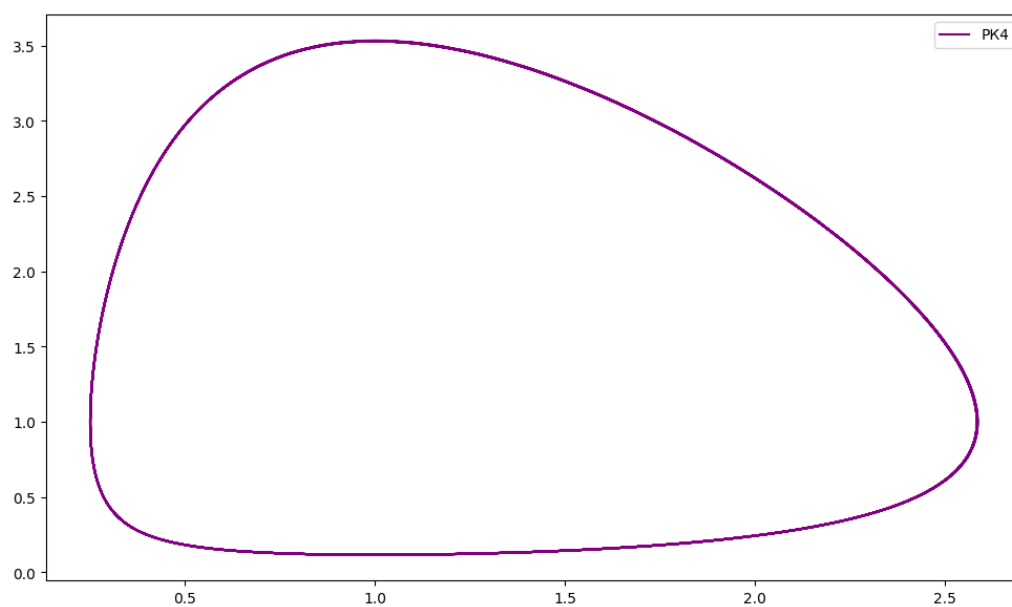


Рис. 4: Фазовый портрет численного решения методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

5.2 Динамика популяций со временем

Динамика популяций представляет из себя консервативные гармонические осцилляторы. Экспоненциальный рост у жертв происходит при полном отсутствии хищников, а экспоненциальная смертность происходит у хищников при отсутствии жертв.

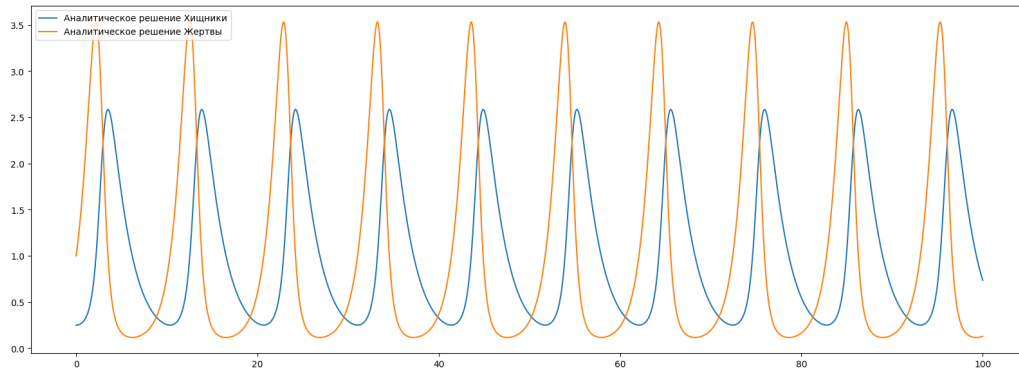


Рис. 5: Динамика популяций: аналитическое решение с помощью функции `odeint`.

