

# Matematiikka



# Sisällysluettelo:

- **Matematiikka**
  - Matematiikka on kuin kieli
  - Matematiikka on kuin tiede
  - Matematiikan pelaajat
  - Matematiikan elementit
  - Miksi matematiikka?
  - Oma matemaattinen matkasi
- **1.1. Matematiikan maailma**
  - Matematiikka on kuin universaali kieli
  - Luonto ja matematiikka
  - Arkielämä ja matematiikka
  - Teknologia ja matematiikka
  - Taide ja matematiikka
  - Urheilu ja matematiikka
  - Matematiikan tulevaisuus
- **1.2. Salaisia koodeja ja muinaisia mysteerejä - Matematiikan historia**
  - Lukujen synnystä geometrian salaisuuksiin
  - Antiikin Kreikan geometrian mestarit
  - Algebran aamunkoitto
  - Euroopan renessanssin neronleimauksia
  - Matematiikka tänään
- **1.3. Kaikkialla ympärillämme - Miksi matematiikka on siistiä?**
  - Päivittäisessä Elämässä
  - Teknologian Maailmassa
  - Tiede ja Innovatiot
  - Luovuus ja Taide
  - Henkilökohtainen Kehitys
- **Osa I: Laskujen labyrinthti**
  - Lukutyypit ja niiden ominaisuudet
  - Luonnolliset luvut
  - Kokonaisluvut
  - Rationaaliluvut
  - Irrationaaliluvut
  - Reaaliluvut
  - Peruslaskutoimitukset
  - Yhteenlasku (+)

- Vähennyslasku (–)
- Kertolasku (×)
- Jakolasku (÷)
- Prioriteettisäännöt
- Harjoitustehtäviä
- 2. Numeroiden ninja - Lukujen temppurata
  - Lukujoukkojen dojossa
  - Luonnolliset luvut - Ninjojen noviisit
  - Kokonaisluvut - Rohkeat roninit
  - Rationaaliluvut - Viisaat velhot
  - Reaaliluvut - Mystiset mestarit
  - Laskutoimitusten temppurata
  - Yhteen- ja vähennyslasku - Ninjan perustaidot
  - Kertolasku - Voiman keräämisen taidot
  - Jakolasku - Jakamisen taito
- 2.1. Salapoliisina numeroiden maailmassa - Luonnolliset luvut
  - Mikä ihmeen luonnollinen luku?
  - Peruslaskutoimitukset – Salapoliisin työkalut
  - Yhteenlasku – Liittolaiset kokoontuvat
  - Vähennyslasku – Etsivän tarkka silmä
  - Kertolasku – Arvoitus moninkertaistuu
  - Jakolasku – Jako-oikeudenmukaista tutkimusta
  - Salapoliisin muistiinpanot
  - Ratkaisevien päätelmien aika
- 2.2. Numeroiden varjopuoli - Kokonaisluvut ja negatiiviset luvut
  - Kokonaisluvut
  - Negatiiviset luvut
  - Negatiivisten lukujen käyttö arjessa
  - Laskutoimitukset negatiivisilla luvuilla
  - Harjoitustehtävät
- 2.3. Murtolukujen mysteeri - Rationaalilukujen salat
  - Mikä on rationaaliluku?
  - Rationaalilukujen laskutoimitukset
  - Yhteen- ja vähennyslaskut
  - Kertolaskut
  - Jakolaskut
  - Rationaalilukujen salainen voima
- 2.4. Piilossa jossain - Reaaliluvut ja irrationaaliluvut

- Reaaliluvut – kaikki mitä voit mitata
- Irrationaaliluvut – maailman piilotetut aarteet
- Miten reaaliluvut ja irrationaaliluvut liittyvät toisiinsa?
- Uteliaisuus vie voittoon
- Päivän pulma
- 3. Lukujen superkyvyt
  - Luonnolliset luvut - Roolipelien ritareita
  - Kokonaisluvut - Seikkailijat tasapainon rajamailla
  - Rationaaliluvut - Muodonmuuttajat muuttuvassa maailmassa
  - Irrationaaliluvut - Mystiset voimat piilossa desimaalien takana
  - Alkuluvut - Voimanlähteet numeroiden maailmassa
- 3.1. Jaollisuuden jäljillä - Jaetaanko vaiko eikö jaeta?
  - Jaollisuuden perusteet
  - Jaollisuussääntöjä:
  - Alkuluvut ja niiden merkitys
  - Alkutekijöihin jako
  - Alkutekijöihin jaon tärkeys
  - Harjoitellaan yhdessä!
- 3.2. Matematiikan mahtavat muuntajat - Vastaluku ja käänteisluku
  - Vastaluku - Luvun salainen vastavoima
  - Käänteisluku - Lukujen heijastus murtolukumaailmassa
  - Itseisarvo - Lukujen ehdoton suuruus
  - Yhteenveto
- 3.3. Voiman varassa - Potenssit ja neliöjuuret
  - Potenssit - suurennuslasin alla
  - Neliöjuuret - kaivetaanko juuria?
  - Loppuharjoituksia
- 3.4. Taikasauvat ja loitsu - Laskujärjestys ja liitännäisyys
  - Laskujärjestyksen loitsu
  - Liitännäisyyden taikasauva
  - Yhdistä taika
- 4. Prosenttien puutarha
  - Mikä on prosentti?
  - Prosenttilaskujen perustyyppit
  - 1. Prosenttiosuuden laskeminen
  - 2. Prosentuaalisen muutoksen laskeminen
  - 3. Uuden määrän laskeminen prosenttiosuuden avulla
  - Prosentin laskeminen käytännössä: Ale-tarjoukset

- Päätelmät
- 4.1. Prosentit pelastavat päivän - Perusteet selkokielellä
  - Mikä on prosentti?
  - Prosentin laskeminen
  - Prosentin muuttaminen murtoluvuksi tai desimaaliluvuksi
  - Prosenttiyksikkö
  - Prosenttilaskujen käyttö
- 4.2. Lisää vai vähemmän - Prosentin ihmeelliset muutokset
  - Prosentin perusteet
  - Prosentin lisäys
  - Laskeminen
  - Prosentin vähennys
  - Laskeminen
  - Harjoitustehtäviä
- 4.3. Numeroiden muodonmuutokset - Kun kokonaisuus heilahtaa
  - Mikä on kokonaisuuden määrä?
  - Lisääminen - Numeroiden kasvupyrähdys
  - Harjoitus:
  - Vähentäminen - Kun numerot kutistuvat
  - Harjoitus:
  - Kertominen - Numeroiden loikkaus
  - Harjoitus:
  - Jakaminen - Tasaista jakautumista
  - Harjoitus:
- 4.4. Prosenttitutkielmat - Korkotemput ja niiden kikat
  - Prosenttiyksiköt ja niiden taika
  - Kun korko korolle kiertää
  - Korkotemppujen kaava
  - Harjoitellaan temppuja
  - Viimeinen temppu: Korkolaskureiden mestarit
- Osa II: Algebran aarrearkku
  - Mitä on algebra?
  - Kirjaimet - lukujen naamioituneet ystävät
  - Yhtälö - Vaakalaudan tasapainottelua
  - Algebran perusrakennuspalikat - Termit ja lausekkeet
  - Polynomit - Termien timantteja
  - Yhtälöiden Ratkaiseminen - Aartenetsintää
  - Yhtälöiden Ratkaiseminen Harjoitus

- 5. Lausekkeiden laboratorio
  - Mikä on lauseke?
  - Lausekkeen arvon laskeminen
  - Termit
  - Yhtälöt
  - Yhtälön ratkaiseminen
  - Yhtälön tasapainottaminen
  - Loppusanat
  - Vastaukset
- 5.1. Merkkien magiaa - Lausekkeet ja yhtälöt
  - Muuttujan Voimat
  - Esimerkki:
  - Lausekkeen Lumous
  - Esimerkki:
  - Yhtälön Yllätykset
  - Esimerkki:
- 5.2. Katoavan  $x$ :n arvoitus - Yhtälöiden ratkaisun metsästys
  - Yhtälön perusteita
- 5.3. Toisen asteen temppuilo - Polynomien hauskat huiput
  - Täydelliset ja vaillinaiset toisen asteen yhtälöt
  - Vaillinaisten yhtälöiden ratkaiseminen
  - Tyyppi A: Yhtälöt ilman  $bx$ -termiä
  - Tyyppi B: Yhtälöt ilman  $c$ -termiä
  - Tehtävien aika!
- 5.4. Salakirjoitus - Yhtälöparien selättäminen
  - Yhtälöparit - Mitä ne ovat?
  - Sijoitusmenetelmä
  - Yhteen- ja vähennysmenetelmä
  - Graafinen menetelmä
  - Harjoitus - Aarrekartan arvoitus
- 6. Funktioiden vuoristorata
  - Mikä on Funktio?
  - Kuinka Käsitellä Funktioita
  - Funktion Kuvaaja
  - Tutkimusmatka
- 6.1. Erilaisia funktioita
  - Lopuksi
- 6.2. Suoran sankarit - Kuvaajien Kiipeily

- Suoran yhtälö – Taikasauva koordinaatistossa
- Kulmakerroin – Dynaamisen duon toinen puolisko
- Y-akselin leikkauspiste b – Sieltä kaikki alkaa
- Tutkimusretki koordinaatistoon – Kädet saveen!
- Tehtäviä ja kiperiä kysymyksiä
- 6.3. Paraabelin pyörremyrsky - Toisen asteen salaisuus
  - Toisen asteen funktion lumo
  - Paraabeli – Geometrian aallot
  - Paraabelin huippu
  - Paraabelin akselin symmetria
  - Toisen asteen funktion arvoituksen purkaminen
  - Matematiikan taiteen taidonnäyte
  - Harjoitukset
  - Yhteenveto
- 6.4. Piirustusleiri - Funktion kuvaajien taiteilua
  - Mitä ovat Funktion Kuvaajat?
  - Kuvaajien Tulkinta
  - Käyrän Nousu ja Lasku
  - Huippukokoukset ja Laaksojuhlat
  - Nollakohta ja Leikkauspisteet
  - Käännepisteet
  - Harjoitellaan Käyränlukua!
  - Loppunäyttely
- Osa III: Geometrian viidakko
  - 1. Viidakon perusteet
    - Pisteet, viivat ja kulmat
    - Monikulmiot ja ympyrät
  - 2. Geometrian eläimet
    - Kolmiot – Viidakon monimuotoisuus
    - Nelikulmiot – Turvalliset pesäpaikat
    - Ympyrät – Viidakon mysteerit
  - 3. Geometrian kasvitieteellinen puutarha
  - 4. Viidakon tutkimushaasteet
- 7. Mittojen mysteeri: Geometrian peruskäsitteet
  - Piste, viiva ja taso
  - Kulma ja monikulmio
  - Ympyrä
  - Miten käytämme geometriaa?

- Mitä seuraavaksi?
- 7.1. Kaikki alkaa pisteestä - Viivat, suorat ja tasot
  - Piste – Geometrian ydin
  - Viiva – Pisteiden yhdistäjä
  - Suora – Rajaton suunta
  - Kuinka suora piirretään?
  - Taso – Kaksiulotteinen maailma
  - Pisteitä, viivoja ja suoria tasossa
  - Kolme pistettä määrittää tason
  - Koordinaatisto – Pisteiden sijainnit
- 7.2. Kulmien kätkeyty maailma - Mistä löytyy oikea kulma?
  - Mitä ovat kulmat?
  - Kulmien tyypit
  - Kulmien erityiset nimet
  - Miten kulmia mitataan?
  - Oikea kulma - Kulmien kuningas
  - Oikeat kulmat arkielämässä
  - Kulmarikasta puuhastelua
  - Yhteenveto
- 7.3. Monikulmioiden monimutkaisuus - Joka nurkka lasketaan
- 7.4. Ympyrän ympärille kietoutunut - Piirin pyörteet
  - Ympyrä: Määritelmä ja komponentit
  - Piirin kaava ja pii ( $\pi$ )
  - Käytännön harjoitusta: Mitataan piiriä
  - Tarvikkeet:
  - Ohjeet:
  - Yhteenveto
- 8. Geometrian taikatemput
  - Mitä on geometria?
  - Piiri ja Pinta-ala – Geometrian peruskikat
  - Piiri
  - Pinta-ala
  - Ympyrän ympärysmitta ja pinta-ala – Taikasilmukat
  - Ympärysmitta
  - Pinta-ala
  - Kolmioiden Geometrian taikavoimat
- 8.1. Alueen arvoitus - Pinta-alojen palapeli
  - Mitä ovat pinta-ala ja piiri?



- Perustapaukset: Suorakulmion ja ympyrän pinta-ala ja piiri
- Suorakulmion pinta-ala ja piiri
- Ympyrän pinta-ala ja piiri
- Monikulmioiden ja epäsäännöllisten muotojen pinta-ala
- Monikulmioiden pinta-ala
- Epäsäännöllisten muotojen pinta-ala
- 8.2. Kolmiulotteisten kappaleiden kadonnut maailma - Tila mahtuu täyteen
  - 1. Tilavuuden tutkimusmatka
  - Kuution ja suorakulmaisen särmiön tilavuus
  - Sylinterin, kartion ja pallon tilavuus
  - 2. Pinnalla pysyminen - Pinta-alojen laskenta
  - Kuution ja suorakulmaisen särmiön pinta-ala
  - Sylinterin, kartion ja pallon pinta-ala
  - Harjoitustehtäviä
- 8.3. Kuvioiden katoamistempu - Yhdenmuotoisuuden ydin
  - Mikä on geometrinen paikka?
  - Yhdenmuotoisuuden perusteet
  - Yhdenmuotoisuuden ehdot
  - Miten hyödynnämme yhdenmuotoisuutta?
  - Käytännön esimerkki
  - Harjoitustehtäviä
  - Loppusanat
- 8.4. Piin poika, Pythagoras - Ja trigonometrian salatut signaalit
  - Pythagoraan lause
  - Trigonometrian alkeet
  - Sovelluksia - Pythagoraan lause ja trigonometria käytännössä
  - Loppusanat
- Osa IV: Tilastotorni ja todennäköisyyslinna
  - Tilastotornin ensimmäinen kerros: Tiedonkeruun taikaa
  - Tilastotornin toinen kerros: Aineiston järjestäminen
  - Tilastotornin kolmas kerros: Keskiarvoa etsimässä
  - Tilastotornin neljäs kerros: Hajonta ja vaihtelu
  - Todennäköisyyslinnan portilla: Sattuman sukellus
  - Todennäköisyyslinnan keskiaukea: Kombinaatiot ja permutaatiot
  - Todennäköisyyslinnan torninkammio: Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus
  - Yhteenveto: Matemaattiset kartanot
- 9. Tilastojen tarinat
  - Miksi tarvitsemme tilastoja?

- Tilastojen kerääminen
- Taulukot – Tiedon järjestyksen mestarit
- Kaaviot – Tiedon visualisoinnin sankarit
- Tilastot ja todennäköisyys
- Tilastojen tulkinta – Tietojen taituri
- Mitä nyt?
- Tehtävä: Luo oma tilasto
- 9.1. Numeronikkareiden retkikunta - Tietojen keräily ja kaskut
  - Tietojenkeräily – Tutkimusmatkalle lähtö
  - Kyselyn suunnittelu – Kartta käteen
  - Tietojenkeruun metodit – Työkalut valmiiksi
  - Aineiston kerääminen – Tutkimusretken alku
  - Tietojen tulkinta – Löydösten esittely
  - Yhteenveto – Retken päätös
- 9.2. Salaiset koodit - Tilastojen tunnuslukujen tulkinta
  - Keskiarvo – Tasapainon metsästäjä
  - Mediaani – Keskimmäisen mysteeri
  - Hajonta – Eroavaisuuksien eksperti
- 9.3. Viestit visuaalisina - Diagrammidraama
  - Mikä ihmeen diagrammi?
  - Erilaiset diagrammityypit
  - 4. Piste- tai hajontakaavio
  - Diagrammin tulkinta
  - Harjoitellaan!
- 9.4. Tilastojen tulkki - Päättelyä ja päätelmiä
  - Mikä on tilasto?
  - Miksi tilastoja tarvitaan?
  - Otanta ja populaatio
  - Miten otos valitaan?
  - Keskiarvo, mediaani ja moodi
  - Hajonta ja varianssi
  - Päätöksenteko tilastojen pohjalta
  - Tilastollisten tulosten tulkintaan liittyviä varoituksia
- 10. Sattumankauppa: Tutkimusretki Todennäköisyyden Maailmaan
  - Todennäköisyys - Mitä se on?
  - Todennäköisyyden peruskäsitteet
  - Perussääntöjä Todennäköisyydessä
  - Esimerkki: Kolikonheitto

- Kokeillaanpa käytännössä!
- Yhdistetään Todennäköisyydet
- Monimutkaisempi Todennäköisyys
- Loppusanat
- 10.1. Sattumien saaga - Kertoimet ja mahdollisuudet
  - Mitä on todennäköisyys?
  - Yksinkertaisen todennäköisyyden laskeminen
  - Useamman tapahtuman yhdistäminen
  - Ehdollinen todennäköisyys
  - Todennäköisyyden käyttö arkielämässä
  - Tehtäväosio
- 10.2. Mahdotontako? Ei ole! - Tapahtumien taiturointi
  - Yksinkertaiset tapahtumat - Matikan peruskivet
  - Monimutkaiset tapahtumat - Kun palaset lokahtavat paikoilleen
  - Tapahtumien yhdistäminen - Sattuman sinfoniaa
  - Harjoitukset - Matemaattista taikatemppua
  - Yhteenveto - Mahdollisuus oivaltaa kaikki
- 10.3. Numeroiden notaarit - Kombinaatioiden kiehtova kaava
  - Permutaatiot
  - Yhdistelmät
  - Harjoitellaan!
- 10.4. Klassinen kontra tilastollinen - Lipas, josta löytyy lukuja
  - Klassinen todennäköisyys
  - Laskuesimerkki:
  - Tilastollinen todennäköisyys
  - Laskuesimerkki:
  - Vertailu ja pohdinta
  - Tehtävä:
  - Yhteenveto
- Osa V: Ohjelmoinnin orkidea
  - Mikä on algoritmi?
  - Ohjelmointi - Digitaalisen orkidean kasvattamista
  - Ohjelmoinnin perusteet
  - Muuttujat: Orkideasi ruukku ja multa
  - Ehtolauseet: Aurinko ja varjo
  - Silmukat: Kastelu ja lannoitus
  - Funktiot: Puutarhatyökalusi
  - Loppusanat

- 11. Algoritmilabyrintti
  - Mikä on algoritmien merkitys?
  - Tutustu algoritmiseen ajatteluun
  - Liljakukko Algoritmissa
  - Seinäseurausalgoritmi
  - Kokeilu ja erehdys
  - Algoritmit toiminnassa
  - Kohti algoritmista mestaruutta
- 11.1. Ohjelmoijan ensiaskel - Algoritmien alku
  - Mikä on algoritmi?
  - Algoritmit arkielämässä
  - Algoritmit tietokoneella
  - Esimerkkialgoritmi
  - Algoritmien ominaisuudet
  - Algoritmien visualisointi
  - Kokeile itse!
  - Yhteenveto
- 11.2. Koodikoralli - Algoritmien ihmeellinen maailma
  - Mikä ihmeen algoritmi?
  - Esimerkki Arjesta:
  - Algoritmien Looginen Luonti
  - Ongelman Pilkkominen
  - Esimerkki Algoritmista:
  - Algoritmien Suorittaminen
  - Loogiset Ehdot
  - Toistuvat Toimenpiteet
  - Algoritmien Testaaminen
  - Algoritmiset Seikkailut Itse
- 11.3. Tervetuloa ohjelmoinnin oopperaan - Ohjelmia joka lähtöön
  - Mikä on ohjelmointi?
  - Mitä ohjelmointi voi tarjota matematiikalle?
  - Ensi askeleet ohjelmointiin
  - Hello World!
  - Muuttujat ja peruslaskutoimitukset
  - Funktiot
  - Ohjelmoinnin ja matematiikan yhteislaulu
  - Visualisointi
- 11.4. Oma ohjelma ojennukseen - Toteuta unelmien ohjelma

- Mikä on ohjelmointi?
- Aloita ohjelmoinnin perusteista
- Ensimmäinen ohjelmasi
- Tee oma ohjelma
- Ohjeita ohjelmointiprojektiin
- Osa VI: Matikkamestariksi - Sovelletaan ja selvittää
  - 1. Kaupan kassalla
  - 2. Ajan hahmottaminen
  - 3. Reseptit ja mittaaminen
  - 4. Matkustaminen ja nopeus
  - 5. Rahankäyttö ja budjetointi
- 12. Matematiikan maireat mahdollisuudet
  - Rahankäyttö ja budjetointi
  - Kokkaamisen kemiat
  - Urheilun tilastotaiturit
  - Luonnossa liikkujan lokikirja
  - Musiikin matemaattiset melodiat
  - Arjen teknologia
- 12.1. Koodista kaavaan - Numeroilla on väliä
  - Kun Kodista Tulee Laskutreenisali
  - Kauppamatematiikkaa: Numeroleikkejä ruokakaupassa
  - Käytännön vinkkejä matemaattiseen kodin- ja kaupanpitoon:
- 12.2. Säästön salaisuudet - Budjetit pedattuina
  - Budjetointi – Miten hallita raha-asioita viisaasti?
  - Mikä on budjetti?
  - Miten tehdä oma budjetti?
  - Esimerkki:
  - Sijoittaminen – Tulevaisuuden tekijä
  - Miksi sijoittaminen on tärkeää?
  - Miten sijoittaminen toimii?
  - Esimerkki korkoa korolle -ilmiöstä:
  - Avainasioita muistaa:
- 12.3. Mahtavaa matikkaa mailmalla - Tiede tarttuu taulukoihin
  - Fysiikka - Luonnonlakien laskelmat
  - Kemia - Atomeista yhtälöihin
  - Biologia - Elämän matemaattiset mallit
  - Tiede taulukoihin ja kokeisiin
- 12.4. Taivaalliset taidegalleriat - Symmetriasta sensaatio

- Mikä on symmetria?
- Tasosymmetria
- Kuvioinnit ja Mosaiikit
- Taiteen Tarinoita Symmetriasta
- Symmetrian Löytäminen Matematiikasta
- Tehtävät
- Loppuajatus
- 13. Heräte - Hyppää mukaan matikkaan!
  - Monialaiset projektit - Matematiikka Elämässä
  - Matematiikkakilpailut - Mittaa ja Kasvata Matemaattista Älyäsi
  - Kuinka osallistua?
- 13.1. Projekteista potkua - Yhteisölliset ytyt
  - Mikä on monialainen projekti?
  - Projektin suunnittelu
  - 1. Aiheen valinta
  - 2. Tavoitteet
  - 3. Suunnitelma
  - 4. Tutkimus ja tiedonhankinta
  - Projektin toteutus
  - Arviointi ja palaute
  - Projekti-ideoita
- 13.2. Kilvoittelu kannustaa - Matematiikan mestarit
  - Miksi osallistua matematiikan kilpailuihin?
  - Erilaisia matematiikan kilpailuja
  - Koulutaso
  - Alueelliset ja kansalliset kilpailut
  - Kansainväliset kilpailut
  - Valmistautuminen kilpailuun
  - Perusteet kuntoon
  - Harjoittelua ja ongelmanratkaisua
  - Opettele uusia strategioita
  - Aikataulut ja hallinta
  - Asenne ja motivaatio
  - Kilpailuhenki ja yhteisö
- 13.3. Haastavat hobit - Luovuuden lähde
  - Mikä tekee ongelmasta haastavan hobin?
  - Muutama vinkki älynystyröidesi herättelyyn:
  - Tehtävä 1: Jalanjäljet Järjestykseen

- Tehtävä 2: Taikaneliö
- Yhteenveto
- 13.4. Yhdessä ytimeen - Tiimityön temmellyskenttä
  - Yhteistyön voimaa
  - Miksi tiimityö toimii?
  - Tiimitaitojen hiominen
  - Tiimitehtäviä matematiikassa
  - Vinkit menestymiseen tiimityössä
- Osa VII: Työkalujen temppeli
  - Laskimet
  - Tietokoneohjelmat ja sovellukset
  - Kumppanit ja Ryhmätyö
  - Kirjat ja Opetusmateriaalit
  - YouTube ja Verkkokurssit
  - Itsearviointi ja Palaute
- 14. Matematiikan modernit munkit
  - Laskimet – Perusmatemaattisten arvoitusten ratkojat
  - Tietokoneohjelmat ja sovellukset – Digitaaliset matemaattiset laboratoriot
  - Ohjelmointi – Luovuuden ja logiikan yhdistäminen
  - Robotiikka ja sensorit – Havainnointia ja vuorovaikutusta
  - Pilvipalvelut ja yhteistyö – Ideoiden jakaminen reaaliajassa
  - Pelit ja simulaatiot – Hauskaa ja opettavaista uppoutumista
  - 3D-tulostus – Ideasta fysikaaliseen muotoon
  - 14.1. Laskentopyhäkkö - Laskimen lojaalisuus
    - Laskimen valinta ja perustoiminnot
    - Kaavojen syöttäminen laskimeen
    - Harjoitus: Ympyrän pinta-ala ja ympäryys
    - Laskenta on yhteistyötä
  - 14.2. Digitaaliset dominoijat - Tietokonetyökalujen työpaja
    - Mikä tekee tietokonepohjaisista työkaluista erinomaisia?
    - Suositut tietokonepohjaiset matemaattiset ohjelmat
    - Miten aloittaa?
    - Harjoitus - Tee ja tutki itse
    - Projektiehdotus: Pelaa ja opi Scratchilla
    - Yhteenveto
  - 14.3. Visualisointivirvatuli - Kauniit käppyrät konstein
    - Miksi Visualisointi?
    - Miten Visualisoida Matemaattisia Ongelmia?

- 1. Lue ja Ymmärrä Ongelma
- 2. Etsi Avainkohdat
- 3. Käytä Oikeita Työkaluja
- 4. Arvuuttele ja Kokeile
- 5. Tarkastele ja Pohdi
- Esimerkki: Yhtälön kuvaaminen
- Loppusanat
- 14.4. Taulukon taikaa - Taulukkolaskennan triumfi
  - Perustoiminnot
  - Harjoitus 1: Yhteenlasku
  - Kaavat ja funktiot
  - Harjoitus 2: Prosenttilasku
  - Visuaalinen esitys
  - Harjoitus 3: Kaavion luominen
  - Vinkkejä ja Varoituksia
  - Tehtävä: Budjetin laadinta
  - Loppusanat
- Osa VIII: Omien onnistumisten oivallus
  - Miksi itsearviointi on tärkeää?
  - Miten arvioit omia onnistumisesiä?
  - 1. Aseta Tavoitteet
  - 2. Tee ja Tarkista
  - 3. Reflektoi Prosessia
  - 4. Pyydä Palautetta
  - 5. Seteliarviointi
  - 6. Opi Virheistäsi
  - Loppusanat
- 15. Arviointiakatemia – Miten matematiikka mitataan?
  - Miksi matematiikkaa mitataan?
  - Mitä arvioidaan?
  - Miten arviointi tapahtuu?
  - Kokeet ja testit
  - Arviointiasteikot
  - Itsearviointi
  - Vertaisarviointi
  - Opettajan havainnointi
  - Portfoliot ja projektit
- 15.1. Omalle uralle ohjautuminen – Mikä tekee sinusta matemaatikon?



- Matematiikan menestyksen arvioiminen
- Uteliaisuus ja Ongelmanratkaisukyky
- Kärsivällisyys ja Sinnikkyys
- Luovuus ja Alkuperäisten Ideoiden Kehittäminen
- Matemaattinen Ajattelu ja Looginen Päättely
- Kommunikaatio ja Yhteistyö
- Jatkuva Oppiminen ja Itsekehitys
- Pohdintaa ja Yhteenvedoa
- 15.2. Tavoitteet tähän päivään – Aseta itsellesi superpäämäärät
  - Miksi asettaa tavoitteita?
  - Kuinka asettaa tavoitteita?
  - Specific (Tarkka)
  - Measurable (Mitattava)
  - Achievable (Saavutettavissa oleva)
  - Relevant (Olennainen)
  - Time-bound (Aikaan sidottu)
  - Pienen pienet tavoitteet - isot isot unelmat
  - Seuraavat askeleet
- 15.3. Itsearviointin ilotulitus – Oma edistyminen erinomaiseksi
  - Miksi itsearviointi on tärkeää?
  - Ennakoiva oppiminen
  - Motivaation ylläpitäminen
  - Itsenäinen ajattelu
  - Kuinka itsearvioida tehokkaasti?
  - Askel 1: Aseta tavoitteet
  - Askel 2: Arvioi osaamistasi
  - Askel 3: Pyydä palautetta
  - Askel 4: Ole rehellinen itsellesi
  - Askel 5: Tee korjaavia toimenpiteitä
  - Harjoitus: Oma matematiikkaoppimisen reittikartta
- 15.4. Yhteistyön ja kilpailun kuninkuus – Matematiikkaa me-hengessä
  - Yhteistyö matematiikassa
  - Kilpailu matematiikassa
  - Tasapaino on tärkeää
  - Loppusanat

# Matematiikka

[Lataa PDF tästä](#)

Tervetuloa matkan alkuun – seikkailuun, joka vie sinut läpi mysteerien, ratkaisujen ja lukemattomien oivallusten maailman. Ei, emme puhu nyt mistään perinteisestä lautapelistä tai videopelistä, vaan matematiikasta - tieteenalasta, joka on ikivanha mutta ikuinen, mutkikas mutta mukaansatempaava ja kaikessa yksinkertaisuudessaan äärettömän kaunis.

## Matematiikka on kuin kieli

Kuvittele, että opit kielen, joka auttaa sinua ymmärtämään maailmaa uudella tavalla. Matematiikka on juuri tällainen kieli – se on keino havainnoida, ymmärtää ja kertoa asioista ympäristössämme. Matematiikan avulla voimme selvittää vastauksia kiehtoviin kysymyksiin: Kuinka monta tähteä on galaksissamme? Mikä on nopein tapa jakaa pizza ystävien kesken tasapuolisesti? Tai miten solmut ja kuviot matemaatikon silmin avautuvat?

## Matematiikka on kuin tiede

Tämä "peli" ei ole pelkästään numeroita ja kaavoja. Matematiikka on oikeastaan hyvin samankaltainen ystävämme luonnontieteen kanssa. Se on järjestelmä, joka käsittää hypoteeseja, kokeita ja lopulta niiden vahvistamisia tai kumoutumisia. Erona on kuitenkin se, että matemaatikon laboratorio sijaitsee omassa mielessäsi, ja "koeputket" ovat laskuja ja loogisia päättelyketjuja.

## Matematiikan pelaajat

Matemaatikot ovat kuin tutkimusmatkailijoita, jotka avaavat oven tuntemattomiin maailmoihin. He ovat ahkeria ongelmanratkaisijoita ja löytöretkeilijöitä, jotka etsivät vastauksia olemassaolon perimmäisiin kysymyksiin. Ja tiedätkö mitä? Sinä olet nyt matkalla tulla yhdeksi heistä! Tässä oppikirjassa me matkaamme yhdessä ja opimme pelin säännöt.

## Matematiikan elementit

Aivan kuin kaikissa peleissä, myös matematiikassa on omat peruselementtinsä – numerot, muodot, funktiot, yhtälöt ja paljon muuta. Alussa saatat kohdata outoja symboleita ja sääntöjä, mutta pian huomaat, kuinka ne kaikki liittyvät toisiinsa ja luovat yhteisen, loogisen kokonaisuuden. Matematiikka ei ole vain sääntöjen opettelua; se on kykyjen kehittämistä, ongelmien ratkaisemista ja ennen kaikkea uteliaisuuden ja innokkuuden ruokkimista.

## **Miksi matematiikka?**

Matematiikka on kuin avain, jolla avataan ovia tieteen, tekniikan, taiteen ja jopa musiikin maailmoihin. Se on elintärkeää teknologian kehittämisessä ja uusien innovaatioiden luomisessa. Matematiikka on myös perustaidoissa, kuten laskutaidossa ja tilastojen ymmärtämisessä – taidoissa, joita käytämme jokapäiväisessä elämässämme.

## **Oma matemaattinen matkasi**

Tämän kirjan sivuilla on monia tehtäviä ja ongelmia, jotka odottavat sinun älyäsi ja luovuuttasi. Opi virheistäsi, nauti voitoistasi ja jaa oppimisen iloa ympärilläsi olevien kanssa. Jokainen luku ja kappale vie sinut askeleen lähemmäksi matematiikan ymmärtämistä ja sen mahtavaa kauneutta. Muista, matematiikka on enemmän kuin osaamista – se on suhtautumista ja suunnattoman suuren, kiehtovan pelin pelaamista.

Nyt on aika hypätä matematiikan maailmaan, säädä siis uteliaisuutesi täysiin tehoihin ja anna matemaattisen seikkailun alkaa!

## **1.1. Matematiikan maailma**

Tervetuloa löytöretkelle matematiikan universumiin, missä luvut ja kaavat avaavat ovet ymmärryksemme maailmankaikkeuteen! Matemaattiset säännöt ja teoriat ovat kuin taikasauvoja, jotka mahdollistavat kaikesta ympärillämme olevan ymmärtämisen ja ennustamisen. Matematiikka on taito, joka ei rajoitu vain luokkahuoneisiin tai tenttivastauksiin – se on kaikkialla ympärillämme.

### **Matematiikka on kuin universaali kieli**

On sanottu, että matematiikka on universaali kieli. Vaikka ihmiset puhuvat eri kieliä ja elävät eri kulttuureissa, matematiikan periaatteet pysyvät samoina kaikkialla maailmassa. Luvut ja loogiset rakenteet eivät muutu valtameren toiselle puolelle mentäessä tai pilvenpiirtäjän huipulle kiivetessä.

### **Luonto ja matematiikka**

Luonto on matematiikan taidonnäyte. Kukkien terälehtien järjestys, lumihiihtaleiden symmetria ja mehiläispesien kuusikulmaiset rakenteet osoittavat, että luonto käyttää matematiikkaa järjestäytyäkseen ja toimiakseen. Fibonacci-sarja, joka on sarja, missä seuraava luku syntyy aina kahden edellisen luvun summasta (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), löytyy monista luonnonmuodoista, kuten simpukan kuorista ja kasvien kasvutavoista.

## **Arkielämä ja matematiikka**

Päivittäisissä askareissamme matematiikka tulee näkyväksi monin tavoin. Mieltäsi saattaa kenties kiehtoa, kuinka rakennetaan talo, joka seisoo tukevasti maan päällä. Se on matematiikkaa! Entäpä kun teet herkullista leivonnaista ja mittaat ainekset? Se on myös matematiikkaa! Jopa pyöräily tasapainoisesti vaatii geometrian ja fysiikan lakien noudattamista, jotka pohjautuvat matematiikkaan.

## **Teknologia ja matematiikka**

Tänä päivänä matematiikan merkitys korostuu entisestään teknologian myötä. Tietokoneet ja älylaitteet käyttävät monimutkaisia matemaattisia algoritmeja ratkaistakseen ongelmia ja tehdäkseen päätöksiä. Entäpä avaruusmatkat? Ne olisivat mahdottomia ilman matemaattisia laskelmia, jotka tarkkaan ennustavat planeettojen liikkeitä ja määrittelevät rakettien polttoaineen määrän.

## **Taide ja matematiikka**

Matematiikalla on paikkansa myös taiteessa. Symmetria, mittasuhteet ja mallintaminen ovat tärkeitä elementtejä, kun taiteilijat luovat esteettisesti miellyttäviä teoksia. Esimerkiksi kuuluisa "Kultainen leikkaus" on matemaattinen suhde, jonka monet taiteilijat ja arkkitehdit ovat löytäneet olevan visuaalisesti miellyttävä.

## **Urheilu ja matematiikka**

Urheilussakin matematiikka näyttäytyy. Se voi ilmetä taktiikkana, jolla päihitetään vastustaja shakkipelissä, tai tilastotieteenä, jolla valmentaja rakentaa voittavan strategian joukkueelleen. Pisteiden laskeminen, aikojen mittaaminen ja todennäköisyyksien arviointi – kaikki nämä elementit tukeutuvat matematiikkaan.

## **Matematiikan tulevaisuus**

Matematiikka voi olla myös tie tulevaisuuteen. Se antaa meille työkalut, joilla voimme ennakoida ilmastonmuutoksen vaikutuksia, parantaa lääketiedettä simulaatioiden ja mallinnusten avulla tai kehittää tekoälyä, joka voi auttaa meitä ymmärtämään maailmaa uusista näkökulmista.

Uskomattomat matematiikan sovellukset ympäröivät meitä joka päivä ja joka puolella. Joten kun kaivaudut matematiikan syvyyksiin, pidä mielessä, että et opettele vain teorioita ja ratko ongelmia, vaan olet avaimet kädessä matkalla kohti ymmärryksen maailmaa, jossa matematiikka avaa ovia rajattomiin mahdollisuuksiin. Oletko valmis matkaan?

## 1.2. Salaisia koodeja ja muinaisia mysteerejä - Matematiikan historia

Tervetuloa aikamatkalle matematiikan jännittävään maailmaan! Tämä luku johdattaa sinut läpi matematiikan historian, joka on täynnä salaperäisiä koodeja, ikivanhoja arvoituksia ja nerokkaita mieliä, jotka ovat muovanneet sitä, mitä tänään tunnemme matematiikkana. Matematiikka on nimittäin paljon enemmän kuin laskutoimituksia ja kaavoja - se on kulttuureja yhdistävä kieli, joka on luonut pohjan nyky-yhteiskuntamme monimutkaiselle teknologialle.

