

Introdução aos Métodos dos Elementos Finitos (MAC 008)

Exercício 7

Estabilização do problema de advecção-difusão

Ophir Valiante Duarte Neto (201671025)

13 de novembro de 2021

Sumário

Sumário		1
1	Formulação do Problema de Advecção-Difusão	2
2	Aproximação Linear em Elementos Finitos	3
3	Estabilização em Diferenças Finitas	5
4	Obtenção da Difusividade Ótima	7
5	Estabilização e Soluções Nodalmente Exatas em Elementos Finitos	8
5.1	Consistent Streamline Upwind (Consistent SU)	8
5.2	Inconsistent Streamline Upwind (Inconsistent SU)	9
	REFERÊNCIAS	10
	ANEXO A – INTEGRAIS DA MATRIZ DO ELEMENTO	10
1	Formulação sem Estabilização	10
2	Consistent Streamline Upwind	11
3	Inconsistent Streamline Upwind	12

1 Formulação do Problema de Advecção-Difusão

Seja a seguinte equação diferencial que descreve um problema de advecção-difusão unidimensional:

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + \beta u' = 0 \\ u(0) = 0; u(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Este problema é descrito por um importante número adimensional, chamado **número de Peclet**. Ele é igual à razão entre a taxa de transferência por advecção e a taxa de transferência por condução de uma propriedade [Bergman et al.(1)]. Na formulação discreta, o número de Peclet da malha pode ser calculado da seguinte maneira:

$$Pe = \frac{\beta h}{2\epsilon} \quad (2)$$

Caso a relação $Pe > 1$ seja estabelecida, as soluções do problema discretizado em elementos finitos ou diferenças finitas apresentam oscilações, fato que não ocorre na solução analítica do problema. Estas soluções oscilantes possuem erro alto em relação à solução analítica, mostrando-se inadequadas como resposta ao problema. Devido a isto, deve-se estabilizar o problema discretizado, de maneira a eliminar estas oscilações. Pode-se, ainda, realizar esta discretização otimizando-se o número de Peclet, de maneira a obter soluções nodalmente exatas, que são mais precisas.

Calculando a solução geral da EDO homogênea deste problema, vem:

$$-\epsilon u'' + \beta u' = 0$$

$$u = e^{\lambda x}; u' = \lambda e^{\lambda x}; u'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$-\epsilon \lambda^2 e^{\lambda x} + \beta \lambda e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda(-\epsilon \lambda + \beta) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \text{ ou } \boxed{\lambda_2 = \frac{\beta}{\epsilon}}$$

$$u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\boxed{u = C_1 + C_2 e^{\frac{\beta}{\epsilon} x}} \quad (3)$$

Aplicando as condições de contorno, encontramos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1 = C_1 + C_2 e^{\frac{\beta}{\epsilon}} \end{cases}$$

De onde concluímos que a solução particular deste problema é igual a:

$$u(x) = \frac{e^{\frac{\beta}{\epsilon} x} - 1}{e^{\frac{\beta}{\epsilon}} - 1} \quad (4)$$

2 Aproximação Linear em Elementos Finitos

Discretizaremos a EDO do problema em elementos finitos utilizando funções chapéu lineares (Figura 1). Reescrevendo o problema na forma variacional, teremos:

$$\begin{aligned} -\epsilon u'' + \beta u' &= 0 \\ -\epsilon(u'', v) + \beta(u', v) &= 0 \\ \epsilon(u', v') + \beta(u', v) &= u'v|_0^h \\ \epsilon(u', v') + \beta(u', v) &= 0 \end{aligned}$$

Agora seja o domínio de um elemento descrito pelas funções lineares:

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 - \frac{x}{h} \\ \phi_1' = -\frac{1}{h} \\ \phi_2 = \frac{x}{h} \\ \phi_2' = \frac{1}{h} \end{cases}$$