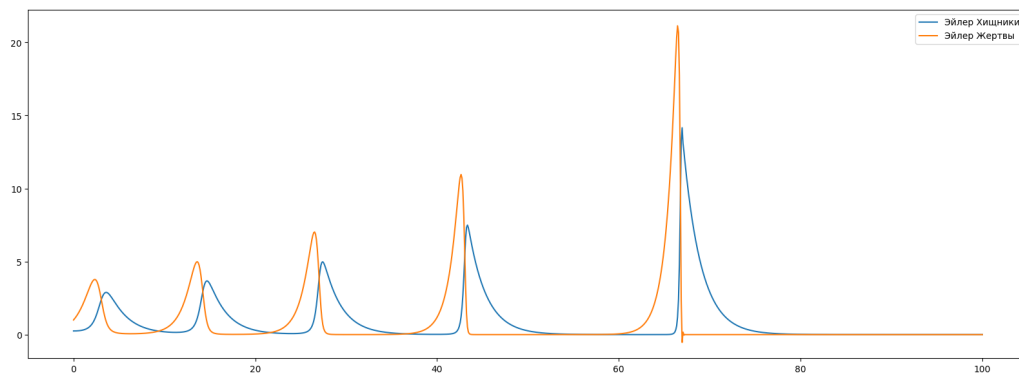


Рис. 6: Динамика популяций: численное решение методом Эйлера.

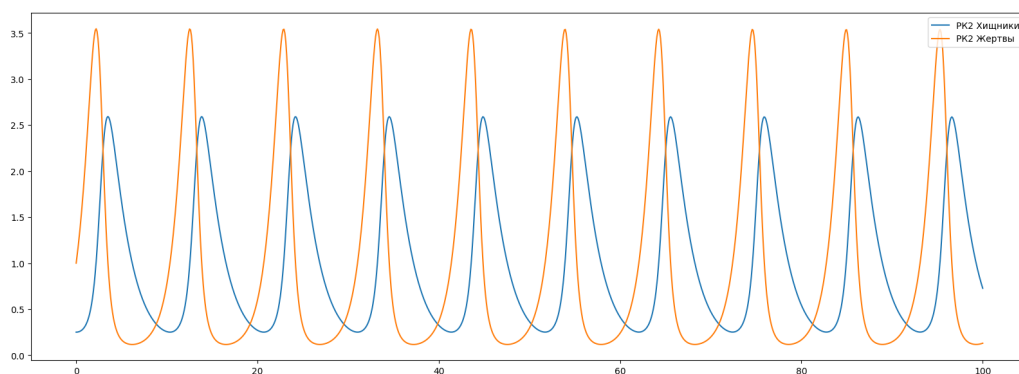


Рис. 7: Динамика популяций: численное решение методом Рунге-Кутты второго порядка.

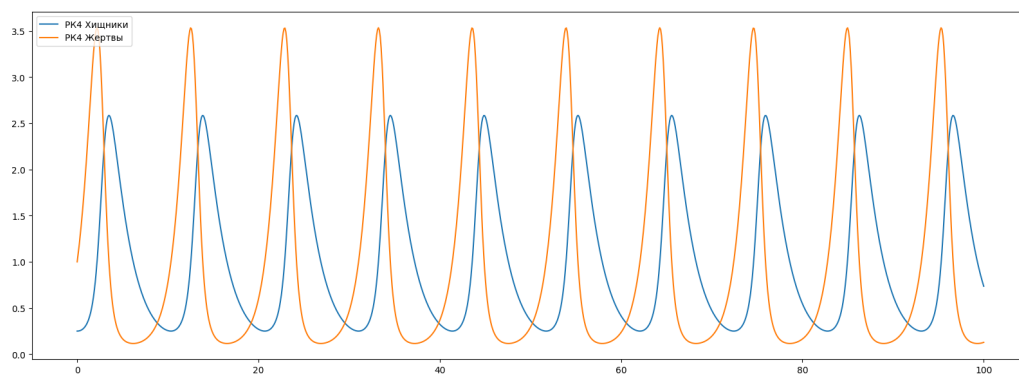


Рис. 8: Динамика популяций: численное решение методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