### Lukujen synnystä geometrian salaisuuksiin

Käynnistämme aikakoneemme tuhansien vuosien taakse, aikaan ennen kirjoitustaidon kehittymistä. Jo tuolloin ihmiset käyttivät lukuja mittaamaan aikaa, maata ja tavaroita. Ensin käytössä olivat sormet ja kepin viillot, mutta vähitellen syntyi numerojärjestelmiä, kuten Babyloniassa käytetty 60-järjestelmä ja Egyptissä suosittu hieroglyfien muodot.

Joku ehkä kysyy, "Onko matematiikka sitten keksitty vai löydetty syvältä universumin rakenteesta?" Tätä kysymystä ovat askarrelleet monet suuret matemaatikot ja filosofit kautta aikojen.

### Antiikin Kreikan geometrian mestarit

Antiikin Kreikan filosofit ja matemaatikot, kuten Thales, Pythagoras ja Eukleides, tunnetaan erityisesti geometrian ja lukuteorian alalla tekemästään työstä. Pythagoraan lause, joka kertoo suorakulmaisen kolmion sivujen suhteesta, on yksi matematiikan tunnetuimmista teoreemoista. Eukleides kirjoitti "Elementit" -nimisen teoksen, joka on yksi maailmanhistorian vaikutusvaltaisimmista kirjoista ja jota pidetään geometrian perustusteoksena.

### Algebran aamunkoitto

Intiasta ja Persiasta 500–1600-luvuilta peräisin olevat algebran ideat muuttivat länsimaisen matematiikan suunnan. Matemaatikot, kuten Al-Khwarizmi, jonka nimestä sana "algoritmi" juontaa juurensa, kehittivät menetelmiä, jotka auttoivat yhtälöiden ratkaisussa ja matemaattisten ongelmien yleistämisessä. Hänen työnsä tärkeys on vertaansa vailla, ja se vaikutti merkittävästi myöhemmän ajan matematiikan kehitykseen.

### Euroopan renessanssin neronleimauksia

Matematiikan historiaa ei voi käsitellä mainitsematta Leonhard Euleria, Isaac Newtonia tai Gottfried Wilhelm Leibnizia, jotka toivat matematiikkaan kaipattua syvyyttä ja auttoivat

määrittelemään modernin tieteen suuntaa. Newtonin ja Leibnizin kehittämä differentiaali- ja integraalilaskenta mahdollisti fyysisten ilmiöiden, kuten liikkeen ja kasvun, matemaattisen mallintamisen aivan uudella tavalla.

## **Matematiikka tänään**

Matematiikka on nykyään kaikkialla ympärillämme - se on työkalu, jota käytetään sääennusteiden tekemiseen, rakennusten suunnitteluun, avaruusalusten ohjaukseen ja jopa taiteessa ja musiikissa. Meille se on päivittäinen työkalu, joka auttaa ratkaisemaan ongelmia ja ymmärtämään maailmaa paremmin.

Tässä lyhyessä luvussa olemme raapaisseet vain pintaa matematiikan väririkkaasta historiasta. Toivottavasti olet löytänyt matkan varrelta inspiraatiota ja kunnioitusta tätä universaalista kieltä kohtaan, sillä se on aina ollut ja tulee aina olemaan osa ihmiskunnan suurimpia saavutuksia!

Nyt, kun olet matkustanut ajassa ja tutustunut matematiikan historiaan, on aika palata nykyhetkeen ja katsoa, mitä matematiikan loogiset periaatteet ja kauneus voivat opettaa meille tänään - ja ehkä myös innostua tekemään omia löytöjäsi!

## **1.3. Kaikkialla ympärillämme - Miksi matematiikka on siistiä?**

Hei, nuori matematiikan tutkija ja tulevaisuuden tähti! Oletko koskaan miettinyt, miksi meidän täytyy opiskella matematiikkaa? Miksi koulussa käytetään niin paljon aikaa laskutoimitusten, yhtälöiden ja kaavojen parissa? No, matematiikka on kuin universaali kieli, jota käytetään kommunikointiin ja ongelmien ratkaisemiseen kaikkialla maailmassa. Se on ikkuna ymmärtämään maailmaa ympärillämme!

### **Päivittäisessä Elämässä**

Mieti seuraavaa: kun heräät aamulla, vilkaiset kelloa nähdäksesi, paljonko on aikaa jäljellä ennen koulun alkua. Siinä käytät ajankulun mittausta, mikä on yksi matematiikan monista sovelluksista. Kun lasket rahaa ostosta tehdessäsi tai mietit, riittääkö viikkorahasi uuteen peliin, sinä sovellat matematiikkaa. Matematiikka auttaa sinua hahmottamaan, miten asiat suhteutuvat toisiinsa ja antaa työkaluja ratkaista ongelmia järkevästi ja tehokkaasti.

### **Teknologian Maailmassa**

Kaikki modernit laitteet, kuten älypuhelimet, tietokoneet ja pelikonsolit, toimivat matematiikan periaatteiden mukaisesti. Ohjelmistojen kehittäjät käyttävät matematiikkaa luodessaan uusia

sovelluksia ja pelejä, jotka viihdyttävät meitä. Kun pelaat lempipeliäsi ja näet hienoja grafiikoita, juuri matematiikka on tehnyt sen mahdolliseksi; 3D-mallinnus perustuu matematiikkaan. Jopa sosiaalisen median algoritmit, jotka suosittelevat sinulle uutisia tai videoita, on rakennettu matemaattisten kaavojen avulla.

## **Tiede ja Innovatiot**

Entä silloin, kun tutkijat tekevät läpimurtoja lääketieteessä tai kun insinöörit suunnittelevat uusia kestävämpiä tapoja tuottaa energiaa? Juuri matematiikka on avaintekijä kaikissa näissä keksinnöissä. Esimerkkeinä voidaan mainita lääkkeiden annostelun laskeminen, siltojen rakentaminen tai avaruusalusten lähettäminen toiselle planeetalle. Kaikki nämä saavutukset tarvitsevat matematiikkaa onnistuakseen.

## **Luovuus ja Taide**

Ehkä yllättävintä on se, että matematiikka löytyy myös taiteesta; monet suuret taiteilijat, kuten Leonardo da Vinci tai M.C. Escher, käyttivät matemaattisia periaatteita töissään. Musiikissa sävelasteikot ja rytmit perustuvat matemaattisiin suhteisiin. Jopa kauneinkin luomistyö voi hyödyntää matematiikan perusteita luodakseen harmoniaa ja tasapainoa.

## **Henkilökohtainen Kehitys**

Matematiikka kehittää ongelmanratkaisukykyäsi ja loogista ajatteluasi, jotka ovat taitoja, joita voit soveltaa lähes jokaisella elämäsi alueella. Jos pystyt ratkaisemaan monimutkaisen yhtälön matematiikassa, pystyt varmasti ratkaisemaan muitakin ongelmia, jotka tulevat tiellesi!

Matematiikka on siis enemmän kuin vain numeroita ja kaavoja. Se avaa ovet lukuisiin mahdollisuuksiin, ymmärtämiseen ja osallistumiseen tähän maailmaan, jossa me kaikki elämme. Joten kun avaat matematiikan kirjan ja sukellat sen seikkailuihin, muista, että matematiikka on todella kaikkialla ympärillämme ja se on todellakin siistiä! Ainut kysymys on, mihin kaikkeen sinä päätät sen osaamisesi soveltaa?

# **Osa I: Laskujen labryntti**

Tervetuloa matemaattisen labryntin syövereihin, missä numerot, luvut ja laskutoimitukset odottavat sinua tullakseen ratkaistuiksi! Tämä luku on omistettu luvuille ja niiden salaisille kielille – laskutoimituksille. Käymme läpi peruslaskentaa, tutustumme erilaisiin lukuihin ja opettelemme joitakin tärkeitä sääntöjä, jotka auttavat meitä löytämään ulospääsyn matemaattisista pulmista.

## Lukutyypit ja niiden ominaisuudet

Ennen kuin sukellamme laskutoimitusten syvyyksiin, on tärkeää tuntea luvut, joita käytämme. Tutustumme ensin eri lukutyyppeihin:

### Luonnolliset luvut

Nämä ovat lukuja, joilla lasketaan esineitä tai ilmaistaan järjestystä: 1, 2, 3, ja niin edelleen. Luonnolliset luvut eivät sisällä negatiivisia lukuja eikä nollaa.

### Kokonaisluvut

Kokonaisluvut laajentavat luonnolliset luvut sisältämään nollan sekä negatiiviset luvut: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

### Rationaaliluvut

Rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää murtolukuna kahden kokonaisluvun suhteena, missä nimittäjä ei ole nolla. Esimerkkejä ovat  $1/2$ ,  $3/4$  ja  $-5/6$ .

### Irrationaaliluvut

Nämä ovat lukuja, joita ei voida esittää tarkasti murtoluvun muodossa. Esimerkkejä ovat  $\pi$  (n. 3.14159...) ja neliöjuuri 2 ( $\sqrt{2}$ , n. 1.41421...).

### Reaaliluvut

Reaaliluvut yhdistävät rationaaliluvut ja irrationaaliluvut kattamaan kaikki mahdolliset lukuarvot, jotka voivat olla positiiviset, negatiiviset tai nolla.

### Peruslaskutoimitukset

Nyt kun tunnemme eri lukutyypit, voimme käydä läpi peruslaskutoimitukset yksi kerrallaan.

#### Yhteenlasku (+)

Yhteenlasku kertoo meille kahden tai useamman luvun summan. Esimerkiksi  $5 + 3 = 8$ .

#### Vähennyslasku (–)

Vähennyslasku on prosessi, jossa luvusta poistetaan toinen luku. Esimerkiksi  $8 - 3 = 5$ .

#### Kertolasku (×)



Kertolasku kertoo, kuinka monta kertaa luku otetaan itseensä. Esimerkiksi  $4 \times 3 = 12$ .

### **Jakolasku ( $\div$ )**

Jakolasku jakaa luvun toisella luvulla selvittääkseen, kuinka monta kertaa jakaja mahtuu jaettavaan. Esimerkiksi  $12 \div 3 = 4$ .

### **Prioriteettisäännöt**

Kun suoritamme laskutoimituksia, on tärkeää noudattaa oikeaa järjestystä:

1. Laskutoimitukset aina sulkeiden sisällä ensin.
2. Sen jälkeen suoritetaan kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle.
3. Lopuksi suoritetaan yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle.

### **Harjoitustehtäviä**

1. Laske seuraavien lukujen summa:  $7 + (-5) + 2$ .
2. Vähennä suurin kokonaisluku pienimmästä:  $(-4) - 9$ .
3. Kerro kaksi rationaalilukua keskenään:  $(1/3) \times (3/4)$ .
4. Jaa kokonaisluku rationaaliluvulla:  $6 \div (1/2)$ .

Lopputulokset ja ratkaisut löydät tämän luvun lopusta.

Muista, että matematiikan oppiminen on kuin labyrintin läpikulkemista: toisinaan törmäät umpikujaan, mutta aina löytyy uusi reitti, joka johtaa sinut eteenpäin. Ole kärsivällinen ja tarkka, ja pian huomaat, että numeroiden ja laskutoimitusten maailma avautuu sinulle entistä selkeämmin. Riemuiten eteenpäin, matemaatikko-toveri!

## **2. Numeroiden ninja - Lukujen temppurata**

Tervetuloa matemaattisten taitojen temppuradalle, nuori ninja! Tänään tutkimme lukujoukkoja ja laskutoimituksia. Oletko valmis? Hio miekkasi ja varaudu kohtaamaan erilaisia lukuja – ne ovat kuin ninjoja, jotka liikkuvat varjoissa, valmiina hyppäämään esiin, kun vähiten odotat!

### **Lukujoukkojen dojossa**

Ensimmäinen pysäkkimme on lukujoukkojen dojossa, jossa kohtaamme eri tyyppisiä lukusotureita. Tässä dojo:ssa jokainen luku kuuluu tiettyyn lukujoukkoon, joka määrittelee luvun ominaisuudet ja kuinka se käyttäytyy.

## **Luonnolliset luvut - Ninjojen noviisit**

Ensimmäiset soturit, jotka kohtaamme, ovat luonnollisia lukuja (N). Nämä ovat lukuja 1, 2, 3 ja niin edelleen. Ne ovat ninjojen noviiseja, jotka edustavat laskemisen perusteita. Käytät näitä lukuja, kun lasket esimerkiksi omenoita korissa tai ihmisiä jonossa.

## **Kokonaisluvut - Rohkeat roninit**

Seuraavaksi matkalla ovat kokonaisluvut (Z). Kokonaislukujen joukkoon kuuluvat kaikki luonnolliset luvut, niiden vastaluvut sekä luku nolla. Näistä luvuista saat rohkeat roninit, jotka osaavat toimia sekä positiivisissa että negatiivisissa tilanteissa. Esimerkkejä kokonaisluluista ovat -3, 0, ja 5.

## **Rationaaliluvut - Viisaat velhot**

Kun edetään, kohtaamme rationaaliluvut (Q). Rationaaliluvut ovat kuin viisaita velhoja, jotka voivat esittää minkä tahansa luvun murtolukuna. Voit tunnistaa nämä luvut, sillä ne ovat joko kokonaislukuja tai sellaisia lukuja, jotka voidaan ilmaista kahden kokonaisluvun jakolaskuna. Esimerkiksi  $1/2$  ja  $-3/4$  ovat rationaalilukuja.

## **Reaaliluvut - Mystiset mestarit**

Lopuksi, meidän täytyy kohdata reaaliluvut (R). Nämä ovat kuin mystisiä mestareita, jotka sisältävät kaikki edellä mainitut luvut sekä irrationaaliluvut. Irrationaaliluvut ovat niin mystisiä, etteivät ne suostu esittäytymään murtolukuina. Esimerkki tällaisista ovat piin likiarvo ( $\pi \approx 3.14159$ ) ja neliöjuuri kahdesta ( $\sqrt{2}$ ).

## **Laskutoimitusten temppurata**

Kun olet tutustunut lukujoukkoihin, on aika siirtyä laskutoimitusten temppuradalle. Laskutoimitukset ovat kuin ninjan liikesarjoja, joiden avulla luvut hyppivät, katoavat ja muuttavat muotoaan keinoina saavuttaa laskun harmonia.

## **Yhteen- ja vähennyslasku - Ninjan perustaidot**

Yhteen- ja vähennyslasku ovat kuin ninjan perustaitoja, jotka auttavat liikkumaan sujuvasti lukujen välillä. Muista sijoittaa luvut oikein ja varo etteivät negatiiviset luvut eksytä sinua

varjojen poluille!

## **Kertolasku - Voiman keräämisen taidot**

Kertolasku on voiman keräämisen taito, jossa yhdistät satureiden voimat. Kun ninjat kerääntyvät yhteen, heidän voimansa moninkertaistuvat ja suoritus on tehokkaampi.

## **Jakolasku - Jakamisen taito**

Jakolaskussa puolestaan jaat ninjojen voimat tasaisesti. Olet ehkä kuullut sanonnan "jaa ja hallitse". Tämä on jakolaskun ydin. Ole tarkka, sillä jakolaskussa voi tulla monia ansaitsemattomia esteitä ja jakaminen nollalla ei ole sallittua – se on kuin hyökkäisi varjoa vastaan.

Hyvä ninja, nyt kun tunnet lukujoukot ja laskutoimitukset, olet valmis käyttämään tietoasi viisaasti. Muista, että jokainen luku on kuin oma salainen ninjansa, ja kun hallitset niiden liikkeitä, voit matemaattiset taistelut. Harjoittele taitojasi, pidä mielesi terävänä ja sydämesi avoimena uusille oivalluksille. Laskennan maailma on suuri ja täynnä seikkailuja. Onnea matkaan!

# **2.1. Salapoliisina numeroiden maailmassa - Luonnolliset luvut**

Tervetuloa matkan alkuun, nuori matemaatikko! Juuri nyt olet askeleen päässä matkasta, joka vie sinut numeroiden ja matemaattisten mysteerien maailmaan. Pidä hattusi visusti päässäsi ja suurennuslasisi valmiina tutkimusretkelläsi, sillä olet lähdössä salapoliisiksi luonnollisten lukujen valtakuntaan.

## **Mikä ihmeen luonnollinen luku?**

Luonnolliset luvut ovat kuin vanhoja ystäviä. Ne ovat ensimmäisiä lukuja, joita opimme tunnistamaan ja käyttämään. Ne ovat myös ensimmäiset askeleet kohti matemaattista ajattelua. Luonnollisilla luvuilla voimme laskea omenoita korissa, astella portaita tai mitata, kuinka monta päivää on kulunut syntymäpäivästäsi. Niiden avulla kuvaamme asioita, joita on vähintään yksi tai useampi, eli toisin sanoen, kaikkea mitä voidaan laskea. Numerojärjestys alkaa ykkösestä ja jatkuu niin kauas kuin mielikuvituksesi kantaa: 1, 2, 3, 4, 5... ja niin edelleen.

## **Peruslaskutoimitukset - Salapoliisin työkalut**

Kun tunnet luonnolliset luvut, voit alkaa käyttää salapoliisin tärkeimpiä työkaluja: peruslaskutoimituksia. Yhteenlasku, vähennyslasku, kertolasku ja jakolasku ovat kuin neljä kompassisuuntaa, jotka ohjaavat meitä lukujen maailmassa. Katsotaanpa niitä hieman tarkemmin:

### **Yhteenlasku - Liittolaiset kokoontuvat**

Yhteenlasku on kuin luonnollisten lukujen juhla, missä kaikki kutsutaan mukaan. Yhteen laskettaessa lukujen arvo kasvaa. Esimerkiksi, jos sinulla on 3 omenaa ja saat vielä 2 lisää, sinulla on yhteensä  $3 + 2 = 5$  omenaa.

### **Vähennyslasku - Etsivän tarkka silmä**

Vähennyslasku on kuin arvoituksen ratkaisemista: se paljastaa, mikä on jäljellä, kun jotakin on otettu pois. Jos sinulla on 5 omenaa ja syöt niistä 2, sinulle jää  $5 - 2 = 3$  omenaa.

### **Kertolasku - Arvoitus moninkertaistuu**

Kertolaskussa yhdistät asiat toistuvasti. Se on kuin olisit löytänyt vihjeen ja näkisit samanlaisen vihjeen yhä uudelleen ja uudelleen. Jos sinulla on 4 omenalaatikkoa ja jokaisessa on 3 omenaa, sinulla on yhteensä  $4 \times 3 = 12$  omenaa.

### **Jakolasku - Jako-oikeudenmukaista tutkimusta**

Jakolasku on kuin jaettaisiin todisteita tasapuolisesti kaikille tutkijoille. Jos sinulla on 12 omenaa ja haluat jakaa ne tasaisesti 4 ystävällesi, jokainen saa  $12 \div 4 = 3$  omenaa.

### **Salapoliisin muistiinpanot**

Matemaatikkonakin sinun tulee aina pitää huolta tarkkuudesta. Muista, että tietyissä tilanteissa peruslaskutoimituksia ei voi suorittaa sellaisenaan:

- Vähennyslaskussa ei voi ottaa suurempaa lukua pienemmästä ilman, että siirrytään negatiivisten lukujen puolelle (jota voimme käsitellä myöhemmin).
- Jakolaskussa numerolla nolla ei voi jakaa. Miksi? Koska se rikkoisi tutkivan salapoliisin säännöt – se ei nimittäin anna selkeää vastausta ja johtaa matemaatikot harhaan.

### **Ratkaisevien päätelmien aika**

Numeroiden maailma on täynnä mysteerejä odottamassa sinua. Kun pidät silmäsi auki ja suurennuslasin kädessäsi, jokainen laskutoimitus vie sinut lähemmäksi totuutta, jokainen

numero paljastaa uuden vihjeen. Niin kauan kuin muistat luonnollisten lukujen ja peruslaskutoimitusten periaatteet, pystyt ratkaisemaan monimutkaisimmatkin arvoitukset.

Onnea matkaan, nuori salapoliisi! Muista, että jokainen ongelma on kuin arvoituksellinen lukko – ja sinun tietosi ovat avain, joka avaa sen.

Seuraavilla sivuilla jatkamme seikkailuamme yhdessä ja perehdymme syvemmin erilaisiin matemaattisiin haasteisiin. Pidä vihkosi ja kynäsi valmiina, sillä jokainen tehtävä on kuin jännittävä johtolanka matematiikan kiehtovassa maailmassa.

## 2.2. Numeroiden varjopuoli - Kokonaisluvut ja negatiiviset luvut

Tavatessamme ensimmäisiä kertoja lukuja, tapasimme positiivisia kokonaislukuja. Nämä ovat kuin auringonpaistetta matematiikan taivaalla - ne ovat lukusuorallamme olevia pisteitä, jotka alkavat nolasta ja kasvavat loputtomiin. Mutta nyt on aika tutustua lukujen maailman toiseen puoleen, missä matematiikan varjot leikkivät ja lukusuoramme venyy toiseen suuntaan. Astukaamme rohkeasti pimeään ja opetelkaamme, mikä on se salaperäinen voima, nimeltään negatiiviset luvut!

### Kokonaisluvut

Kokonaislukujen perheeseen kuuluvat kaikki positiiviset kokonaisluvut, lukumme nolla sekä uudet jäsenet: negatiiviset kokonaisluvut. Jos kuvittelemme, että luvut ovat askeleita lukusuoralla, positiiviset luvut ovat askeleita eteenpäin alkaen nolasta, kun taas negatiiviset luvut ovat askeleita taaksepäin.

**Esimerkki 1:** Kuvittele, että seisot nollan kohdalla. Jos otat 3 askelta eteenpäin, olet luvulla +3. Jos taas otat 5 askelta taaksepäin, olet luvulla -5.

### Negatiiviset luvut

Negatiiviset luvut näyttävät hieman pelottavilta ensi silmäyksellä, mutta ne ovat vain luvun nollan toisella puolella sijaitsevia lukuja. Ne tunnistaa miinusmerkistä (-) luvun edessä. Tämä merkki ei tarkoita vähentämistä tässä yhteydessä, vaan se kertoo, että liikumme lukusuoralla taaksepäin.

**Esimerkki 2:** Olet kaupassa ostoksilla 20 eurolla. Ostat tavarat, jotka maksavat yhteensä 25 euroa. Kassalla käytetään miinusmerkkiä (-) osoittamaan, että sinulla on 5 euroa vähemmän kuin mitä tarvitset. Voimme kirjoittaa tämän matemaattisena lausekkeena:  $20 - 25 = -5$ .

## Negatiivisten lukujen käyttö arjessa

Negatiiviset luvut eivät ole vain abstrakteja käsitteitä - ne ovat tärkeitä laskennassa ja kuvaavat monia todellisen maailman ilmiöitä:

- Lämpötila: Talvella lämpömittari saattaa näyttää  $-5\text{ °C}$ , mikä tarkoittaa viittä astetta pakkasta.
- Velka: Jos sinulla on enemmän velkaa kuin rahaa, sanotaan, että olet miinuksella - sinulla on negatiivinen pankkitilanne.
- Merenpinta: Merenpinnan taso on toinen esimerkki, missä negatiiviset luvut esitetään. Jos olet merenpinnan alapuolella, sijaintisi voidaan ilmaista negatiivisena metrimääränä.

## Laskutoimitukset negatiivisilla luvuilla

Laskutoimitusten tekeminen negatiivisten lukujen kanssa seuraa samankaltaisia sääntöjä kuin positiivisten. Mutta tietenkin on olemassa muutama erityispiirre, joka meidän tulee pitää mielessä:

1. Kun summataan kaksi negatiivista lukua, loppusumma on negatiivinen.
2. Kun vähennetään negatiivinen luku toisesta negatiivisesta luvusta, laskutoimitus muuttuu käytännössä yhteenlaskuksi, mutta luvut kääntyvät positiivisiksi.
3. Kertolaskussa, jos kerrotaan kaksi negatiivista lukua keskenään, tulos on positiivinen.
4. Jaossa pätee sama sääntö kuin kertolaskussa: kahden negatiivisen luvun jako antaa positiivisen tuloksen.

## Esimerkki 3:

- $(-3) + (-4) = -7$
- $(-3) - (-4) = -3 + 4 = 1$
- $(-3) * (-4) = 12$
- $(-12) / (-3) = 4$

## Harjoitustehtävät

**Tehtävä 1:** Laske seuraavat: a)  $-7 + 2$  b)  $-8 - 5$  c)  $-6 * -2$  d)  $-10 / (-5)$

**Tehtävä 2:** Janilla oli 50 euroa ja hän osti pelin, joka maksoi 60 euroa. Kuinka paljon rahaa Janilla on jäljellä? Selitä vastauksessasi negatiivisten lukujen käyttöä.

**Tehtävä 3:** Lämpömittari näyttää  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$  aamulla ja lämpötila laskee 4 astetta. Mikä on uusi lämpötila?

Näiden esimerkkien ja harjoitustehtävien avulla alamme ymmärtää, kuinka negatiiviset luvut ilmentävät erilaisia tilanteita ja kuinka niitä voidaan käyttää laskutoimituksissa. Ne eivät ole yhtään sen pelottavampia kuin niiden valoisammat vastinparinsa – positiiviset luvut. Matematiikan maailmaan kuuluu siis sekä valo että varjo, ja nyt olette valmiita käyttämään molempia arkipäivän mysteereiden ratkomisessa. Onneksi olkoon – olette astuneet suureen seikkailuun lukujen varjopuolelle!

## 2.3. Murtolukujen mysteeri - Rationaalilukujen salat

Tervetuloa tutkimaan matematiikan mystistä maailmaa! Tässä luvussa lähdemme paljastamaan rationaalilukujen, tuttavallisemmin murtolukujen, salaisuuksia. Rationaaliluvut ovat kuin matemaattisia aarteita, jotka tarjoavat selityksen moniin laskennallisiin kysymyksiin ja arjen pulmiin. Mutta mitä rationaaliluvut oikeastaan ovat? Ja kuinka niitä käytetään? Aloitetaan seikkailu!

### Mikä on rationaaliluku?

Rationaaliluku on numero, joka voidaan ilmaista kahtena kokonaislukuna, numeroiden jakosuhteena. Yksinkertaisesti sanottuna se on murtoluku. Esimerkiksi  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{1}$  ja  $-\frac{15}{5}$  ovat kaikki rationaalilukuja. Myös kokonaisluvut ovat rationaalilukuja, sillä ne voidaan ilmaista jakolaskuna: esimerkiksi 5 on sama kuin  $\frac{5}{1}$ .

Jokaisella rationaaliluvulla on kaksi osaa: osoittaja ja nimittäjä. Osoittaja sijaitsee murtoviivan yläpuolella ja kertoo, kuinka monta osaa kokonaisuudesta on kyseessä. Nimittäjä murtoluvun alapuolella kertoo, kuinka moniin yhtä suuriin osiin kokonaisuus on jaettu.

### Rationaalilukujen laskutoimitukset

Rationaalilukujen kanssa suoritetaan monenlaisia laskutoimituksia. Yhteen- ja vähennyslaskut, kertolaskut ja jakolaskut. Jokainen toimitus vaatii omat pikku kikkansa, jotka me tässä selvitämme.

### Yhteen- ja vähennyslaskut

Kun lasketaan murtolukuja yhteen tai vähennetään niitä, tulee ensisijaisesti varmistaa, että nimittäjät ovat samat. Jos murtolukujen nimittäjät ovat erilaiset, täytyy ensin muuttaa murtoluvut yhteisnimittäjäisiksi. Sen jälkeen voit lisätä tai vähentää osoittajat.

**Esimerkki:** Laske yhteen  $1/4$  ja  $1/2$ .

Vaihe 1: Etsi yhteinen nimittäjä (YNN).  $1/2 = 2/4$  (kerrotaan molemmat luvut kahdella)

Vaihe 2: Lisää osoittajat ja pidä nimittäjä samana.  $1/4 + 2/4 = (1+2)/4 = 3/4$

## Kertolaskut

Kertolasku on murtolukujen maailman helpoin laskutoimitus. Kerro yksinkertaisesti osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

**Esimerkki:** Kerro  $3/4$  ja  $2/3$ .  $(3/4) * (2/3) = (3 * 2) / (4 * 3) = 6/12$ . Ja kun supistetaan  $6/12$ , saadaan  $1/2$ .

## Jakolaskut

Jakolasku murtoluvuilla on kuin kertolasku, jossa toinen murtoluvuista käännetään ympäri. Tätä toista murtolukua sanotaan käänteisluvuksi.

**Esimerkki:** Jaa  $3/4$  ja  $2/3$ .  $(3/4) / (2/3) = (3/4) * (3/2) = (3 * 3) / (4 * 2) = 9/8$  Ja tässä on hieman erityistä: saimme vastaukseksi epämurtoluvun. Ei huolta, voimme kirjoittaa sen sekamurtolukuna:  $1 \frac{1}{8}$ .

## Rationaalilukujen salainen voima

Rationaalilukujen ymmärtäminen ja niiden kanssa taitava laskeminen avaa sinulle ovia monissa matematiikan pulmissa. Voit hyödyntää niitä kauppamatkalla, leipoessa, käsityöprojekteissa ja monessa muussa tilanteessa. Ne ovat kuin avain, joka auttaa sinua jakamaan ja mittaamaan maailmaa ympärilläsi.

Muista, että kärsivällisyys ja harjoittelu ovat avaimia matematiikan oppimiseen. Joten leikitään luvuilla, pyöritellään niitä ja ratkotaan murtolukujen mysteereitä yksi laskutoimitus kerrallaan!

## 2.4. Piilossa jossain - Reaaliluvut ja irrationaaliluvut

Hei matematiikan löytöretkeilijä! Olet varmasti huomannut, että numerot ja luvut ympäröivät meitä jokapäiväisessä elämässä. Niitä löytyy kaikkialta – kelloista, rahan arvoista, resepteistä, ja jopa siitä, kuinka monta askelta otat matkalla koulusta kotiin. Matematiikka on kuin universaali kieli, joka auttaa meitä lajittelemaan ja ymmärtämään maailmaamme monin tavoin. Tässä luvussa sukellamme reaalilukujen ja irrationaalilukujen kiehtovaan maailmaan.



Voi olla, että löydät itsesi miettimästä, miten jokin niin yksinkertainen kuin luku voi sisältää niin paljon mysteeriä!

## **Reaaliluvut - kaikki mitä voit mitata**

Reaaliluvut ovat kaikki luvut, joita voit kuvitella käyttäväsi mittauksissa. Ne ovat ikään kuin matematiikan kaikkien hyödykkeiden valtava supermarket, josta löydät kaiken tarvitsemasi: tässä kaupassa on hyllyt täynnä kokonaislukuja (kuten -3, 0, 7), mutta myös hyllyt murtolukuja (kuten  $1/2$  tai 3,5) varten. Reaaliluvut ovat kätevä nimitys kaikille näille erilaisille luvuille – niille, joissa on desimaaleja ja niille, joissa ei ole.

## **Irrationaaliluvut - maailman piilotetut aarteet**

Sitten ovat ne luvut, jotka ovat kuin piilossa aarrearkussa maamerkkien ja karttojen takana: irrationaaliluvut. Toisin kuin murtoluvut, irrationaaliluvut eivät ole kauniisti jaettavissa osiin. Niitä ei voi kirjoittaa yksinkertaisena osamääränä, eli kahtena kokonaislukuna jakolaskussa. Irrationaaliluvut ovat kuin äärettömän pitkiä numerojonoja ilman toistuvaa kuviota – ne vain jatkuvat ja jatkuvat, eivätkä koskaan toista itseään. Ehkä kuuluisin irrationaaliluku on  $\pi$  (pii), jota käytämme ympyrän kehän pituuden laskemiseen. Tähän päivään mennessä ei ole löydetty toistuvaa kaavaa  $\pi$ :n desimaaleille, vaikka laskemme niitä miljardeja!

## **Miten reaaliluvut ja irrationaaliluvut liittyvät toisiinsa?**

Reaaliluvut on tavallaan jaettu kahteen 'heimoon': rationaaliluvut ja irrationaaliluvut. Rationaaliluvut ovat ne, jotka pysyvät 'järjestyksessä' – ne voivat olla kokonaislukuja tai murtolukuja, ja ne ovat lopulta ennustettavissa ja jakautuvat tasaisesti. Irrationaaliluvut sen sijaan ovat 'villi kortti' – ne ovat kuten matematiikan taikurit, jotka tarjoavat meille loputtomia desimaaleja ilman toistuvaa kaavaa.

## **Uteliaisuus vie voittoon**

Matematiikan maailmassa jännittävin seikkailu on usein se, joka johdattaa tuntemattomaan. Reaaliluvut, mukaan lukien mystiset irrationaaliluvut, ovat kuin matematiikan kartoittamattomat vesistöt – ne odottavat sinua löytämään ja tutkimaan syvyyksiään. Pysy uteliaana ja jatka kysymistä, koska kysymykset ovat parhaita työkaluja uusien asioiden oppimiseen.

## **Päivän pulma**

Pulma: Onko seuraava luku  $2/3$  rationaalinen vai irrationaalinen? Entä luku  $e$  (noin 2,71828..., jota kutsutaan myös Eulerin luvuksi)? Selitä, miksi.

Muistathan, matematiikan matkailija, että reaalityluvut ja irrationaalityluvut ovat vain yksi askel isommassa matkassamme ymmärtää lukujen salaisuuksia. Ole valmis lähtemään matkaan – se on matka, joka ei koskaan pääty!

## 3. Lukujen superkyvyt

Matematiikka on täynnä mitä erilaisempia lukuja, ja kukin niistä omaa omat ainutlaatuiset kykynsä ihan kuin sarjakuvien supersankarit. Olet varmasti törmännyt jo moniin näistä lukusankareista: on olemassa numeroita, jotka ovat lukijalleen ystävällisiä ja helposti ymmärrettäviä, kun taas toiset vaikuttavat ensi näkemältä hieman salaperäisiltä. Tässä luvussa tutustumme siihen, mitkä supersankarimaiset kyvyt lukujen maailma pitää sisällään!

### Luonnolliset luvut - Roolipelien ritareita

Seikkailumme alkaa luonnollisten lukujen valtakunnasta, josta kaikki tarinat alkavat. Näitä ovat tutut ykkösestä eteenpäin lasketut luvut (1, 2, 3, ...). Ne esittelevät meille yksinkertaisimpien laskutoimitusten superkyvyt: yhteen- ja vähennyslaskun sekä kertolaskun ja jakolaskun. Luonnolliset luvut ovat kuin roolipelien ritareita, aina valmiina auttamaan matematiikan ongelmien ratkaisussa.

### Kokonaisluvut - Seikkailijat tasapainon rajamailla

Kun astumme pois luonnollisten lukujen turvallisesta linnakkeesta, törmäämme kokonaislukujen epätavalliseen maailmaan. Kokonaisluvut (-2, -1, 0, 1, 2, ...) sisältävät luonnollisten lukujen lisäksi niiden synkemmät vastinparit, negatiiviset luvut, ja nollan, tasapainon vartijan. Ne osoittavat meille, että matemaattiset seikkailut eivät rajoitu vain positiivisiin tehtäviin, mutta joskus tarvitsemme "taaksepäin" suuntautuvaa voimaa ratkaistaksemme arvoituksia, joissa meno menee miinukselle.

### Rationaalityluvut - Muodonmuuttajat muuttuvassa maailmassa

Matematiikan maisema muuttuu entisestään, kun kohtaamme rationaalityluvut, jotka ovat kuin muodonmuuttajia. Ne voivat esiintyä eri muodoissa - murtolukuina (esimerkiksi  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ) tai desimaalitylukuina (0,5 , 0,75) - ilmentäen vertaansa vailla olevaa muuntumiskykyään. Rationaalitylukujen superkyvyn ansiosta ne pystyvät edustamaan kokonaisia ja osia kokonaisista, mikä on arvokasta erityisesti silloin, kun jakaminen ei mene tasan.

### Irrationaalityluvut - Mystiset voimat piilossa desimaalitylien takana

Sitten on irrationaaliset luvut, jotka ovat kaikkein mystisimpiä lukujen joukossa, kuten matematiikan salaperäiset velhot. Ne ovat lukuja, jotka eivät pääty eivätkä toistu desimaalimuodossaan (kuten  $\pi$  (pi) tai neliöjuuri 2 ( $\sqrt{2}$ )). Irrationaaliluvut osoittavat, että matematiikassa on tilaa loputtomalle tutkimusmatkalle kohti äärettömän pitkiä desimaalisarjoja.

## Alkuluvut - Voimanlähteet numeroiden maailmassa

Lopuksi kohtaamme alkuluvut, jotka ovat todellisia voimanlähteitä. Alkuluvut ovat suurempia kuin 1 ja jaollisia vain yhdellä ja itsellään (kuten 2, 3, 5, 7, ...). Ne ovat kuin lukujen maailman atomit - kaikki muut positiiviset kokonaisluvut on mahdollista rakentaa alkulukujen tuottamalla energialla. Alkulukujen kyky luoda ja kantaa toisia lukuja on ainutlaatuinen supersankaruuden muoto matematiikassa.

Jokaisella luvulla on oma roolinsa matematiikan maailmankaikkeudessa, ja näiden roolien tunteminen auttaa meitä ymmärtämään, miten ne toimivat yhdessä luoden tarinan, jota matematiikka meille kertoo. Arvoisa nuori matemaatikko, oletko valmis sukeltamaan luku-avaruuden syövereihin ja löytämään oma supersankarisi jokaisesta matemaattisesta haasteesta? Näppäinsankaruutesi ja laskuritaruutesi ovat nousemassa uudelle tasolle, kun opit tuntemaan lukujen superkyvyt!