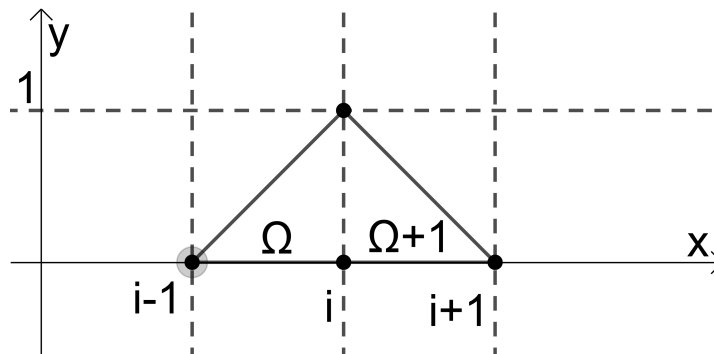


Figura 1 – Funções chapéus lineares.

Aproximando a função u com ϕ_1 e ϕ_2 , vem:

$$u_h = u_{h1}\phi_1 + u_{h2}\phi_2$$

O que nos fornece o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} u_{h1}[\epsilon(\phi_1', \phi_1') + \beta(\phi_1, \phi_1')] + u_{h2}[\epsilon(\phi_1', \phi_2') + \beta(\phi_1, \phi_2')] = 0 \\ u_{h1}[\epsilon(\phi_2', \phi_1') + \beta(\phi_2, \phi_1')] + u_{h2}[\epsilon(\phi_2', \phi_2') + \beta(\phi_2, \phi_2')] = 0 \end{cases}$$

Dele, tiramos a matriz do elemento:

$$\underline{a} = \epsilon \begin{bmatrix} (\phi'_1, \phi'_1) & (\phi'_1, \phi'_2) \\ (\phi'_2, \phi'_1) & (\phi'_2, \phi'_2) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi'_1) & (\phi_1, \phi'_2) \\ (\phi_2, \phi'_1) & (\phi_2, \phi'_2) \end{bmatrix} = \epsilon \underline{A} + \beta \underline{B}$$

As integrais realizadas na matriz do elemento podem ser encontradas no Anexo A. Retiramos delas o seguinte resultado:

$$\underline{a} = \frac{\epsilon}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A matriz global advinda da montagem de elementos descritos por esta formulação é uma matriz tridigonal. Podemos escrever a equação final do problema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & A & B & C & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6)$$

Podemos montar a seguinte equação utilizando os nós $i-1$, i e $i+1$ e os valores A , B e C da linha i da matriz:

$$Au_{i-1} + Bu_i + Cu_{i+1} = 0 \quad (7)$$

Abrindo os valores de A , B e C , vem:

$$\left(-\frac{\epsilon}{h} - \frac{\beta}{2}\right)u_{i-1} + \frac{2\epsilon}{h}u_i + \left(-\frac{\epsilon}{h} + \frac{\beta}{2}\right)u_{i+1} = 0$$

$$\frac{-2\epsilon - \beta h}{2h}u_{i-1} + 2u_i - \frac{-2\epsilon + \beta h}{2h}u_{i+1} = 0$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{h}{\epsilon}$, simplificamos a expressão para a seguinte forma:

$$\left(\frac{\beta h}{2\epsilon} - 1\right)u_{i+1} + 2u_i - \left(\frac{\beta h}{2\epsilon} + 1\right)u_{i-1} = 0$$

$$(Pe - 1)u_{i+1} + 2u_i - (Pe + 1)u_{i-1} = 0 \quad (8)$$

Supondo que u_i é uma função exponencial da forma $u_i = \rho^i$, existe uma função $\rho \neq 0$ tal que:

$$\begin{cases} u_i = \rho^i \\ u_{i+1} = \rho \rho^i = \rho^{i+1} \\ u_{i-1} = \frac{\rho^i}{\rho} = \rho^{i-1} \end{cases}$$