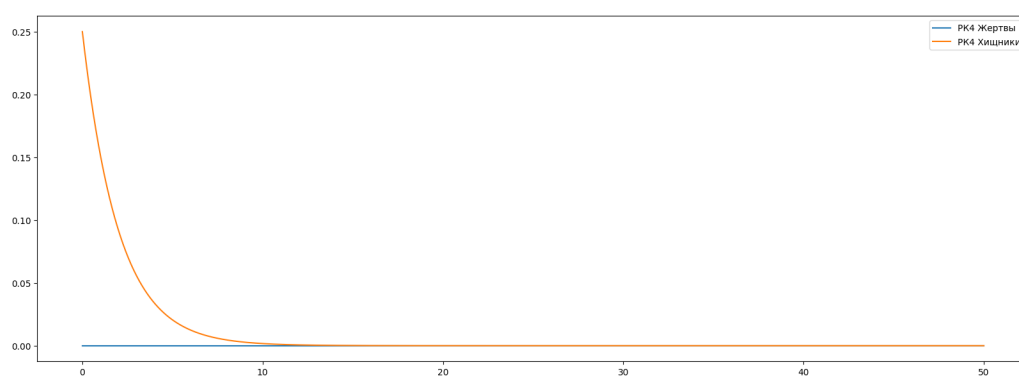


Рис. 9: Динамика популяций: смертность хищников при отсутствии жертв.

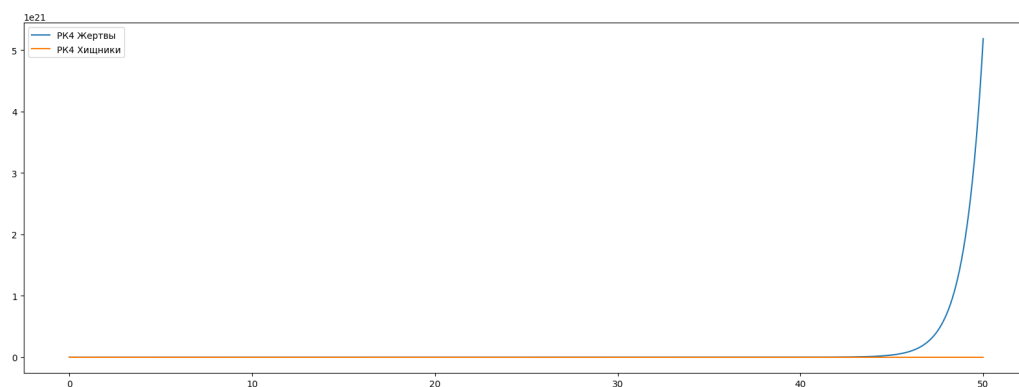


Рис. 10: Динамика популяций: рост популяции жертв при отсутствии хищников.

5.3 Устойчивость методов Рунге-Кутты второго и четвёртого порядка

Для исследования расхождения методов Рунге-Кутты второго и четвёртого порядка были построены следующие графики фазовых портретов и осцилляторов с увеличенным временем интегрирования. Как можно заметить, метод Рунге-Кутты 4-го порядка устойчивее чем Рунге-Кутты второго порядка

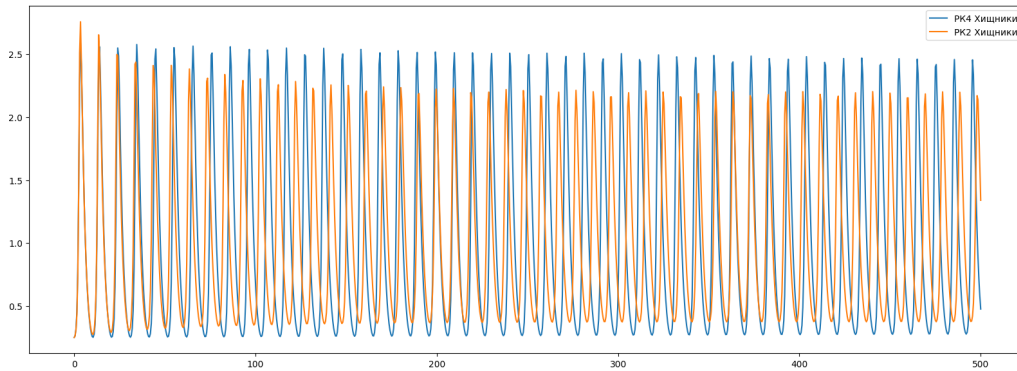


Рис. 11: Динамика популяций хищников методом Рунге-Кутты второго и четвёртого порядка.