## 3.1. Jaollisuuden jäljillä - Jaetaanko vaiko eikö jaeta?

Matematiikka on täynnä salaisuuksia ja arvoituksia odottamassa ratkaisuaan, ja yksi mielenkiintoisimmista niistä liittyy lukujen jaollisuuteen. Ennen kuin sukellamme syvemmälle tämän luvun saloihin, käymme läpi, mitä lukujen jaollisuus tarkoittaa. Jaollisuus on ominaisuus, joka kertoo, voidaanko jokin luku jakaa toisella luvulla siten, että tuloksena on kokonaisluku, eli ei jää mitään jakojäännöstä.

### Jaollisuuden perusteet

Kun sanomme, että luku  $a$  on jaollinen luvulla  $b$ , tarkoitamme, että jaettaessa  $a$  luvulla  $b$ , saadaan tulokseksi kokonaisluku. Esimerkiksi 15 on jaollinen luvulla 3, koska  $15 \div 3 = 5$ , joka on kokonaisluku.

### Jaollisuussääntöjä:

- Jos luvun viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8, luku on jaollinen kahdella.
- Jos luvun numeroiden summa on jaollinen kolmella, niin on myös itse luku.

- Luku on jaollinen viidellä, jos sen viimeinen numero on 0 tai 5.

## Alkuluvut ja niiden merkitys

Alkuluvut ovat niitä mystisiä numeroita, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja ykkösellä. Toisin sanoen, alkuluvuilla ei ole muita jakajia kuin 1 ja luku itse. Ensimmäiset alkuluvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja niin edelleen.

Miksi alkuluvut ovat tärkeitä? Ne ovat matematiikan atomit; muut luvut voidaan jakaa alkutekijöihinsä eli esittää alkulukujen tuloina. Kun jaamme luvun alkutekijöihin, teemme eräänlaisen matemaattisen "aarteiden jaon", paljastaen luvun perimmäisen olemuksen.

## Alkutekijöihin jako

Oletetaan, että meillä on luku, joka ei ole alkuluku, esimerkiksi 28. Miten jaamme sen alkutekijöihin? Tässä on yksi tapa tehdä se:

1. Aloita pienimmästä alkuluvusta, joka on 2. Kysy itseltäsi: Onko 28 jaollinen kahdella? Kyllä on, sillä 28 on parillinen luku.
2. Jaamme 28 kahdella saaden  $28 \div 2 = 14$ .
3. Toistamme prosessin luvulle 14. Se on edelleen jaollinen kahdella:  $14 \div 2 = 7$ .
4. Luku 7 ei ole jaollinen kahdella, mutta se onkin alkuluku! Se tarkoittaa, että olemme päässeet päätepisteeseen.

Nyt voimme kirjoittaa 28 alkutekijöihin jaettuna:  $28 = 2 \times 2 \times 7$  tai vielä tiiviimmin käyttäen eksponenttia  $28 = 2^2 \times 7$ .

## Alkutekijöihin jaon tärkeys

Miksi meidän pitäisi välittää alkutekijöihin jaosta? Yksi syy on se, että se auttaa meitä ymmärtämään lukujen perusrakenteita ja löytämään nopeasti suurimman yhteisen tekijän (SYT) tai pienimmän yhteisen kertoimen (PYY) kahdelle tai useammalle luvulle, mikä on hyödyllistä ratkaistaessa monenlaisia matemaattisia pulmia.

## Harjoitellaan yhdessä!

Tutkitaanpa luvun 30 jaollisuutta ja jaetaan se alkutekijöihinsä.

1. Onko 30 jaollinen kahdella? On, koska se päättyy nollaan. Jaamme  $30 \div 2 = 15$ .
2. Seuraavaksi kokeilemme, onko 15 jaollinen kahdella. Ei ole, joten siirrymme seuraavaan alkulukuun, joka on 3.

3. Onko 15 jaollinen kolmella? Kyllä  $15 \div 3 = 5$ , ja 5 on itse alkuluku.

Nyt voimme kirjoittaa 30 alkutekijöihin jaettuna seuraavasti:  $30 = 2 \times 3 \times 5$ .

Nähtyämme, kuinka jaollisuus ja alkutekijöihin jako toimivat, on aika tarttua tehtäviin ja selvittää, onko sinusta jaollisuuden mestariksi! Muista, kuten kaikessa matematiikassa, harjoitus tekee mestarin. Hio siis jaollisuuden ja jakamisen taitojasi seuraavilla harjoitustehtävillä ja löydä piilotetut yhteydet lukujen välillä. Muistathan myös pitää hauskaa, sillä matematiikka on täynnä seikkailuja!

## 3.2. Matematiikan mahtavat muuntajat - Vastaluku ja käänteisluku

Tervetuloa matkalle matematiikan kiehtovaan maailmaan, jossa jokainen luku kätkee sisäänsä ainutlaatuisia salaisuuksia! Aloitamme seikkailumme tutkimalla kahta erityistä käsitettä: vastalukua ja käänteislukua. Kummatkin ovat kuin matemaattisia muuntajia, jotka muuttavat lukumme täysin uudennlaisiksi. Mutta miten ne toimivat? Ja mihin niitä käytetään? Selvitetään se yhdessä.

### Vastaluku - Luvun salainen vastavoima

Ensimmäisenä tutustutaan vastalukuun, joka on käytännössä lukumme peilikuvaa. Jos sinulla on numero 5, sen vastaluku on -5. Ja jos sinulla on -3, sen vastaluku on 3. Vastaluvun löytämisen kaava onkin oikeastaan hyvin yksinkertainen:

vastaluku = - (alkuperäinen luku)

Vastaluvun merkittävä ominaisuus on se, että alkuperäisen luvun ja sen vastaluvun summa on aina nolla. Tämä tarkoittaa, että ne kumoavat toisensa matemaattisessa mielessä.

esimerkki 1:  $8 + (-8) = 0$

esimerkki 2:  $-6 + 6 = 0$

Nyt sinä voit kokeilla! Mikä on luvun -4 vastaluku? Entä 12,5:n vastaluku?

### Käänteisluku - Lukujen heijastus murtolukumaailmassa

Kun astumme askeleen pidemmälle, löydämme itsemme murtolukujen maailmasta, jossa käänteisluku odottaa meitä. Käänteisluku on kuin vastaluvun serkku, joka ilmaisee luvun "kääntöpuolen". Käänteisluku syntyy vaihtamalla luvun osoittaja ja nimittäjä päittäin.

Jos meillä on luku  $a$  (joka ei ole nolla), sen käänteisluku on  $\frac{1}{a}$ .

esimerkki 1: luvun 5 käänteisluku on  $\frac{1}{5}$

esimerkki 2: luvun  $\frac{3}{4}$  käänteisluku on  $\frac{4}{3}$

Käänteisluku on hyödyllinen, sillä kun kertolaskussa on luvun käänteisluku mukana, tulos on aina yksi!

esimerkki 3:  $7 \times \frac{1}{7} = 1$

esimerkki 4:  $\frac{-3}{8} \times \frac{8}{-3} = 1$

Kokeile itse muodostaa käänteislukuja. Mikä on luvun  $\frac{2}{5}$  käänteisluku? Entä luvun -2?

### **Itseisarvo - Lukujen ehdoton suuruus**

Sivuhuomautuksena puhumme vielä itseisarvosta. Se on käsite, joka kuvaa luvun suuruutta ilman merkkiä – se on aina positiivinen. Itseisarvo ilmaistaan pystysuorilla viivoilla luvun ympärillä.

esimerkki 1:  $|7| = 7$

esimerkki 2:  $|-5| = 5$

Itseisarvo kertoo, kuinka "kaukana" luku on nollasta lukusuoralla, huolimatta siitä, onko luku positiivinen vai negatiivinen.

esimerkki 3:  $|8| = |-8| = 8$

Nyt olisi sinun vuorosi! Laske seuraavien lukujen itseisarvot: -1, 3, ja -10.

### **Yhteenveto**

Nyt olet tutustunut matematiikan muuntajiin, vastalukuun ja käänteislukuun. Olet havainnoinut niiden hämmästyttäviä ominaisuuksia ja näet, kuinka ne toimivat yhdessä luvun kanssa.

Matemaatikot käyttävät näitä käsitteitä niin yksinkertaisissa laskutoimituksissa kuin monimutkaisissa matemaattisissa probleemoissa, joten niillä on valtava merkitys matematiikan ymmärtämisessä. Pidä hauskaa muuntajien parissa ja muista, että matematiikassa jokainen luku on seikkailu odottamassa sinua!

Kertauskysymykset:

1. Mikä on vastaluku ja miten se lasketaan?

2. Mainitse esimerkki, jossa käytät käänteislukua.
3. Millä matemaattisella symbolilla ilmaistaan itseisarvo?
4. Laske lukujen  $3$ ,  $-\frac{1}{2}$  ja  $-\frac{7}{3}$  käänteisluvut.
5. Jos luvun itseisarvo on 9, mitkä ovat mahdolliset alkuperäiset luvut?

### 3.3. Voiman varassa - Potenssit ja neliöjuuret

Tervetuloa matemaattisen voiman ja mysteerin maailmaan! Tässä luvussa sukellamme potenssien ja juurien valtakuntaan, jossa luvut nousevat valtaan ja mistä löytyy ratkaisuja monimutkaisiinkin pulmiin. On aika tutustua siihen, miten matemaattisia ilmaisuja voidaan esittää kompaktimmassa ja tehokkaammassa muodossa!

#### Potenssit - suurennuslasin alla

Aluksi keskitymme potensseihin, jotka ovat tapa ilmaista toistuvaa kertolaskua lyhyesti. Potenssi koostuu kahdesta osasta: kannasta ja eksponentista. Kannan  $a$  oikeaan yläkulmaan kirjoitetaan pienempi luku, eksponentti  $n$ , joka kertoo, kuinka monta kertaa kanta kerrotaan itsellään:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ kertaa}}$$

Esimerkiksi:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

Potensseja käytetään paljon matematiikassa, ja ne tekevät suurten lukujen käsittelystä huomattavasti helpompaa. Potensseilla on omat laskusääntönsä, jotka säästävät aikaa ja vaivaa:

1. **Potenssien tulo**, kun kannat ovat samat:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. **Potenssien osamäärä**, kun kannat ovat samat:  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , kun  $a \neq 0$
3. **Potenssin potenssi**:  $(a^m)^n = a^{m \times n}$
4. **Tulo potenssiin**:  $(ab)^n = a^n \times b^n$

Kokeilkaa yhdessä näiden sääntöjen soveltamista erilaisissa tehtävissä.

## Neliöjuuret - kaivetaanko juuria?

Potenssien vastavoimaksi tulevat juuret, joista yleisin on neliöjuuri. Neliöjuuret liittyvät läheisesti toiseen potenssiin, sillä ne kertovat, mikä luku kerrottuna itsellään antaa alkuperäisen luvun. Neliöjuurta kuvaa symboli  $\sqrt{\phantom{x}}$ , ja se toimii näin:

$$\sqrt{a} = b \text{ tarkoittaa, että } b^2 = a$$

Esimerkiksi neliöjuuri luvusta 25 on 5, koska  $5 \times 5 = 25$ :

$$\sqrt{25} = 5$$

Neliöjuuri voi olla vain positiivinen, sillä negatiivinen kertaa negatiivinen on positiivinen.

Neliöjuurtakin voidaan soveltaa ainoastaan ei-negatiivisiin reaalilukuihin, ja sillä on myös omat laskusääntönsä:

1. **Kahden neliöjuuren tulo:**  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

2. **Kahden neliöjuuren osamäärä:**  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  kun  $b \neq 0$

Nyt on teidän vuoronne testata neliöjuurten salat! Etsikää esimerkkejä ympärillänne ja soveltakaa löytämiänne juuria arkipäivän matematiikkaan.

## Loppuharjoituksia

Kun potenssit ja neliöjuuret ovat nyt tuttuja, voitte ottaa mittaa niitä käsittelevistä tehtävistä. Etsikää pareja, joille voitte laskea potenssin tai neliöjuuren. Kokeille laskea, kuinka monta kertaa suurempi  $10^3$  on kuin  $10^1$ , tai mikä on  $\sqrt{144}$ .

Muistakaa, että matematiikka on kuin voimistelua aivoille: mitä enemmän harjoittelette, sen notkeammiksi ja vahvemmiksi ne muuttuvat. Ja jokainen uusi oppimanne asia on kuin suurempi lihas matematiikan voimassanne!

## 3.4. Taikasauvat ja loitsu - Laskujärjestys ja liitännäisyys

Matemaattinen maailma on täynnä salaisuuksia ja taikaa, joita voit oppia hallitsemaan, kun tunnet oikeat loitsut ja taikasauvojen käyttötavat. Laskutoimituksien suorittamisessa käytetään



erityistä taikasauvaa nimeltä "laskujärjestys" ja voimakasta loitsua, joka tunnetaan nimellä "liitännäisyys". Kun hallitset nämä, olet matkalla kohti matematiikan mestaruutta!

## Laskujärjestyksen loitsu

Laskujärjestys on kuin taikaloitsu, joka määrää sen, missä järjestyksessä kuljet matemaattisten mysteerioiden läpi. Loitsu koostuu seuraavista säännöistä:

1. **Sulut ensin** - Kuten taikapiiri suojaa sinua, sulut suojaavat laskutoimituksen tehtävääsi ja kertovat, mitä tulee tehdä ensimmäisenä.
2. **Eksponentit seuraavaksi** - Mahtavat voimat, kuten tulet ja salamat, tyypillisesti esitetään eksponenttien avulla. Niinpä, kun olet suorittanut sulut, on aika kohdata eksponentit.
3. **Kerto- ja jakolaskut** - Kuten taistelu miekalla ja kilvellä, nämä laskutoimitukset ovat taisteluun valmiita seuraavina. Ne suoritetaan vasemmalta oikealle.
4. **Yhteen- ja vähennyslaskut** - Lopuksi, kun muut rituaalit on suoritettu, voit lisätä tai poistaa loitsuistasi energiaa yhteen- ja vähennyslaskujen avulla.

## Liitännäisyyden taikasauva

Liitännäisyys on taikasauva, jota voit heilauttaa, kun sinulla on useita samanlaisia laskutoimituksia jonossa. Tämä taianomainen ominaisuus antaa sinun ryhmitellä laskut eri tavoin, ja tulos on aina sama. Käytä tätä asetta viisaasti, ja voit tehdä monimutkaisista loitsuista selvää jälkeä.

## Esimerkki loitsusta liitännäisyyden avulla:

Aloita ryhmittelemällä luvut uudelleen parantaaksesi niiden vahvuutta:

- $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
- $(6 \times 2) \times 3 = 6 \times (2 \times 3)$

Näetkö? Laskutapahtumien järjestys muuttuu, mutta loitsun tulos pysyy samana. Tämä taika pätee yhteen- ja kertolaskuissa, mutta varo, se ei toimi vähennys- eikä jakolaskuissa!

## Yhdistä taika

Kun yhdistät laskujärjestysloitsun ja liitännäisyyden taikasauvan, voit ratkoa monimutkaisia arvoituksia ja tehtäviä. Ota tästä esimerkki:

**Tehtävä:** Selvitä mysteerin arvo:  $(3 + 2) \times (2^3) - 10 \div 5$ .

**Loitsu:**

1. **Sulut:**  $(3 + 2) = 5$
2. **Eksponentit:**  $2^3 = 8$
3. **Sulkeiden ja eksponenttien tulokset yhdessä:**  $5 \times 8 = 40$
4. **Jakolasku:**  $10 \div 5 = 2$
5. **Lopullinen vähennyslasku:**  $40 - 2 = 38$

**Mysteerin lopullinen arvo on 38.**

Lähde nyt matkaan, nuori velho tai noita, ja käytä laskujärjestystä ja liitännäisyyttä hallitaksesi matemaattisia loitsuja. Opiskelemalla ja harjoittelemalla näitä taian sääntöjä, sinusta tulee varmasti taitava matematiikan maagi!

## 4. Prosenttien puutarha

Tervetuloa Prosenttien puutarhaan, matemaattisten ilmiöiden kasvualustaan! Tässä luvussa tutkimme prosenttilaskennan värikkäitä saloja ja ymmärrämme, kuinka tämä taito auttaa meitä arvioimaan, vertailemaan ja ennustamaan asioita arkielämässä.

### Mikä on prosentti?

Kuvitellaan, että puutarhassamme on sata kukkapenkkiä. Jos yhdestä penkistä puhkeaa kukkia, se on 1% koko puutarhasta. Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa ( $1/100$ ). Se on tapa ilmaista suhteita, kun vertaillaan kokonaisuuksia ja niiden osia. Symbolina prosentille käytämme merkkiä %.

Kun auringonkukka edustaa 1%, voimme ajatella, että jokainen uusi kukka tuo puutarhaamme yhden prosenttiyksikön lisää. Jos siis 50 auringonkukkaa kukkii, niin meillä on 50% puutarhasta kukassa.

### Prosenttilaskujen perustyyppit

Prosenttilaskennassa käsittelemme usein kolmea peruslaskutyyppiä:

#### 1. Prosenttiosuuden laskeminen

Kuvitellaan, että meillä on 200 tulppaania ja 40 niistä on keltaisia. Kuinka suuri osa tulppaaneista on keltaisia? Tämä kertoo meille prosenttiosuuden.

$$\text{Prosenttiosuus} = (\text{osan määrä} / \text{kokonaisuuden määrä}) * 100\%$$

Tässä tapauksessa laskemme sen näin:

$$\text{Prosenttiosuus} = (40 / 200) * 100\% = 0,2 * 100\% = 20\%$$

Siis 20% tulppaaneistamme on keltaisia.

## 2. Prosentuaalisen muutoksen laskeminen

Puutarhurimme on päättänyt istuttamaan lisää keltaisia tulppaaneja. Nyt keltaisia tulppaaneja on 60. Kuinka paljon tulppaanien määrä on kasvanut prosentuaalisesti?

$$\text{Prosentuaalinen muutos} = ((\text{uusi määrä} - \text{vanha määrä}) / \text{vanha määrä}) * 100\%$$

Tässä tapauksessa laskemme näin:

$$\text{Prosentuaalinen muutos} = ((60 - 40) / 40) * 100\% = (20 / 40) * 100\% = 0,5 * 100\% = 50\%$$

Keltaisten tulppaanien määrä on kasvanut 50%.

## 3. Uuden määrän laskeminen prosenttiosuuden avulla

Entä jos haluamme tietää, kuinka monta tulppaania on, kun 200 tulppaanista 25% on keltaisia? Tämä kertoo meille uuden määrän prosenttiosuuden avulla.

$$\text{Uusi määrä} = \text{kokonaisuuden määrä} * (\text{prosenttiosuus} / 100\%)$$

Laskemme tämän näin:

$$\text{Uusi määrä} = 200 * (25 / 100) = 200 * 0,25 = 50$$

Joten 25% 200:sta tulppaanista on yhteensä 50 keltaista tulppaania.

## Prosentin laskeminen käytännössä: Ale-tarjoukset

Tutkitaanpa, miten voimme käyttää prosenttilaskentaa hyödyksi ostoksilla. Kukkakaupassa on 30% alennus kaikista ruusuista. Jos normaalihinta on 10 euroa, mikä on alennetun tuotteen

hinta?

Alennuksen jälkeinen hinta = normaalihinta - (normaalihinta \* (alennusprosentti / 100%))

Siis:

Alennuksen jälkeinen hinta = 10 € - (10 € \* (30 / 100)) = 10 € - (10 € \* 0,3) = 10 € - 3 € = 7 €

Ruusujen hinta alennuksen jälkeen on siis 7 euroa.

## Päätelmät

Prosenttien puutarhassa matikkataidot versovat ja kehittyvät. Nyt kun olet kylvänyt prosenttilaskun siemenet, on aika kasvaa laskutaidon taitavaksi puutarhuriksi. Pidä huolta taidoistasi harjoittelemalla, ja näet kuinka prosenttilaskut kukoistavat käytännön tilanteissasi!

## 4.1. Prosentit pelastavat päivän - Perusteet selkokielellä

Hei siellä, nuoret matemaatikot! Oletko koskaan miettinyt, kuinka monta prosenttia lempisuklaapatukiasi painosta on itse asiassa sokeria? Entä kuinka suuren alennuksen saat, kun kaupassa on 30% ale? Tai ehkä olet pohtinut, paljonko sinulla on rahaa säästössä, kun säästölippaasi täyttyy? Nämä kaikki ovat esimerkkejä tilanteista, joissa prosenttilaskut nousevat arjen sankareiksi. Aloitetaan perusteista, niin nämäkin arvoitukset ratkeavat kuin itsestään!

### Mikä on prosentti?

Prosentti tarkoittaa sataosaa. Se on tapa ilmaista suhteellisia osuuksia, kun kokonaisuus jaetaan sataan osaan. Symboli prosentille on %, ja sata prosenttia (%) tarkoittaa kokonaista, eli 100% vastaa koko jotakin. Jos sanotaan, että jokin on 50%, tarkoitetaan, että puolet kokonaisuudesta on kyseessä.

### Prosentin laskeminen

Otetaan esimerkki: luokassasi on 30 oppilasta, ja 15 heistä tykkää pelata jalkapalloa. Kuinka suuri prosenttiosuus luokastasi tykkää potkia palloa? Jotta saat selville prosenttiosuuden, jaa ensin jalkapalloilijoiden lukumäärä koko luokan oppilaiden määrällä:

$$15 \text{ jalkapalloilijaa} \div 30 \text{ oppilasta} = 0,5$$

Näin saatu luku kuvaa suhdetta ilman prosenttimerkkiä. Jotta muutat suhteen prosentiksi, kerro se sadalla (100):

$$0,5 \times 100 = 50\%$$

Eli 50 % luokastasi tykkää pelata jalkapalloa.

### **Prosentin muuttaminen murtoluvuksi tai desimaaliluvuksi**

Entä jos haluat päinvastoin muuttaa prosenttiluvun joksikin muuksi? Helppoa kuin heinänteko! Jaa prosenttiluku sadalla. Esimerkiksi 20% muuttuu desimaaliluvuksi jakamalla 20 sadalla:

$$20\% = 20 \div 100 = 0,20$$

Tai halutessasi murtoluvuksi:  $20\% = 20/100$ , ja kun supistat murtolukua, saat  $1/5$ .

### **Prosenttiyksikkö**

Varo, tässä tulee mutka matkaan! Prosentti ja prosenttiyksikkö ovat kaksi eri asiaa. Jos prosenttiosuus nousee 10%:sta 15%:iin, se on kasvanut 5 prosenttiyksiköllä, ei 5%:lla. Jos se kasvaisi 5%:lla, laskettaisiin lisäys 10% perusteella:

$$5\% \times 10\% = 0,05 \times 0,10 = 0,005 \text{ eli } 0,5\%$$

Joten todellisuudessa prosenttiosuus olisi kasvanut vain 10,5%:iin, ei 15%:iin.

### **Prosenttilaskujen käyttö**

Prosenttilaskuja tarvitaan kaikenlaisten asioiden mittaamisessa ja vertailussa. Ne auttavat meitä ymmärtämään alennukset, korot, tilastotiedot ja vaikka kuinka paljon muuta!

Esimerkiksi:

- **Alennuslaskut kaupoissa:** Jos tuotteen hinta on 50 euroa ja se on 20% alennuksessa, kuinka paljon maksat?  $\text{Alennus} = 20\% \times 50 \text{ €} = 0,20 \times 50 \text{ €} = 10 \text{ €}$  Hinta alennuksen jälkeen  $= 50 \text{ €} - 10 \text{ €} = 40 \text{ €}$
- **Korot pankissa:** Jos säästät 100 euroa ja pankki antaa vuosittain 1% koron, paljonko rahaa on vuoden päästä?  $\text{Korko} = 1\% \times 100 \text{ €} = 0,01 \times 100 \text{ €} = 1 \text{ €}$  Rahamäärä yhteensä  $= 100 \text{ €} + 1 \text{ €} = 101 \text{ €}$

Nyt kun olette oppineet prosenttilaskun alkeet, voitte kohdata arjen haasteet uusin matemaattisin asein. Muistakaa, että prosentit ovat ympärillämme joka päivä, ja näiden pienten prosenttilaskujen avulla voitte säästää sekä aikaa että rahaa!

Prosentit eivät ole ainoastaan koulujen matematiikan tehtäviä varten – ne ovat avain parempaan ymmärrykseen taloudesta, tieteestä ja jopa omista kulutustottumuksistamme. Niinpä, oppikaa prosentit ja niiden laskeminen, niin voitte olla omien päivienne pelastajia!

## **4.2. Lisää vai vähemmän - Prosentin ihmeelliset muutokset**

Matematiikka, tämä arkipäiväistä elämäämme rytmittävä lukujen ja kaavojen taika, piilottaa sisäänsä yhden maagisen salaisuuden – prosentin. Tässä luvussa lähdemme yhdessä selvittämään prosenttilaskennan saloja, erityisesti keskitymme prosentin lisäykseen ja vähennykseen. Tämä taito auttaa arjessa monissa tilanteissa, kuten alennusmyynneissä laskiessa, pankkien korkoja tutkiessa tai vaikkapa reseptejä muunnellessa.

### **Prosentin perusteet**

Prosentti (merkitään %) on matemaattinen käsite, jota käytetään ilmaisemaan suhteellista osuutta jostakin kokonaisuudesta. Yksi prosentti (1%) vastaa yhtä sadasosaa ( $1/100$ ). Jos meillä on esimerkiksi 100 euroa ja puhumme 1%:sta tästä summasta, tarkoitamme 1 euron suuruista osaa.

### **Prosentin lisäys**

Kuvittele, että sait 20 euron viikkorahan, ja lahjakkaana matemaatikkona päätit tallettaa sen pankkiin, joka tarjoaa 5% vuosikorkoa. Vuoden kuluttua sinulla ei ole vain tallettamaasi 20 euroa, vaan sinulla on alkuperäisen summan päälle vielä 5% lisää. Miten tämä lasketaan? Seuraavaksi pureudumme juuri tähän.

### **Laskeminen**

Jos haluat lisätä prosentin johonkin määrään, noudata näitä vaihteita:

1. Muuta prosentti desimaalimuotoon jakamalla se luvulla 100. Esimerkissämme 5% muuttuu muotoon 0,05.
2. Kerro alkuperäinen määrä saamallasi desimaaliluvulla. 20 euroa kertaa 0,05 tekee yhden euron.

3. Lisää tämä summa alkuperäiseen määrään saadaksesi lopullisen summan. Tässä tapauksessa 20 euroa + 1 euro tekee 21 euroa.

Matemaattinen esitys on yksinkertainen:  $\text{Lopullinen summa} = \text{alkuperäinen määrä} * (1 + (\text{prosentti} / 100))$

Eli esimerkissämme:  $21 \text{ euroa} = 20 \text{ euroa} * (1 + (5 / 100))$

## Prosentin vähennys

Nyt kuvitellaan toinen tilanne. Olet ostamassa 50 euron pelejä, mutta sinulla on onneksi 10% alennuskupongi. Paljonko maksat peleistä alennuksen jälkeen?

## Laskeminen

Prosentin pois laskeminen on melkein samanlaista kuin lisääminen, mutta tässä tapauksessa vähennät prosentin määrän lopullisesta summasta:

1. Kuten lisäyksessäkin, muuta prosentti desimaalimuotoon jakamalla se 100:lla.  
Esimerkissämme 10% muuttuu 0,10:ksi.
2. Kerro alkuperäinen määrä saamallasi desimaaliluvulla. 50 euroa kertaa 0,10 on 5 euroa.
3. Vähennä tämä summa alkuperäisestä määrästä saadaksesi alennetun hinnan. Tässä tapauksessa 50 euroa - 5 euroa tekee 45 euroa.

Matemaattinen kaava näyttää tältä:  $\text{Lopullinen summa} = \text{alkuperäinen määrä} * (1 - (\text{prosentti} / 100))$

Eli esimerkissämme:  $45 \text{ euroa} = 50 \text{ euroa} * (1 - (10 / 100))$

## Harjoitustehtäviä

1. Lasketaan yhdessä: Sinulla on 150 euroa ja kaupassa on 20% alennusmyynti. Paljonko maksat tuotteista, jos hyödynnät alennuksen?
2. Mietitään lisää: Ostit kenkiä, joiden hinta ilman alv:tä on 80 euroa. Alv (arvonlisävero) on 24%. Paljonko maksoit kengistä kun kassalla mukaan luettiin myös alv?
3. Hauska haaste: Olet päättänyt säästää kesälomamatkaan ja säästät joka kuukausi 100 euroa. Pankkisi tarjoaa 3% vuosikorkoa säästöillesi. Paljonko rahaa on tililläsi vuoden lopussa, jos et nosta säästöjäsi?

Muistetaan, että prosenttilaskut eivät ole pelkästään numeroita paperilla, vaan ne ovat taitoja, jotka auttavat meitä ymmärtämään ja hallitsemaan maailmaa ympärillämme. Prosenttilaskenta on yksi matematiikan monista työkaluista, jolla voit tehdä älykkäitä päätöksiä, käsitellä rahaa ja nähdä kuinka pienet muutokset voivat vaikuttaa suuresti lopputulokseen. Joten pidä hauskaa näiden mystisten muutosten parissa ja käytä oppimaasi hyödyksesi!

## 4.3. Numeroiden muodonmuutokset - Kun kokonaisuus heilahtaa

Oi, nuori matemaatikko, astu kanssamme numeroiden muodonmuutoksien jännittävään maailmaan. Tässä luvussa kurkistamme muutosten taikaan – miten kokonaisuuden määrä voi muuttua lisäämisen, vähentämisen, kertomisen tai jakamisen kautta. Mutta pidä hatustasi kiinni, sillä luvassa on yllättäviä käänteitä!

### Mikä on kokonaisuuden määrä?

Ennen kuin syvennymme muutoksiin, pohdimme, mitä oikeastaan tarkoitamme kokonaisuuden määrällä. Kokonaisuuden määrä voi tarkoittaa monenlaisia asioita matematiikassa – se voi olla omenoiden lukumäärä korissa, litrojen määrä mehua pullollisessa tai vaikka pisteiden määrä pelissä. Matematiikassa puhumme usein joukosta, joka on määritelty kokoelma asioita tai alkioita.

### Lisääminen - Numeroiden kasvupyrähdys

Kun kokonaisuuteen lisätään jotakin, tapahtuu numeroiden kasvupyrähdys. Tämä on yksi peruslaskutoimituksista ja se symboloidaan plusmerkillä (+). Esimerkiksi, jos sinulla on 5 omenaa ja saat 3 omenaa lisää, sinulla on yhteensä  $5 + 3 = 8$  omenaa.

### Harjoitus:

1. Sinulla on 7 postimerkkiä ja saat lisää 4. Kuinka monta postimerkkiä sinulla on nyt?
2. Ystäväsi kerää lehtikasoja: hänellä on yksi lehtikasa, jossa on 12 lehteä ja hän lisää siihen 8 lehteä. Kuinka monta lehteä kasassa on nyt?

### Vähentäminen - Kun numerot kutistuvat

Jos kokonaisuudesta otetaan pois jotakin, puhumme vähentämisestä, joka merkitään miinusmerkillä (–). Esimerkiksi, jos sinulla on 8 omenaa ja annat pois 3, sinulle jää jäljelle  $8 - 3 = 5$  omenaa.



### Harjoitus:

1. Koulun pihaan istutettiin 15 puuta, mutta 2 kaadettiin. Kuinka monta puuta pihalla on nyt?
2. Ostit 10 kynää, mutta kadotit niistä 3. Kuinka monta kynää sinulla on jäljellä?

### Kertominen - Numeroiden loikkaus

Kertominen on kuin numeroiden kukkien kasvua; se voi monistaa kokonaisuuden määrän nopeasti. Kuvittele, että sinulla on 4 rasiaa, joissa kussakin on 5 omenaa. Omenien kokonaismäärän saat kertomalla  $4 * 5 = 20$ .

### Harjoitus:

1. Jos jokaisessa luokassa on 22 oppilasta ja koulussa on 8 luokkaa, kuinka monta oppilasta koulussa on yhteensä?
2. Treenaat jalkapalloa 3 kertaa viikossa. Jos jokainen treeni kestää 90 minuuttia, kuinka monta minuuttia treenaat koko viikon aikana?

### Jakaminen - Tasaista jakautumista

Jakaminen taas on kuin numeroiden tasainen jakautuminen pienempiin osiin. Jos sinulla on 20 omenaa ja jaat ne tasaisesti 4 ystäväsi kesken, jokainen saa  $20 \div 4 = 5$  omenaa.

### Harjoitus:

1. Sinulla on 30 suklaakonvehtia ja haluat jakaa ne tasaisesti 6 ystävällesi. Kuinka monta konvehtia kullekin ystävälle jää?
2. Koulun kirjastossa on 80 kirjaa ja 4 kirjahyllyä. Jos kirjat jaetaan tasan hyllyjen kesken, kuinka monta kirjaa kuhunkin hyllyyn tulee?

Muista, että matematiikassa on olennaista hahmottaa kokonaisuuksia ja niiden muutoksia. Kun opit hallitsemaan numeroiden muodonmuutokset – lisäämisen, vähentämisen, kertomisen ja jakamisen – avautuu sinulle uusia maailmoja ratkaistavaksi ja tutkittavaksi. Lähde rohkeasti matkalle numeroiden ja niiden muutosten pariin, sillä ne ovat matematiikan sydämessä!

## 4.4. Prosenttitutkielmat - Korkotempu ja niiden kikat

Hei nuori matemaatikko! Olet nyt astumassa prosenttilukujen ja korkolaskujen kiehtovaan maailmaan, jossa pääset sukeltamaan prosenttiyksiköiden salaisuuksiin ja korkojen kiehtoviin

kiemuroihin. Matkamme alkaa perusteista ja johdattaa sinut aina korkolaskujen saloihin asti. Aloita matkasi mielenkiintoiseen prosenttimaailmaan!

## Prosenttiyksiköt ja niiden taika

Aloita käsittämällä, että prosenttiosuus tarkoittaa sadasosaa kokonaisuudesta. Kun puhumme esimerkiksi 20 prosentista, se on sama kuin 20/100 tai 0,20. Tämä tarkoittaa, että jos sinulla on 100 euroa, 20 prosenttia tästä on 20 euroa.

**Prosenttiyksikkö** on termi, jota käytetään kuvaamaan prosenttiosuuksien erotusta. Jos viime vuonna koulumme oppilaista 70 % piti matematiikkaa mielenkiintoisena, ja tänä vuonna luku on 75 %, sanoisimme että mielenkiinto on kasvanut 5 prosenttiyksiköllä, ei 5 prosentilla. Ymmärrät varmasti, että näillä on suuri ero!

## Kun korko korolle kiertää

Korkolaskut ovat tärkeä osa raha-asioita, eikä vain silloin, kun säästät tai sijoitat, vaan myös kun lainaat rahaa. **Korko** on rahan hinta, jonka maksat lainasta tai saat säästöistäsi. Korko ilmoitetaan yleensä prosentteina.

**Yksinkertainen korko** lasketaan suoraan alkuperäisestä summan pääomasta. Jos sijoitat 100 euroa vuodeksi 5 % korolla, vuoden lopussa saat 5 euroa korkoa ( $100 \times 0,05 = 5$ ).

**Korkoa korolle** tarkoittaa, että saat korkoa sekä alkuperäiselle pääomalle että jo kertyneelle korolle. Tämä on kiinnostavaa, sillä ajan myötä se voi kasvattaa sijoituksiasi huomattavasti.

## Korkotempujen kaava

Korkoa korolle -ilmiön ymmärtämiseksi sinun tarvitsee oppia kaava, jolla se lasketaan. Tässä se on:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Missä:

- $A$  on tuleva arvo, eli se summa, jonka sijoituksesi on kasvanut tietyn ajan jälkeen;
- $P$  on alkuperäinen pääoma, eli se rahamäärä, jonka olet alun perin sijoittanut;
- $r$  on vuotuinen korkoprosentti desimaalimuodossa (esim. 5 % on 0,05);
- $n$  on se, kuinka monta kertaa korko lisätään pääomaan vuodessa (esim. neljännesvuosittain olisi 4);

- $t$  on aika vuosissa.

## Harjoitellaan temppuja

Kokeilepa nyt, mitä tapahtuu, jos sijoitat 100 euroa 5 % vuosikorolla korkoa korolle - säästöttilille, jolla korko lisätään vuosittain. Käytämme kaavaa selvittääksemme, kuinka paljon rahasi on kasvanut viiden vuoden jälkeen.

Korvaamme kaavan kirjaimet tarvittavilla arvoilla:

- $P = 100$  euroa
- $r = 0,05$
- $n = 1$  (koska korko lisätään vuosittain)
- $t = 5$  vuotta

Laskemme nyt tulevan arvon  $A$ :  $A = 100 \left(1 + \frac{0,05}{1}\right)^{1 \cdot 5}$   $A = 100 \cdot (1 + 0,05)^5$   $A = 100 \cdot (1,05)^5$   
 $A \approx 127,63$

Näin ollen viiden vuoden jälkeen sijoituksesi on kasvanut 127,63 euroon.

## Viimeinen temppu: Korkolaskureiden mestarit

Kehittyneiden laskimien ja verkossa olevien korkolaskureiden avulla voit nopeasti nähdä, kuinka sijoituksesi kasvavat eri korokannoilla ja aikaväleillä. Harjoittele näiden työkalujen käyttöä, niin hallitset pian kaikki korkolaskujen temput!