Assim, a Equação 8 toma a seguinte forma:

$$(Pe - 1)\rho^{i+1} + 2\rho^i - (Pe + 1)\rho^{i-1} = 0$$

$$\rho^{i-1}[(Pe - 1)\rho^2 + 2\rho - (Pe + 1)] = 0$$

$$(Pe - 1)\rho^2 + 2\rho - (Pe + 1) = 0 \quad (9)$$

A Equação 9 é uma equação polinomial de grau 2. Podemos calcular suas raízes através da fórmula de Bháskara:

$$\rho_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + Pe^2 - 1}}{Pe - 1}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1+Pe}{1-Pe} \\ \rho_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, podemos escrever a solução geral que nos fornece o valor de u_i em função de i :

$$u_i = A_2 + A_1\rho^i \quad (10)$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$\begin{cases} A_2 = -A_1 \\ A_1 = [1 - (\frac{1+Pe}{1-Pe})^M]^{-1} \end{cases}$$

Sendo M a ordem do último nó à direita da malha.

Isto nos fornece a seguinte expressão para o valor de u_i :

$$u_i = \frac{1 - (\frac{1+Pe}{1-Pe})^i}{1 - (\frac{1+Pe}{1-Pe})^M}, i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

Podemos perceber, na Equação 11, que para $Pe > 1$, o termo $-(\frac{1+Pe}{1-Pe})$ fica negativo, fazendo com que o valor de u_i mude de sinal (de positivo para negativo, e vice versa) ao valor de i alternar entre número par e número ímpar. Isto explicita claramente o surgimento de instabilidades no problema quando o número de Peclet assume valor maior que 1.

3 Estabilização em Diferenças Finitas

Discretizando a equação diferencial através do método das diferenças finitas, temos:

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + \beta u' = 0 \\ u_i'' \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \\ u_i' \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \end{cases}$$

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2) = 0 \quad (12)$$

Que é uma equação de ordem $o(h^2)$. Isolando os termos u_{i+1} , u_i e u_{i-1} , temos:

$$\left(-\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)u_{i+1} + \frac{2\epsilon}{h^2}u_i - \left(\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)u_{i-1} = 0$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{h^2}{\epsilon}$, vem:

$$\left(\frac{\beta h}{2\epsilon} - 1\right)u_{i+1} + 2u_i - \left(\frac{\beta h}{2\epsilon} + 1\right)u_{i-1} = 0$$

$$(Pe - 1)u_{i+1} + 2u_i - (Pe + 1)u_{i-1} = 0$$

Que é o mesmo resultado obtido na Equação 8. Portanto, nesta formulação convencional em diferenças finitas, também teremos solução instável para $Pe > 1$. A fim de estabilizarmos a Equação 12, utilizaremos a seguinte identidade:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (13)$$

Aplicando esta identidade na Equação 12, obtemos a seguinte discretização, com ordem reduzida de $o(h^2)$ a $o(h)$:

$$-\left(\epsilon + \frac{\beta h}{2}\right) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h) = 0 \quad (14)$$

Que é equivalente à seguinte equação diferencial:

$$\boxed{-\left(\epsilon + \frac{\beta h}{2}\right)u'' + \beta u' = 0} \quad (15)$$

Assim, teremos o problema original P , descrito pela Equação 1, e o problema novo P^n , descrito pela Equação 15. Ambos problemas possuem as mesmas soluções ($Sol(P) \equiv Sol(P^n)$).

Ao novo termo $\frac{\beta h}{2}$, somado à difusividade ϵ , damos o nome de **difusividade artificial** ou de **difusividade numérica** [Sert(2)]. Ao reformular a discretização com ela, estaremos resolvendo um novo problema com maior difusividade, o que reduz estas oscilações. Todavia, há um custo: A formulação nova é excessivamente dissipativa. Calculando o número de Peclet de P^n , vemos que ele é sempre menor que 1:

$$Pe^n = \frac{\beta h}{\epsilon + \frac{\beta h}{2}} < 1 \quad (16)$$

A solução do problema descrito pela Equação 14 não conterá oscilações, aproximando-se mais da solução analítica.