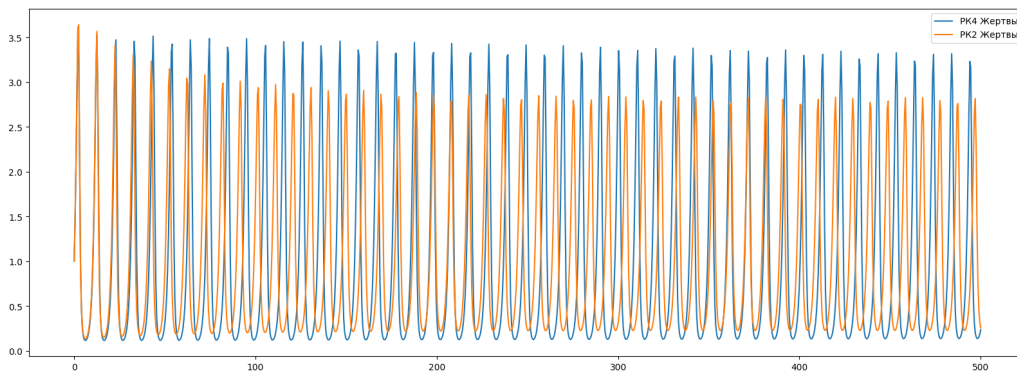


Рис. 12: Динамика популяций жертв методом Рунге-Кутты второго и четвёртого порядка.

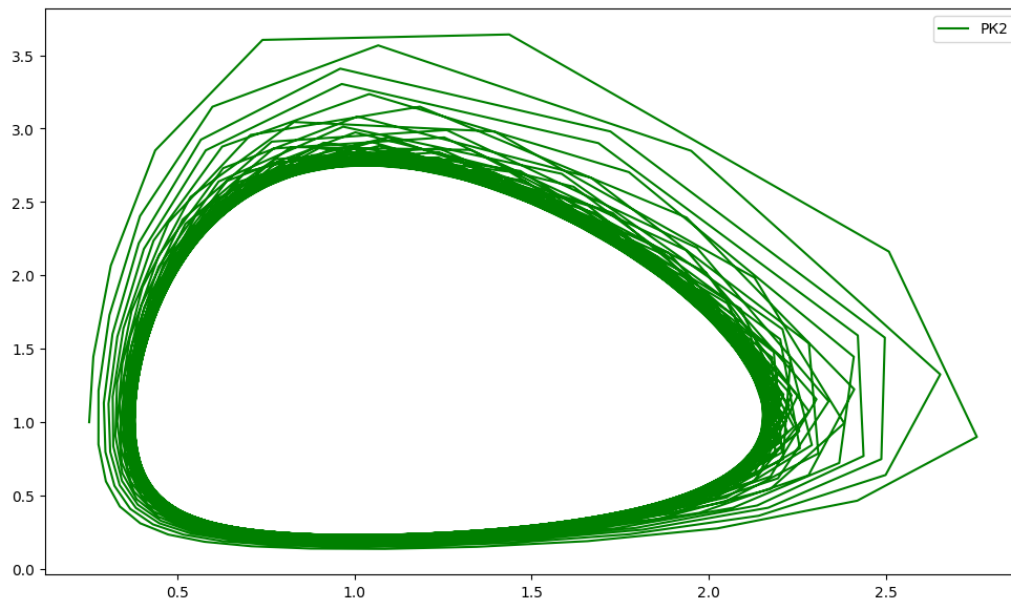


Рис. 13: Фазовый портрет построенный методом Рунге-Кутты второго порядка.