# Osa II: Algebran aarrearkku

Tervetuloa matkalle algebran saloihin, matematiikan ihmeelliseen maailmaan, jossa numerot ja kirjaimet tanssivat yhdessä luoden kaavoja ja yhtälöitä, ratkaisuja ja tuloksia. Matkan varrella opimme, kuinka algebran työkaluja käyttämällä voimme ratkaista monenlaisia arkipäivän pulmia ja ymmärtää maailmaa syvällisemmin. Ota siis kompassisi ja karttasi, sillä nyt lähdemme kaivamaan aarteita algebran aarrearkusta!

## Mitä on algebra?

Algebra on matematiikan haara, joka tutkii, kuinka voimme käyttää kirjaimia ja merkkejä edustamaan lukuja ja suhteita niiden välillä. Toisin sanoen algebra on kuin salainen kieli, jonka avulla voimme kirjoittaa matemaattisia lauseita yleisessä muodossa. Tämä on erittäin

hyödyllistä, koska se sallii meidän tutkia lukuja ja niiden suhteita ilman, että meidän täytyy tietää, mitä ne lukuarvot tarkalleen ovat.

## **Kirjaimet - lukujen naamioituneet ystävät**

Kun ensimmäisen kerran kohtaamme algebraa, voimme ajatella kirjaimia naamioituneina lukuina. Kirjaimet, kuten  $x$  ja  $y$ , ovat muuttujia, jotka voivat edustaa mitä tahansa lukua. Toisin kuin tavallisessa laskennassa, jossa meillä on selkeät ja tarkat lukuarvot, algebrassa työskentelemme usein tuntemattomien kanssa, jotka paljastavat todellisen arvonsa vasta, kun me ratkaisemme yhtälöt.

Esimerkki:

Jos meillä on  $x + 3 = 7$ , voimme ajatella, että  $x$  on laatikko, joka sisältää luvun, ja tehtävämme on selvittää, mikä tämä luku on. Tässä tapauksessa selviää, että  $x = 4$ , sillä  $4 + 3$  vastaa 7.

## **Yhtälö - Vaakalaudan tasapainottelua**

Yhtälö on kuin vaaka, joka pysyy tasapainossa, kun molemmat puolet ovat yhtä suuria. Kun muutamme yhtälön toista puolta, meidän on tehtävä sama muutos myös toiselle puolelle säilyttääksemme tasapainon.

Esimerkki:

Kuvitellaan yhtälö  $x + 5 = 12$ . Tasapainon säilyttämiseksi meidän tulee ottaa 5 pois molemmilta puolilta. Joten vähennämme 5 molemmilta puolilta.

$$x + 5 - 5 = 12 - 5$$

Tämä yksinkertaistuu, eli sieventyy, muotoon:

$$x = 7$$

## **Algebran perusrakennuspalikat - Termit ja lausekkeet**

Perustermit ovat algebran kieliopin perusta. Yksittäinen termi voi olla luku, kirjain (muuttuja) tai näiden yhdistelmä, kuten  $4x$  tai  $2y^2$ . Lauseke on useampia termejä yhdistävä kokonaisuus, jossa ne on liitetty yhteen plus- ja miinusmerkeillä.

Esimerkiksi lauseke  $5x - 3$  koostuu kahdesta termistä:  $5x$  ja  $-3$ .

## **Polynomit - Termien timantteja**

Polynomit ovat kuin lausekkeiden timantteja. Ne ovat termien kytkettyjä ketjuja, jotka voivat olla yksittäisiä (monomeja), pareittain (binomeja) tai kolmikkoina (trinomeja) – ja vielä suuremmatkin kombinaatiot ovat mahdollisia!

Esimerkki trinomista:

$$x^2 + 2x + 1$$

Tämä trinomi on erityinen, sillä se on täydellinen neliö, eli se voidaan kirjoittaa muodossa  $(x + 1)^2$ .

## Yhtälöiden Ratkaiseminen - Aartenetsintää

Algebran tehtävänä on usein ratkaista yhtälöitä eli löytää muuttujan arvo, joka toteuttaa yhtälön. Tämä on kuin aartenetsintää, jossa ratkaisu on aarre. Matka ratkaisun löytämiseen sisältää usein vaiheita, kuten termien yhdistämistä, laajentamista tai tekijöihin jakamista.

Esimerkki:

Ratkaistaan yhtälö  $2x - 4 = 10$ .

Ensimmäisenä lisätään molemmin puolin 4.

$$2x - 4 + 4 = 10 + 4$$

$$2x = 14$$

Seuraavaksi jaetaan molemmat puolet 2:lla.

$$2x / 2 = 14 / 2$$

$$x = 7$$

## Yhtälöiden Ratkaiseminen Harjoitus

Nyt on sinun vuorosi! Ratkaise seuraavat yhtälöt:

1.  $3x + 6 = 21$

2.  $x^2 + 5x + 6 = 0$

3.  $2(x - 3) + 4 = 8$

Kun olet valmis, vertaa ratkaisujasi alla oleviin vastauksiin.

Vastaukset:

1.  $x = 5$
2.  $x = -2$  tai  $x = -3$  (tässä tarvitaan tekijöihin jakamista tai nollasääntöä)
3.  $x = 5$

Algebran avulla voimme löytää ratkaisuja, joita emme välttämättä näe paljaalla silmällä. Se opettaa meille järjestelmällistä ajattelua ja loogista päättelyä. Aivan kuin aarrearkku, joka on täynnä kimaltelevia jalokiviä, algebra avaa meille oven uusiin mahdollisuuksiin ja seikkailuihin matematiikan maailmassa. Joten pysy uteliaana ja jatka algebran aarteiden etsimistä!

Muista, että algebran taitoja voi ja kannattaa harjoitella. Harjoitusten kautta kirjainten ja numeroiden välille syntyy syvempi yhteys, ja opit löytämään ratkaisut yhä monimutkaisempiin ongelmiin. Ja ennen kaikkea - pidä hauskaa algebran parissa, sillä se on yksi taikatempuista, jotka avaavat ovia niin tieteeseen kuin teknologiaankin!

## 5. Lausekkeiden laboratorio

Tervetuloa matematiikan ihmeelliseen maailmaan! Tänään sukellamme lausekkeiden ja yhtälöiden pariin. Tämän luvun aikana pääset tutkimaan, miten matematiikka toimii kuin laboratorio, jossa voit sekoittaa numeroita ja merkkejä luodaksesi jotain aivan uutta ja mielenkiintoista!

### Mikä on lauseke?

Lauseke on kuin matemaattinen lause, joka koostuu numeroista, muuttujista (kirjaimista, jotka edustavat lukuja), operaattoreista (plus, miinus, kerto ja jako) ja sulkeista. Esimerkiksi  $3x + 4$  on lauseke, missä  $x$  on muuttuja.

### Lausekkeen arvon laskeminen

Kun tiedät muuttujan arvon, voit laskea koko lausekkeen arvon. Jos  $x = 2$ , silloin  $3x + 4 = 3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10$ .

### Harjoitus 1

Laske lausekkeen  $5y - 3$  arvo, kun  $y = 4$ .

## Termit

Lausekkeen osia, jotka on erotettu toisistaan plus- tai miinusmerkeillä, kutsutaan termeiksi. Esimerkkilausekkeessa  $3x + 4$  on kaksi termiä:  $3x$  ja  $4$ .

## Yhtälöt

Yhtälö on kuin matematiikan vaaka, jossa molemmilla puolilla on yhtä paljon. Se kertoo meille, että kaksi lauseketta ovat samanarvoisia eli  $3x + 4 = 10$  on yhtälö.

## Yhtälön ratkaiseminen

Ratkaiseminen tarkoittaa muuttujan arvon löytämistä, joka tekee yhtälöstä totta. Voit ratkaista yhtälön esimerkiksi siirtämällä termejä yhtälön toiselle puolelle.

### Harjoitus 2

Ratkaise yhtälö  $x - 5 = 7$ .

## Yhtälön tasapainottaminen

Kun ratkaiset yhtälöitä, on tärkeää muistaa, että mitä ikinä teetkin yhdelle puolelle, sinun täytyy tehdä sama myös toiselle puolelle. Tämä pitää yhtälön tasapainossa!

### Harjoitus 3

Ratkaise yhtälö  $2x + 3 = 11$ .

## Loppusanat

Lausekkeiden ja yhtälöiden maailma on äärettömän laaja ja tarjoaa merkityksellisen tavan ymmärtää ja käsitellä numeroita. Tässä luvussa olemme vain raapaisseet pintaa. Jokainen tehtävä ja esimerkki antaa sinulle työkaluja, joita tarvitset matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen. Nyt on aika kokeilla omia taitojasi ja lähteä rohkeasti lausekkeiden laboratorioon sekoittelemaan, tutkimaan ja ratkomaan omia matemaattisia koostumuksiasi!

## Vastaukset

Harjoitus 1:  $5 \cdot 4 - 3 = 20 - 3 = 17$

Harjoitus 2:  $x = 7 + 5 = 12$

Harjoitus 3:  $2x = 11 - 3 = 8$  ja  $x = \frac{8}{2} = 4$

Muistakaa oppilaat, että virheitä sattuu kaikille ja ne ovat parhaita oppimisen hetkiä. Älkää koskaan epäröikö pyytää apua, ja yrittäkää aina parhaanne!

## 5.1. Merkkien magiaa - Lausekkeet ja yhtälöt

Tervetuloa matematiikan maailmaan, jossa kirjaimet ja numerot leikkivät yhdessä muodostaen mystisiä kaavoja ja ratkaistavia pulmia. Tämän luvun myötä tulet oppimaan, kuinka muuttujat ja lausekkeet toimivat ja kuinka ne yhdistyvät jännittäviin yhtälöihin. Joten pidä hatustasi kiinni, sillä lähdemme paljastamaan merkkien magiaa!

### Muuttujan Voimat

Matematiikan maailmassa muuttujat ovat kuin voimakkaita loitsuja, jotka pitävät sisällään monenlaisia mahdollisuuksia. Muuttuja on symboli, yleensä kirjain, joka edustaa lukua. Sen arvo voi muuttua, minkä vuoksi sitä kutsutaan muuttujaksi.

#### Esimerkki:

Jos ajatellaan, että muuttuja  $x$  edustaa jonkin laitteen ikää vuosissa,  $x$  voi olla mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, kuten 1, 3, 10 tai vaikka 42! Kun sanomme "laitteen ikä on  $x$  vuotta", annamme ymmärtää, että ikä voi vaihdella –  $x$ :n arvo on muuttuja.

### Lausekkeen Lumous

Lauseke on yksi tai useampi numero ja muuttuja, jotka on sidottu yhteen matemaattisin operaatioin - kuten yhteenlasku, vähennys, kertolasku ja jakolasku. Lausekkeet voivat olla yksinkertaisia tai monimutkaisia, riippuen siitä, kuinka monta eri osaa niissä on.

#### Esimerkki:

Kuvittele lauseke  $5x + 3$ . Tässä lausekkeessa  $5x$  tarkoittaa, että muuttuja  $x$  kerrotaan viidellä. Lopuksi, lisätään numero 3. Tämä lauseke muuttuu eri arvoiksi riippuen  $x$ :n arvosta. Jos  $x$  on 2, lauseke muuttuu muotoon  $5 \cdot 2 + 3$ , mikä vastaa lukua 13.

### Yhtälön Yllätykset

Yhtälö on kuin matemaattinen arvoitus, jonka ratkaiseminen vaatii loogista päättelykykyä ja muuttujien magian ymmärtämistä. Yhtälö sanoo, että kaksi lauseketta ovat saman arvoisia, ja niiden välissä on yhtäsuuruusmerkki  $=$ .

#### Esimerkki:



Oletetaan, että sinulla on yhtälö  $5x + 3 = 18$ . Yhtälö kertoo meille, että lauseke  $5x + 3$  on yhtä suuri kuin 18. Tehtäväsi on selvittää, mikä arvon  $x$  saa, jotta yhtälö pitää paikkansa. Tässä yhtälössä  $x$  on 3, koska  $5 \cdot 3 + 3$  on todella 18.

Nyt kun olet tutustunut muuttujien, lausekkeiden ja yhtälöiden perusteisiin, olet valmis sukeltamaan syvemmälle merkkien magian maailmaan. Käytännön tehtävät ja haasteet auttavat sinua kehittämään taitojasi ja ratkomaan monimutkaisempia matemaattisia mysteerejä. Muista, että matkan varrella jokainen virhe on oppimismahdollisuus ja vie sinut lähemmäksi ratkaisun löytämistä. Taianomainen matkasi on vasta alussa, joten ole rohkea, ole utelias, ja ennen kaikkea, pidä hauskaa matematiikan parissa!

## 5.2. Katoavan x:n arvoitus - Yhtälöiden ratkaisun metsästys

Hei nuori matemaatikko! Tervetuloa tutkimusretkelle matematiikan viidakon sydämeen. Tänään meillä on edessämme kiehtova mysteeri - katoavan x:n arvoituksen selvittäminen. Tunnetaan yksinkertainen totuus: yhtälöt ovat matematiikan kieltä, ja niiden ratkaiseminen on kuin salakirjoituksen purkamista.

### Yhtälön perusteita

Yhtälö on kuin vaaka, missä molemmilla puolilla on sama arvo, mutta eri tavalla ilmaistuna. Kun näet yhtälön, se kertoo sinulle, että sen kahden puolen täytyy olla tasapainossa. Yhtälö voi näyttää esimerkiksi tältä:

$$x + 3 = 7$$

Tässä yhtälössä  $x$  on katoava arvo, se salaperäinen muuttuja, jonka meidän on metsästettävä. Tavoitteenamme on löytää  $x$ :n arvo, joka pitää vaa'an tasapainossa.

---

### Askellus 1: Yhtälön tasapaino

Kaikkein tärkeintä yhtälön käsittelyssä on vaakamme pitäminen tasapainossa. Jos teemme jotain toiselle puolelle, meidän on tehtävä sama toisen puolen vastapainoksi. Esimerkiksi, jos vähennämme kolme molemmilta puolilta, meidän yhtälömme pysyy tasapainossa:

$$x + 3 - 3 = 7 - 3 \quad x = 4$$

Nyt olemme ratkaisseet  $x$ :n arvoituksen!  $x$  on 4, koska 4 lisättynä 3:lla tekee 7.

---

## Askellus 2: Yhtälön toimittaminen

Toisinaan yhtälöön sisältyy useampia toimenpiteitä. Sinun täytyy suorittaa ne vastakkaisessa järjestyksessä verrattuna matematiikan laskujärjestykseen. Laskujärjestys on ensin sulut, sitten potenssit, sitten kerto- ja jakolaskut ja lopulta yhteen- ja vähennyslaskuista.

Jos esimerkiksi törmäät yhtälöön:

$$4x - 2 = 10$$

sinun pitäisi ensin lisätä 2 molemmille puolille yhtälöä, jotta pääset eroon miinuksesta:

$$4x - 2 + 2 = 10 + 2 \quad 4x = 12$$

Nyt sinun täytyy vielä jakaa molemmat puolet neljällä löytääksesi x:n arvon:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \quad x = 3$$

---

## Askellus 3: Haastavammat yhtälöt

Joskus yhtälöt ovat hieman monimutkaisempia, ja niissä voi olla x molemmilla puolilla tai ne voivat sisältää sulkeita. Tärkeä sääntö on, että avaa aina ensin sulkeet ja hankkiudu eroon niistä käyttämällä sulkeiden lakiin perustuvaa laskentaa. Tämän jälkeen kerro tai jaa termejä yksinkertaistaaksesi yhtälö, muistaen pitää yhtälö tasapainossa.

Esimerkiksi yhtälö:

$$2(x - 1) = x + 4$$

Ensimmäinen askel on avata sulkeet:

$$2x - 2 = x + 4$$

Sitten on siirrettävä x:t samalle puolelle yhtälöä:

$$2x - x = 4 + 2 \quad x = 6$$

---

## Harjoitukseksi

Olet nyt valmis kokeilemaan ratkaista omia yhtälöitäsi. Muista pitää yhtälö tasapainossa, seuraa laskujärjestystä ja toimi rauhallisesti ja järjestelmällisesti. Kokeile näitä harjoitusyhtälöitä:

1.  $x + 5 = 12$
2.  $3x = 15$
3.  $4(x + 2) = 20$
4.  $5x - 10 = x + 20$

Ratkaise yhtälöt ja tarkista vastauksesi kumppanisi tai opettajan kanssa. Pidä hauskaa x:n metsästyksessä - se ei ole koskaan kaukana!

---

Onnea matkaan matematiikan mystisten seikkailujen maailmaan. Muista, että jokainen ongelma on ratkaistavissa, ja jokainen x on löydettävissä. Sinusta voi tulla todellinen yhtälöiden mestari.

## 5.3. Toisen asteen temppuilo - Polynomien hauskat huiput

Tervetuloa matemaattisiin temppuilojen pariin! Tänään tutustumme toisen asteen yhtälöihin, jotka ovat kuin matematiikan taikatemppuja - ne näyttävät monimutkaisilta, mutta kun opit niiden salat, pystyt ratkaisemaan ne kuin taikuri. Mutta ennen kuin aloitamme, varmistakaamme, että olet kuullut, mistä toisen asteen yhtälössä on kyse:

Toisen asteen yhtälö on muodossa  $ax^2 + bx + c = 0$ , missä a, b ja c ovat vakioita ja a ei ole nolla. Tässä yhtälössä x on muuttuja, jonka arvoa etsimme.

### Täydelliset ja vaillinaiset toisen asteen yhtälöt

Toisen asteen yhtälöitä on kahta eri päätyyppiä - täydellisiä ja vaillinaisia.

1. Täydellinen toisen asteen yhtälö sisältää kaikki kolme termiä:  $ax^2$ ,  $bx$  ja  $c$ .

Esimerkki:  $3x^2 + 5x + 2 = 0$  on täydellinen toisen asteen yhtälö.

2. Vaillinaisten toisen asteen yhtälöiden joukossa on kahta tyyppiä:

a. Yhtälössä ei ole bx-termiä, eli se näyttää tältä:  $ax^2 + c = 0$ .

Esimerkki:  $x^2 - 9 = 0$  on vaillinaisen toisen asteen yhtälö.

b. Yhtälössä ei ole c-termiä, eli se näyttää tältä:  $ax^2 + bx = 0$ .

Esimerkki:  $6x^2 + 3x = 0$  on toinen esimerkki vaillinaisen toisen asteen yhtälöstä.

## Vaillinaisten yhtälöiden ratkaiseminen

Vaillinaiset yhtälöt ovat kuin temppuratoja, joista on otettu muutama este pois, joten ne on helpompi läpäistä. Katsotaan, kuinka voimme tehdä näitä temppuja!

### Tyyppi A: Yhtälöt ilman bx-termiä

Kun bx-termiä ei ole, voimme harjoitella ratkaisemista neliöjuurilla. Tässä tyypissä otamme c:n toiselle puolelle yhtälöä ja vedämme neliöjuuren molemmista puolista.

Esimerkki:  $x^2 - 9 = 0$

Lisäämme 9 molemmille puolille saadaksemme:  $x^2 = 9$

Nyt vain vedämme neliöjuuren molemmista puolista:  $x = \pm\sqrt{9}$

Huomaa, että meillä on kaksi mahdollista vastausta, koska neliöjuurella on kaksi arvoa, positiivinen ja negatiivinen:  $x = \pm 3$

### Tyyppi B: Yhtälöt ilman c-termiä

Kun c-termiä ei ole, voimme käyttää tekijöihin jakamista. Otamme yhteisen tekijän x ulos ja ratkaisemme yhtälön.

Esimerkki:  $6x^2 + 3x = 0$

Jaamme molemmat termit x:llä:  $x(6x + 3) = 0$

Nyt sinulla on kaksi vaihtoehtoa, joista kumpikin voi olla yhtälön ratkaisu:  $x = 0$  tai  $6x + 3 = 0$

Jos ratkaisemme jälkimmäisen eli

$$6x = -3$$

$$x = -3/6$$

, joka yksinkertaistuu eli sieventyy muotoon

$$x = -1/2$$

Joten ratkaisumme ovat  $x = 0$  ja  $x = -1/2$ .

### **Tehtävien aika!**

1. Testaa ratkaisutaitosi seuraavilla vaillinaisilla toisen asteen yhtälöillä:

a)  $x^2 - 16 = 0$

b)  $4x^2 + 20x = 0$

2. Yritä keksiä oma vaillinaisen toisen asteen yhtälö ja opeta ratkaisemisen vaiheet kaverillesi.

Matematiikka on kuin temppuilua luvuilla – mitä enemmän harjoittelet, sitä taidokkaammaksi tulet. Olet nyt oppinut uuden temput: kuinka ratkaista vaillinaisia toisen asteen yhtälöitä. Jatketaan yhdessä matkaamme polynomien huipuille ja löydä laskemisen taika!

## **5.4. Salakirjoitus - Yhtälöparien selättäminen**

Salaperäinen kirje on saapunut, ja siihen on kätkeyty viesti, jota ilman aarrekartan sijaintia on mahdoton selvittää. Avain viestin ratkaisuun on yhtälöpareissa! Siispä sukellaan tässä luvussa yhtälöparien maailmaan selvittämään, miten nämä matemaattiset arvoitukset ratkaistaan ja miten voimme käyttää niitä hyväksemme selvittääksemme visaisimmatkin ongelmat.

### **Yhtälöparit - Mitä ne ovat?**

Yhtälöpari koostuu kahdesta yhtälöstä, joilla molemmilla on kaksi tuntematonta. Tehtävämme on löytää nämä tuntemattomat luvut. Usein yhtälöparien tuntemattomia merkitään kirjaimilla  $x$  ja  $y$ . Esimerkiksi:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$$

Tässä esimerkissä  $x$  ja  $y$  ovat salainen viesti, joka meidän täytyy selvittää. Ratkaisumenetelmiä on useita, ja katsotaan niitä seuraavaksi. Valitse suosikkisi!

### **Sijoitusmenetelmä**

Sijoitusmenetelmässä ratkaistaan toisesta yhtälöstä toinen tuntemattomista ja sijoitetaan se toiseen yhtälöön. Käyttäen samaa esimerkkiä:

1. Ratkaistaan  $x$  ensimmäisestä yhtälöstä:

$$x = \frac{7-3y}{2}$$

2. Sijoitetaan tämä  $x$ :n arvo toiseen yhtälöön:

$$\frac{7-3y}{2} - 4y = -10$$

3. Ratkaisemme yhtälön  $y$ :lle.

### **Yhteen- ja vähennysmenetelmä**

Tässä menetelmässä yhtälöt kerrotaan siten, että jompikumpi tuntemattomista saadaan poistettua kun yhtälöt vähennetään toisistaan tai lasketaan yhteen.

1. Muunnetaan yhtälöt niin, että saadaan sama kerroin  $x$ :lle tai  $y$ :lle molemmissa yhtälöissä.
2. Lasketaan yhtälöt yhteen tai vähennetään toisistaan niin, että yksi muuttujista katoaa.
3. Ratkaistaan jäljelle jäänyt yhtälö.

### **Graafinen menetelmä**

Yhtälöparin voi ratkaista myös piirtämällä jokaisen yhtälön koordinaatistoon. Yhtälöparin ratkaisu on se piste, jossa molemmat suorat leikkaavat toisensa.

### **Harjoitus - Aarrekartan arvoitus**

Olet saanut käsiisi seuraavanlaisen yhtälöparin, joka johtaa sinut piilotetulle aarteelle:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

Käyttäkäämme yhteen- ja vähennysmenetelmää:

1. Kerrotaan toinen yhtälö kahdella, jotta  $y$ -muuttujan kertoimet ovat molemmissa yhtälöissä yhtä suuret mutta vastakkaista merkkiä:

$$10x - 2y = 6$$

2. Nyt lasketaan yhtälöt yhteen:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 10x - 2y = 6 \end{cases}$$

Tämä johtaa yhtälöön:

$$\begin{cases} 13x = 18 \end{cases}$$

3. Nyt yhtälössä on vain yksi tuntematon ( $x$ ), joten ratkaisemme sen:

$$13x = 18$$

$$x = \frac{18}{13}$$

Koska nyt tunnemme  $x$ :n, voimme sijoittaa sen toiseen alkuperäisistä yhtälöistä ja siten ratkaista  $y$ :n

$$\frac{18}{13} \cdot 5 - y = 3 \quad y = \frac{18}{13} \cdot 5 - 3$$

Ratkaiskaa tämä yhtälö ja löytäkää tuntemattomat  $x$  ja  $y$ , niin olette askeleen lähempänä aarteen löytämistä!

Kun olette ratkaisseet yhtälöparin, voitte piirtää yhtälöiden suorat koordinaatistoon ja nähdä, miten ne leikkaavat juuri ratkaisemassanne pisteessä. Tämä on loistava tapa tarkistaa työnne. Muista, että matematiikassa jokainen uusi taito on kuin avain, joka avaa aarrearkkua täynnä mahdollisuuksia.

Onnea matkaan aarteen metsästykseen ja yhtälöparien ratkaisemisen salaisuuksien selvittämiseen!

## 6. Funktioiden vuoristorata

Tervetuloa matemaattisen vuoristoradan huimaavaan maailmaan, jossa voit kokea jännitystä, yllätyksiä ja opetella käyttämään yhtä matematiikan tärkeimmistä työkaluista: funktiota. Matkallamme opimme havaitsemaan ja ymmärtämään funktioiden perusajatuksen ja sen, miten niitä käytetään esittämään ja ratkaisemaan monenlaisia ongelmia. Valmistaudu siis nousemaan korkeuksiin ja syöksymään syvyyksiin – funktioiden kanssa et koskaan tiedä, mikä käänne on seuraavaksi edessä!

**Mikä on Funktio?**

Ajattele huvipuiston vuoristorataa. Kun istut vaunuun, radan kulku määrää, missä kohdassa olet missäkin hetkessä: joka kerta kun olet tietyssä kohdassa rataa, vuoristoradan vaunusi on tietyssä korkeudessa. Tämä luotettava yhteys radan pituuden ja korkeuden välillä on itse asiassa aivan kuin funktio!

Matematiikassa funktio yhdistää kaksi joukkoa toisiinsa. Voimme ajatella sitä sääntönä tai koneena, joka antaa jokaiselle syötteelle (tai alkioille) ensimmäisestä joukosta vastineen (tai alkion) toisesta joukosta.

Voit miettiä funktiota kuin automaattista juomanmyyntikonetta. Kun valitset vaikkapa mehun, kone prosessoi syötteesi ja antaa sinulle mehun. Jokaiselle nappulan painallukselle on ennalta määrätty vastine, aivan kuten funktiossa.

Matemaattisesti ilmaistuna: Jos meillä on kaksi joukkoa, lähdejoukko  $X$  ja kohdejoukko  $Y$ , funktio  $f$  on sääntö, joka liittää jokaisen elementin joukosta  $X$  täsmälleen yhteen elementtiin joukosta  $Y$ . Kirjoitamme tämän näin:  $f: X \rightarrow Y$ .

## Kuinka Käsitellä Funktioita

Mitä tapahtuu, kun syötät numeron funktioon? Katsotaan esimerkkiä.

Oletetaan, että meillä on funktio  $f$ , joka määritellään säännöllä  $f(x) = 2x + 3$ . Jos syötät funktion  $f$  sisään luvun 4 (missä  $x$  on 4), applikaatio (käyttö) näyttää seuraavalta:

$$f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11$$

Funktio otti luvun 4, suoritti sille määritettyjä operaatioita ja antoi ulos luvun 11. Helppoa, eikö?

## Funktion Kuvaaja

Kuvitellaanpa, että vuoristoradan varrella on pylväitä, jotka osoittavat, kuinka korkealla olet tietyllä hetkellä. Jos piirtäisimme näiden pylväiden avulla käyrän, saisimme funktion kuvaajan.

Funktion kuvaaja, piirrettynä koordinaatistoon (jossa leveys  $x$  kertoo sijainnin radalla ja korkeus  $y$  korkeuden), tarjoaa visuaalisen esityksen siitä, mitä funktiossa tapahtuu. Kuvaajasta näet, miten  $y$ :n arvo vaihtelee, kun  $x$  muuttuu.

Esimerkki aiemmasta funktiostamme  $f(x) = 2x + 3$  näyttää suoralta linjalta, joka alkaa koordinaatistossa pisteen  $(0,3)$  kohdalla ja nousee ylös oikealle.



## Tutkimusmatka

Nyt tiedät funktioiden perusteet, on aika lähteä tutkimaan niitä enemmän! Matkan varrella tulet kohtaamaan erilaisia funktiolajeja: suoria, paraabeleita, eksponentteja... samaan tapaan kuin erilaisia vuoristoratoja. Joskus ne nousevat suoraan ylös, toisinaan taas kaartuvat ja kiertelevät.

Funktioita tutkimalla voit löytää toistuvia ja ennustettavia kuvioita kaikkialta: fysiikan laeissa, talouden trendeissä ja jopa luonnonmuodoissa. Funktio on työkalu, jonka avulla voimme järjestää ja ymmärtää maailmaa ympärillämme.

Hyväksy siis haaste, pakkaa rohkeutesi mukaan ja hyppää funktioiden vuoristoradan kyytiin! Tämän seikkailun jälkeen et tule katsomaan numeroita tai kaavoja entiseen tapaan. Valmiina kyytiin? Seuraavaksi opimme lisää siitä, miten funktioita voi muokata ja yhdistellä!

### 6.1. Erilaisia funktioita

Esimerkiksi  $f(x) = 12x$  on funktio ja yksinkertainen kertolasku. Mutta funktioita on myös:

1. **Lineaarisia**, kuten  $f(x) = 2x + 3$ , missä on sekä kerroin että vakioluku.
2. **Neliöllisiä**, kuten  $f(x) = x^2$ , missä syötettä korotetaan toiseen potenssiin.
3. **Potenssi**, kuten  $f(x) = 2^x$ , missä vakio korotetaan syötteen suuruisen potenssiin.
4. **Polynomisia**, kuten  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ , mikä on yhdistelmä eri potensseihin korotettuja termejä.

Ja paljon muuta! Funktio voi olla melkein mikä tahansa sääntö, kunhan se antaa vain yhden vastauksen jokaisen syötteen arvolle.

#### Lopuksi

Funktiot ovat kuin seikkailuja, joissa jokainen arvo voi avata oven uuteen maailmaan odottamattomine tuloksineen. Tämän luvun myötä olet ottanut ensimmäisen askeleen ymmärtääksesi funktion salaisuuksia ja kuinka ne muokkaavat matemaattista ympäristöämme. Jatkossa näemme, kuinka funktioiden tunteminen auttaa ratkomaan monenlaisia arkitilanteiden pulmia ja miten ne ovat perusta monimutkaisemmille matematiikan alueille. Toivotamme jännittäviä matemaattisia tutkimusmatkoja!

### 6.2. Suoran sankarit - Kuvaajien Kiipeily

Tervetuloa seikkailuun matemaattisten käyrien maailmaan, jossa suorat viivat piirtävät tarinoita ja laskukaavat ovat karttasi aarteiden luo! Tänään kiivetään yhdessä suorien rinteitä pitkin ja tutustutaan siihen, miten suoran yhtälö ja varsinkin sen kulmakerroin kertovat meille viivan salaisuudet koordinaatistossa.

## Suoran yhtälö - Taikasauva koordinaatistossa

Ennen kuin lähdetään kiipeämään, varustaudutaan perustyökalulla: suoran yhtälöllä. Kun piirrät suoran viivan koordinaatistoon, tämä viiva kuvaa joukkoa pisteitä, jotka ovat yhteydessä toisiinsa matemaattisen kaavan mukaisesti. Kaikkein tunnetuin suoran yhtälö on  **$y = mx + b$** , missä:

- $y$  on y-koordinaatti,
- $x$  on x-koordinaatti,
- $m$  on suoran kulmakerroin,
- $b$  on y-akselin leikkauspiste, jota kutsutaan myös vakiotermiksi.

## Kulmakerroin - Dynaamisen duon toinen puolisko

Kuvitellaan, että suora viiva kiipeää koordinaatistossa ylöspäin. Kuinka jyrkkä se on? Vastaus löytyy **kulmakertoimesta ( $m$ )**. Kulmakerroin kertoo meille, kuinka paljon y-koordinaatti kasvaa, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä. Jos kulmakerroin on suuri, meillä on jyrkkä nousu edessä. Jos kulmakerroin on pieni, kiipeämme loivaa rinnettä. Ja jos kulmakerroin on nolla, matkamme on tasainen – kuin kävelisimme tasankoa pitkin.

**Positiivinen kulmakerroin** tarkoittaa, että viiva nousee oikealle mentäessä, kun taas **negatiivinen kulmakerroin** merkitsee, että viiva laskee.

## Y-akselin leikkauspiste $b$ - Sieltä kaikki alkaa

Kun katsomme mihin suora törmää y-akselilla, löydämme toisen tärkeän arvon, vakiotermin  **$b$** . Se on piste, jossa suora kohtaa y-akselin, kun  $x$  on nolla. Tämä piste toimii kuin lähtöpisteenä tarinallemme suorien maailmassa.

## Tutkimusretki koordinaatistoon - Kädet saveen!

Nyt kun olemme varustautuneet tiedolla, on toiminnan aika. Piirretään ensin koordinaatistoon y-akseli ja x-akseli, ja merkitään ne huolellisesti. Sitten, valitkaa mieluisa kulmakerroin ja vakiotermi suorallenne. Kokeilkaa piirtää suoria eri kulmakertoimilla ja eri y-akselin leikkauspisteillä ja katsokaa, miten suoranne käyttäytyy.

**Esimerkki:** Jos valitsette kulmakertoimeksi 2 ja vakiotermiksi 3, suoranne yhtälö olisi  $y = 2x + 3$ . Löytäkää tämä y-akselin leikkauspiste ja piirtäkää suora niin, että kun  $x$  kasvaa 1 yksikön verran,  $y$  kasvaa 2 yksikön verran.

### Tehtäviä ja kiperiä kysymyksiä

1. Piirtäkää suora, jonka kulmakerroin on -1 ja y-akselin leikkauspiste on 4.
2. Oletetaan, että kuljette koordinaatistossa suoraa pitkin, joka kulkee pisteiden (2, -3) ja (4, 1) kautta. Laske tämän suoran kulmakerroin.
3. Onko mahdollista, että kaksi suoraa kulkee samaa reittiä, vaikka niillä olisikin eri kulmakertoimet? Perustele.
4. Kuinka suoran yhtälö muuttuu, jos kuljemme suoraa alaspäin vasemmalle sen sijaan, että se kulkisi oikealle ylöspäin?

Kun olette suorittaneet nämä tehtävät, varmasti tunnette olonne koordinaatiston kuninkaiksi ja kuningattariksi! Suorat viivat eivät ole enää mysteeri, vaan uskollisia seuralaisianne matematiikan maailmassa. Muistakaa, että jokainen suora on kuin tarina, ja te olette sen kertojia.

## 6.3. Paraabelin pyörremyrsky - Toisen asteen salaisuus

Tervetuloa matemaattisen seikkailun pyörteisiin! Valmistaudu sukeltamaan toisen asteen funktion ja paraabelin kiehtovaan maailmaan. Aloitamme matkamme ottamalla selvää, mikä on toisen asteen funktio ja miksi paraabeleita kutsutaan matematiikan taikurien heittäviksi taikakaariksi.

### Toisen asteen funktion lumo

Ensiksi, mikä ihme on toisen asteen funktio? Se on matematiikan peruskivimuurin yksi omaperäisimmistä palikoista, jonka yleinen muoto on:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Tässä kaavassa  $a$ ,  $b$ , ja  $c$  ovat vakioita, ja  $a$  ei saa olla nolla. Miksi ei? Koska jos  $a$  olisi nolla, funktio menettäisi neliöllisyytensä ja muuttuisi vain tavalliseksi ensimmäisen asteen funktioksi. Vakiot  $a$ ,  $b$ , ja  $c$  määrittävät paraabelin muodon ja sijainnin.

### Paraabeli - Geometrian aallot

Kun piirretään toisen asteen funktion kuvaaja koordinaatistoon, saadaan kuvaajaksi kaunis, symmetrinen käyrä, jota kutsutaan paraabeliksi. Paraabeli voi näyttää hymyilevältä tai surulliselta kasvolta riippuen siitä, kummin päin se avautuu. Jos  $a$  on suurempi kuin nolla, paraabeli avautuu ylöspäin ja näyttää iloiselta. Jos  $a$  on pienempi kuin nolla, se avautuu alaspäin kuin huokaillen.

## Paraabelin huippu

Paraabelin kaikista pisteistä erityisen jännittävä on sen huippu. Tämä piste on paraabelin ylimmässä tai alimmassa kohdassa koordinaatistossa ja ilmaisee toisen asteen funktion suurimman tai pienimmän arvon. Huipun koordinaatit löydät kätevällä kaavalla:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Laskemalla tämän  $x$ :n arvon voimme laskea  $y$ :n arvon kuten missä tahansa funktiossa: syötämme tämän  $x$ :n arvon funktioon.

## Paraabelin akselin symmetria

Paraabelilla on vielä yksi erikoinen ominaisuus: akselin symmetria. Paraabelin huippu jakaa paraabelin kahteen symmetriseen osaan. Symmetria-akseli on suora linja, joka kulkee paraabelin huipun kautta ja on suorassa kulmassa pohjaksi kutsutun suoran kanssa.