4 Obtenção da Difusividade Ótima

Para que possamos obter soluções aproximadas que sejam nodalmente exatas, devemos determinar a **difusividade ótima** do problema a ser resolvido. Trata-se de uma difusividade artificial que, somada à difusividade do problema, nos permitirá obter essas soluções. Elas fornecem resultados mais precisos e podem ser determinadas a partir de um número de Peclet ótimo Pe^o . Ao utilizar este Peclet ótimo na Equação 8, esta fornecerá soluções exatas para cada nó i considerado. A nova equação toma forma:

$$(Pe^o - 1)u_{i+1} + 2u_i - (Pe^o + 1)u_{i-1} = 0 \quad (17)$$

Damos início à estes cálculos igualando a solução geral analítica de $u(x)$ com a solução geral discreta de u_i . Ou seja, igualaremos as Equações 3 e 10:

$$C_1 + C_2 \cdot \exp\left(\frac{\beta}{\epsilon}x\right) = A_2 + A_1\left(\frac{1 + Pe^o}{1 - Pe^o}\right)^i$$

Fazendo $x = x_i = ih$, conseguimos calcular o valor de u_i através da solução analítica da Equação 3:

$$u_i = C_1 + C_2 \cdot \exp\left(\frac{\beta}{\epsilon} \cdot ih\right) = C_1 + C_2 \cdot \left[\exp\left(\frac{\beta h}{\epsilon}\right)\right]^i$$

Com isto, percebemos claramente as semelhanças das duas soluções:

$$C_1 + C_2 \cdot \left[\exp\left(\frac{\beta h}{\epsilon}\right)\right]^i = A_2 + A_1\left(\frac{1 + Pe^o}{1 - Pe^o}\right)^i$$

Ou seja, $A_2 = C_1$, $A_1 = C_2$ e $\left[\exp\left(\frac{\beta h}{\epsilon}\right)\right]^i = \left(\frac{1 + Pe^o}{1 - Pe^o}\right)^i$. Logo:

$$\frac{1 + Pe^o}{1 - Pe^o} = \exp\left(\frac{\beta h}{\epsilon}\right) \quad (18)$$

Isolando e calculando Pe^o , obtemos a seguinte expressão:

$$Pe^o = tgh(Pe) \quad (19)$$

Onde $Pe = \frac{\beta h}{2\epsilon}$ é o número de Peclet original de nosso problema.

Operacionalmente, podemos multiplicar a difusividade artificial $\frac{\beta h}{2}$ da Equação 22 por um fator ζ , de maneira a encontramos soluções nodalmente exatas quando discretizarmos a mesma. Reescrevendo-a para este fim, ela fica assim:

$$-(\epsilon + \zeta \frac{\beta h}{2})u'' + \beta u' = 0 \quad (20)$$

Calculando o valor de ζ com base nas Equações 20 e 19, temos que:

$$\zeta = \cotgh(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (21)$$

5 Estabilização e Soluções Nodalmente Exatas em Elementos Finitos

As soluções com aproximações lineares feitas anteriormente partem de uma **formulação de Galerkin**. Essencialmente, o método de Galerkin utiliza a família de funções que aproximam u_h como pesos v_h . A fim de estabilizarmos a discretização em elementos finitos do problema, tal qual feito em diferenças finitas, adotaremos uma **formulação de Petrov-Galerkin**. Este método utiliza uma família de funções distinta da utilizada para aproximar u_h como pesos v_h .

Há duas maneiras de se realizar a estabilização: **Consistent Streamline Upwind (Consistent SU)** e **Inconsistent Streamline Upwind (Inconsistent SU)**. A diferença entre as duas se dá pela escolha de funções peso. Numericamente, porém, ambas fornecem resultados idênticos [Sert(2)].

5.1 Consistent Streamline Upwind (Consistent SU)

Adotaremos as seguintes funções na discretização de u_h (Figura 2), onde $\xi = 2\frac{x}{h} - 1$ é uma substituição de variáveis que nos permite adimensionalizar o domínio do elemento. As integrais feitas no domínio em função de ξ são sempre realizadas de -1 a $+1$:

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 - \frac{x}{h} = \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{d\phi_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \\ \phi_2 = \frac{x}{h} = \frac{\xi+1}{2} \\ \frac{d\phi_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E as seguintes funções peso v_h :

$$\begin{cases} \phi_1^* = \phi_1 - \frac{3}{4}\zeta(1 - \xi^2) = \frac{2-2\xi-3\zeta+3\zeta\xi^2}{4} \\ \frac{d\phi_1^*}{d\xi} = \frac{6\zeta\xi-2}{4} \\ \phi_2^* = \phi_2 + \frac{3}{4}\zeta(1 - \xi^2) = \frac{2+2\xi+3\zeta-3\zeta\xi^2}{4} \\ \frac{d\phi_2^*}{d\xi} = \frac{2-6\zeta\xi}{4} \end{cases}$$

Onde ζ é uma constante que controla a "intensidade" de estabilização upwind desejada. Ou seja, o quanto aumentaremos a difusividade do problema, somando a ela nossa difusividade artificial. Para $\zeta = 0$, não há estabilização, e teremos a formulação de Galerkin anterior, que oscila. Para $\zeta = 1$, a discretização é estabilizada. Finalmente, para $\zeta = \cotgh(Pe) - \frac{1}{Pe}$, teremos uma discretização que fornecerá soluções nodalmente exatas.

Discretizando a forma variacional do problema por estas novas funções, obteremos o seguinte sistema linear:

$$\underline{a} \approx \epsilon \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi_1') & (\phi_1^*, \phi_2') \\ (\phi_2^*, \phi_1') & (\phi_2^*, \phi_2') \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi_1') & (\phi_1^*, \phi_2') \\ (\phi_2^*, \phi_1') & (\phi_2^*, \phi_2') \end{bmatrix} = \underline{\epsilon C} + \beta \underline{D}$$

Como estamos realizando uma troca de variáveis nas integrais da matriz do elemento, de x para ξ , devemos ter o cuidado de reescrever as integrais corretamente. Assim, adotaremos as seguintes identidades:

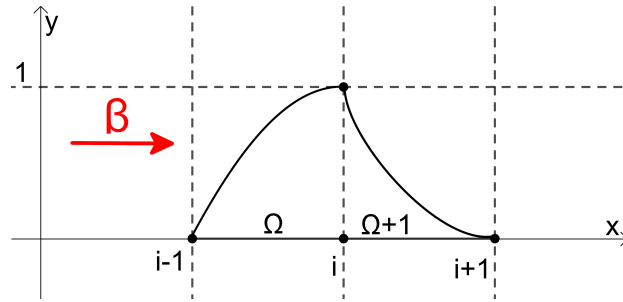


Figura 2 – Forma das funções peso para a formulação Consistent SU.

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h} \\ \int_0^h \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{dw}{d\xi} d\xi \\ \int_0^h \frac{dz}{dx} \cdot w dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \cdot w \cdot \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{d\xi} \cdot w d\xi \end{cases}$$

O desenvolvimento das integrais pode ser encontrado no Anexo A. Terminadas elas, obtemos a seguinte matriz para o elemento:

$$a \approx \frac{\epsilon}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta\zeta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

5.2 Inconsistent Streamline Upwind (Inconsistent SU)

Adotaremos, conforme anteriormente, as seguintes funções na discretização de u_h :

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{d\phi_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \\ \phi_2 = \frac{\xi+1}{2} \\ \frac{d\phi_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para as funções peso v_h , adotaremos a seguinte formulação (Figura 3):

$$\phi_i^* = \phi_i + \zeta \frac{d\phi_i}{d\xi}$$

Para as funções lineares ϕ_i escolhidas, isto significa que as derivadas $\frac{d\phi_1^*}{d\xi}$ e $\frac{d\phi_2^*}{d\xi}$ são exatamente as mesmas que $\frac{d\phi_1}{d\xi}$ e $\frac{d\phi_2}{d\xi}$.

$$\begin{cases} \phi_1^* = \phi_1 - \frac{\zeta}{2} = \frac{1-\xi-\zeta}{2} \\ \frac{d\phi_1^*}{d\xi} = -\frac{1}{2} \\ \phi_2^* = \phi_2 + \frac{\zeta}{2} = \frac{1+\xi+\zeta}{2} \\ \frac{d\phi_2^*}{d\xi} = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