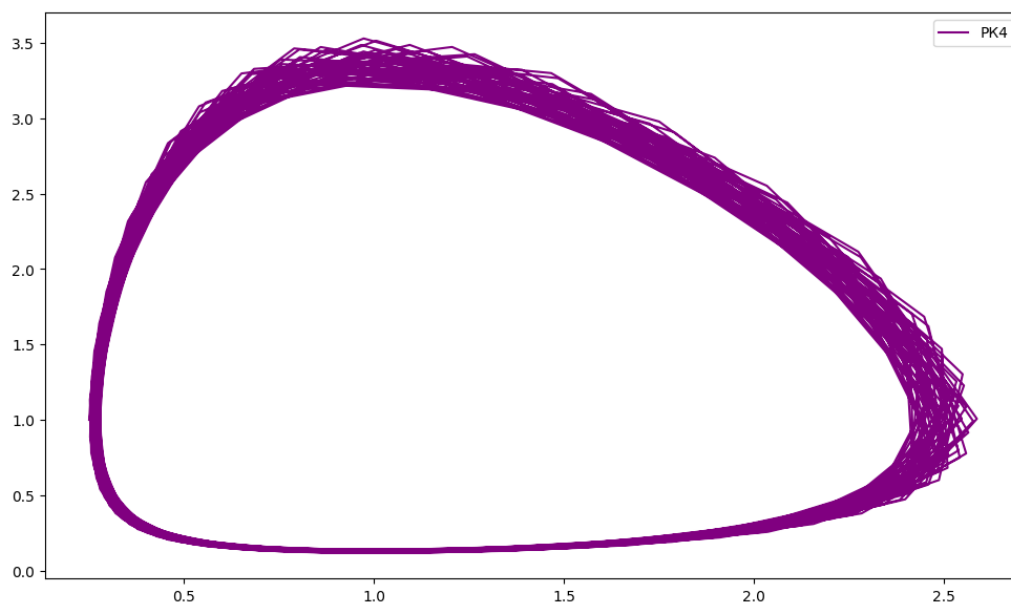


Рис. 14: Фазовый портрет построенный методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

- Метод Эйлера демонстрирует накопление ошибки при больших t .
- Методы Рунге-Кутты сохраняют периодичность, близки к аналитическому решению.
- Фазовые траектории образуют замкнутые кривые, соответствующие предельным циклам вокруг стационарной точки центр, что соответствует цикличности модели.
- При большом времени интегрирования метод Рунге-Кутты четвёртого порядка более устойчив чем метод Рунге-Кутты второго порядка.

6 Усложнённая модель Лотки-Вольтерры с внутривидовой конкуренцией

Рассмотрим модифицированную систему:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy - \epsilon x^2, \quad (6.0.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy - \zeta y^2, \quad (6.0.2)$$

где:

- ϵx^2 и ζy^2 — члены, описывающие внутривидовую конкуренцию (ограничение ресурсов),
- остальные параметры аналогичны классической модели.

6.1 Стационарные точки и их устойчивость

6.1.1 Нахождение стационарных точек

Приравнявая производные к нулю:

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta xy - \epsilon x^2 &= 0, \\ -\gamma y + \delta xy - \zeta y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решения:

- **Тривиальная точка** $(0, 0)$: Оба вида вымирают.
- **Точка выживания жертв** $(\frac{\alpha}{\epsilon}, 0)$: Хищники вымирают, жертвы достигают ёмкости среды.
- **Точка выживания хищников** $(0, -\frac{\gamma}{\zeta})$: Физически нереализуема при $\gamma, \zeta > 0$.
- **Нетривиальная точка** (x^*, y^*) : Решение системы:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\alpha\zeta + \beta\gamma}{\delta\beta + \epsilon\zeta}, \\ y^* &= \frac{\alpha\delta - \gamma\epsilon}{\delta\beta + \epsilon\zeta}. \end{aligned}$$

6.1.2 Линеаризация и анализ устойчивости

Матрица Якоби:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y - 2\epsilon x & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x - 2\zeta y \end{pmatrix}.$$

- **Точка** $(0, 0)$: Собственные значения: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\gamma$. *Седло* (неустойчиво).
- **Точка** $(\frac{\alpha}{\epsilon}, 0)$: Собственные значения: $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\gamma + \delta\frac{\alpha}{\epsilon}$. Устойчива при $\delta < \frac{\gamma\epsilon}{\alpha}$.
- **Нетривиальная точка** (x^*, y^*) . Чтобы определить ещё тип необходимо найти корни характеристического уравнения

6.2 Классификация стационарных точек

Для определения типа стационарной точки (x^*, y^*) анализируются собственные значения матрицы Якоби $J(x^*, y^*)$. Алгоритм классификации:

1. Вычисляются собственные значения λ_1, λ_2 из уравнения $\det(J - \lambda I) = 0$.
2. Анализируются действительная ($\Re(\lambda)$) и мнимая ($\Im(\lambda)$) части:
 - Если $\Im(\lambda_1) \neq 0$ или $\Im(\lambda_2) \neq 0$:
 - * $\Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) < 0$: **Устойчивый фокус**.
 - * $\Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) > 0$: **Неустойчивый фокус**.
 - * $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = 0$: **Центр** (нейтральная устойчивость).
 - Если $\Im(\lambda_1) = \Im(\lambda_2) = 0$:
 - * $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Седло**.
 - * $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: **Неустойчивый узел**.
 - * $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: **Устойчивый узел**.