## Toisen asteen funktion arvoituksen purkaminen

Toisen asteen funktioiden maailmassa kohtaamme usein arvoituksia, kuten paraabelin leikkauspisteet  $x$ -akselin kanssa. Nämä pisteet löydetään tekemällä toisen asteen yhtälöön liittyvä nollakohta:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ratkaisemalla yhtälön saamme selville, leikkaako paraabeli  $x$ -akselia kahdessa kohdassa, yhdessä kohdassa tai ei ollenkaan. Tähän arvoitukseen on olemassa voimakas taikatempu nimeltä nollakohtien laskeminen, johon perehdytään toisella kerralla.

## Matematiikan taiteen taidonnäyte

Paraabeli ei ole vain matematiikkaa, se on geometrian taideteos. Vaikea uskoa? Katsotaanpa siltarakenteita, satelliittiantenneja tai jopa suosikkikoripalloilijasi täydellistä heittokaarta - kaikki seuraavat paraabelin muotoa! Montako esimerkkiä keksit omasta ympäristöstäsi?

## Harjoitukset

### Tehtävä 1: Tutki Paraabelia

Piirrä koordinaatistoon paraabeli funktiolla  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ . Merkitse huippu ja leikkauspisteet  $x$ -akselin kanssa.

### Tehtävä 2: Kokeile Kertoimia

Muuta funktion  $f(x) = x^2$  kerrointa  $a$ . Piirrä paraabelit, kun  $a$  on 1, -1, 0.5 ja -2. Kuvaile, miten paraabelin muoto muuttuu muuttamalla  $a$ :n arvoa.

### Tehtävä 3: Symmetria-akselin Etsiminen

Löydä symmetria-akselin yhtälö funktiolle  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  ja piirrä se koordinaatistoon yhdessä paraabelin kanssa.

## Yhteenveto

On aika purjehtia pois paraabelin pyörremyrskyistä, mutta muista, että matematiikan taikaa pidetään kätkeettynä näissä kauniissa kaarissa. Jokainen paraabeli on tehtävän tai tarinan alku. Seuraavassa luvussa sukellamme syvemmälle funktion kuvaajiin ja opimme miten niitä piirretään. Siihen asti, pitääkö mielessänne paraabelin elegantti matematiikka ja sen lukemattomat sovellukset maailmassamme!

## 6.4. Piirustusleiri - Funktion kuvaajien taiteilua

Tervetuloa matemaattisen taiteen piirustusleirille! Tällä hauskanpidon täyteisellä leirillä emme käytä perinteisiä siveltimiä tai piirustustarvikkeita, vaan meidän tärkein työkalumme on toimivin ja monipuolisin kaikista: matematiikka! Tänään sukellamme funktion kuvaajien maailmaan, tutustumme niiden merkitykseen ja opettelemme tulkitsemaan niitä kuin oikeaa taidetta konsanaan.

### Mitä ovat Funktion Kuvaajat?

Funktion kuvaaja on matemaattinen tapa esittää funktio visuaalisesti kaksiulotteisella tasolla, jossa jokainen piste kuvaa yhtä funktioon liittyvää arvoyhdistelmää. Käytännössä funktion kuvaaja piirretään koordinaatistoon, jossa vaaka-akseli ( $x$ -akseli) kertoo syötettävän arvon ja pystyakseli ( $y$ -akseli) vastaavan funktion arvon.

### Kuvaajien Tulkinta

Kun katsot funktion kuvaajaa, voit huomata paljon siitä, kuinka funktio käyttäytyy. Onko funktio jatkuvasti nouseva tai laskeva, vai onko siinä käännekohtia? Entäpä saavuttaako se tiettyjä erityisiä arvoja vain kerran tai monta kertaa? Piirustusleirillä meidän taiteemme tehtävänä on vastata juuri näihin kysymyksiin!

## Käyrän Nousu ja Lasku

Kuvittele että kävelet pitkin kuvaajan luomaa polkua. Kun polku nousee ylöspäin, funktio kasvaa: kun  $x$ :n arvo suurenee, myös  $y$ :n arvo suurenee. Jos polku alkaa laskea, funktio pienenee: suuremmalla  $x$ :n arvolla on pienempi  $y$ :n arvo.

## Huippukokoukset ja Laaksojuhlat

Erityiset kohdat kuvaajalla ovat sen maksimi- ja minimipisteet, meidän piirustusleiriläisten kielessä huippukokoukset ja laaksojuhlat. Maksimissa, eli huippukokouksessa, funktio saavuttaa suurimman arvonsa tietyllä välillä, ja minimissä, laaksojuhlassa, pienimmän arvonsa.

## Nollakohta ja Leikkauspisteet

Nollakohta on se piste, jossa funktio kohtaa  $x$ -akselin. Toisin sanoen, se on kohta, jossa funktion arvo on nolla. Jos kuvaaja leikkaa  $y$ -akselin, puhutaan leikkauspisteestä, joka kertoo funktion arvon, kun  $x$ :n arvo on nolla.

## Käännepisteet

Käännepisteessä käyrä muuttaa suuntaansa niin, että sen kaarevuus muuttuu. Voit ajatella sitä kuten vuoristoradan kääntymiskohtaa, jossa vaunu yhtäkkiä vaihtaa kaartamissuuntaa.

## Harjoitellaan Käyränlukua!

Nyt on sinun vuorosi kokeilla! Piirretään yhdessä erilaisia funktioiden kuvaajia ja harjoitellaan niiden tulkintaa. Tutki kuvaajia seuraavasti:

1. Etsi ja merkitse kuvaajaan funktioiden nollakohdat.
2. Löydä mahdolliset maksimi- ja minimipisteet.
3. Tunneista missä kohdin funktio leikkaa  $y$ -akselin.
4. Hahmota, missä kohdissa on käännekohtia.
5. Tee huomioita siitä, onko funktio kasvava, vähenevä tai pysyväkö se vakiona tietyillä osuuksilla.

## Loppunäyttely

Kun olet koonnut kaiken tiedon, on aika pitää oma loppunäyttely! Esittele kuvaajiasi ja niiden taiteellisia piirteitä toisille leiriläisille. Kuvaile funktioiden käytöstä ja siitä, mitä olet oppinut niiden kautta matematiikan maailmassa.

Muista, että matematiikka on yhtä paljon taitolaji kuin mikä tahansa muu taide. Jokainen kuvaaja kertoo oman tarinansa, ja mitä enemmän harjoittelet, sitä taitavammaksi matematiikan taiteilijaksi sinusta tulee. Nyt sukelletaan yhdessä funktion kuvaajien taianomaiseen maailmaan, jossa jokainen viiva ja käyrä kätkee sisälleen laskennan kauneutta ja logiikan loistoa.

# Osa III: Geometrian viidakko

Tervetuloa tutkimusretkelle matematiikan maailmaan! Tämä luku johdattaa sinut geometrian viidakkoon, jossa kuljemme muotojen, kulmien ja pintojen polkuja pitkin. Älä huoli, et tarvitse viidakkoveistä – vain terävän mielen ja uteliaisuuden. Lähdetään siis seikkailuun!

## 1. Viidakon perusteet

Geometria on matematiikan osa-alue, joka tutkii muotoja, kokoa, suhteita ja avaruutta. Voit nähdä geometriaa kaikkialla ympärilläsi: rakennuksissa, luonnossa, taideteoksissa ja jopa tietokonepeleissä. Ennen kuin voimme tutustua geometrian syvempiin salaisuuksiin, meidän täytyy ymmärtää joitakin peruskäsitteitä.

### Pisteet, viivat ja kulmat

Ajattele pistettä viidakon siemenenä – se on niin pieni, että siinä ei ole kokoa, vaan se määrittää vain sijainnin. Kun pistettä alkaa liikuttaa, se piirtää viivan. Viiva voi olla suora tai kaareva ja se voi kulkea loputtomiin molempiin suuntiin – tämä on suora viiva. Viivanpätkää, jolla on alku ja loppu, kutsutaan jänneväliksi.

Kulma syntyy, kun kaksi viivaa tai jänneväliä kohtaa. Kulmat mitataan tavallisesti asteina, ja ne voivat olla teräviä (alle  $90^\circ$ ), suorita ( $90^\circ$ ), tylppiä (yli  $90^\circ$ ) tai täysiä ( $360^\circ$ ).

### Monikulmiot ja ympyrät

Kun jännevälejä yhdistetään pisteissä ja ne sulkevat alueen, syntyy monikulmio. Kolmioilla on kolme sivua, neliöillä neljä, ja niin edelleen. Ympyrä, toisaalta, on erityinen muoto, jossa jokainen piste on yhtä etäällä keskipisteestä. Tämä etäisyys on ympyrän säde.

Entäpä kun menemme kolmiulotteiseen viidaksoon? Silloin meillä on esineitä kuten palloja (ympyrän kolmiulotteisia serkkuja) ja kuutioita (neliöiden kolmiulotteisia vastineita).

## **2. Geometrian eläimet**

Kuvittele nyt muotoja eläiminä, joita voit kohdata viidakossa. Jokaisella on oma persoonallisuutensa ja erityispiirteensä.

### **Kolmiot - Viidakon monimuotoisuus**

Kolmioita on monenlaisia: tasakylkisiä, joiden kahden sivun pituudet ovat samat; tasasivuisia, joissa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä; ja epäsäännöllisiä, joiden kaikki sivut ja kulmat ovat erilaiset. Tutkitaan niiden salaisuuksia: miten pinta-alat ja kulmat käyttäytyvät näissä viidakon asukkaissa?

### **Nelikulmiot - Turvalliset pesäpaikat**

Nelikulmioilla, kuten suorakulmioilla, neliöillä, vinoneliöillä ja trapetseilla, on neljä sivua ja ne antavat viidakolle vakaan muodon. Pystytkö selvittämään, mikä tekee jokaisesta nelikulmiosta erityisen ja kuinka voimme laskea niiden pinta-alat?

### **Ympyrät - Viidakon mysteerit**

Ympyrät voivat olla viidakon mysteerejä niiden pehmeiden kaariensa kanssa. Mutta älä anna sen hämätä sinua – ympyröillä on yksinkertaiset kuviot, kuten säde, halkaisija ja ympärysmitta. Kuinka nämä liittyvät toisiinsa? Ja kuinka voimme käyttää niitä ympyrän pinta-alan laskemiseen?

## **3. Geometrian kasvitieteellinen puutarha**

Viidakossa voit nähdä geometrian kasvitieteen ihmeellisyydessä – symmetrisissä kuvioissa lehdissä, mehiläispesissä tai jopa lumikiteissä. Nyt, kun tiedät perusteet, voit alkaa tutkia geometrinen muotojen monimuotoisuutta ympärilläsi.

Tarkastele luontoa matemaatikon silmin ja löydä piilotetut säännönmukaisuudet ja kuviot. Kokoa geometrian palapelit ja opi soveltamaan oppimaasi ongelmanratkaisuun, piirustuksiin ja projekteihin – niin koulussa kuin vapaa-ajallakin.

## **4. Viidakon tutkimushaasteet**



Jokaisen luvun lopussa on pieni haaste sinulle, tutkimusmatkailija. Katso ympärillesi ja etsi esimerkkejä eri geometrisistä muodoista. Piirrä niitä ja laske niiden alueet ja ympärysmitat. Luo oma geometrinen taideprojekti käyttämällä eri muotoja yhdessä.

Johtopäätöksenä, geometrian viidakko on täynnä ihmeitä odottamassa sinua löytämään ne. Ole rohkea ja utelias, ja pian näet, että matematiikka ei ole vain numeroita paperilla, vaan kiehtova kieli, jolla voimme ymmärtää maailmaa ympärillämme paremmin. Joten ole valmis pitämään hauskaa tämän matematiikan osa-alueen parissa ja oppimaan uusia asioita jokaisella askeleella!

## 7. Mittojen mysteeri: Geometrian peruskäsitteet

Geometria on matematiikan haara, joka tutkii muotoja, kokoja, avaruudellisia suhteita ja ulottuvuuksia. Se on kuin maailmankaikkeuden kielikurssi, jonka avulla opimme ymmärtämään ympäröivän todellisuuden rakennetta ja mittasuhteita. Tässä luvussa perehdymme geometrian peruskäsitteisiin ja opimme hahmottamaan niiden sovelluksia arkielämässä.

### Piste, viiva ja taso

**Piste** on geometrian keskeisin käsite ja samalla myös kaikkein yksinkertaisin. Voit kuvitella pisteen pienimmäksi mahdolliseksi merkiksi paperilla. Se ei omaa kokoa eikä laajuutta – se vain on.

Useimmiten käytämme pistettä paikan merkitsemiseen. Esimerkiksi kun kutsumme kaverin koulun jälkeen puistoon, voimme sanoa "nähdään leikkipaikan läheisyydessä olevalla penkillä". Tässä tapauksessa penkki toimii ikään kuin pisteenä maastossa.

**Viiva** syntyy, kun piste liikkuu johonkin suuntaan. Kuvittele, että otat kynän ja vedät pisteestä linjan paperille. Tämä jälki kuvaa viivaa. Matematiikassa viiva on kuitenkin ihanteellinen: se on loputtoman pitkä ja huippuohut, eikä sillä ole paksuutta.

**Taso** on seuraava askel. Kun viiva liikkuu johonkin suuntaan, se luo tason. Kuvittele vaikka valkoinen paperiarkki – se on esimerkki tasosta. Tämä käsite on hyvin tärkeä, koska se antaa meille mahdollisuuden tutkia monimutkaisempia muotoja kuten monikulmioita ja ympyröitä.

### Kulma ja monikulmio

**Kulma** muodostuu, kun kaksi viivaa kohtaa toisensa jossakin pisteessä. Tässä kohtaamispisteessä on kulman kärki ja viivat ovat kulman kyljet. Kulmat mitataan asteissa, ja koko ympyrä on 360 astetta.

Esimerkiksi keittiön pöydänkulma on yleensä 90 astetta, jota kutsutaan oikokulmaksi. Sitä pienempiä kulmia kutsutaan teräviksi ja suurempia tylpiksi kulmiksi.

**Monikulmio** on taso, joka on rajattu viivoilla, joita kutsutaan sivuiksi. Monikulmiot luokitellaan sivujen lukumäärän mukaan. Kolmioilla on kolme sivua, nelikulmioilla neljä, ja niin edelleen. Monikulmioita tutkimalla opimme ymmärtämään monia geometrisia muotoja, jotka tapaamme niin arkkitehtuurissa kuin luonnossakin.

## **Ympyrä**

**Ympyrä** on tason muoto, jossa kaikki pisteet ovat yhtä kaukana keskipisteestä. Ympyrän reuna on kaari, joka on tasainen ja suljettu. Tämän kaaren pituutta kutsutaan ympyrän kehäksi, ja etäisyyttä keskipisteestä kehään kutsutaan säteeksi.

Ympyrää tutkiessamme kohtaamme käsitteitä kuten halkaisija, joka on ympyrässä oleva viiva, mikä kulkee keskipisteen kautta ja yhdistää vastakkaiset pisteet kehällä. Halkaisija on kaksi kertaa niin pitkä kuin säde.

## **Miten käytämme geometriaa?**

Geometrian käsitteitä käytetään lähes kaikessa ympärillämme olevassa. Arkkitehdit käyttävät geometriaa rakentaessaan taloja ja siltoja. Taiteilijat luovat visuaalisia teoksia käyttäen erilaisia muotoja ja kuvioita. Jopa pelisuunnittelijat käyttävät geometriaa luodessaan virtuaalisia maailmoja.

Matemaattiset kaavat ja mallit auttavat meitä laskemaan erilaisten kolmiomuotoisten, suorakulmaisten ja monimutkaisten rakenteiden pinta-aloja ja tilavuuksia. Mittojen ymmärtäminen mahdollistaa myös sen, että voimme suunnitella ja valmistaa tuotteita ja rakenteita, jotka sopivat tiettyihin tiloihin.

## **Mitä seuraavaksi?**

Geometria on ikään kuin avain näkemään maailman eri tavalla – täynnä muotoja, suhteita ja mittasuhteita. Ymmärtämällä geometrian peruskäsitteet, annat itsellesi pohjan, jonka päälle voit rakentaa lisää tietoa matematiikan ihmeellisestä maailmasta.

Tästä eteenpäin tulet kohtaamaan monimutkaisempia geometrian teemoja, kuten kolmiulotteisuutta, kuvioiden yhdistämistä ja muunnoksia sekä geometriaa koskevia ongelmia ja todistuksia. Nyt on kuitenkin aika aloittaa matka geometrian perusteista, jotta voit tulevaisuudessa sukeltaa syvemmälle mittojen mysteeriin.

## 7.1. Kaikki alkaa pisteestä - Viivat, suorat ja tasot

Tervetuloa tutkimaan geometrian perusasioita! Tässä luvussa opimme, miten pisteestä kasvavat ulos suuremmat rakenteet: viivat, suorat ja tasot. Huomaat pian, kuinka nämä käsitteet liittyvät kaikkeen ympärillämme ja ovat matematiikan perusta.

### Piste - Geometrian ydin

Aloitetaan yksinkertaisesta. Kuvittele päässäsi mahdollisimman pieni pilkku - se on *piste*. Matematiikassa piste kuvaa tiettyä sijaintia avaruudessa, ja sitä voidaan pitää mittojen puuttumisen huipentumana. Pisteellä ei ole pituutta, leveyttä eikä syvyyttä. Voimme sijoittaa pisteen piirtoalustalle ja antaa sille nimen, esimerkiksi P.

### Viiva - Pisteiden yhdistäjä

Mitä tapahtuu, kun yhdistämme kaksi pistettä? Vedämme viivan. Käytännössä saatat ajatella viivan olevan vain lyijykynän tai tussin jälki paperilla, mutta matematiikassa viiva koostuu loputtomasta määrästä pisteitä. Se on niiden sarja, jotka yhdistävät kaksi pistettä. Viivalla on pituus, mutta ei leveyttä tai syvyyttä.

### Suora - Rajaton suunta

Kun viiva jatkuu molempiin suuntiin loputtomiin, siitä tulee *suora*. Voit ajatella suoraa rajattomana viivana, joka ei koskaan lopu. Se etenee molemmissa suunnissa ikuisesti. Suora on geometrian peruskäsitteitä. Se on yksiulotteinen ja voidaan esittää yhdellä mitalla - pituudella. Suoralla on suunta, mutta ei päätepistettä.

### Kuinka suora piirretään?

Tarkkaan ottaen suoraa ei voi piirtää kokonaisuudessaan, sillä meidän paperimme on rajallinen. Mutta me voimme piirtää suoran osan, jota myös joskus nimitetään "jänneeksi" (jänne). Merkitsemme suoran usein nimikirjaimilla, kuten AB. Suora AB esitetään symbolilla  $\overleftrightarrow{AB}$ .

### Taso - Kaksiulotteinen maailma

Kun lisäämme toisen ulottuvuuden, saamme tasaisen pinnan, jota kutsutaan *tasoksi*. Ajattele vaikka lukujärjestyksesi paperia tai luokkahuoneen lattiaa: nämä ovat esimerkkejä tasoista. Taso koostuu loputtomasta määrästä suoria, jotka kulkevat rinnakkain joka suuntaan. Tasolla ei ole syvyyttä, mutta sillä on pituus ja leveys.

### Pisteitä, viivoja ja suoria tasossa

Tasolle voimme sijoittaa pisteitä ja piirtää viivoja ja suoria aivan niin kuin paperille. Esimerkiksi voidaan sanoa, että suora  $\overleftrightarrow{CD}$  on tasossa  $X$ . Kreikkalaisella matemaatikolla, Eukleidesilla, oli ajatus, että yhden pisteen kautta voi kulkea ääretön määrä suoria, mutta kaksi pistettä määrittelee aina yhden ainoan suoran.

### **Kolme pistettä määrittää tason**

Jos meillä on kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, ne määrittelevät tason. Voit kuvitella, että nämä kolme pistettä ovat nurkkapaloja tason luomiseksi. Ne voivat olla pöydän jalat - niin kauan kuin ne eivät ole suoraan linjassa, ne tukevat tason muodostumista.

### **Koordinaatisto - Pisteiden sijainnit**

Kun haluamme sijoittaa pisteitä ja kuvailla niitä matemaattisesti, käytämme koordinaatistoa. Kaksiulotteisessa koordinaatistossa käytämme  $x$ - ja  $y$ -akseleita määrittämään pisteen sijainnin. Jokaiselle pisteelle annetaan kaksi numeroa,  $(x,y)$ , jotka kertovat, kuinka kaukana piste on origosta vaaka- ja pystysuunnassa.

Näin pääsemme käsiksi geometrian perusteisiin. Kuten huomaat, kaikki todella alkaa pisteestä, ja kasvaa siitä monimutkaisempiin rakenteisiin. Seuraavaksi käymme läpi, miten näitä käsitteitä käytetään ongelmien ratkaisemisessa ja kuinka ne ilmenevät ympärillämme maailmassa. Muista, että jokainen suuri matkakin alkaa yksittäisestä askeleesta - tai tässä tapauksessa, yksittäisestä pisteestä!

## **7.2. Kulmien kätkeyty maailma - Mistä löytyy oikea kulma?**

Tervetuloa tutkimaan matematiikan yhtä kaikkein perustavinta elementtiä: kulmia! Kulmat ovat kaikkialla ympärillämme, ja tunnistamalla niiden erilaiset ominaisuudet voimme ymmärtää ja luoda huikeita rakennelmia, ennustaa liikkeen suuntaa ja jopa ratkaista monimutkaisia ongelmia sekä matematiikassa että arkielämässä. Aloitetaan matka kulmien kätkeytyyn maailmaan!

### **Mitä ovat kulmat?**

Kulma muodostuu, kun kaksi sädettä (tai viivaa) katkaisevat toisensa niin, että niiden väliin jää avoin alue. Kulman kärki on piste, jossa säteet kohtaavat, ja säteet itse ovat kulman "kyljet". Kulmat mitataan asteina, ja kierros ympäri on 360 astetta.

### **Kulmien tyypit**

- **Terävä kulma:** Pienempi kuin 90 astetta.
- **Suora kulma:** Tarkalleen 90 astetta.
- **Tylppä kulma:** Suurempi kuin 90 astetta, mutta alle 180 astetta.
- **Riippuva kulma:** Tarkalleen 180 astetta.
- **Ympyräkulma:** Suurempi kuin 180 astetta.

## Kulmien erityiset nimet

- **Komplementtikulmat:** Kahden kulman summa on 90 astetta.
- **Suplementtikulmat:** Kahden kulman summa on 180 astetta.
- **Sisäkulma:** Monikulmion sisällä oleva kulma.
- **Ulkokulma:** Monikulmion sivun ja sitä jatkavan viivan välinen kulma.

## Miten kulmia mitataan?

Voit käyttää kulmamittaa tai harppia ja viivoitinta kulmien suuruuden mittaamiseen. Kun asetat kulmamitan kärjen kulman kärkeen ja säteet linjoittuvat kulmamitan kanssa, voit lukea suuruuden asteikolta.

## Oikea kulma - Kulmien kuningas

Oikea kulma, joka on tasan 90 astetta, on yksi kaikkein tärkeimmistä kulmista matematiikassa. Se esiintyy monissa rakenteissa ja esineissä, kuten kirjoissa, ovissa ja jopa tenniskentällä. Oikea kulma voidaan tunnistaa "L"-kirjaimen muotoisena, ja sitä käytetään lattian tai seinän vaakasuoruuden ja pystysuoruuden mittaamiseen.

## Oikeat kulmat arkielämässä

Opettajasi pöydällä oleva vihkopino, luokkahuoneen ikkunat, kävelytiet ja jopa leikkipuiston liukumäki noudattavat oikeaa kulmaa. Tarkkailepa ympäristöäsi löytääksesi esimerkkejä oikeista kulmista!

## Kulmarikasta puuhastelua

### Kulmajahti!

Lähde etsimään kulmia koulusi sisältä ja ulkoa. Kerää erilaisia kulmia ja luokittele ne tyypeittäin. Keskustelkaa luokan kanssa löydöistänne.

### Leikkaa ja mittaa!

Leikkaa kartongista erilaisia kulmia. Käytä kulmamittaa selvittääksesi niiden suuruudet. Voitteko luoda tarpeeksi komplementti- ja suplementtikulmia, jotta niiden summat ovat tasan 90 tai 180 astetta?

## **Yhteenveto**

Kulmat ovat kaikkialla ympärillämme, muodostaen maailman, jossa elämme. Niiden ymmärtäminen auttaa paitsi ratkaisemaan matemaattisia tehtäviä myös ymmärtämään monia asioita, jotka ovat osa päivittäistä elämäämme. Jatka tutkimusmatkaasi matematiikan maailmassa ja löydä uusia tapoja soveltaa kulmien tietämystä joka päivä!

## **7.3. Monikulmioiden monimutkaisuus - Joka nurkka lasketaan**

Matematiikan maailmassa voit piirtää monia erilaisia kuvioita: ympyröitä, suorakaiteita ja kaikenlaisia käyriä. Tässä luvussa kuljemme geometrian polkuja ja tutustumme monikulmioiden salaisuuksiin. Mikä tekee monikulmiosta monikulmion? Miten lasket niiden sivut ja kulmat? Entä mitä erityistä niissä on?

### **Monikulmion määritelmä**

Monikulmio on tasokuva, joka rajautuu suorilla viivoilla ja jossa on vähintään kolme sivua ja kulmaa. Nämä sivut ja kulmat kohtaavat toisensa pisteissä, joita kutsumme kärjiksi. Monikulmioita on lukemattomia erilaisia, ja ne voidaan luokitella monin eri tavoin esimerkiksi sivujen ja kulmien määrän perusteella.

### **Monikulmioiden tyypit**

Monikulmioita on yhtä monia kuin on sivujen määriä:

- Kolmioilla on kolme sivua.
- Nelikulmioilla, kuten neliöillä ja suorakaiteilla, on neljä sivua.
- Viisikulmioilla on viisi sivua.
- Ja niin edelleen. Kuusikulmio, seitsenkulmio, kahdeksankulmio...

Näille kaikille on yhteistä se, että sivujen määrä kertoo myös kärkien ja kulmien määrän. Kaikilla monikulmioilla on myös sisä- ja ulkokulmat.

### **Monikulmioiden kulmat**

Jos haluat selvittää monikulmion sisäkulmien summan, käytä kaavaa:

$$(n - 2) * 180^\circ$$

missä  $n$  on monikulmion sivujen (ja kulmien) lukumäärä. Miksi juuri näin? Se johtuu monikulmion jakamisesta kolmioiksi sen sisältä. Jokaisella kolmiolla on kulmien summa  $180^\circ$ , ja kun monikulmio jaetaan, löydämme aina  $(n - 2)$  kolmiota.

Kokeilepa tätä käytännössä esimerkiksi kuusikulmion kanssa. Kuusikulmiolla on kuusi sivua, joten laskemme  $(6 - 2) * 180^\circ$  mikä antaa tulokseksi  $720^\circ$ . Siis kuusikulmion sisäkulmien summa on  $720^\circ$ !

## Sisäkulmat ja ulkokulmat

Sisäkulmat ovat ne kulmat, jotka löytyvät monikulmion sisältä. Ulkokulmat löytyvät monikulmion ulkopuolelta, ja niitä voit ajatella monikulmion sivujen jatkeina. Yllättävänä faktojen helminä kaikkien monikulmioiden ulkokulmien summa on aina  $360^\circ$ , riippumatta siitä, kuinka moni sivu monikulmiolla on.

## Ominaisuuksien hyödyntäminen

Kun tunnet monikulmioiden ominaisuudet, voit käsitellä niitä helpommin matematiikan pulmissa. Vaikkapa karttaratkaisuissa, taiteessa tai arkkitehtuurissa voit bongata monikulmioita ja enteillä niiden kulmaisia salaisuuksia.

## Käytäntöä ja kokeilua

Lähdetäänpi kokeilemaan! Piirrä erilaisia monikulmioita ja laske niiden sisä- ja ulkokulmien summat käyttäen opittuja sääntöjä. Huomaatko jonkin säännönmukaisuuden? Miten eri monikulmiot liittyvät toisiinsa?

## Yhteenveto

Monikulmioiden maailma on täynnä muotoja ja kulmia, jotka ovat perusta monille arkipäivän esineille ja rakenteille. Kun opit tunnistamaan ja laskemaan niiden ominaisuudet, avaat ovet geometrisen ymmärryksen maailmaan. Nyt kun tiedät monikulmioiden monimutkaisuudesta, olet valmis näkemään ja hyödyntämään niitä ympäröivässä maailmassa – joka nurkka on laskettavissa!

## Harjoitustehtäviä

1. Piirrä viisikulmio ja laske sen sisäkulmien summa.
2. Etsi ympäristöstäsi kolme erilaista monikulmiota ja piirrä ne. Laske niiden sisä- ja ulkokulmien summat.
3. Mieti, miten monikulmioita voidaan hyödyntää arkkitehtuurissa. Anna esimerkki.

## 7.4. Ympyrän ympärille kietoutunut - Piirin pyörteet

Tervetuloa matemaattiselle matkalle, jonka keskiössä on yksi geometrian perusmuodoista: ympyrä. Ympyrä on kaikkien tuttu – se näkyy pyörissä, kellotauluissa ja vaikkapa täysikuussa. Mutta mitä kaikkea ympyrästä ja sen piiristä oikein voimme päätellä? Luvassa pyörryttävä likiarvo nimeltä pii, kehän mittailua ja paljon muuta! Lähdetään selvittämään, miten ympyrän piiri (tai kehä) liittyy mystiseen lukuun pi ( $\pi$ ).

### Ympyrä: Määritelmä ja komponentit

Ensimmäinen askel ympyrän syvällisempään ymmärtämiseen on sen komponenttien tunnistaminen. Ympyrä on joukko pisteitä tasolla, jotka ovat kaikki tarkalleen yhtä kaukana keskipisteestä. Tämä etäisyys tunnetaan säteenä ( $r$ ). Ympyrän viiva, joka rajoittaa tämän pistejoukon, on sen piiri tai kehä.

### Piirin kaava ja pii ( $\pi$ )

Ympyrän piiri ( $P$ ) lasketaan yksinkertaisella kaavalla  $P = 2\pi r$ , missä  $r$  on säde. Toinen tapa kirjoittaa kaava on  $P = \pi d$ , jossa  $d$  on ympyrän halkaisija (halkaisija on kaksi kertaa säde, eli  $d = 2r$ ). Pii ( $\pi$ ) on matemaattinen vakio, joka ilmaisee ympyrän kehän pituuden suhteen sen halkaisijaan. Vaikka pii on irrationaalinen luku ja sen desimaaliesitys on loputon, käytämme usein likiarvoa 3,14 tai hieman tarkempaa arvoa  $\frac{22}{7}$  laskelmissamme.

### Käytännön harjoitusta: Mitataan piiriä

Lähdetään selvittämään, miten voimme mitata oikean esineen, kuten lautasen tai juomalasin piirin. Tämä on hauska tapa yhdistää matematiikka arkiseen ympäristöön.

### Tarvikkeet:

- Lautanen (tai mikä tahansa muu ympyrän muotoinen esine)
- Joustava mittanauha tai lanka (jota voi myöhemmin mitata viivoittimella)
- Viivotin
- Paperia ja kynä laskujen tekemiseen



## Ohjeet:

1. Aseta lautanen tasaiselle pinnalle.
2. Käytä joustavaa mittanauhaa tai kiepauta lankaa lautasen ympäri sen leveimmästä kohdasta mittaamaan lautasen ympäri sen piiri.
3. Merkitse langan kohta, jossa se kohtaa alun, ja mittaa tämä pituus viivoittimella. Tämä on lautasen kehän pituus.
4. Seuraavaksi mittaa lautasen halkaisija suoraan sen keskikohdan yli.
5. Kirjoita molemmat mittaukset paperille ja käytä niitä piirin kaavassa  $P = \pi d$  tai  $P = 2\pi r$  laskemaan piiri. Vertaa tulosta mitattuun kehän pituuteen.

Voit verrata arvoja ja nähdä, kuinka tarkasti matemaatikot ovatkaan onnistuneet määrittelemään pii-luvun avulla ympyrän kehän pituuden. Muista, että todellisissa mittauksissa saattaa ilmetä pientä vaihtelua, joten älä huoli, jos laskelmasi ja mittauksesi eivät täysin vastaa toisiaan – lähelle pääseminenkin on jo huippusuoritus!

## Yhteenveto

Piiri on ympyrän ympärille kietoutuva mysteeri, joka yllättää tarkkuudellaan. Se ylittää ympyrän muodon yksinkertaisuuden ja löytää tiensä niin matematiikan tehtäviin kuin maailman moniin nurkkauksiin. Pii on avain ympyrän saloille – tämä irrationaalinen luku jatkaa piiriä sivuilta sanoihin, ajatuksista todellisuuteen. Matematiikka on täynnä näitä ihmeitä, joten pysy uteliaana, tutki ympäristöäsi ja löydä laskelmissa piilevät piirin pyörteet. Ei ole mitään, minkä piiriin et voisi kietoutua, kunhan vain tartut rohkeasti kompassiin ja viivoittimeen!

# 8. Geometrian taikatemput

Tervetuloa seikkailuun geometrian maailmassa, jossa selvität miten matemaattisten kaavojen ja laskutaitosi avulla voit löytää vastaukset monenmuotoisten esineiden, kuvoiden ja tilojen ominaisuuksiin. Geometriassa piilee taikaa, jota kaikki meistä käyttävät, tietoisesti tai tiedostamatta, arkipäivän askareissa, taiteessa ja insinööriyössä.

## Mitä on geometria?

Geometria on matematiikan osa-alue, joka tutkii muotoja, kokoja, avaruudellisia suhteita ja ulottuvuuksia. Lähdetäänpä yhdessä paljastamaan geometrian taikatemppuja, jotka auttavat meitä ymmärtämään ympärillämme olevaa maailmaa paremmin. Alta löydät muutamia perustemppuja, joita voimme käyttää hyväksemme.

## Piiri ja Pinta-ala - Geometrian peruskikat

Kuvittele, että sinulla on taikasauva, jolla voit mitata minkä tahansa muodon rajat ja laajuuden. Geometriassa me voimme tehdä juuri tämän laskelmien avulla!

### Piiri

Piiri on muodon kehän pituus. Jos sinulla on suorakulmio, voit löytää sen piirin aivan kuin taikauskusta, laskemalla sen sivujen pituudet yhteen. Tässä on kaava:

$$\text{Piiri} = 2 \times (\text{pituus} + \text{leveys})$$

Esimerkiksi, jos suorakulmion pituus on 5 cm ja leveys 3 cm, sen piiri on:

$$\text{Piiri} = 2 \times (5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 2 \times 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

### Pinta-ala

Voit ajatella pinta-alaa kuin taianomaisena jauheena, joka leviää tasaisesti kaikkialle muodon pinnalle. Pinta-ala kertoo sinulle, kuinka paljon tilaa muoto peittää. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla sen pituus leveydellä:

$$\text{Pinta-ala} = \text{pituus} \times \text{leveys}$$

Joten käyttäen edellä annettuja mittoja:

$$\text{Pinta-ala} = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

Huomaa pinta-alan yksikkö  $\text{cm}^2$ , joka tarkoittaa neliösenttimetriä.

## Ympyrän ympärysmitta ja pinta-ala - Taikasilmukat

Ympyrä on kaikista geometrian kuvioista kaikkein maagisin: sillä on ääretön määrä symmetrisiä suoria eli halkaisijoita, jotka kulkevat sen keskipisteen kautta.

### Ympärysmitta

Ympyrän ympärysmitta tai kehä löydetään kertomalla sen halkaisija piillä ( $\pi$ ), joka on taianomainen luku noin 3.14159. Jos tiedämme ympyrän säteen (puolet halkaisijasta), käytämme kaavaa:

$$\text{Ympärysmitta} = 2 \times \pi \times \text{säde}$$

## Pinta-ala

Ympyrän pinta-ala löydetään käyttämällä sädettä ja taianomaista pii-lukua:

$$\text{Pinta-ala} = \pi \times \text{säde}^2$$

Kun siis ympyrän säde on 4 cm, laskemme sen pinta-alan näin:

$$\text{Pinta-ala} = \pi \times (4 \text{ cm})^2 = \pi \times 16 \text{ cm}^2 \approx 50.265 \text{ cm}^2$$

## Kolmioiden Geometrian taikavoimat

Kolmioita on monenlaisia, ja niiden salat piiloutuvat kulmiensa ja sivujensa taikaan. Kolmion pinta-ala löydetään seuraavalla kaavalla:

$$\text{Pinta-ala} = (\text{kanta} \times \text{korkeus}) / 2$$

Eli jos kolmion kanta on 6 cm ja korkeus 4 cm, sen pinta-ala on:

$$\text{Pinta-ala} = (6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) / 2 = 24 \text{ cm}^2 / 2 = 12 \text{ cm}^2$$

Kolmioissa on myös Pythagoraan lause, joka on varsinainen näyttö geometrian voimasta. Se koskee vain suorakulmaisia kolmioita ja kuuluu näin:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

missä  $c$  on hypotenuusa (suorakulmaisen kolmion pisin sivu) sekä  $a$  ja  $b$  ovat kateetit (suorakulman viereiset sivut).

Geometriassa piilee paljon muutakin taikuutta kuin tässä on esitelty. Jokainen muoto ja kaava vie meidät syvemmälle tämän tieteellisen taikamaailman sydämeen. Käytä löytämiäsi taikakikkoja ratkaistaksesi arjen pulmia ja paljastaaksesi maailmamme piilotetut mitat. Nyt saatkin tarttua taikasauvan ... siis kynän varteen ja harjoitella löytämiäsi temppuja tehtävissä, jotka löydät tämän luvun lopusta. Hauskoja seikkailuja geometrian ihmeellisessä maailmassa!

