HISTORIA MATHEMATICA **24** (1997), 441–444
ARTICLE NO. HM972170

NOTE

Zur Interpretation der Gaußschen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln

Heiner Lichtenberg*

Bundesministerium der Finanzen, Referat für Informationstechnik in der Haushaltsabteilung, Postfach 1308, D-53003 Bonn, Deutschland

Verschiedene Autoren nach Gauß haben versucht,
gerade diese beiden Anomalien durch ziemlich umständliche
Operationen aus der Welt zu schaffen. . . .
Hans-Joachim Felber [3, 32]

In this paper, I present a revised version of Gauss's Easter formula, which is clearer than the original Easter formula and in which certain exceptions are eliminated. I also describe a method for proving calendar algorithms. © 1997 Academic Press

Die Gaußsche Osterformel wird von einem internen Fehler befreit. Dadurch können die viel kritisierten Ausnahmeregeln entfallen. Es wird eine umgebaute Osterformel angegeben, die besser lesbar und verstehbar ist als die ursprüngliche Gaußsche Osterformel. Es wird eine Beweismethode für Kalenderalgorithmen mitgeteilt. © 1997 Academic Press

È stata rielaborata la formula di Gauss per il calcolo della data pasquale così da rendere superflue le eccezioni. È stato proposto un nuovo concetto di tale formula che risulta meglio leggibile ed intellegibile dell'originale formula di Gauss. È stato descritto un metodo per provare gli algoritmi del calendario. © 1997 Academic Press

MSC 1991 subject classifications: 01A40, 85–03, 85A04.
Key Words: Easter formula; Gauss; calendar algorithms.

Die Gaußsche Osterformel bildet in der Fassung, wie sie von Gauß 1800 veröffentlicht [5] und 1816 hinsichtlich der säkularen Mondschaltung korrigiert wurde [6], einen im Ergebnis korrekten Kalenderalgorithmus.—Was heißt das?—Offenbar dieses: es gibt kein Kalenderjahr X, für welches die Gaußsche Osterformel ein anderes Osterdatum liefert als der von Clavius 1595 veröffentlichte Algorithmus [2].

Diese Aussage wird gelegentlich bestritten, so vor noch nicht langer Zeit in dieser Zeitschrift mit folgenden Worten: "Die von Gauß als 2. Ausnahme gekennzeichnete Regel, die unter bestimmten Bedingungen den möglichen Ostertermin 25. April auf den 18. April zurückverlegt, ist in ihrer ersten Ausformulierung nicht zutreffend . . ." [1, 257]. Da Gauß keinen Beweis für die nach ihm benannte Osterformel gab, bleiben Fehlaussagen wie diese meist unwidersprochen. Ich werde also zunächst

* E-mail: lich2718@bmfgrs3.bmf.bund400.de.

eine Beweismethode für Kalenderalgorithmen, speziell für die Gaußsche Osterformel, angeben. Die angekündigte Beweismethode benutzt die Periodizität des Claviusschen Algorithmus [8].

Die identische Wirkung zweier auf den ganzen Zahlen definierter periodischer Funktionen kann dadurch festgestellt werden, daß man von ihnen nachweist:

1. sie haben eine übereinstimmende Periode;
2. in einem Elementarintervall von so vielen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, wie die Periode besagt, stimmen die Funktionswerte überein.

Sowohl für den Claviusschen Algorithmus wie für die Gaußsche Osterformel besteht eine Periode von 5 700 000 Kalenderjahren. Für die Gaußsche Osterformel kann man sich davon durch Einsetzen von $X + 5\,700\,000$ anstelle von X ohne weiteres überzeugen. Für den Claviusschen Algorithmus ist eine entsprechende Überlegung ebenfalls durchführbar.

Die Periode bietet zusammen mit der Ganzzahligkeit den großen Vorteil, daß das zunächst unendliche Problem durch sie in ein endliches Problem überführt wird, welches man zur Lösung einem automatischen Rechner übertragen kann. Mag diese Methode auch mathematisch als phantasielos, gar als primitiv erscheinen, so ist sie doch vollgültig, vorausgesetzt, daß das Prüfprogramm fehlerfrei ist.