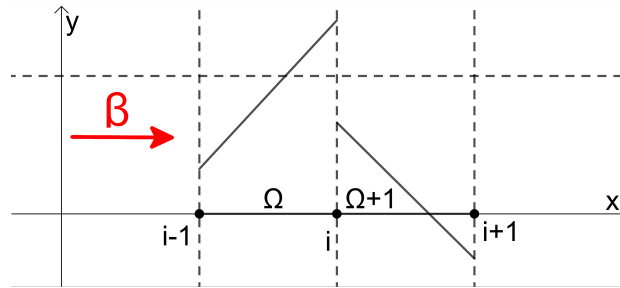


Figura 3 – Forma das funções peso para a formulação Inconsistent SU para aproximação linear.

Nesta formulação, ξ e ζ desempenham o mesmo papel que na formulação anterior. Ou seja, ξ é uma substituição de variáveis para facilitar a integração das funções e ζ é um coeficiente que determina a "intensidade" de estabilização utilizada. Desta maneira, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\underline{a} \approx \epsilon \begin{bmatrix} (\phi_1', \phi_1') & (\phi_1', \phi_2') \\ (\phi_2', \phi_1') & (\phi_2', \phi_2') \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi_1') & (\phi_1^*, \phi_2') \\ (\phi_2^*, \phi_1') & (\phi_2^*, \phi_2') \end{bmatrix} = \epsilon \underline{\underline{E}} + \beta \underline{\underline{F}}$$

Realizadas as integrais, encontradas no Anexo A, obtemos a mesma matriz de elemento que a formulação anterior, descrita na Equação 22.

Referências

- 1 BERGMAN, T. L. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. [S.l.]: LTC, 2008.
- 2 SERT, C. *Petrov-Galerkin Formulations for Advection Diffusion Equation*. [Online; acessado em 16 de Novembro de 2019]. Disponível em: <<http://users.metu.edu.tr/csert/me582/ME582%20Ch%2006.pdf>>.

ANEXO A – Integrais da Matriz do Elemento

1 Formulação sem Estabilização

Temos que a matriz \underline{a} do elemento é igual a:

$$\underline{a} = \epsilon \begin{bmatrix} (\phi_1', \phi_1') & (\phi_1', \phi_2') \\ (\phi_2', \phi_1') & (\phi_2', \phi_2') \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1') & (\phi_1, \phi_2') \\ (\phi_2, \phi_1') & (\phi_2, \phi_2') \end{bmatrix} = \epsilon \underline{\underline{A}} + \beta \underline{\underline{B}}$$

• $\underline{\underline{A}}$:

- $(\phi_1', \phi_1') = \int_0^h \phi_1' \phi_1' dx = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h}$
- $(\phi_1', \phi_2') = \int_0^h \phi_1' \phi_2' dx = \int_0^h -\frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h}$
- $(\phi_2', \phi_1') = (\phi_1', \phi_2') = -\frac{1}{h}$

$$- (\phi'_2, \phi'_2) = \int_0^h \phi'_2 \phi'_2 dx = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h}$$

• B_{\approx} :

$$- (\phi_1, \phi'_1) = \int_0^h \phi'_1 \phi_1 dx = \int_0^h -\frac{1}{h} + \frac{x}{h^2} dx = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$- (\phi_1, \phi'_2) = \int_0^h \phi'_2 \phi_1 dx = \int_0^h \frac{1}{h} - \frac{x}{h^2} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$- (\phi_2, \phi'_1) = \int_0^h \phi'_1 \phi_2 dx = \int_0^h -\frac{x}{h^2} dx = -\frac{1}{2}$$

$$- (\phi_2, \phi'_2) = \int_0^h \phi'_2 \phi_2 dx = \int_0^h \frac{x}{h^2} dx = \frac{1}{2}$$

Logo, temos que:

$$\bullet A_{\approx} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet B_{\approx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Consistent Streamline Upwind