## 8.1. Alueen arvoitus - Pinta-alojen palapeli

Tervetuloa matemaattisen tutkimusmatkan sydämeen! Tänään sukellamme geometrian ihmeelliseen maailmaan, jossa ratkomme ympäröivien tilojen salaisuuksia mittaamalla niiden pinta-aloja ja piirejä. Ennen kuin aloitamme, varustaudu kynällä, viivottimella, laskimella ja reilulla annoksella uteliaisuutta. Lähdetään liikkeelle!

### Mitä ovat pinta-ala ja piiri?

**Pinta-ala** kertoo, kuinka suuren alueen jokin kaksiulotteinen kuvio peittää. Ajatellaanpa esimerkiksi lattialle levitettyä sanomalehteä; pinta-ala kuvaa, kuinka paljon lattiapintaa sanomalehti peittää. Pinta-alaa mitataan neliöyksiköissä, kuten neliömetreissä ( $\text{m}^2$ ), neliösenttimetreissä ( $\text{cm}^2$ ) tai neliömillimetreissä ( $\text{mm}^2$ ).

**Piiri** (tai kehä) puolestaan kertoo, kuinka pitkä on matka kulkiessamme kuvion reunaa pitkin ympäri ja palatessamme takaisin lähtöpisteeseen. Piirin mittayksiköt ovat samat kuin pituuden, joten se mitataan metreissä (m), senttimetreissä (cm) tai millimetreissä (mm).

### Perustapaukset: Suorakulmion ja ympyrän pinta-ala ja piiri

#### Suorakulmion pinta-ala ja piiri

Matkamme alkaa suorakulmion maasta. Suorakulmio on kuvio, jonka kaikki kulmat ovat suoria eli 90 asteen kulmia. Pinta-alan laskeminen on suoraviivaista: kerrotaan sen pituus sen leveydellä.

**Kaava:** Pinta-ala ( $A$ ) = pituus ( $p$ )  $\times$  leveys ( $l$ )

**Esimerkki:** Jos suorakulmion pituus on 5 cm ja leveys on 3 cm, sen pinta-ala on:  $A = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$

Piirin laskemisessa yksinkertaisesti lisätään yhteen kaikkien sivujen pituudet. Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat aina yhtä pitkät, joten meillä on kaksi pituutta ja kaksi leveyttä.

**Kaava:**  $Piiri (P) = 2 \times (pituus + leveys)$

**Esimerkki:**  $Piiri = 2 \times (5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 2 \times 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$

### Ympyrän pinta-ala ja piiri

Seuraavaksi pyöritellään ympyrän maailmassa. Ympyrä on kuvio, jossa jokainen piste on yhtä kaukana keskipisteestä. Ympyrän pinta-alan kaavaan tarvitaan pii ( $\pi$ ), joka on matemaattinen vakio noin arvolla 3.14, sekä ympyrän säde ( $r$ ), joka on etäisyys keskipisteestä ympyrän kehälle.

**Kaava:**  $Pinta-ala (A) = \pi \times r^2$ , jossa  $r$  on säde

**Esimerkki:** Jos ympyrän säde on 4 cm, sen pinta-ala on:  $A = \pi \times (4 \text{ cm})^2 = \pi \times 16 \text{ cm}^2 \approx 50.24 \text{ cm}^2$

Ympyrän piiri eli ympärysmitta lasketaan myös  $\pi$ :n ja säteen avulla.

**Kaava:**  $Piiri (P) = 2 \times \pi \times \text{säde } (r)$

**Esimerkki:**  $Piiri = 2 \times \pi \times 4 \text{ cm} \approx 25.12 \text{ cm}$

### Monikulmioiden ja epäsäännöllisten muotojen pinta-ala

#### Monikulmioiden pinta-ala

Monikulmio on tasossa sijaitseva geometrinen kuvio, joka rajoittuu useammalla kuin kolmella suoralla viivalla. Esimerkiksi viisikulmion tai kuusikulmion pinta-alan laskemisessa yksi hyvä keino on jakaa monikulmio yksinkertaisempiin kuvioihin, kuten kolmioihin tai suorakulmioihin, ja laskea niiden alat erikseen.

#### Epäsäännöllisten muotojen pinta-ala

Epäsäännöllisten muotojen kanssa voi joutua käyttämään luovuutta. Yksi tapa on jakaa muoto pienempiin säännöllisiin osiin tai hyödyntää ruudukkoa, jossa lasketaan peitetyt kokonaiset neliöt ja arvioidaan puolikuut.

## 8.2. Kolmiulotteisten kappaleiden kadonnut maailma - Tila mahtuu täyteen

Hei nuori matemaatikon alku! Olet ehkä ihmetellyt, miten voisit mahdollistaa enemmän kuutiojäätelöitä pakastimeen tai kuinka paljon maalia tarvitaan huoneesi seinien maalaamiseen. Vastaus piilee kolmiulotteisten kappaleiden ihmeellisessä maailmassa – avaruusgeometriassa. Tässä luvussa perehdymme tilavuuksiin ja pinta-alojen laskentaan. Siispä teroita kynäsi, varaudu avaruuden seikkailuun ja valmistaudu avaamaan ovi kappaleiden salaiseen maailmaan!

## 1. Tilavuuden tutkimusmatka

**Tilavuus** kertoo, kuinka paljon kolmiulotteinen kappale sisältää tilaa. Se ilmoitetaan yksiköissä, kuin kuutiometri ( $\text{m}^3$ ) tai kuutiodesimetri ( $\text{dm}^3$ ), jotka ovat tuttuja vaikkapa limutölkeistä.

### Kuution ja suorakulmaisen särmiön tilavuus

**Kuution** tilavuus on helppo laskea, koska jokainen sen sivu on yhtä pitkä. Laskukaava on:

$$\text{Tilavuus} = a^3$$

Missä  $a$  on kuution sivun pituus.

**Suorakulmaisen särmiön** tilavuuden laskentakaava on samankaltainen, mutta koska sen eri sivut voivat olla eripituisia, tilavuus lasketaan kertomalla pohjan ala korkeudella:

$$\text{Tilavuus} = \text{pohjan pinta-ala} \times \text{korkeus} = \text{pituus} \times \text{leveys} \times \text{korkeus}$$

### Sylinterin, kartion ja pallon tilavuus

*Sylinterin* tilavuus lasketaan pohjaympyrän pinta-alan ja korkeuden avulla:

$$\text{Tilavuus} = \pi r^2 h$$

Missä  $r$  on pohjaympyrän säde ja  $h$  on korkeus.

*Kartion* tilavuus on kolmasosa sylinterin tilavuudesta, jonka pohjaympyrän säde ja korkeus ovat samat:

$$\text{Tilavuus} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

*Pallon* tilavuus vaikuttaa ensi silmäyksellä monimutkaiselta, mutta se onkin yksinkertaisesti:

$$\text{Tilavuus} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Missä  $r$  on pallon säde.

## 2. Pinnalla pysyminen - Pinta-alojen laskenta

Kun tilavuus kertoo sisäisen avaruuden, **pinta-ala** ilmaisee kappaleen ulkopinnan koon. Se on erityisen tärkeä maalattaessa seiniä tai verhoillessa lahjapaketteja.

### Kuution ja suorakulmaisen särmiön pinta-ala

**Kuution** pinta-ala on yhtä kuin yhden sivun ala kerrottuna kuudella, sillä kuutiolla on kuusi samankokoista sivua:

$$\text{Pinta-ala} = 6a^2$$

**Suorakulmaisen särmiön** pinta-ala lasketaan summaamalla kaikkien erilaisten sivujen alat yhteen:

$$\text{Pinta-ala} = 2(lw + lh + wh)$$

Missä  $l$  on pituus,  $w$  on leveys ja  $h$  on korkeus.

### Sylinterin, kartion ja pallon pinta-ala

*Sylinterin* pinta-ala koostuu kahdesta ympyrästä ja vaipasta:

$$\text{Pinta-ala} = 2\pi r(r + h)$$

*Kartion* pinta-alaan sisältyy pohjaympyrä ja kartion vaippa (kartiopinta), joka avattuna on ympyrän sektori:

$$\text{Pinta-ala} = \pi r(r + l)$$

Missä  $l$  on sivujanen pituus (kartion vaipan viisto reuna).

*Pallon* pinta-ala on niinkin yksinkertainen kuin:

$$\text{Pinta-ala} = 4\pi r^2$$

Se on kuin neljä samaa ympyrää pallon pinnalla!

### Harjoitustehtäviä

1. Laske kuution tilavuus ja pinta-ala, kun yhden sivun pituus on 5 cm.

2. Oletetaan, että huoneesi on suorakulmainen särmiö, jonka mitat ovat 4 m x 5 m x 2,5 m. Kuinka monta litraa ilmaa huoneeseesi mahtuu?
3. Matikanmaassa on pyöreätä jäätelöpuikkoa muistuttava torni, jonka ympyränmuotoisen pohjan säde on 3 m ja korkeus on 15 m. Laske tornin tilavuus ja pinta-ala.
4. Tähtitieteilijä-Annan teleskooppi on nähnyt kaukana avaruudessa pallon, jonka säde on 10 km. Kuinka suuri on pallon pinta-ala ja tilavuus?

Luovuus, logiikka ja uteliaisuus ovat parhaita työkalujasi matematiikan maailmassa. Jokainen laskemasi tilavuus ja pinta-ala auttaa sinua ymmärtämään paremmin ympäröivää todellisuutta. Tartu laskimeesi ja luo tiesi kolmiulotteisten kappaleiden kadonneeseen maailmaan – avaruuden seikkailut odottavat!

## 8.3. Kuvioiden katoamistempu - Yhdenmuotoisuuden ydin

Kuvittele kaksi täydellistä, identtistä kolikkoa. Jos asettaisit ne pöydälle, ne näyttäisivät samankokoisilta, samanmuotoisilta ja samantasoisilta. Mutta entä jos toinen kolikoista olisi hieman kauempana? Se näyttäisi pienemmältä, vaikka todellisuudessa kolikot ovat täysin samanlaiset! Tämä on yhdenmuotoisuuden taikuutta – mutta älä huoli, ei tässä ole taikureiden salaisuuksia, vaan kyse on puhtaasta matematiikasta!

### Mikä on geometrinen paikka?

Hyppäämme ensin geometrinen paikkojen käsitteeseen. **Geometrinen paikka** on kokoelma pisteitä, jotka täyttävät tietyt ehdot. Ajattele esimerkiksi kaikkia pisteitä, jotka sijaitsevat yhdellä suoralla viivalla, tai kaikkia niitä pisteitä, jotka ovat tietyn matkan päässä jostakin pistepaikasta – nämä ovat geometrisia paikkoja.

### Yhdenmuotoisuuden perusteet

**Yhdenmuotoisuus** on geometrinen käsite, joka tarkoittaa, että kaksi tai useampi kuvio on samanmuotoisia, vaikka niiden koko olisikin erilainen. Ajatellaan, että sinulla on kaksi kolmiota, ja jos toisen kolmion kaikki kulmat ovat tarpeeksi yhtä suuret kuin toisen kolmion vastaavat kulmat, kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

### Yhdenmuotoisuuden ehdot

Tasokuvioita, esimerkiksi kolmioita, kutsutaan yhdenmuotoisiksi, jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivujen suhteet ovat samat. Tarkastellaanpa kahta kolmiota,  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$ .



Jotta voitaisiin sanoa, että  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  (luetaan: kolmio ABC on yhdenmuotoinen kolmioon DEF kanssa), seuraavat ehdot on täyttyvä:

1. Kulma A = Kulma D
2. Kulma B = Kulma E
3. Kulma C = Kulma F

Lisäksi sivujen pituuksien suhteiden on oltava samat:

1.  $AB/DE = BC/EF = AC/DF$

Kun nämä ehdot täyttyvät, voimme olla varmoja siitä, että kolmiot ovat yhdenmuotoisia, ja kaikki  $\triangle ABC$ :n ominaisuudet (kuten kulmien suuruus tai korkeus) voidaan suhteuttaa  $\triangle DEF$ :ään.

## Miten hyödynnämme yhdenmuotoisuutta?

Yhdenmuotoisuudella on lukemattomia sovelluksia matematiikassa ja päivittäisessä elämässä. Esimerkiksi, insinöörit ja arkkitehdit käyttävät yhdenmuotoisuutta piirtäessään rakennusten pienoismalleja ja suunnitellessaan siltoja. Kartanpiirtäjät pienentävät mittakaavan avulla suuren maastoalueen pieneen paperiarkkiin.

## Käytännön esimerkki

Olet puistossa ja näet korkean puun, jonka korkeuden haluaisit selvittää, kiipeämättä puun latvaan. Voit käyttää yhdenmuotoisuutta apuna! Mittaa itsesi ja maahan heittämäsi auringonvalon varjosi, niin saat tietää pienen kolmion mitat. Ja kun mittaat sitten puun varjon, voit selvittää isosta kolmiosta puun korkeuden laskemalla pienen ja ison kolmion sivujen suhteet!

## Harjoitustehtäviä

1. Piirrä kaksi yhdenmuotoista kolmiota ja merkitse niiden yhtäsuuret kulmat sekä vastaavat sivut.
2. Oletetaan, että kolmion  $\triangle ABC$  sivujen AB, BC ja AC pituudet ovat 6 cm, 8 cm ja 10 cm. Piirrä uusi kolmio  $\triangle XYZ$ , joka on  $\triangle ABC$ :n kanssa yhdenmuotoinen ja jonka suurin sivu on 15 cm. Mitkä ovat sivujen XY ja XZ pituudet?
3. Seiso suorakulmaisen rakennuksen edessä ja mittaa varjosi pituus, kun seisot suorassa valossa. Käytä tätä tietoa arvioidaksesi rakennuksen korkeuden, jos tiedät oman pituutesi.

## Loppusanat

Geometriset paikat ja yhdenmuotoisuus eivät ole pelkkiä katoamistemppuja, vaan ne ovat oleellisia työkaluja monissa matematiikan ongelmissa ja arkipäivän tilanteissa. Kun hallitset nämä käsitteet, olet askeleen lähempänä matematiikan taikuuden ymmärtämistä! Ja muista, matematiikassa vaikuttaa olevan taikuutta, mutta jokainen temppu selittyy loogisesti, kun tunnet säännöt ja käyttötavat.

## 8.4. Piin poika, Pythagoras - Ja trigonometrian salatut signaalit

Tervetuloa matematiikan jännittävään maailmaan! Tänään sukellamme historiaan ja tutkimme eräitä matematiikan salaisuuksia, jotka ovat muovanneet tapaamme ymmärtää maailmaa. Aloitamme yhden hyvin tunnetun hahmon, Pythagoraan, kanssa, jonka aivoitukset ovat inspiroineet lukemattomia tutkijoita ja matemaatikkoja, ja siitä, kuinka hänen kuuluisa lauseensa liittyy trigonometriaan, matematiikan osa-alueeseen, joka keskittyy kolmioiden mittasuhteiden tutkimiseen.

### Pythagoraan lause

Pythagoras oli kreikkalainen filosofi ja matemaatikko, joka eli noin 570-495 eaa. Hän on kuuluisin lauseesta, joka kertoo meille salaisuuden oikeakulmaisista kolmioista. Mutta ennen kuin paljastamme sen salaisuuden, kerrataanpa, mitä oikeakulmainen kolmio oikeastaan on. Oikeakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on tasan 90 astetta, ja sitä kutsutaan oikeaksi kulmaksi.

Pythagoraan lause kuuluu seuraavasti:

**Kun oikeakulmaisessa kolmiossa on kaksi lyhyempää sivua, jotka muodostavat oikean kulman ja yhden pidemmän sivun, eli hypotenuusan, lause kertoo, että kahden lyhyemmän sivun neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö.**

Pitkä teksti, eikö? Matemaattisesti ilmaistuna, jos merkitsemme lyhyempiä sivuja kirjaimilla  $a$  ja  $b$  ja hypotenuusaa kirjaimella  $c$ , lause ilmaistaan kaavalla:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tämä kaava on yksi geometrian kulmakivistä ja sillä on lukemattomia käytännön sovelluksia!

### Trigonometrian alkeet

Trigonometria tulee kreikan kielen sanoista 'trigono' (kolmio) ja 'metron' (mittaaminen), ja se keskittyy nimenomaan kolmioiden mittasuhteiden selvittämiseen. Trigonometriaa voitaisiin kutsua geometriaa ja algebraa yhdistäväksi sillaksi.

Ensimmäisenä tutustumme trigonometrian peruskäsitteisiin: siniin ( $\sin$ ), kosiniin ( $\cos$ ) ja tangentiin ( $\tan$ ), jotka kaikki liittyvät oikeakulmaisiin kolmioihin. Nämä suhdeluvut määritellään seuraavasti:

- **Sini ( $\sin$ )** mitataan, kun jaat oikeakulmaisen kolmion vastaisen sivun pituuden hypotenuusan pituudella.
- **Kosini ( $\cos$ )** mitataan, kun jaat oikeakulmaisen kolmion viereisen sivun pituuden hypotenuusan pituudella.
- **Tangenti ( $\tan$ )** mitataan, kun jaat vastaisen sivun viereisen sivun pituudella.

Näitä suhteita voidaan käyttää myös kulmien mittaamiseen kolmiossa, kun tiedämme jonkin kolmion sivun pituuden. Tämä voi tuntua aluksi monimutkaiselta, mutta kun harjoittelet, huomaat, että se avaa oven uuteen maailmaan, jossa voit mitata tuntemattomia asioita.

## Sovelluksia - Pythagoraan lause ja trigonometria käytännössä

Nyt yhdistämme nämä kaksi: mitä Pythagoraan lause ja trigonometria voivat tehdä yhdessä? Yhdessä ne ovat kuin salaisuuksien koodinpurkuavain matematiikan maailmassa.

Voit käyttää Pythagoraan lausetta ja trigonometriaa esimerkiksi selvittääksesi kuinka korkea puu on ilman, että sinun tarvitsee kiivetä sitä mitataksesi. Tai voit määrittää, kuinka kaukana joen toisin puoli on, ylittämättä itse jokea.

Nämä ovat vain muutamia esimerkkejä siitä, miten voimme soveltaa Pythagoraan lausetta ja trigonometriaa arkipäiväisissä tilanteissa ymmärtääksemme paremmin ympäröivää maailmaa.

## Loppusanat

Matematiikka ei ole vain lukuja ja kaavoja. Se on täynnä tarinoita, seikkailuja ja salaisuuksia, joita jokainen meistä voi oppia ratkaisemaan. Pythagoras ja trigonometrian salatut signaalit ovat vasta alkua. Matematiikan maailma odottaa - uskallatko astua sisään ja löytää oman paikkasi tässä ihmeellisessä universumissa?

# Osa IV: Tilastotorni ja todennäköisyyslinna

Tervetuloa matkalle mahtavaan Tilastotorniin ja sen vieressä kohoavaan Todennäköisyyslinnaan! Nämä kaksi rakennelmaa opastavat sinut laskelmien ja analyysien salaperäiseen maailmaan, jossa numerot kertovat tarinoita ja kaavat johtavat aarteiden luo. Valmis? Antaa numeroiden näyttää suuntaa!

## Tilastotornin ensimmäinen kerros: Tiedonkeruun taikaa

Ennen kuin aloitat nousun Tilastotorniin, sinun täytyy kerätä tarvittava tieto. Tietoa voit saada monin eri tavoin, kuten tekemällä kyselyitä, havainnoimalla asioita tai lukemalla jo olemassa olevia aineistoja. Tiedonkeruussa on tärkeää olla tarkkana ja huolellisesti merkitä kaikki ylös, jotta voit muodostaa niistä luotettavia tilastoja.

## Tilastotornin toinen kerros: Aineiston järjestäminen

Kerätyn tiedon järjestäminen on avainasia. Voit järjestää tiedon taulukoiksi, kaavioiksi tai histogrammeiksi, jotka ovat pylväiden avulla piirrettyjä diagrammeja. Nämä visuaaliset työkalut auttavat ymmärtämään tietoja nopeasti ja helposti.

## Tilastotornin kolmas kerros: Keskiarvoa etsimässä

Keskiarvo, mediaani ja moodi ovat kolme tapaa kuvata aineiston keskeisiä arvoja. Ne ovat kuin tilastojen maagisia avainsanoja. Keskiarvo saadaan, kun lasket kaikki arvot yhteen ja jaat tämän summan arvojen lukumäärällä. Mediaani on (suuruusjärjestykseen laitetun) aineiston keskellä sijaitseva arvo ja moodi taas se arvo, joka esiintyy aineistossa useimmin.

## Tilastotornin neljäs kerros: Hajonta ja vaihtelu

Tilastotiedossa on tärkeä ymmärtää, kuinka paljon aineiston arvot vaihtelevat. Tämä tieto löytyy tornin neljännestä kerroksesta, jossa tutkitaan hajontaa ja varianssia. Valmistaudu käyttämään neliöjuuria ja kaavoja, joiden avulla voit laskea aineiston keskihajonnan ja selvittää, kuinka paljon tulokset poikkeavat keskiarvosta.

## Todennäköisyyslinnan portilla: Sattuman sukellus

Astuessasi Todennäköisyyslinnan porteista sisään, sinun on heitettävä noppaa, nostettava kortteja pakasta ja esineitä sokkona säkistä. Todennäköisyys on tapa, jolla kuvaamme satunnaisuutta ja sen avulla voimme arvioida, kuinka todennäköisesti jokin tietty tapahtuma

sattuisi. Todennäköisyyttä voidaan laskea yksinkertaisesti jakamalla suotuisien tapahtumien lukumäärä kaikkien mahdollisten tapahtumien lukumäärällä.

### **Todennäköisyyshälinän keskiaukea: Kombinaatiot ja permutaatiot**

Aukealla tapaat ritareita, jotka opettavat sinulle, miten yhdistellä asioita uusilla tavoilla. Kombinaatiot kertovat meille kuinka monta erilaista tapaa on valita tietyt asiat ryhmästä, järjestyksestä välittämättä. Permutaatiot puolestaan ovat kuin kombinaatioita, mutta järjestyksellä on merkitystä. Kaikkien näiden laskemiseen käytämme erilaisia kaavoja ja laskutoimituksia.

### **Todennäköisyyshälinän torninkammio: Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus**

Linnaan kohonneissa torninhuoneissa voimme kurkistaa ehdollisen todennäköisyyden arvoituksiin. Täällä opit, miten yhden tapahtuman sattuminen vaikuttaa toisen tapahtuman todennäköisyyteen. Lisäksi etenet ymmärtämään, miten riippumattomat tapahtumat toimivat yhtenä kokonaisuutena – tapahtumat ovat riippumattomia, jos yhden tapahtuman toteutuminen ei vaikuta toisen tapahtuman todennäköisyyteen.

### **Yhteenveto: Matemaattiset kartat**

Tilastotornissa ja Todennäköisyyshälinässä käydessämme olemme oppineet, miten tärkeää on kerätä, järjestää ja analysoida tietoja oikein. Olemme myös tutkineet mahdollisuuksia ja opetelleet arvioimaan erilaisten tapahtumien todennäköisyyksiä. Matemaattiset menetelmät ja laskutoimitukset, jotka olet oppinut näissä kartanoissa, auttavat sinua ymmärtämään todellisen maailman ilmiöitä ja tekemään tietoon perustuvia päätöksiä.

Kukaan ei voi ennustaa tulevaisuutta täysin varmasti, mutta matematiikan osaajana sinulla on välineet arvioida todennäköisyyksiä ja tilastoja, mikä antaa sinulle paremmat mahdollisuudet tehdä järkeviä valintoja. On siis aika astua ulos näistä matematiikan linnoista ja käyttää oppimaasi hyödyksi oikeassa elämässä. Onnea matkaan, tilastoseikkailija!

## **9. Tilastojen tarinat**

Kuulitko taannoin uutisen, jossa sanottiin, että keskimääräinen suomalainen syö 14 kiloa makeisia vuodessa? Tai kohtasitko graafin, joka näytti, kuinka monta tuntia nuoret viettävät päivittäin älypuhelimellaan? Nämä tiedot ovat esimerkkejä tilastoista. Tilasto on tapa kerätä,

järjestää ja analysoida tietoa numeroiden ja kuvaajien muodossa, jotta voimme ymmärtää, mitä ympärillämme tapahtuu.

## **Miksi tarvitsemme tilastoja?**

Tilastot ovat kuin ikkuna todellisuuteen. Ne auttavat meitä näkemään kuvion, jota emme ehkä muuten hahmottaisi. Esimerkiksi, opettaja voi pitää kirjaa luokan kokeiden tuloksista selvittääkseen, mitä aihetta pitäisi kerrata. Tutkijat taas käyttävät tilastoja todisteina hypoteesiensa tueksi. Ilman tilastoja tietoa olisi vaikea esittää selkeästi ja ytimekkäästi.

## **Tilastojen kerääminen**

Tilastojen kerääminen alkaa datan hankkimisella. Dataa voi kerätä monilla eri tavoilla, kuten lomakkeilla, kyselyillä tai mittauksilla. Kun data on kerätty, se pitää järjestää tavalla, joka tekee siitä helposti ymmärrettävää. Tähän käytetään usein taulukoita ja kaavioita.

## **Taulukot - Tiedon järjestyksen mestarit**

Taulukko on yksi yksinkertaisimmista tavoista esittää tilastotietoa. Kuvittele vaikkapa taulukko, jossa on kolme saraketta: oppilas, matematiikan koearvosana ja suosikkiväri. Taulukon avulla voimme nopeasti nähdä kunkin oppilaan koearvosanan ja suosikkivärin.

## **Kaaviot - Tiedon visualisoinnin sankarit**

Tilastojen esittäminen ei rajoitu vain numeroihin taulukossa. Voimme käyttää myös kaavioita, jotka tekevät datan tarkastelemisesta visuaalisesti miellyttävämpää ja helpompaa. Katsotaanpa erilaisia kaavioita:

### **Pylväsdiagrammi**

Kuvittele pylväsdiagrammi, joka näyttää eri makeisten myyntimääriä. Jokainen pylväs edustaa yhtä makeislajia ja sen korkeus kertoo, kuinka paljon kyseistä makeista on myyty. Pylväsdiagrammi tekee vertailusta helppoa; nopea silmäys paljastaa, mikä makeinen on suosituin.

### **Ympyräkaavio**

Jos haluamme tietää, kuinka oppituntisi aika jakautuu eri aihealueiden kesken, voimme käyttää ympyräkaaviota. Siinä koko ympyrä edustaa oppitunnin kokonaisaikaa, ja se on jaettu sektoreihin aihealueiden mukaan. Sektoreiden koot vastaavat sitä, kuinka paljon aikaa mihinkin aiheeseen kuluu.

## **Viivadiagrammi**

Entä jos haluaisimme tarkastella lämpötilojen vaihtelua vuoden aikana? Viivadiagrammi olisi siihen loistava valinta. Piirtämällä viivan, joka yhdistää kuukausittaiset keskilämpötilat, saamme käsityksen vuodenajan mukaisista muutoksista.

## **Tilastot ja todennäköisyys**

Tilastotiedot kertovat usein todennäköisyydestä eli siitä, kuinka todennäköisesti jokin asia tapahtuu. Esimerkiksi jos tiedämme, että 70% koulumme oppilaista käyttää koulumatkaansa polkupyörää, voimme sanoa, että on melko todennäköistä nähdä oppilas pyöräilemässä kouluun.

## **Tilastojen tulkinta - Tietojen taituri**

Tärkeintä tilastojen kanssa on muistaa, että ne ovat vain työkalu tiedon esittämiseksi. Ne auttavat meitä hahmottamaan trendejä ja toistuvia ilmiöitä, mutta tulkinta on aina tärkeää. Kun tarkastelemme tilastoja, meidän on pohdittava, mitä data todella sanoo, ja onko se kerätty luotettavasti ja tasapuolisesti.

## **Mitä nyt?**

Seuraavan kerran kuullessasi uutisissa tilastotietoa tai nähdessäsi kaavion, mieti: Mistä luvut tulevat? Miten ne on kerätty ja esitetty? Mitä ne kertovat – ja mitä ne eivät kerro? Tilastot ovat tarinoita numeroiden takana, ja sinä olet nyt tietojen taituri, valmis paljastamaan niiden salaisuudet.

Nyt sinun vuorosi! Tässä tehtävässä on aika päästää luovuutesi valloilleen.

## **Tehtävä: Luo oma tilasto**

1. Mieti aihe, josta haluaisit kerätä tilastotietoa. Se voi olla vaikka lempielokuvien suosio, eri vuodenaikojen säätilat tai vaikkapa opiskelijoiden lemmikkieläinten lukumäärä.
2. Laadi kysely tai suunnittele mittaus, jolla voit saada kerättyä datasi.
3. Kerää tietosi ja luo siitä taulukko.
4. Valitse sopiva kaavio – pylväsdiagrammi, ympyräkaavio tai viivadiagrammi – ja esitä tietosi visuaalisesti.
5. Esittele tulokset luokallesi ja selitä, mitä tilastosi kertoo ja miten olet tehnyt tulkintasi.

Onneksi olkoon! Olet nyt ryhtynyt tilastotieteilijäksi ja oppinut, kuinka tärkeä rooli tilastoilla on ympärillämme olevan maailman ymmärtämisessä.

## 9.1. Numeronikkareiden retkikunta - Tietojen keräily ja kaskut

Hei, nuori numeroseikkailija! Oletko valmis sukeltamaan tiedon maailmaan ja oppimaan, kuinka voit kerätä, järjestellä ja analysoida sitä kuin todellinen matematiikan tutkimusmatkailija? Tervetuloa Numeronikkareiden retkikunnan matkaan!

### Tietojenkeräily - Tutkimusmatkalle lähtö

Aloitetaan perusteista. Mitä tietojen keräily ylipäätään tarkoittaa? Aivan kuten keräilisit postimerkkejä tai kiviä, voit keräillä myös numeroita ja tietoa. Tieto voidaan ilmentää numeroina, luokitteluna tai vaikkapa mielipiteinä.

Ennen kuin lähdet keräämään tietoja, sinun täytyy ensin päättää, **mitä** haluat tietää ja **keneltä** sen haluat tietää. Esimerkiksi, jos haluat selvittää koulun suosituimman välipalan, voit kysyä tovereiltasi heidän lempivälipalansa.

### Kyselyn suunnittelu - Kartta käteen

Tiedonkeruuseikkailussa tärkein työkalu on hyvin suunniteltu kysely – se on karttasi tietomeressä. Kysymysten tulee olla selkeitä, yksiselitteisiä ja aseteltu niin, että ne palvelevat tavoitettasi. Ole tarkka! Epäselvät kysymykset voivat johdattaa sinut harhaan.

Muista myös, että jokainen tutkimusmatkasi jäsen on yhtä tärkeä. Vältä kyselyssäsi johdattelevia kysymyksiä, jotka voivat vaikuttaa vastauksiin. Ole puolueeton kuin suunnistaja kompassinsa kanssa!

### Tietojenkeruun menetöt - Työkalut valmiiksi

Matematiikan retkellä on useita tapoja kerätä tietoa:

1. **Havainnointi:** Katsele ja tee muistiinpanoja ympäristöstäsi ilman, että häiritset sitä.
2. **Kyselyt ja haastattelut:** Kysy suoraan yksilöiltä kysymyksiä.
3. **Lomakkeet ja kyselytutkimukset:** Levitä kysymykset laajemmalle yleisölle paperilla tai verkossa.
4. **Kokeet:** Luo tilanne ja kerää tietoa muuttujista ja niiden vaikutuksista.



## Aineiston kerääminen - Tutkimusretken alku

Kerättyäsi tarpeeksi tietoa, on aika palata leiriin ja järjestää se. Voit tehdä tilastoja, piirustaa kaavioita tai taulukoita... tämä on aivan kuin keräisit retkesi varrelta näytteitä!

Tässä vaiheessa olisi hyvä oppia muutamia matematiikan termistön aarteita:

- **Otoksen koko:** Kuinka monelta henkilöltä keräsit tietoja?
- **Muuttujat:** Mitä asioita kerätty tieto koskee? (esim. välipalan nimi, hinta)
- **Frekvenssi:** Kuinka monta kertaa tietty vastaus esiintyi?
- **Prosenttiosuudet:** Kuinka suuren osan kokonaisuudesta jokin tieto muodostaa?

## Tietojen tulkinta - Löydösten esittely

Nyt sinulla on kaikki tarvittavat tiedot retkeltäsi, mutta mitä ne kertovat? On aika analysoida ja tulkita keräämäsi tiedot – tämä on kuin kertomus retkesi huipentumasta.

Jos palasimme aiempaan esimerkkiimme välipalasta, saatat nyt huomata, että suurin osa kavereistasi pitää suklaapatukasta. Voit tehdä johtopäätöksiä, esimerkiksi että kouluruokalassa tulisi olla enemmän suklaapatukoita, tai voit pohtia, miksi se on niin suosittu.

## Yhteenveto - Retken päätös

Numeronikkareiden retkikunta on nyt palannut täynnä uutta tietoa ja kokemuksia. Tietojen keräily ja analysointi avaa oven ymmärrykseen – se on kuin löytäisi uusia saaria matematiikan valtameressä.

Muista, että matematiikka on paljon enemmän kuin laskemista; se on myös tietojen keräämisen ja ymmärtämisen taitolaji. Käyttämällä tietojen keräämistä voit oppia paljon itsestäsi, ympäristöstäsi ja jopa koko maailmasta.

Nyt on sinun vuorosi ryhtyä keräilemään omia tietojasi ja jakamaan löytösi toisten numeronikkarien kanssa. Onnea matkaan, rohkea tiedonmetsästäjä!

## 9.2. Salaiset koodit - Tilastojen tunnuslukujen tulkinta

Matematiikka piilottaa sisäänsä salaisuuksia, joita meidän on opittava tulkitsemaan.

Tilastotiede on yksi näistä salaisuuksista – se on kuin kieli, jonka opimme lukemaan. Tässä luvussa sukellamme tilastojen salattuun maailmaan ja opimme ymmärtämään sen tunnuslukuja: keskiarvoa, mediaania ja hajontaa.

## Keskiarvo - Tasapainon metsästäjä

Kuvittele, että olet osa salapoliisiryhmää, joka ratkoo eräässä tutkimuksessaan arvoitusta: millainen on luokkasi "tavallisin" oppilas värien nimien muistamisen suhteen? Voit kirjata ylös kaikkien luokkasi oppilaiden muistamat värit, mutta miten ilmaiset tämän tiedon tiiviisti ja ymmärrettävästi?

Tässä tulee avuksi keskiarvo. Se on kuin salainen koodi, joka tiivistää koko luokan yksittäiset haastattelut yhdeksi arvoksi. Keskiarvon laskemiseksi lisää kaikki oppilaiden kertomat värimaininnat yhteen ja jaa sitten värimainintojen kokonaismäärä oppilaiden lukumäärällä.

Jos luokassasi on 25 oppilasta ja he ovat valinneet muistaneet värejä seuraavasti: 5 oppilasta muisti 7 väriä, 10 oppilasta muisti 10 ja 5 oppilasta muisti 12 väriä, keskiarvo on mainintojen summa jaettuna oppilaiden määrällä:

$$(5 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 12) / 20 = 195 / 20 = 9,75$$

Jokaisella muisti siis keskimäärin 9,75 väriä, mutta tämä ei tosin kerro värien jakaumasta. Siispä tarvitsemme muita tunnuslukuja.

## Mediaani - Keskimmäisen mysteeri

Palataanpa takaisin luokkaasi. Mitä jos haluat tietää kuinka monta väriä luokan keskimmäinen tietäjä oikeasti tiesi? Tässä auttaa mediaani, matemaattinen velho, joka paljastaa kokoelman keskimmäisen arvon.

Mediaanin löytämiseksi järjestä kaikki värimainintaan osallistuneet muistettujen värien mukaisesti ja valitse keskimmäinen. Jos oppilaita on parillinen määrä, otetaan keskellä olevat kaksi arvoa ja lasketaan niiden keskiarvo.

Koska luokassasi on 20 oppilasta, mediaani on oppilaiden 10 ja 11 välissä. Oppilaat 10 ja 11 muistivat kummatkin 10 väriä, joten tällä kertaa ei tarvitse näistä edes keskiarvoa laskea, vastaus on suoraan 10.

## Hajonta - Eroavaisuuksien ekspertti

Entä jos haluat tietää, kuinka hajaantuneesti tai "sopusuhtaisesti" luokan värimuistit ovat jakautuneet? Tämä on hajonnan erikoisaluetta, joka ilmaisee, kuinka kaukana kukin väri on keskiarvosta.

Yksinkertainen tapa mitata hajontaa on laskea, kuinka monet oppilaat muistivat muun määrän kuin keskiarvon verran värejä: eli 7:aa ja 12:sta. Huomaamme, että 10 oppilasta poikkesi keskiarvosta

Tarkempi hajonnan mittari on keskihajonta, joka lasketaan neliöjuurena näiden erojen (yksittäisen oppilaan värimuistimäärän ja keskiarvon erotus) neliöiden keskiarvosta. Se antaa meille numeerisen arvon, joka kuvaa hajonnan suuruutta keskiarvon ympärillä. Tämä voi olla monimutkaisempi laskutoimitus ja vaatii kaikkien oppilaiden yksilöllisten valintojen huomioimisen.

Nyt olet oppinut salakirjoituksen salat, voit tulkita tilastojen tunnuslukuja kuin kokenut koodinmurtaja. Kun hallitset keskiarvon, mediaanin ja hajonnan, olet valmis ratkomaan niitä matemaattisia arvoituksia, joita lukumäärien labyrinthi piilottaa sisälleen. Muista, että jokainen tilastollinen tunnusluku avaa oven erilaiseen näkymään – ja kaikki yhdessä ne kertovat kokonaisen tarinan.