Der Claviussche Algorithmus liegt programmiert vor [7]. Die Überprüfung der Gaußschen Osterformel in der eingangs genannten Fassung ergab in einem Elementarintervall keine Abweichung vom Claviusschen Algorithmus. Mithin ist sie ein im Ergebnis korrekter Kalenderalgorithmus.

Dieses erfreuliche Ergebnis besagt nun nicht, daß die Gaußsche Osterformel in jeder Hinsicht als fehlerfrei bezeichnet werden kann. Tatsächlich enthält sie einen internen Fehler, dessen Auswirkungen diese merkwürdigen, irritierenden und vielkommentierten Ausnahmeregeln sind.

Die Ostergrenze—das ist der dem Ostersonntag unmittelbar vorangehende Vollmondtermin—wird durch den Gaußschen Ausdruck $21 + D$ dargestellt [5, 75], und zwar als Märzdatum, meist in einem in den April verlängerten März. Der Wert des Ausdrucks fällt aber nicht stets auf den vom Claviusschen Algorithmus bezeichneten Termin. Ein 17. bzw. 18. April—dieser ist der letztmögliche Termin für die Ostergrenze überhaupt—wird durch $21 + D$ gelegentlich, aber nicht selten, um 1 Tag überschritten. So noch 1992 und bald wieder im Jahre 2000. Beseitigt man diesen Fehler, entfallen die Ausnahmeregeln der Gaußschen Osterformel.

Wie kann man den Fehler beseitigen?—Nun, so: mit der Gaußsche Größe D, dem Keim der Ostergrenze, bilde man $R = \mathrm{INT}(D/29) + (\mathrm{INT}(D/28) - \mathrm{INT}(D/29)) \cdot \mathrm{INT}(A/11)$. Hierin bedeutet $\mathrm{INT}(r)$ die größte in der rationalen Zahl r enthaltene ganze Zahl. A ist die so bezeichnete Gaußsche Größe, nämlich $\mathrm{MOD}(X, 19)$, wobei $\mathrm{MOD}(g, n)$ den kleinsten nichtnegativen Rest bedeutet, den die ganze Zahl g bei Teilung durch die natürliche Zahl n übrig läßt. R ist damit eine Größe, die meistens Null bleibt, nur in den Fällen, in denen der Gaußsche Ausdruck $21 + D$ die Termine des 17. bzw. 18. April um einen Tag überschreitet, den Wert Eins annimmt. Damit fällt der Ausdruck $21 + D - R$ stets richtig auf die nach dem Claviusschen Algorithmus vorgegebene Ostergrenze OG. Mit $OG = 21 + D - R$ wird die Gaußsche Osterformel ausnahmenfrei.

Mit ein paar weiteren Retuschen, die im einzelnen an anderen Stellen dargelegt werden sollen [9; 10], gelangt man dann zu folgender Fassung der Gaußschen Osterformel:

Sei X die Zahl des Jahres, dessen Datum des Ostersonntags festgestellt werden soll. Dann berechne man der Reihe nach folgende Größen:

1. die Säkularzahl $K(X) = \mathrm{INT}(X/100)$;
2. $M(K) = 15 + \mathrm{INT}((3 \cdot K + 3)/4) - \mathrm{INT}((8 \cdot K + 13)/25)$, die säkulare Mondschaltung;
3. die säkulare Sonnenschaltung $S(K) = 2 - \mathrm{INT}((3 \cdot K + 3)/4)$;
4. den Mondparameter $A(X) = \mathrm{MOD}(X, 19)$;
5. $D(A, M) = \mathrm{MOD}(19 \cdot A + M, 30)$, den Keim für den ersten Vollmond im Frühling;
6. $R(D, A) = \mathrm{INT}(D/29) + (\mathrm{INT}(D/28) - \mathrm{INT}(D/29)) \cdot \mathrm{INT}(A/11)$, die kalendarische Korrekturgröße;
7. die Ostergrenze $OG(D, R) = 21 + D - R$;
8. den ersten Sonntag im März $SZ(X, S) = 7 - \mathrm{MOD}(X + \mathrm{INT}(X/4) + S, 7)$;
9. die Entfernung in Tagen, die der Ostersonntag von der Ostergrenze hat (Osterentfernung) $OE(OG, SZ) = 7 - \mathrm{MOD}(OG - SZ, 7)$;
10. $OG + OE$; dies ist das Datum des Ostersonntags, dargestellt als Märzdatum, wobei ein Märzdatum > 31 durch Abziehen von 31 auf ein Aprildatum zu reduzieren ist.