Temos que a matriz a_{\approx} do elemento é igual a:

$$a_{\approx} = \epsilon \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi'_1) & (\phi_1^*, \phi'_2) \\ (\phi_2^*, \phi'_1) & (\phi_2^*, \phi'_2) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi'_1) & (\phi_1^*, \phi'_2) \\ (\phi_2^*, \phi'_1) & (\phi_2^*, \phi'_2) \end{bmatrix} = \epsilon C_{\approx} + \beta D_{\approx}$$

• C_{\approx} :

$$- (\phi_1^*, \phi'_1) = \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{6\zeta\xi-2}{4} \cdot \frac{d\xi}{dx} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{3\zeta\xi^2-2\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{h} \cdot (-1) = \frac{1}{h}$$

$$- (\phi_1^*, \phi'_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{6\zeta\xi-2}{4} \cdot \frac{d\xi}{dx} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{3\zeta\xi^2-2\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{h} \cdot (-1) = -\frac{1}{h}$$

$$- (\phi_2^*, \phi'_1) = \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{-6\zeta\xi+2}{4} \cdot \frac{d\xi}{dx} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{-3\zeta\xi^2+2\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{h} \cdot (1) = -\frac{1}{h}$$

$$- (\phi_2^*, \phi'_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{-6\zeta\xi+2}{4} \cdot \frac{d\xi}{dx} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{-3\zeta\xi^2+2\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{h} \cdot (1) = \frac{1}{h}$$

• D_{\approx} :

$$- (\phi_1^*, \phi'_1) = \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2-2\xi-3\zeta+3\zeta\xi^2}{4} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2-3\zeta\xi-\zeta\xi^3}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{2} \cdot (1-\zeta) = \frac{-1+\zeta}{2}$$

$$- (\phi_1^*, \phi'_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{2-2\xi-3\zeta+3\zeta\xi^2}{4} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2-3\zeta\xi-\zeta\xi^3}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \cdot (1-\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}$$

$$- (\phi_2^*, \phi'_1) = \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2+2\xi+3\zeta-3\zeta\xi^2}{4} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2+3\zeta\xi-\zeta\xi^3}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{2} \cdot (1+\zeta) = \frac{-1-\zeta}{2}$$

$$- (\phi_2^*, \phi'_2) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2\xi+3\zeta-3\zeta\xi^2}{4} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2+3\zeta\xi-\zeta\xi^3}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \cdot (1+\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}$$

Logo, temos que:

$$- C_{\approx} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- D_{\approx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Inconsistent Streamline Upwind

Temos que a matriz \underline{a} do elemento é igual a:

$$\underline{a} = \epsilon \begin{bmatrix} (\phi_1^{*'}, \phi_1') & (\phi_1^{*'}, \phi_2') \\ (\phi_2^{*'}, \phi_1') & (\phi_2^{*'}, \phi_2') \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi_1^*, \phi_1') & (\phi_1^*, \phi_2') \\ (\phi_2^*, \phi_1') & (\phi_2^*, \phi_2') \end{bmatrix} = \epsilon \underline{E} + \beta \underline{F}$$

Não há necessidade de se realizar as integrais da matriz \underline{E} . Como $\phi_i^{*'} = \phi_i'$, temos que $\underline{A} = \underline{E}$, sendo \underline{A} a matriz do termo difusivo da formulação sem estabilização. Assim, basta determinarmos \underline{F} :

$$\begin{aligned} - (\phi_1^*, \phi_1') &= \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\xi-\zeta}{2} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi-\xi^2-2\zeta\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{2} \cdot (1-\zeta) = \frac{-1+\zeta}{2} \\ - (\phi_1^*, \phi_2') &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\xi-\zeta}{2} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi-\xi^2-2\zeta\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \cdot (1-\zeta) = \frac{1-\zeta}{2} \\ - (\phi_2^*, \phi_1') &= \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+\xi+\zeta}{2} d\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2+2\zeta\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{2} \cdot (1+\zeta) = \frac{-1-\zeta}{2} \\ - (\phi_2^*, \phi_2') &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\xi+\zeta}{2} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\xi+\xi^2+2\zeta\xi}{4} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \cdot (1+\zeta) = \frac{1+\zeta}{2} \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} - \underline{E} &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ - \underline{F} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$