## 9.3. Viestit visuaalisina - Diagrammidraama

Tervetuloa tutkimaan diagrammien kiehtovaa maailmaa! Tässä luvussa pääset sukeltamaan erilaisten diagrammien syvyyksiin ja opit, kuinka niitä käytetään tehokkaasti tiedon välittämiseen. Kirjoittajina kerromme sinulle, miten diagrammit muuttavat monimutkaiset numerot selväksi ja ymmärrettäväksi viestiksi.

### Mikä ihmeen diagrammi?

Diagrammi on visuaalinen esitys, joka näyttää numeerista tietoa tai suhteita havainnollisesti ja yleensä yksinkertaisen graafisen mallin avulla. Diagrammeja on monenlaisia, ja eri tyypit sopivat parhaiten eri tietojen esittämiseen. Niitä käytetään, kun halutaan välittää tietoa selkeästi ja tehokkaasti, esimerkiksi esitelmässä, raportissa tai matematiikan oppikirjassa – kuten nyt!

### Erilaiset diagrammityyppit

#### Pylväsdiagrammi

Pylväsdiagrammissa tieto esitetään pystypylväinä. Diagrammin pohjalle piirretään vaaka- ja pystyakseli. Vaaka-akselilla on luokat ja pystyakselilla mitattavat arvot. Pylväsdiagrammi sopii hyvin, kun halutaan vertailla eri kohteiden välisiä suhteita.

**Draaman paikka:** Vuoden lempikuukausi -äänestyksen tulokset esitetään pylväsdiagrammina. Huomaammekin, että joulukuu voittaa marraskuun kirkkaasti!

### **Viivadiagrammi**

Viivadiagrammi esittää tietoa viivan tai useamman viivan muodossa, jotka kulkevat pisteestä toiseen. Vaaka-akselilla on yleensä aika ja pystyakselilla muuttujan arvot. Viivadiagrammit sopivat loistavasti, kun tarkastellaan muutoksia tietyllä ajanjaksolla.

**Draaman paikka:** Seuraamme viivadiagrammista suosikkipopartistisi suosion kasvua viiden vuoden aikana. Graafista paljastuu yllättävä notkahdus toisen albumin julkaisun jälkeen!

### **Sektoridiagrammi (ympyrädiagrammi)**

Sektoridiagrammi on ympyrän muotoinen ja jaettu sektoreihin, jotka kuvaavat kunkin osuuden suhdetta kokonaisuuteen. Se sopii hyvin, kun halutaan osoittaa koko kokonaisuudesta miten suuren osan kukin kategoria muodostaa.

**Draaman paikka:** Piirrämme sektoridiagrammiin luokan oppilaiden lempielokuvagenret. Draama ja komedia ovat yllättävän lähellä toisiaan!

## **4. Piste- tai hajontakaavio**

Piste- tai hajontakaaviota käytetään kahden muuttujan välisen suhteen esittämiseen. Jokainen piste vastaa yhden tapauksen kahta muuttujaa.

**Draaman paikka:** Miten pituus ja jalkojen koko liittyvät toisiinsa? Hajontakaavio paljastaa, onko olemassa yhteyttä!

### **Diagrammin tulkinta**

Diagrammeja tulkitaan kiinnittämällä huomiota seuraaviin seikkoihin:

- **Mittakaava ja arvojen väli:** onko asteikko lineaarinen vai logaritminen? Mitä suurempia hyppyjä akselilla on, sitä dramaattisemmilta voivat tulokset näyttää.
- **Otsikko ja selite:** mitä diagrammi yrittää kertoa? Selkeyden vuoksi jokaisessa diagrammissa pitäisi olla informatiivinen otsikko ja selitettävä, mitä mikin väri tai symboli esittää.
- **Trendit ja poikkeamat:** etsi yleisiä suuntauksia, kuten kasvua tai laskua, sekä poikkeamia, jotka saattavat herättää lisäkysymyksiä.

## Harjoitellaan!

**Tehtävä 1:** Tarkastele erilaisia diagrammeja ja yritä selvittää, mitä ne kertovat sinulle. Iloitse, kun löydät vastauksia!

**Tehtävä 2:** Luo oma pylväsdiagrammi koulusi liikuntapäivän tuloksista. Kuka voitti, ja näyttääkö tulosten perusteella siltä, että tietyllä luokka-asteella on erityisen nopeita juoksijoita?

**Tehtävä 3:** Oletko aamu- vai iltavirkku? Kysy luokkatovereiltasi ja esitä tulokset sektoridiagrammina.

Matematiikka ei ole vain numeroita paperilla – se on myös tarinankerrontaa! Diagrammien avulla voimme muuntaa numerot kiehtoviksi tarinoiksi, jotka avautuvat yhdellä silmäyksellä. Diagrammitodellisuudessa draama ja datan kauneus kohtaavat. Jatkakaa tutkimista ja muistakaa: jokaista diagrammia piirtäessänne luotte uutta draamaa!

## 9.4. Tilastojen tulkki - Päättelyä ja päätelmiä

Tervetuloa sukeltamaan tilastojen kiehtovaan maailmaan! Tilastollinen päättely ei ole pelkästään numeroiden pyörittelyä, vaan sen avulla voimme tehdä perusteltuja päätöksiä, ennakoida tapahtumia ja ymmärtää maailmaa ympärillämme. Tässä luvussa opimme, miten tilastoja tulkitaan ja miten niiden avulla tehdään perusteltua päättelyä.

### Mikä on tilasto?

Tilasto on joukko kerättyjä tietoja, jotka on järjestetty ja analysoitu siten, että siitä on helppo saada selville tiettyä asiaa koskevat suuntaukset ja mallit. Tilastot voivat esittää melkein mitä tahansa, kuten koululaisten lempihedelmiä, junien myöhästymisiä tai vaikka keskiarvolämpötiloja.

### Miksi tilastoja tarvitaan?

Kuvittele, että haluat tietää, millaista on suomalainen kouluruoka. Voit kuulla siitä yhden tai kahden kaverisi mielipiteen, mutta se ei kerro koko totuutta. Jos kerätään tietoa useista kouluista ja tuhansilta oppilailta, saadaan paljon luotettavampaa tietoa. Tällainen suuremman ihmisjoukon tietoihin perustuva menetelmä auttaa meitä ymmärtämään yleistä mielipidettä ja tekemään johtopäätöksiä.

### Otanta ja populaatio

Kun puhutaan tilastollisesta päättelystä, on tärkeää ymmärtää kaksi keskeistä käsitettä: populaatio ja otanta. Populaatio tarkoittaa tutkittavan ilmiön kaikkia mahdollisia kohteita tai tapauksia. Otanta taas on pienempi joukko, joka on valittu edustamaan populaatiota. Jos esimerkiksi haluat tietää kaikkien Suomen yläkoululaisten mielipiteen kouluruoasta, koko Suomen yläkoululaisten joukko on populaationa. Olisi melkoinen työ kysyä kouluruuista aivan kaikilta, mutta onneksi pienempikin joukko riittää, eli otos.

## Miten otos valitaan?

Otoksen valinnassa pyritään siihen, että se on mahdollisimman edustava eli samanlainen kuin populaatio. Jos otos valitaan huolimattomasti, tulokset voivat olla vääristyneitä. Yksi tapa valita otos on satunnaisotanta, jossa jokaisella populaation jäsenellä on sama mahdollisuus tulla valituksi otokseen. Jos esimerkiksi kysyt kouluruuista vain oman koulun kavereiltasi, ei selviä mikä on tilanne koko Suomessa. Edustavaa otosta varten sinun tulisi kysyä myös kouluista toiselta puolelta Suomea.

## Keskiarvo, mediaani ja moodi

Näillä kolmella termillä mitataan tilastollisia suureita:

1. **Keskiarvo** lasketaan laskemalla kaikkien arvojen summa ja jakamalla se arvojen lukumäärällä.
2. **Mediaani** on keskimäinen luku, kun kaikki arvot on järjestetty suuruusjärjestykseen. Jos arvoja on parillinen määrä, lasketaan kahden keskimäisen arvon keskiarvo.
3. **Moodi** tarkoittaa tilastossa eniten esiintyvää arvoa.

## Hajonta ja varianssi

Tilastollista hajontaa käytetään kuvaamaan sitä, kuinka paljon yksittäiset arvot poikkeavat keskiarvosta. Varianssi on hajonnan toinen potenssi ja se antaa numeerisen arvon tälle hajonnalle. Mitä suurempi varianssi, sitä enemmän arvot ovat hajallaan ja päinvastoin.

## Päätöksenteko tilastojen pohjalta

Kun tiedämme kaikki edelliset tilastolliset käsitteet, voimme käyttää niitä apuna päätöksenteossa. Esimerkiksi, jos kouluruuan laadusta tehdyn tutkimuksen keskiarvo on korkea, mediaani sijoittuu samalle tasolle ja hajonta on pieni, voimme päätellä, että suurin osa oppilaista on tyytyväisiä kouluruokaan. Mutta jos hajonta on suuri, tiedämme, että mielipiteet vaihtelevat paljon.

## Tilastollisten tulosten tulkintaan liittyviä varoituksia

Tilastojen tulokinnassa on oltava tarkkana. Tässä pari neuvoa:

- **Älä tee hätiköityjä johtopäätöksiä.** Yksi tutkimus ei aina kerro koko totuutta.
- **Tarkista otoksen edustavuus.** Varmista, että otos on todella valittu siten, että se vastaa koko populaatiota.
- **Huomioi mahdolliset vääristymät.** Tiedonkeruumenetelmät voivat vaikuttaa tuloksiin.

Tilastot ovat arvokas työkalu maailman ymmärtämisessä. Kun yhdistät tilastollisen tiedon kriittiseen ajatteluun, voit tulla mestariksi tilastojen tulkitsemisessä ja tehdä fiksumpia päätöksiä. Onnea matkallesi tilastojen tulkiksi!

# 10. Sattumankauppa: Tutkimusretki Todennäköisyyden Maailmaan

Tervetuloa tutkimusretkelle matematiikan jännittävään osa-alueeseen - todennäköisyyslaskentaan. Tässä luvussa tutustumme siihen, miten matematiikka auttaa ymmärtämään ja ennustamaan erilaisten sattumanvaraisten tapahtumien todennäköisyyksiä. Valmistaudu matkaan todennäköisyyksien maailmaan!

## Todennäköisyys - Mitä se on?

Todennäköisyys kertoo, kuinka todennäköistä on, että jokin tietty tapahtuma sattuu. Se voi olla mitä tahansa väliltä 0 (mahdotonta) ja 1 (varmaa). Esimerkiksi jos heität noppaa, kuinka todennäköistä on saada kuutonen? Koska nopassa on kuusi eri sivua ja oletamme sivujen olevan yhtä todennäköisiä, todennäköisyys saada kuutonen on  $1/6$ .

## Todennäköisyyden peruskäsitteet

Ennen kuin sukellamme syvemmälle, on tärkeää ymmärtää joitakin keskeisiä käsitteitä.

- **Tapahtuma:** Mikä tahansa sattumanvarainen tilanne, jossa lopputulos voi vaihdella.
- **Perusjoukko:** Kaikki mahdolliset tapahtuman lopputulokset.
- **Otanta-avaruus:** Kaikkien perusjoukon alkioiden joukko.
- **Suotuisat tulokset:** Ne lopputulokset, jotka täyttävät halutun tapahtuman ehdot.

## Perussääntöjä Todennäköisyydessä

## Todennäköisyyden summa

Kaikkien perusjoukon tapahtumien todennäköisyyksien summa on aina 1.

## Suotuisten tulosten sääntö

Tapahtuman todennäköisyys on suotuisten tulosten lukumäärä jaettuna kaikkien mahdollisten tulosten lukumäärällä.

## Esimerkki: Kolikonheitto

Kun heität tavallista kolikkoa, on kaksi mahdollista lopputulosta: "kruuna" tai "klaava" (näissä kysymyksissä kolikko ei jää koskaan pystyyn). Todennäköisyys saada kumpi tahansa näistä on  $1/2$ , sillä on yhtä todennäköistä saada kruuna kuin klaava.

## Kokeillaanpa käytännössä!

Oikea tapa oppia todennäköisyyttä on kokeilla ja tehdä havaintoja. Tee seuraavat kokeet ja laske tulokset.

### Koe 1: Nopanheitto

Heitä noppaa 50 kertaa ja kirjaa ylös, kuinka monta kertaa saat kunkin numero (1-6). Laske kunkin numeron todennäköisyys saamistasi tuloksista. Muistatko, mikä todennäköisyys oli teoriassa?

### Koe 2: Korttitemppu

Ota pakasta yksi korttipakka ja sekoita se huolellisesti. Vedä sitten kortti pakasta satunnaisesti ja pane merkille, onko se pata, hertta, ruutu vai risti. Tee tämä 20 kertaa ja laske, kuinka monta kertaa kunkin maan kortti esiintyi. Mikä oli kunkin maan kortin todennäköisyys teoriassa?

## Yhdistetään Todennäköisyydet

Todennäköisyyksien maailmassa eteen tulee usein tilanteita, joissa tapahtumia yhdistävät sanat "ja" sekä "tai".

- **"Ja" -sääntö:** Kahden itsenäisen tapahtuman yhdistelmän todennäköisyys lasketaan kertomalla yksittäisten tapahtumien todennäköisyydet.
- **"Tai" -sääntö:** Kun haluat tietää, että tapahtuu A TAI B, lasket yksittäisten tapahtumien todennäköisyyksien summan.



## Monimutkaisempi Todennäköisyys

Todennäköisyyslaskenta voi myös olla monimutkaisempaa, kun pohditaan tilanteita, jotka vaikuttavat toisiinsa. Tällöin on kyse ehdollisesta todennäköisyydestä ja monista muista mielenkiintoisista todennäköisyyskäsitteistä, joihin palaamme myöhemmissä luvuissa.

### Loppusanat

Todennäköisyyslaskenta on kuin matkailua sattumankaupan kiehtovilla markkinoilla, jossa voit ennustaa tulevaisuutta, ymmärtää tilastoja ja tehdä viisaita päätöksiä. Ole utelias, kokeile ja ota selvää - todennäköisyyksien maailma odottaa sinua!

Muista: Harjoittelu tekee mestarin, joten älä lannistu, vaikka todennäköisyydet tuntuvat välillä hämmentäviltä. Tärkeintä on kokeilla, havainnoida ja oppia uutta!

## 10.1. Sattumien saaga - Kertoimet ja mahdollisuudet

Tervetuloa sukeltamaan sattumien ja todennäköisyyksien jännittävään maailmaan! Matematiikka ei ole pelkästään yhteenlaskua ja ympyröiden piirtämistä; se tarjoaa myös avaimet ymmärtää sattumaa ja sen kertoimia. Tässä luvussa tutkimme, miten todennäköisyyslaskenta voi auttaa meitä ennakoimaan tapahtumien mahdollisuuksia.

### Mitä on todennäköisyys?

Kuvittele hetki, että heität noppaa. Mitkä ovat mahdollisuudet, että nopan yläpinnaksi jää tietty numero? Koska nopassa on kuusi sivua ja jokaisella sivulla on yksi numero yhdestä kuuteen, jokaisen numeron todennäköisyys on yksi kuudesta eli  $1/6$ .

Todennäköisyys on matemaattinen tapa kuvata, kuinka todennäköistä on, että jokin tapahtuma sattuu. Se ilmaistaan yleensä luvulla välillä 0 ja 1, missä 0 tarkoittaa, että tapahtuma on mahdoton, ja 1 tarkoittaa, että tapahtuma on varma. Esimerkiksi, jos heität kruunaa ja klaavaa, on kummankin tulemisen todennäköisyys  $1/2$ , sillä on kaksi yhtä mahdollista lopputulosta.

### Yksinkertaisen todennäköisyyden laskeminen

Yksinkertainen todennäköisyys lasketaan kaavalla:

$$P(A) = \frac{\text{Suotuisten tapausten lukumäärä}}{\text{Kaikkien tapausten lukumäärä}}$$

Missä  $P(A)$  on tapahtuman A todennäköisyys. Katsotaanpa esimerkki:

**Esimerkki:** Sinulla on pussissa viisi punaista ja kolme sinistä palloa. Pussista satunnaisesti valittaessa, mikä on todennäköisyys, että otat punaisen pallon?

$$\text{Vastaus: } P(\text{punainen pallo}) = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$$

## Useamman tapahtuman yhdistäminen

Entä jos tapahtumia on useampia? Oletetaan, että heität noppaa kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä saat molemmilla kerroilla kuutosen?

Tässä tilanteessa tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia (ensimmäisen nopan tulos ei vaikuta toiseen), joten voimme laskea todennäköisyyksien tulon:

$$P(6 \text{ ja } 6) = P(6 \text{ ensimmäisellä heitolla}) \times P(6 \text{ toisella heitolla})$$

$$P(6 \text{ ja } 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

## Ehdollinen todennäköisyys

Ehdollinen todennäköisyys liittyy kysymyksiin, jotka riippuvat toisen tapahtuman lopputuloksesta. Esimerkiksi, jos tiedät, että ensimmäisellä nopanheitolla tuli numero, joka on suurempi kuin 3, mikä on todennäköisyys, että heitit kuutosen?

Tässä joudumme rajaamaan kaikkien tapausten lukumäärän niiden tapahtumien mukaan, jotka ovat mahdollisia kun tiedämme, että numero on suurempi kuin 3. Eli kaikki tapaukset ovat tällöin 4, 5 tai 6. Näin ollen:

$$P(6 \mid \text{numero suurempi kuin } 3) = \frac{P(6)}{P(\text{numero suurempi kuin } 3)}$$

$$P(6 \mid \text{numero suurempi kuin } 3) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

## Todennäköisyyden käyttö arkielämässä

Todennäköisyyslaskenta ei ole vain pelien ja leikkien maailmaa; sitä käytetään päivittäin päätöksenteossa, riskien arvioinnissa ja tulevaisuuden ennakkoinnissa. Sääennuste, liikennevalojen ajoittaminen, vakuutusten hinnat ja jopa älypuhelimien sääsovellukset perustuvat todennäköisyyslaskentaan.

## Tehtäväosio

1. Jos heität kaksi noppaa yhtä aikaa, mikä on todennäköisyys saada numero, joka on suurempi kuin 4 molemmilla nopilla?
2. Oletetaan, että pussissa on kahdeksan palloa: neljä punaista, kolme vihreää ja yksi sininen. Jos poistat pussista yhden pallon näkemättä ja se on vihreä, mikä on todennäköisyys, että seuraava pallo jonka poistat on myös vihreä?
3. Luokassasi on 25 oppilasta, joista 10 pitää matematiikkaa lempiaineenaan. Jos valitset satunnaisesti yhden oppilaan, mikä on todennäköisyys, että hän pitää matematiikkaa lempiaineenaan?

Muista, että elämän sattumukset ovat juuri sitä – sattumia. Mutta kun ymmärrämme todennäköisyyden perusteet, voimme hallita näitä satunnaisuuksia paremmin ja tehdä tietoisempia valintoja. Onnea matkaan laskujen parissa – matematiikka on todellakin sattumien saagan sankari!

## 10.2. Mahdotontako? Ei ole! - Tapahtumien taiturointi

Matematiikka on täynnä tapahtumia - toisiaan seuraavia, keskenään kilpailevia ja toisiinsa limittyviä vaihteita, joita voi tarkastella yksi kerrallaan tai monimutkaisina kokonaisuuksina. Tässä luvussa sukellamme tapahtumien maailmaan, opettelemme erottamaan yksinkertaiset tapahtumat monimutkaisista ja näemme, että useinkaan mikään ei ole niin mahdotonta kuin ensin saattaa vaikuttaa.

### Yksinkertaiset tapahtumat - Matikan peruskivet

Kun heität noppaa, tapahtuu yksi selkeä asia: nostat nopan ilmaan ja pudotat sen pöydälle. Tämä on esimerkki yksinkertaisesta tapahtumasta. Matematiikassa yksinkertainen tapahtuma on sellainen, joka:

- On selkeästi määritelty
- Ei voi jakautua pienempiin osiin
- On itsenäinen, eikä riipu muista tapahtumista

Esimerkiksi kolikon heitto on yksinkertainen tapahtuma, jossa mahdolliset lopputulokset ovat joko 'kruuna' tai 'klaava'. Tämä tapahtuma ei sisällä muita pienempiä tapahtumia ja sen tulos on riippumaton mistään muusta.

### Monimutkaiset tapahtumat - Kun palaset lokahtavat paikoilleen

Jos päätät järjestää leffamaratonin ja haluat katsoa viisi leffaa peräkkäin, leffojen katsominen muodostaa monimutkaisen tapahtuman. Tämä johtuu siitä, että monimutkainen tapahtuma:

- Koostuu useista yksinkertaisista tapahtumista
- Sisältää mahdollisesti useita vaihteita tai ehtoja
- Saattaa olla riippuvainen yksinkertaisten tapahtumien tuloksista

Monimutkaisissa tapahtumissa voi esimerkiksi tutkia todennäköisyyksiä: "Mikä on todennäköisyys, että katsot kaikki viisi leffaa ilman keskeytyksiä?" Tai "Jos kaksi leffaa on toimintaa ja kolme on komediaa, mikä on todennäköisyys, että nukahdat toimintaleffan aikana mutta heräät komedian kohdalla?"

## **Tapahtumien yhdistäminen - Sattuman sinfoniaa**

Tapahtumien todellinen taikuus piilee niiden yhdistämisessä. Kun alat yhdistellä yksinkertaisia tapahtumia, voit luoda monimutkaisia skenaarioita. Esimerkiksi, jos päätät heittää noppaa ja sen jälkeen vetää kortin pakasta, nämä kaksi yksinkertaista tapahtumaa muodostavat yhdessä monimutkaisen tapahtuman. Nyt voit pohtia kysymyksiä kuten: "Mikä on todennäköisyys, että heitän kuutosen ja vedän kuningattaren?"

## **Harjoitukset - Matemaattista taikatemppua**

**Tehtävä 1:** Heität noppaa kolme kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saat joka heitolla luvun kuusi?

**Tehtävä 2:** Sinulla on pino kortteja, joissa on numerot 1–10. Otat yhden kortin, kirjaat numeron ylös ja laitat kortin takaisin pinoon. Toistat tämän kahdesti. Mikä on todennäköisyys, että saadut numerot ovat peräkkäiset luvut missä tahansa järjestyksessä?

**Tehtävä 3:** Päätät järjestää illanistujaiset. Vieraiden saapumisen todennäköisyys on 75 % kullekin kutsutulle. Jos kutsut neljä ystävää, miten lasket todennäköisyyden, että kaikki neljä saapuvat paikalle?

## **Yhteenveto - Mahdollisuus oivaltaa kaikki**

Kuten olet varmasti jo huomannut, matematiikka tarjoaa meille upeita työkaluja tapahtumien ymmärtämiseen. Olipa kyse sitten yksinkertaisista heitoista tai monimutkaisista todennäköisyyslaskelmista, jokainen taituroitu tehtävä antaa meille mahdollisuuden oivaltaa jotain uutta todellisuudestamme. Joten muista, kun kohtaat 'mahdottoman' matemaattisen pulman, käytä tietoa ja taitojasi - monimutkainenkin voi osoittautua mahdolliseksi!

## 10.3. Numeroiden notaarit - Kombinaatioiden kiehtova kaava

Hei matematiikan seikkailija! Oletko koskaan miettinyt, monellako eri tavalla voit järjestää hyllyssäsi olevat kirjat tai montako erilaista pizzatilausta voit tehdä, kun saat valita neljästä eri täytteestä? Elämässämme kohtaamme jatkuvasti tilanteita, joissa kombinatoriikka - eli lukujen ja mahdollisuuksien maailma - astuu valokeilaan. Tässä luvussa opit, miten permutaatiot ja yhdistelmät auttavat näiden arkipäiväisten pulmien ratkaisussa.

### Permutaatiot

Ensimmäisenä tutkimme permutaatioita. Permutaatio tarkoittaa järjestystä, missä otamme huomioon kaikki mahdolliset tavat, joilla voimme järjestellä jonkin joukon alkioita. Jos sinulla on esimerkiksi kolme erilaista kirjaa (A, B ja C), ne voidaan järjestää  $3!$  eri tavalla. Luku  $3!$  lausutaan "kolmen kertoma" ja se tarkoittaa lukujen 3, 2 ja 1 tuloa, eli  $3 \times 2 \times 1 = 6$ . Joten kirjoja on mahdollista asetella kuudella eri tavalla:

1. ABC
2. ACB
3. BAC
4. BCA
5. CAB
6. CBA

Yleisesti, jos meillä on  $n$  erilaista alkioita, niin permutaatioita on  $n!$  kappaletta.

### Yhdistelmät

Entäpä jos emme ole kiinnostuneita järjestyksestä, vaan haluamme vain tietää, kuinka monta erilaista yhdistelmää voimme muodostaa? Tätä varten tarvitsemme kombinaatioita.

Kombinaatiot ovat kuin permutaatiot, mutta ilman huolta järjestyksestä. Jos otamme samat kolme kirjaa A, B ja C ja haluamme tietää, montako erilaista tapaa on valita niistä kaksi, meidän ei tarvitse huomioida järjestystä.

Kirjoista A, B ja C muodostuvat seuraavat yhdistelmät, jos valitaan kaksi kerrallaan:

1. AB
2. AC
3. BC

Näet, että yhdistelmiä on vähemmän kuin permutaatioita. Matemaattisesti kun valitaan k kappaletta n eri alkioista, yhdistelmien määrä lasketaan kaavalla:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Missä  $C(n, k)$  on yhdistelmien lukumäärä, n on alkioitten kokonaismäärä, ja k on valittavien alkoiden määrä. Merkki ! tarkoittaa edelleen kertomaa, eli lukujen kertomista luvusta alaspäin yhteen saakka.

Esimerkiksi jos meillä on viisi kirjaa ja haluamme valita kolme, käytämme kaavaa  $C(5, 3)$ :

$$C(5, 3) = 5! / (3!(5-3)!) = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) / ((3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)) = 120 / (6 \times 2) = 120 / 12 = 10$$

Joten viidestä kirjasta voidaan valita kolme 10 eri tavalla.

### Harjoitellaan!

1. Montako eri tapaa on järjestää neljä eriväristä palloa?
2. Jos sinulla on seitsemän kirjaa ja haluat asettaa kolme niistä hyllylle, kuinka monta eri järjestysvaihtoehtoa on olemassa?
3. Kuinka monta erilaista kolmen kortin kättä voi muodostaa 52 kortin pakasta?

Jokainen tehtävä tarjoaa sinulle mahdollisuuden tarkastella permutaatioiden ja kombinaatioiden maailmaa käytännössä. Älä epäröi kokeilla erilaisia järjestysmahdollisuuksia ja muista, että kombinatoriikka on kuin palapeli - jokainen palanen auttaa sinua hahmottamaan suurempaa kuvaa!

Onnea matkaan kombinatoriikan kiehtovaan maailmaan!

## 10.4. Klassinen kontra tilastollinen - Lipas, josta löytyy lukuja

Tervetuloa tutkimaan todennäköisyyttä, matematiikan aluetta, joka auttaa meitä ymmärtämään ja ennustamaan tapahtumien mahdollisuutta. Ennen kuin hyppäämme syvemmälle käsitteisiin, on tärkeää erottaa kaksi erilaista näkökulmaa todennäköisyyden laskennassa: klassinen todennäköisyys ja tilastollinen todennäköisyys.

### Klassinen todennäköisyys

Klassinen todennäköisyys perustuu oletukseen, että kaikki tulokset ovat yhtä mahdollisia. Kun katsotaan lippaasta löytyviä numeroituja palloja, oletetaan, että jokaisella pallolla on yhtä suuri mahdollisuus tulla valituksi.

Esimerkki: Kuvitellaan lipas, jossa on 5 palloa, ja kukin pallo on numeroitu numeroilla 1–5. Jos valitsemme yhden pallon satunnaisesti, klassisen todennäköisyyden mukaan jokaisen pallon todennäköisyys tulla valituksi on  $1/5$  eli 20 %.

### **Laskuesimerkki:**

**Tehtävä:** Laske todennäköisyys, että lippaasta nostettaessa saadaan numero 4.

### **Ratkaisu:**

1. Palloja on yhteensä 5 kappaletta.
2. Vain yksi palloista on numero 4.
3. Klassisen todennäköisyyden mukaan saamme todennäköisyydeksi  $1/5$ .

### **Tilastollinen todennäköisyys**

Tilastollinen todennäköisyys perustuu aiempiin havaintoihin tai koettuihin tuloksiin. Toisin kuin klassisessa todennäköisyydessä, jossa kaikki lopputulokset oletetaan yhtä todennäköisiksi, tilastollisen todennäköisyyden avulla arvioidaan todennäköisyyksiä todellisen tapahtumadatan perusteella.

Esimerkki: Kuvitellaan, että samaa lipasta on käytetty 100 kertaa, ja pallo numero 4 on nostettu 28 kertaa. Tilastollisen todennäköisyyden avulla voidaan sanoa, että pallo numero 4:n todennäköisyys tulla valituksi on  $28/100$  eli 28 %.

### **Laskuesimerkki:**

**Tehtävä:** Oletetaan, että lippaasta on nostettu palloja 50 kertaa ja numero 4 on tullut esiin 15 kertaa. Laske pallo nro 4 nostamisen tilastollinen todennäköisyys.

### **Ratkaisu:**

1. Nostokertoja on yhteensä 50.
2. Numero 4 on tullut esiin 15 kertaa.
3. Tilastollisen todennäköisyyden mukaan saamme todennäköisyydeksi  $15/50$ , mikä tiivistettynä on  $3/10$  eli 30 %.

## Vertailu ja pohdinta

Klassista ja tilastollista todennäköisyyttä käytetään eri tilanteissa. Klassinen todennäköisyys on hyödyllinen silloin kun mahdolliset tulokset ovat selkeästi määriteltynä ja yhtä todennäköisiä. Tilastollinen todennäköisyys puolestaan on arvokas, kun meillä on käytössämme aikaisempaa dataa, joka voi vaikuttaa arvioon todennäköisyydestä.

### Tehtävä:

Lipas on käytössä jälleen. Palloja nostetaan 200 kertaa, ja kirjaat ylös kaikkien nostojen tulokset. Numero 5:n pallo nousee esiin 45 kertaa.

1. Laske numero 5 pallo nostamisen klassinen todennäköisyys.
2. Laske numero 5 pallo nostamisen tilastollinen todennäköisyys 200 nostokerran perusteella.

Millaisia eroja huomaat klassisten ja tilastollisten todennäköisyyksien välillä? Pohdi, miksi erot syntyvät ja milloin on sopivaa käyttää kumpaakin todennäköisyyslaskelman tyyppiä.

### Yhteenveto

Todennäköisyyden maailmassa yhdistämme usein sekä teorian että käytännön havaintoja. Klassinen ja tilastollinen todennäköisyys ovat työkaluja, jotka auttavat meitä navigoimaan sattumanvaraisuuden ja odottamattomien tulosten maailmassa. Harjoittelemalla saat lisää ymmärrystä siitä, milloin ja miten eri todennäköisyyskäsitteitä tulisi soveltaa.

# Osa V: Ohjelmoinnin orkidea

Tervetuloa matkalle, jossa laskemisen ja loogisen päättelyn maailma kohtaa luovuuden ja kekseliäisyyden! Tänään sukellamme ohjelmoinnin ja algoritmien kiehtovaan universumiin, jossa jokainen askel on askel kohti uutta luomista - ikään kuin kasvattaisimme omaa digitaalista orkideaa.

### Mikä on algoritmi?

Algoritmi on kuin resepti tai tarkat askelmerkit jonkin tehtävän suorittamiseksi. Se on sarja yksittäisiä toimintaohjeita, jotka tulee suorittaa tietyssä järjestyksessä. Kun leivot kakkua, noudatat reseptin ohjeita yksitellen: mittaat ainekset, sekoitat ne, ja paistat taikinan.

Ohjelmoinnissa teemme samoin: kirjoitamme tietokoneelle askel-askeleelta ohjeita, jotta se voi suorittaa tehtäviä, kuten laskea matematiikan tehtäviä tai pelata shakkia.



## Ohjelmointi - Digitaalisen orkidean kasvattamista

Ohjelmointi on kuin orkidean hoitoa: tarkkailemalla, kokeilemalla ja säätämällä saat aikaan kauniin ja toimivan lopputuloksen. Jotta orkideasi voi kasvaa, tarvitset oikean ympäristön ja työkalut, ohjelmoinnissa nämä ovat tietokone ja ohjelmointikieli.

### Ohjelmoinnin perusteet

Ohjelmoinnissa ensimmäinen askeleesi on kirjoittaa yksinkertainen algoritmi. Aloita lohko kerrallaan kuin rakentaisit Lego-tornia: perustan on oltava vankka, jotta voit rakentaa korkeammalle. Opi ohjelmoinnin peruskäsitteet: muuttujat, silmukat, ehtolauseet ja funktiot. Ne ovat työkalujasi, joilla muokkaat ja kasvatat orkideasi hentoja versoja.

### Muuttujat: Orkideasi ruukku ja multa

Jokainen orkidea tarvitsee ruukun ja multaa, jossa se voi kasvaa. Ohjelmoinnissa tämä ruukku on muuttuja, johon talletat arvoja, kuten numeroita, tekstejä tai vaikkapa totuusarvoja ("tosi" tai "epätosi"). Muuttujat ovat ohjelman perusta, jossa tietoa säilytetään ja muokataan.

```
kukkanen = "orkidea"  
vesi = 500 # millilitroina  
aurinko = "koko päivän valossa"
```

### Ehtolauseet: Aurinko ja varjo

Kasvin hoidossa pitää joskus päättää, onko liian pilvistä ja täytyykö lamppua käyttää valona. Samoin ohjelmissa käytetään ehtolauseita päätöksentekoon; ohjelma voi tehdä toiminnan A, jos ehto on täytetty, tai toiminnan B, jos ehto ei täyty.

```
if auringonvalo < 5:  
    lamppu_paalla = True  
else:  
    lamppu_paalla = False
```

### Silmukat: Kastelu ja lannoitus

Orkidean kastelun ja lannoituksen voi automatisoida toistamaan samaa tehtävää säännöllisesti. Ohjelmoinnissa voimme tehdä saman silmukoilla, jotka toistavat koodia niin monta kertaa kuin tarvitsemme.

```
for paiva in range(30): # 30 päivän kastelusykli
    kastele(orkidea)
    if paiva % 7 == 0: # Joka 7. päivä
        lannoita(orkidea)
```

## Funktiot: Puutarhatyökalusi

Puutarhatyökalut tekevät kasvien hoidon helpommaksi. Ohjelmoinnissa voit luoda toimintoja, funktioita, jotka auttavat sinua järjestelemään koodiasi paremmin ja suorittamaan tehtäviä uudelleen ilman, että joudut kirjoittamaan saman koodin monta kertaa.

```
def kastele(kukka): # määrittellään kastelutoiminto
    print(f"Kastellaan {kukka}!")
```

## Loppusanat

Muista, että kuten orkidean kasvatus, myös ohjelmointi on kärsivällisyyttä vaativa taito. Se ei aina ole helppoa, ja joskus bugit (virheet koodissa) voivat saada aikaan päänsärkyä. Mutta älä huoli! Jokainen virhe on mahdollisuus oppia ja kehittää digitaalista viherpeukaloasi. Mitä enemmän ohjelmoit, sitä paremmin ymmärrät, mikä saa ohjelmointiorkideasi kukoistamaan. Onnea matkaan luomaan omia digitaalisia maailmojasi!

# 11. Algoritmilabyrintti

Tervetuloa tutkimaan algoritmisen ajattelun jännittävää maailmaa! Ennen kuin aloitamme, on tärkeää ymmärtää, mikä algoritmi on. Algoritmilla tarkoitetaan sarjaa ohjeita tai sääntöjä, jotka ratkaisevat ongelman tai suorittavat tehtävän. Algoritmeja käytetään kaikkialla ympärillämme – tietokoneissa, älypuhelimissa, peleissä ja jopa arjen tehtävissä, kuten ruoanlaitossa tai reitin suunnittelussa.

## Mikä on algoritmien merkitys?

Ajattele algoritmia reseptinä. Kun haluat leipoa suklaakakkua, noudatat tarkkoja ohjeita saadaksesi herkullisen tuloksen. Samoin algoritmi kertoo tietokoneelle, mitä sen täytyy tehdä vaihe vaiheelta. Ilman algoritmeja tietokone ei tietäisi, miten suorittaa monimutkaisia (tai edes yksinkertaisia) tehtäviä.

## Tutustu algoritmiseen ajatteluun

Algoritminen ajattelu on loogista päättelyä ja ongelmanratkaisutaitoa, joka auttaa sinua lähestymään ongelmia järjestelmällisesti. Tämä taito on erityisen tärkeä ohjelmoinnissa, mutta se auttaa myös muilla elämänalueilla. Seuraavaksi tutustumme labyrintin ratkaisemiseen käyttämällä algoritmista ajattelua.

## **Liljakukko Algoritmissa**

Kuvittele oma algoritmilabyrinttisi. Siinä pieni liljakukko, Algoritmi, yrittää löytää tiensä labyrintin alusta maaliin herkulliselle lehtisalatinvälähdelle. Miten Algoritmi voisi ratkaista tämän pulman? Voisimme laatia algoritmin, joka opastaa Algoritmin läpi labyrintin.