Der obige Rechengang gilt für den (ab Oktober 1582 eingeführten) Gregorianischen Kalender mit der durchschnittlichen Jahreslänge von $146097/400 = 365{,}2425$ Tagen und der durchschnittlichen (Mond-)Monatslänge von $2081882250/70499183 = 29{,}5305869\ldots$ Tagen [8]. Ersetzt man die säkularen Schaltfunktionen durch die konstanten Werte $M = 15$ und $S = 0$, so erhält man die Zeitrechnung nach Julianischem Kalender mit einer durchschnittlichen Jahreslänge von $1461/4 = 365{,}25$ Tagen und einer durchschnittlichen (Mond-) Monatslänge von $27759/940 = 29{,}53085\ldots$ Tagen. Im Falle des Julianischen Kalenders erübrigen sich natürlich die Berechnungen von K, M, und S; aber auch die Berechnung von R kann entfallen, da R stets Null bleibt.

Da der Begriff "ein im Ergebnis korrekter Kalenderalgorithmus" eine Äquivalenzrelation zwischen Kalenderalgorithmen stiftet, kann man die Richtigkeit der hier vorgelegten umgebauten Gaußschen Osterformel dadurch beweisen, daß man die eingangs beschriebene Beweismethode auf die Gaußsche Osterformel in ihrer ursprünglichen Form sowie in der hier vorgelegten Form anwendet.

LITERATUR

1. Werner Bergmann, Noch einmal zu den Ausnahmeregeln der Gauss'schen Osterformel, *Historia Mathematica* **17** (1990), 256–258.

2. Christophorus Clavius, Romani calendarii a Gregorio XIII: Restituti explicatio S.D.N. Clementis VIII. iussu edita. Auctore Christophoro Clavio Bambergensi Societatis Jesu. Accessit confutatio eorum qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt. Romae: apud Aloysium Zannettum, 1595 und 1603, fol. [Auch in *Opera Mathematica*, Tom. V., Mainz, 1612]
3. Hans-Joachim Felber, Die beiden Ausnahmebedingungen in der von C. F. Gauss aufgestellten Osterformel, *Die Sterne* **53** (1977), 22–34.
4. Carl Friedrich Gauß, *Werke*, ed. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 vols., Göttingen, 1863–1933.
5. Carl Friedrich Gauß, Berechnung des Osterfestes, *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde*, (Aug. 1800), 121–130. [4, 6; 73–79]
6. Carl Friedrich Gauß, Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes Mon. Corr. 1800 Aug. S. 121, *Z. Astron. verwandte Wiss.,* **1** (Jan./Feb. 1816), 158. [4, 11(1):201]
7. Heiner Lichtenberg und Leonhard Gerhards, Programm CLAVIUS. [Geschrieben im Sommer 1991 in der Programmiersprache BASIC, nicht veröffentlicht; Informationen zum Programm sind beim Verf. dieses Aufsatzes erhältlich.]
8. Heiner Lichtenberg, Die Struktur des Gregorianischen Kalenders, anhand der Schwankungen des Osterfestes entschlüsselt, *Sterne und Weltraum* **33** (1994), 194–201.
9. Heiner Lichtenberg, Leonhard Gerhards, Alfons Graßl, und Heinz Zemanek, Die Struktur des Gregorianischen Kalenders, anhand einer Verallgemeinerung der Gaußschen Osterformel dargestellt, demnächst in *Sterne und Weltraum*, Vorveröffentlichung in *Astron. Gesellschaft*, Abstract Series **11** (1995), 110.
10. Heiner Lichtenberg und Peter H. Richter, Verbesserte Zeitrechnung, demnächst in *Sterne und Weltraum*, Vorveröffentlichung in *Astron. Gesellschaft*, Abstract Series **12** (1996), 121.