6.3 Динамика системы

- **Фазовые траектории:** При добавлении дополнительного фактора, система переходит от предельного цикла к устойчивому фокусу. Осцилляторы в свою очередь постепенно затухают и приходят к состоянию равновесия. Пример: При $\epsilon = 0.03$, $\zeta = 0.03$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$.
- **Влияние внутривидовой конкуренции:** Члены ϵx^2 и ζy^2 оказывают существенное влияние на систему, из-за которой теряется цикличность системы и оба вида постепенно вымирают.

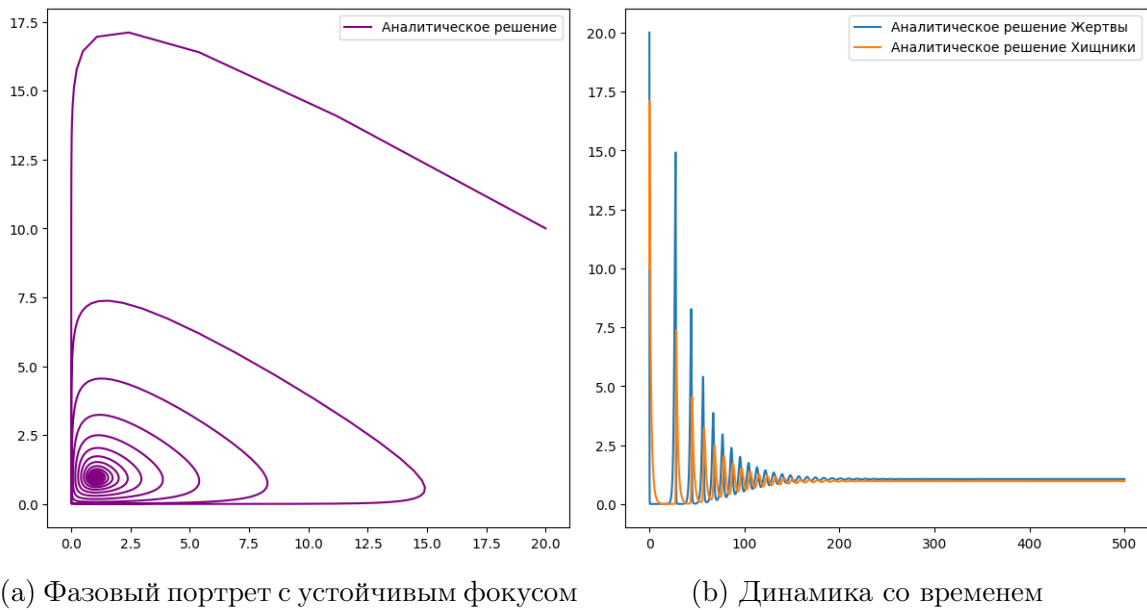


Рис. 15: Динамика усложнённой модели, когда система уходит в устойчивое состояние с постепенным вымиранием и хищников и жертв.

7 Заключение

В ходе выполнения работы проведено исследование классической и усложнённой моделей Лотки-Вольтерры методами аналитической и вычислительной математики.

1. Аналитическое решение:

- Для классической модели получен первый интеграл системы методом разделения переменных:

$$-\alpha \ln |y| + \beta y + \delta x - \gamma \ln |x| = C.$$

- Установлено, что фазовые траектории образуют замкнутые кривые, что подтверждает циклический характер взаимодействия хищников и жертв.

2. Численное моделирование:

- Реализованы методы Эйлера, Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядков. Показано, что:
 - Метод Эйлера демонстрирует большое накопление ошибки,
 - Метод РК4 сохраняет периодичность решений даже при большом времени интегрирования t .
- Глобальная погрешность методов уменьшается с ростом порядка: $O(h)$ для Эйлера, $O(h^4)$ для РК4.

3. Устойчивость системы:

- Для классической модели нетривиальная точка $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ является центром.
- В усложнённой модели с внутривидовой конкуренцией выявлены новые типы стационарных точек:
 - Устойчивый фокус при $\epsilon = 0.03$, $\zeta = 0.03$ (Рис. 15а),
 - Седло в тривиальной точке $(0, 0)$.

4. Влияние параметров:

- Члены внутривидовой конкуренции $(\epsilon x^2, \zeta y^2)$ оказывают сильное влияние на систему, устраняя цикличность роста популяций.