## **Seinäseurausalgoritmi**

Yksi yleinen algoritmi labyrintin ratkaisemiseen on seinäseurausalgoritmi. Tämä algoritmi on yksinkertainen: valitse yksi seinä ja kulje sen vieressä koko matkan maaliin asti. Jos seinä loppuu tai tulee risteys, pidä samaa seinää oikealla tai vasemmalla, ja jatka seuraamista.

Tämä algoritmi voi joskus johtaa pidemmälle reitille, mutta se on varma tapa löytää ulospääsy labyrintista. Kokeilemalla voimme huomata, toimiiko se Algoritmin labyrintissä parhaiten.

## **Kokeilu ja erehdys**

Toinen tapa lähestyä labyrinttia on kokeilun ja erehdyksen menetelmä. Algoritmi yrittää eri reittejä ja oppii virheistään, kunnes löytää oikean polun maaliin. Tämä menetelmä voi olla tehokas, mutta se vaatii kyvyn muistaa, mitkä polut on jo kuljettu ja ne, joita ei tulisi kulkea uudelleen.

## **Algoritmit toiminnassa**

On tärkeää huomata, että erilaiset algoritmit toimivat erilaisissa labyrinteissa. Jotkut algoritmit saattavat olla nopeampia, mutta vaativat enemmän muistia (kuten kokeilu ja erehdys), kun taas toiset ovat hitaampia, mutta yksinkertaisempia (kuten seinäseurausalgoritmi).

## **Kohti algoritmista mestaruutta**

Nyt kun tiedät algoritmisten ajatusten perusteet ja pari algoritmia labyrintin ratkaisemiseen, kokeilemalla ja harjoittelemalla voit kehittää omia algoritmejasi. Algoritmisessa ajattelussa tärkeintä on:

1. **Vaiheiden tunnistaminen:** Millaisia toimenpiteitä tarvitaan ja missä järjestyksessä?

2. **Ongelmien pilkkominen:** Jakaa suuret ongelmat pienempiin osiin, jotka ovat helpompia ratkaista.
3. **Looginen päättely:** Käyttää loogista päättelyä ja ennustaa, mitä seuraavaksi tapahtuu.
4. **Kehitys ja iterointi:** Algoritmeja voi aina parantaa testaamalla ja säätämällä.

Harjoittelemalla ja ajattelemalla algoritmisen ajattelun periaatteiden mukaan voit saavuttaa mitä vain – olipa se sitten labyrintin läpikäyminen, ohjelmakoodin kirjoittaminen tai vaikkapa uuden kielen oppiminen.

Nyt, kun olemme käyneet läpi algoritmilabyrintin perusteet, on aika käydä toimeen! Ratkaise labyrintti, tee omia labyrinttejäsi ja suunnittele algoritmeja niiden ratkaisemiseksi. Sinusta voi tulla algoritmisen ajattelun mestari!

## 11.1. Ohjelmoijan ensiaskele - Algoritmien alku

Tervetuloa maailmaan, jossa luodaan tulevaisuuden ideoita ja ratkaistaan arjen pulmia – tervetuloa ohjelmoinnin ja algoritmien maailmaan!

### Mikä on algoritmi?

Algoritmi on toimintaohjeiden sarja, jonka avulla voit ratkaista ongelman tai suorittaa tehtävän askel askeleelta. Se on kuin resepti, jonka seuraamisella leivot herkullisen kakun tai kuin sävelmä, jota noudattamalla soitat kauniin kappaleen.

### Algoritmit arkielämässä

Arkielämän esimerkkitilanne voisi olla vaikkapa tämä: Tehtävänäsi on jakaa tasaisesti 24 suklaakonvehtia neljän ystäväsi kesken. Algoritmi, jolla jakaminen tapahtuisi, voisi kuulostaa tältä:

1. Aseta pinoon 24 suklaakonvehtia.
2. Kutsu ystäviäsi nimillä A, B, C ja D.
3. Alusta laskuri, jonka arvo on 0.
4. Ota pinosta yksi suklaakonvehti.
5. Anna suklaakonvehti ystävälle, jonka vuoro on (alkaen A:lle).
6. Lisää laskurin arvoa yhdellä.
7. Toista askelia 4-6 kunnes pinossa ei ole enää suklaakonvehteja.
8. Onnistuit jakamaan suklaakonvehdit tasaisesti!

## Algoritmit tietokoneella

Kun siirryt tietokoneen maailmaan, algoritmien luominen on keskeinen taito ohjelmointia opeteltaessa. Ohjelmointi on yksinkertaisesti tapa kertoa tietokoneelle, mitä sen tulisi tehdä. Kun kirjoitat ohjelmointikoodin, luot algoritmeja, jotka saavat tietokoneen suorittamaan haluamiasi tehtäviä.

## Esimerkkialgoritmi

Kuvitellaan, että sinun on kirjoitettava ohjelma, joka etsii suurimman luvun listalta. Voisimme käyttää algoritmia, jota kutsutaan "suurimman luvun etsintä":

1. Oletetaan, että ensimmäinen luku listalla on suurin. Merkitään se muuttujaksi 'suurin'.
2. Vertaile 'suurinta' seuraavaan lukuun listalla.
3. Mikäli seuraava luku on suurempi kuin 'suurin', päivitä 'suurin' olemaan tämä uusi luku.
4. Toista edellisiä askelia listan loppuun asti.
5. Kun olet käynyt läpi kaikki luvut, 'suurin' on suurin luku listalla.

## Algoritmien ominaisuudet

Hyvällä algoritmilla on eräitä tärkeitä ominaisuuksia:

- **Selkeys:** Algoritmin askelten tulee olla helposti ymmärrettävissä.
- **Täsmällisyys:** Jokaisen askeleen on oltava täsmällinen ja yksiselitteinen.
- **Tehokkuus:** Algoritmin tulisi käyttää mahdollisimman vähän aikaa ja resursseja.
- **Yleispätevyys:** Sen tulisi toimia kaikilla oikeanlaisilla syötteillä.

## Algoritmien visualisointi

Kun luot algoritmeja, voi olla hyödyllistä piirtää ne ensin vaikka virtakaaviona tai pseudokoodina, joka ei ole varsinaista ohjelmointikieltä, mutta auttaa algoritmin rakenteen hahmottamisessa.

## Kokeile itse!

Nyt on sinun vuorosi! Etsi jokin arkipäiväinen ongelma, kehitä siihen algoritmi ja visualisoi se virtakaaviona. Voit myös kokeilla kirjoittaa algoritmisi pseudokoodina. Muista, että algoritmin tehtävänä on jakaa ongelma pienempiin osiin ja ratkaista se askel kerrallaan.

## Yhteenveto

Loistavaa, olet nyt ottanut ensiaskeleesi ohjelmoijan polulla! Algoritmien ymmärtäminen ja kehittäminen on taito, joka avaa ovet lukemattomiin mahdollisuuksiin digitaalisessa maailmassa. Jatka harjoittelua ja huomaat pian, kuinka voit ratkaista monimutkaisempia ongelmia ja luoda omia ohjelmia!

Hyviä seikkailuita algoritmien ja ohjelmoinnin maailmassa!

## 11.2. Koodikoralli - Algoritmien ihmeellinen maailma

Oletko koskaan miettinyt, kuinka tietokonepelit toimivat, tai millä tavoin älypuhelin osaa ohjata sinua oikean reitin löytämisessä? Kaiken taustalla ovat algoritmit, ne nerokkaat ohjeet, jotka kertovat tietokoneille, roboteille ja erilaisille laitteille, mitä tehdä. Algoritmi voi olla yksinkertainen, kuten resepti leivontaa varten, tai monimutkainen koodirykelmä, joka vie meidät virtuaalitodellisuuden syövereihin. Matkamme algoritmien maailmassa vie meidät kohti päämääräämme: oppia laatimaan ja suorittamaan omia algoritmejamme.

### Mikä ihmeen algoritmi?

Sanalla "algoritmi" tarkoitetaan minkä tahansa ongelman ratkaisemiseksi tai tietyn tehtävän suorittamiseksi laadittua tarkkaa, vaiheittaista toimintaohjetta. Algoritmit ovat kuin reseptejä tai aartenmetsästyskarttoja – ne antavat selkeät askelmerkit siitä, mitä tehdä seuraavaksi.

### Esimerkki Arjesta:

Kuvittele, että olet tekemässä kahvipannullista herkullista kahvia:

1. Mittaa ja kaada vesi kahvinkeittimeen.
2. Aseta kahvifiltteri paikoilleen.
3. Mittaa ja lisää jauhettua kahvia filteriin.
4. Paina keittimen käynnistuspainiketta.
5. Odota, että kahvi valmistuu.
6. Kaada valmis kahvi kuppiin ja nauti.

Nämä askeleet muodostavat algoritmin kahvin valmistamiseksi!

### Algoritmien Looginen Luonti

Kun ryhdymme laatimaan algoritmia, meidän on ensin selvitettävä, mikä on tavoitteemme. Sen jälkeen suunnittelemme tarvittavat askelmerkit, jotka johtavat meidät maaliin. Tärkeää on

varmistaa, että jokainen askel on tarpeeksi selkeä ja yksityiskohtainen, jotta se voidaan toteuttaa virheettömästi.

## **Ongelman Pilkkominen**

Algoritmien laatimisessa on hyödyllistä pilkkoa suuri ongelma pienempiin osiin, joita voimme hallita helpommin. Tätä kutsutaan modularisoinniksi. Kun jokainen moduuli on valmis, voimme yhdistää ne suureksi kokonaisuudeksi.

## **Esimerkki Algoritmista:**

Aloitetaan esimerkillä, joka kertoo, onko luku parillinen vai pariton:

1. Ota luku, jota haluat tutkia.
2. Jaa luku kahdella.
3. Jos tuloksena on kokonaisluku, luku on parillinen.
4. Jos tuloksena ei ole kokonaisluku, luku on pariton.

Nyt sinulla on algoritmi luvun parillisuuden tai parittomuuden selvittämiseksi!

## **Algoritmien Suorittaminen**

Algoritmin suoritus alkaa ensimmäisestä vaiheesta ja etenee askel askeleelta loppuun asti. Joskus algoritmi voi sisältää ehtoja tai valintoja, jotka ohjaavat suoritusta eri tavoin riippuen tilanteesta. Tämä voi kuulostaa monimutkaiselta, mutta ole huoleti – kun algoritmin vaiheet on määritelty hyvin, suoritus on kuin seikkailu, joka johtaa aina varmasti maaliin.

## **Loogiset Ehdot**

Joskus algoritmit edellyttävät päätöksentekoa. Tällaisissa tilanteissa käytämme "jos... niin" tai "jos... niin... muuten" -rakenteita.

- Jos nälkä yllättää, niin syö omena.
- Jos sataa, niin ota sateenvarjo; muuten voit jättää sen kotiin.

## **Toistuvat Toimenpiteet**

Toiset algoritmit vaativat toistoa. "Toista kunnes" -rakenne auttaa suorittamaan tehtävän monta kertaa.

- Toista pelikierros, kunnes kaikki pelikortit on jaettu.

## Algoritmien Testaaminen

Kun olet laatimassa algoritmia, kannattaa tehdä testejä varmistaaksesi, että se toimii joka tilanteessa. Tämä on kuin läksyjen tarkastamista ennen niiden palauttamista – haluamme olla varmoja, että kaikki on kunnossa.

## Algoritmiset Seikkailut Itse

Nyt kun tiedät algoritmien perusteet, on aika luoda omia. Alkuun pääset vaikka kirjoittamalla algoritmin, joka järjestää kirjoittamasi numerot pienimmästä suurimpaan tai päinvastoin. Sitten voit siirtyä monimutkaisempiin tehtäviin, kuten lukujonojen laskemiseen tai vaikka oman pelisi suunnitteluun.

Muista, että algoritmien laatiminen ja testaaminen on kuin suuri koodikoralli: se on jännittävä seikkailu, joka palkitsee luovuuden, päättelykyvyn ja ongelmanratkaisutaidot. Ja mikä parasta – tätä korallia voit ajaa missä tahansa, jopa omassa mielessäsi. Valmiina, lähtöön... algoritmoi!

## 11.3. Tervetuloa ohjelmoinnin oopperaan - Ohjelmia joka lähtöön

Oletko koskaan ajatellut, että voisit tehdä matematiikan tehtäviä tietokoneellesi kuten kerrot tarinoita ystävillesi? Tai että voisit muuntaa numerot ja kaavat tanssiksi, jota tietokoneesi esittää sinulle näytöllä? Ohjelmointi avaa oven tähän maagiseen maailmaan, missä matematiikka herää eloon ja jossa sinä olet kapellimestari. Tässä luvussa tutustumme ohjelmoinnin perusteisiin ja opimme, kuinka yhdistämme matematiikan tietojen ja taitojen sinfonian ohjelmointikoodiksi, joka antaa elämää ideoillesi.

### Mikä on ohjelmointi?

Ohjelmointi on tapa antaa tietokoneelle ohjeita, jotka se suorittaa. Voimme ajatella sitä kielenä - erityisenä kielenä, jolla kerromme tietokoneelle mitä tehdä. Kuten jokaisella kielellä, myös ohjelmointikielellä on oma sanastonsa (komennot) ja kielioppi (syntaksi), joita tulee noudattaa, jotta tietokone ymmärtää ohjeet oikein.

### Mitä ohjelmointi voi tarjota matematiikalle?

Ohjelmoinnin ja matematiikan liitto tarjoaa sinulle mahdollisuuden:

- Ratkaista monimutkaisia laskutoimituksia ja matemaattisia ongelmia nopeasti.
- Visualisoida matemaattisia konsepteja ja kaavoja graafisesti.



- Testata ja tutkia matemaattisia teorioita ja oletuksia käytännössä.
- Kehittää pelejä ja simulaatioita, jotka auttavat ymmärtämään matemaattisia ideoita.

## Ensi askeleet ohjelmointiin

Aloitamme matkamme ohjelmoinnin maailmaan tutustumalla yksinkertaiseen ohjelmointikieleen nimeltään Python. Python on suosittu kieli matematiikan kanssa työskentelevien keskuudessa sen helppokäyttöisyyden ja selkeän syntaksin vuoksi.

### Hello World!

Ensimmäinen ohjelmointiharjoitus on perinteisesti "Hello World!" -ohjelma, jossa annamme tietokoneen näyttää ruudulla tekstin "Hello World!". Python-koodina se näyttää tältä:

```
print("Hello World!")
```

### Muuttujat ja peruslaskutoimitukset

Matematiikassa käytämme usein kirjaimia esittämään muuttujia ja lukuja. Ohjelmoinnissa teemme samoin. Voimme luoda muuttujan ja antaa sille arvon seuraavasti:

```
a = 10
b = 5
summa = a + b
print(summa)
```

Tämän pienen ohjelmalohkon tulostus on 15. Olemme juuri luoneet muuttujat `a` ja `b`, asettaneet niille arvot ja laskeneet niiden summan.

### Funktiot

Funktio matematiikassa on sääntö tai ohje, joka muuntaa syötteen tulokseksi. Ohjelmoinnissa funktiot ovat vastaavia. Ne voivat vastaanottaa syötteitä (parametreja), suorittaa tehtäviä ja palauttaa tuloksen. Tässä yksinkertainen funktio, joka laskee kahden luvun summan:

```
def summaa(a, b):
    return a + b

print(summaa(10, 5))
```

Funktioon `summaa` syötetään kaksi lukua, `10` ja `5`, ja tulostus on jälleen 15.

## Ohjelmoinnin ja matematiikan yhteislaulu

Nyt kun olemme saaneet pienen maistiaisen ohjelmoinnista, voimme alkaa soveltaa sitä matematiikan tehtäviin. Esimerkiksi, voimme kirjoittaa ohjelmia piirtämään funktioiden kuvaajia, ratkaisemaan yhtälöitä, tai vaikkapa simuloimaan todennäköisyysongelmia.

### Visualisointi

Kuvitellaan, että haluamme nähdä, miltä funktio  $f(x) = x^2$  näyttää. Ohjelmoinnissa voimme käyttää kirjastoja, kuten Matplotlib piirtääksemme kuvaajan:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = x**2

plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Tämä koodi luo 100 pistettä välillä -10 ja 10 x-akselille, laskee niiden y-arvot funktiolle  $x^2$  ja piirtää ne graafiksi.

Voit nähdä, miten voimme kirjoittaa ohjelmia, jotka hyödyntävät matematiikkaa luovasti ja innostavasti. Näiden esimerkkien perusteella voit aloittaa omien ohjelmiesi kirjoittamisen ja oopperan säveltämisen - ohjelmoinnin ja matematiikan sinfonian, joka soi juuri sinun tahtisi mukaan.

## 11.4. Oma ohjelma ojennukseen - Toteuta unelmien ohjelma

Tervetuloa matematiikan jännittävään maailmaan ja sen rinnalla myös - ohjelmoinnin peruskonsepteihin! Tässä luvussa sukellamme siihen, miten voit toteuttaa omia ohjelmointiprojekteja, jotka tukevat matemaattista ajatteluasi ja antavat sinulle työkalut luoda jotakin uutta ja ainutlaatuista. Ohjelmointi ei ole vain koodirivejä, se on tapa ratkaista ongelmia ja toteuttaa ideat käytännössä!

### Mikä on ohjelmointi?

Ohjelmointi on prosessi, jossa luodaan sarja ohjeita tietokoneelle suoritettavaksi. Näillä ohjeilla tietokone pystyy tekemään mitä uskomattomimpia asioita: se voi esimerkiksi laskea lukuja, luoda kauniita kuvioita, hallita robotteja ja paljon muuta. Ohjelmointikielet, kuten Python, JavaScript ja Scratch, ovat välineitä, joiden avulla kommunikoimme tietokoneen kanssa.

## Aloita ohjelmoinnin perusteista

Ennen kuin hyppäät säveltämään omaa sinfoniaasi koodin maailmassa, on tärkeää oppia perusteet. Ohjelmoinnin peruskäsitteitä ovat:

- **Muuttujat:** Muuttuja on kuin laatikko, johon voit tallentaa tietoa. Esimerkiksi `numero = 10` tallentaa muuttujaan `numero` luvun 10.
- **Ehtolauseet:** Voit ohjata ohjelman toimintaa ehtojen avulla. Jos tietty ehto täyttyy, ohjelma tekee jotain, muussa tapauksessa se tekee jotain muuta.
- **Toistolauseet:** Näiden avulla voit toistaa tiettyjä toimintoja niin monta kertaa kuin tarvitset. Tämä on hyödyllistä esimerkiksi laskutoimitusten automatisoinnissa.
- **Funktiot:** Funktio on koodin osa, jota voit kutsua ja suorittaa monta kertaa. Se on kuin matemaattinen funktio, joka antaa tulokseksi arvoja syötteiden perusteella.

## Ensimmäinen ohjelmasi

Me käytämme tässä esimerkissämme Pythonia, koska se on selkeä ja helppokäyttöinen kieli aloittelijoille. Voit kokeilla seuraavaa yksinkertaista ohjelmaa:

```
#### Tämä on kommentti, tietokone ei ota sitä huomioon suorittaessaan ohjelmaa.  
  
#### Tulostetaan tervehdys  
print("Hei maailma!")  
  
#### Lasketaan kahden luvun summa  
luku1 = 5  
luku2 = 7  
summa = luku1 + luku2  
print("Lukujen summa on:", summa)
```

Tässä ohjelmassa ensin tulostetaan tervehdys "Hei maailma!" ja sitten lasketaan kahden luvun 5 ja 7 summa. Tulostamme summan, joka tulee olemaan 12.

## Tee oma ohjelma

Nyt kun olet nähnyt perusohjelman, ala miettimään, millaisen ohjelman haluaisit itse luoda. Tässä muutamia ideoita:

1. **Laskin:** Ohjelmoi laskin, joka voi laskea kahden luvun summan, erotuksen, tulon ja osamäärän.
2. **Piirtäjä:** Käytä graafista kirjastoa (esim. Turtle Pythonissa) piirtääksesi erilaisia kuvioita ja kuvia.
3. **Peli:** Suunnittele yksinkertainen peli, kuten 'arvaa luku' tai muistipeli.
4. **Päiväkirja:** Luo ohjelma, joka auttaa sinua pitämään kirjaa päivittäisistä tehtävistäsi tai tunteistasi.

## Ohjeita ohjelmointiprojektiin

Ohjelmointiprojektin aloittaminen voi tuntua haasteelliselta, mutta muista, että ongelmanratkaisu ja luovuus ovat ohjelmoinnin ytimessä. Aloita pienillä askeleilla ja rakenna ohjelmasi osa osalta. Testaa koodiasi usein ja varmista, etteivät virheet kerry. Älä pelkää kysyä apua tai hakea tietoa, sillä ohjelmointiyhteisö on täynnä ihania ihmisiä, jotka mielellään jakavat tietoaan ja kokemuksiaan.

Onnea ohjelmointimatkalle! Käytä mielikuvitustasi ja matematiikan taitojasi luodaksesi jotakin ainutlaatuista, joka ilmentää sinun visioitasi ja unelmiasi.

# Osa VI: Matikkamestariksi - Sovelletaan ja selvitetään

Matematiikka on kuin avain, joka avaa ovia monenlaisiin arkipäivän ongelmiin ja mysteereihin. Monesti voi kuulla kysyttävän, "mihin tätä oikeasti tarvitaan?" Tässä luvussa lähdemme matkalle matematiikan sovellusten maailmaan ja opimme ratkaisemaan käytännön ongelmia matikan taidoilla. Matikkamestariksi ei synnytä yhdessä yössä, mutta joka päivä oppimalla ja soveltamalla olet askeleen lähempänä mestaruutta!

## 1. Kaupan kassalla

Kuvittele, että olet kaupassa ja ostoskorisi summa on 23,50 €. Maksat 50 eurolla. Kuinka paljon saat takaisin rahaa?

Tässä perusasiat kuten yhteen- ja vähennyslasku tulevat tarpeeseen. Voimme ratkaista ongelman näin:

$$50,00 \text{ €} - 23,50 \text{ €} = 26,50 \text{ €}$$

Saat 26,50 € takaisin. Matematiikka auttoi meitä tässä arkipäiväisessä tilanteessa.

## 2. Ajan hahmottaminen

Oletamme, että treenisi alkaa klo 17:00 ja kestää 1 tunnin ja 30 minuuttia. Mihin aikaan treenit päättyvät?

Laskemme ensin tunnit  $17 + 1 = 18$ , ja sen jälkeen lisäämme minuutit. Klo  $17:00 + 1 \text{ h } 30 \text{ min} = 18:30$ .

Treenisi päättyvät siis 18:30. Tämä esimerkki osoittaa kuinka tärkeää on osata laskea aikaa.

## 3. Reseptit ja mittaaminen

Laitetaanpas leivontahatut päähän! Haluat leipoa keksejä, ja resepti vaatii 4 dl sokeria ja on tarkoitettu 20 keksille. Kuinka paljon tarvitset sokeria, jos haluat tehdä vain 10 keksiä?

Tässä tarvitaan osaamista suhteiden ja mittakaavan ymmärtämiseen. Jos puolitat määrän keksejä, tulee sinun puolittaa myös sokerin määrä.

$$4 \text{ dl sokeria} / 2 = 2 \text{ dl sokeria}$$

Tarvitset siis 2 dl sokeria 10 keksin valmistamiseen.

## 4. Matkustaminen ja nopeus

Sunnuntaina käyt perheesi kanssa ajelulla. Isäsi ajaa autoa kaupungista mökille, jonka etäisyys on 120 km. Matka kestää 2 tuntia. Mikä on auton keskinopeus tällä matkalla?

Tähän ongelmaan tarvitsemme yksinkertaista jakolaskua:  $\text{Matka} / \text{aika} = \text{nopeus}$ .

$$120 \text{ km} / 2 \text{ h} = 60 \text{ km/h}$$

Auton keskinopeus on siis 60 km/h.

## 5. Rahankäyttö ja budjetointi

Olet saanut 15 € viikkorahaa, ja haluat säästää uuteen peliin, joka maksaa 60 €. Kuinka monta viikkoa sinun täytyy säästää, jos käytät joka viikko 5 € välipaloihin?

Säästät joka viikko  $15\text{ €} - 5\text{ €} = 10\text{ €}$ . Jotta voisit ostaa pelin, tarvitset:

$60\text{ €} / 10\text{ €/viikko} = 6\text{ viikkoa}$

Sinun täytyy säästää kuusi viikkoa saadaksesi tarpeeksi rahaa peliisi.

Näistä esimerkeistä näemme, että matematiikka ei ole pelkkiä numeroita paperilla, vaan se on työkalu, joka auttaa meitä selviytymään ja suunnittelemaan arkielämän tilanteita. Joten kun kohtaat jonkin pulman, ota se haasteena, jonka voit ratkaista — ole matikkamestari ja sovelta oppimaasi käytännössä!

## 12. Matematiikan maireat mahdollisuudet

Hei nuori matemaatikon alku! Olet ehkä pohtinut, miksi meidän täytyy opiskella matematiikkaa. Eihän se aina ole niin selkeää, että yhtälöt ja funktiot kiipeäisivät suoraan ulos matematiikan kirjastasi ja seurasivat sinua kaupungilla, mutta usko pois, matematiikan maailmassa on loputtomasti ihmeitä, joita ilman arkielämä ei pyörisi lainkaan niin sulavasti!

### Rahankäyttö ja budjetointi

Matematiikka on rahan käytön selkäranka. Kun suunnittelet ostoksiasi, vertaillet hintoja tai säästät jotain isompaa hankintaa, kuten uutta polkupyörää - sinä käytät matematiikkaa! Yhteen- ja vähennyslaskujen avulla pystyt laatimaan budjetin, mikä auttaa sinua ymmärtämään, mihin rahasi menevät ja kuinka kauan sinun tulisi säästää tavoitteisiisi pääsemiseksi.

### Kokkaamisen kemiat

Kokkaus on kuin kemian ja matematiikan suloinen tanssi. Kun sekoitat aineksia leipoessasi tai teet täydellistä pastaa, annosten määrä ja aikataulutus vaativat matemaattista tarkkuutta. Reseptien muuntaminen suuremmille tai pienemmille ryhmille on suora esimerkki matematiikan hyödyllisyydestä, kun joudut käyttämään suhdelukuja ja mittayksiköiden muunnoksia.

### Urheilun tilastotaiturit

Oletko urheilufani tai aktiivinen pelaaja? Tilastot ja pistetaulukot ovat täynnä numeroita, jotka kertovat tarinaa joukkueiden sijoituksista, pelaajien suorituksista ja ennätysten rikkomisesta.

Matematiikan avulla urheilun ystävät voivat analysoida pelejä ja ennustaa tulevia suorituksia. Pisteiden ja keskiarvojen laskeminen on vain pintaraapaisu siitä, mitä kaikkea voit tehdä matematiikan avulla urheilun parissa.

## **Luonnossa liikkujan lokikirja**

Matematiikka ei välttämättä tule mieleen, kun kiipeilet kallioilla tai vaeltelet metsissä, mutta se on kaikkialla ympärilläsi. Luonnon muodot, kuten symmetria ja kuviot, ovat suoraan sidoksissa geometriaan. Suunnistaessasi kompassin ja kartan avulla käytät sijaintisi määrittämiseen koordinaatistoa. Etäisyyksien, nopeuksien ja ajan laskeminen ovat tärkeitä taitoja, kun suunnittelet retkesi kestoa ja varmistat, että palaat ennen pimeän tuloa.

## **Musiikin matemaattiset melodiat**

Ehkä yllätyt kuullessasi, että musiikki ja matematiikka soivat samalla taajuudella. Sävelten ja rytmien taustalla on matemaattista logiikkaa. Tahtilajit, ajoitus ja nuottien pituudet luovat matemaattisen rakenteen, joka mahdollistaa musiikin harmonian ja dynamiikan. Säveltäessäsi omia kappaleitasi tai soittaessasi jotain tuttua sävelmää, tukeudut matematiikkaan orkesteroidaksesi äänet sulokkaaksi sinfoniaksi.

## **Arjen teknologia**

Älypuhelimet, tietokoneet, ja jopa jääkaapit - kyllä, nykypäivän laitteet ja sovellukset ovat syntyneet matematiikan avulla. Koodarit ja suunnittelijat käyttävät matemaattisia algoritmeja, jotta voit lähettää viestejä ystävillesi, pelata pelejä tai seurata terveytesi tilaa. Ilman matematiikkaa nämä arjen mukavuudet eivät yksinkertaisesti toimisi.

Näetkö nyt kuinka matematiikan maireat mahdollisuudet vaikuttavat jokapäiväiseen elämäämme? Jokaista laskutapausta, mittaamista ja loogista pohdintaa voi hyödyntää arjen pulmatilanteissa. Matematiikka ei ole vain koulukirjojen kaavoja, vaan se on salainen aines, joka tekee maailmasta järkevän ja jännittävän paikan. Joten suhtaudu uteliaisuudella seuraavaan matematiikan oppituntiisi - et ikinä tiedä, minkä arjen arvoituksen ratkaisussa seuraavaksi tulet tarvitsemaan matematiikan taitoja!

# **12.1. Koodista kaavaan - Numeroilla on väliä**

Matematiikka ei ole pelkkää numeroita ja laskutoimituksia, jotka jäävät koulun pulpetin äärelle. Tänään sukellamme yhdessä numeroiden maailmaan ja katsomme, kuinka matematiikkaa hyödynnetään kotona ja kaupassa - paikoissa, joissa jokainen meistä viettää paljon aikaa!

## Kun Kodista Tulee Laskutreenisali

Katsotaanpa ensiksi kotia: se on paljon enemmän kuin vain paikka, johon palata koulun tai harrastusten jälkeen. Se on myös täynnä tilaisuuksia harjoittaa matemaattisia taitoja!

**Reseptien matematiikkaa** - Keittiössä reseptit vaativat usein ainesosien mittaamista ja muuntamista. Jos ohje sanoo "tarvitset puoli litraa maitoa", mutta sinulla on vain desilitran mitta, kuinka monta mittaa tarvitset? Osaatko vastata ilman laskinta? (Vastaus: viisi.)

**Kotiaskareiden aikajana** - Kuinka kauan kestää siivota huoneesi? Kuinka monta minuuttia pesukone pyörii? Kun laitat aikataulun näille askareille, käytät matemaattista ajattelua arvioidessasi ja hallitessasi aikaa.

## Kauppamatematiikkaa: Numeroleikkejä ruokakaupassa

Entä kauppa? Täynnä numeroita hinnasta ainesosien määrään. Katso kuinka matematiikka pelastaa meidät taas.

**Tarjoukset ja alennukset** - Törmäät usein mainoksiin, jotka houkuttelevat erilaisin tarjouksin: "Kaksi yhden hinnalla!" tai "Kaikki 30% alennuksella!" Miten lasketaan tuotteen todellinen hinta alennuksen jälkeen? Esimerkki: Jos leipä maksaa normaalisti 2,50 euroa ja se on 20% alennuksessa, paljonko maksat? (Vastaus:  $2,50 \text{ €} - (20\% \times 2,50 \text{ €}) = 2 \text{ €}$ .)

**Yksikköhintojen vertailu** - On tärkeä osata vertailla hintoja ja arvoa, kun olet kaupassa. Jos omenat maksavat 1,95 euroa kilolta ja päärynät 2,30 euroa kilolta, kumpi on edullisempaa? Mutta entä jos katsoisimme ravintoarvoja? Matematiikka auttaa meitä tekemään tietoisia valintoja.

**Pakkausten salainen koodi** - Huomaatko miten jokaisessa tuotteessa on viivakoodi? Se ei ole vain kassaa varten: viivakoodi kertoo tuotteen maan, valmistajan ja tuotetiedot. Esimerkiksi koodin ensimmäiset numerot kuvaavat maakoodia.

## Käytännön vinkkejä matemaattiseen kodin- ja kaupanpitoon:

- **Muista mittayksiköiden muunnokset** - Käytä hyväksesi matematiikan kertotauluja muistaaksesi, kuinka monta millilitraa on desilitrassa tai kuinka monta senttiä on metrissä.
- **Harjoittele prosenttilaskua** - Kun prosentit tuntuvat tutuilta, osaat laskea alennukset ja verot nopeasti päässäsi.
- **Vertaile ja arvioi** - Kun olet kaupassa, älä vain katso hintalappua. Vertaa eri tuotteiden hintoja ja määriä matemaattisesti ja ota huomioon laatu ja tarve.



Muista: matematiikka on kuin avain, joka avaa oven arjen mysteereihin. Kun tarkkailet maailmaa matemaattisesti, huomaat, että numeroilla todella on väliä – ja ne voivat jopa säästää rahaa ja aikaa. Ole avoin matemaattisille seikkailuille, ja sinusta voi tulla mestari kaikkialla, missä numeroita löytyy!

## 12.2. Säästön salaisuudet - Budjetit pedattuina

Tervetuloa oppimaan matematiikan maailmaan, jossa numerot eivät ole vain laskuja ja kaavoja, vaan niillä on uskomaton voima vaikuttaa todelliseen elämään – erityisesti talouteesi. Tässä luvussa sukellamme budjetoinnin ja sijoittamisen kiehtoviin käsitteisiin, jotka ovat avainasemassa raha-asioiden hallinnassa.

### Budjetointi - Miten hallita raha-asioita viisaasti?

Budjetointi on kuin kartta rahamaailman seikkailuun. Se auttaa sinua hallitsemaan tulojasi ja menoja niin, että tiedät aina, mihin suuntaan olet rahojasi suuntaamassa.

### Mikä on budjetti?

Budjetti on suunnitelma, jossa listataan kaikki tulot, kuten viikkorahat, syntymäpäivärahat ja mahdolliset kesätöistä tienatut summat. Sitten lasketaan ja asetetaan katto kaikille menoille, kuten puhelimen latausliittymälle, välipaloille ja harrastuksille. Budjetin ideana on varmistaa, että kulut eivät ylitä tuloja.

### Miten tehdä oma budjetti?

1. **Listaa tulot:** Kirjaa ylös kaikki rahat, jotka saat kuukaudessa.
2. **Listaa menot:** Tee sama kaikille menoillesi.
3. **Laske erotus:** Vähennä menot tuloista selvittääksesi, kuinka paljon rahaa sinulle jää säästöön.
4. **Suunnittele säästöt:** Päätä, kuinka paljon haluat laittaa säästöön tulevaisuutta, kuten uutta pyörää tai peliä varten.
5. **Tee seuranta:** Pidä kirjaa kulutuksestasi ja tarkista, pysytkö budjetin rajoissa.

### Esimerkki:

Tulot:

- Viikkoraha: 20€
- Syntymäpäiväraha: 50€ (jaettuna 12 kuukaudella)

Menot:

- Välipalat: 15€
- Puhelinlataus: 10€
- Leffalippu: 10€

Tulot yhteensä:  $20€ + 50€/12 \approx 24,17€$  kuukaudessa. Menot yhteensä:  $15€ + 10€ + 10€ = 35€$  kuukaudessa.

Erotus:  $24,17€ - 35€ = -10,83€$  kuukaudessa.

Tulos: Menoja on enemmän kuin tuloja, joten budjettia täytyy säätää. Ehkä voit katsoa elokuvan kotona tai ansaita lisää viikkorahaa auttamalla kotitöissä?

## **Sijoittaminen - Tulevaisuuden tekijä**

Sijoittaminen on kuin taikatemppu, jossa annat rahalle mahdollisuuden kasvaa ajan myötä. Tärkeä käsite sijoittamisessa on korkoa korolle -ilmiö. Se tarkoittaa, että saat koron paitsi säästöillesi, myös aikaisemmin kertyneelle korolle.

## **Miksi sijoittaminen on tärkeää?**

Kun säästät rahaa, et pelkästään varjele sitä kulutukselta, vaan annat sille mahdollisuuden kasvaa. Sijoittamalla voit kohdata tulevaisuuden taloudellisia tarpeita, kuten opinnot, asunnon hankinnan tai jopa eläkepäivät!

## **Miten sijoittaminen toimii?**

Voit sijoittaa esimerkiksi osakkeisiin, jotka ovat pieni pala yrityksestä, tai rahastoihin, jotka koostuvat monista osakkeista. Sijoitukset voivat kasvattaa arvoaan, kun yritys menestyy.

## **Esimerkki korkoa korolle -ilmiöstä:**

Jos sijoitat 50 euroa, joka kasvaa vuosittain 10% korolla, näin se kasvaisi yli vuosien:

1. vuosi:  $50€ \times 1,10 = 55€$
2. vuosi:  $55€ \times 1,10 = 60,50€$
3. vuosi:  $60,50€ \times 1,10 = 66,55€$

Huomaatko, kuinka summa kasvaa joka vuosi vähän enemmän kuin edellisenä? Se on korkoa korolle -voiman ansiota!

## Avainasioita muistaa:

- **Aloita Aikaisin:** Mitä aikaisemmin aloitat säästämisen ja sijoittamisen, sitä enemmän hyödyt korkoa korolle -ilmiöstä.
- **Jatkuva Säästäminen:** Säästä säännöllisesti, vaikkapa pieni summa kuukaudessa, se kertyy vuosien saatossa suureksi pääomaksi.
- **Kärsivällisyys:** Sijoitukset tarvitsevat aikaa kasvaakseen, joten kärsivällisyys on valttia.

Budjetointi ja sijoittaminen ovat kuin siemeniä istuttava puutarhuri; alussa ne vaativat suunnittelua ja työtä, mutta ajallaan ne kasvavat ja tuottavat hedelmää, jonka voit kylvää jälleen uudelleen. Nyt on sinun aikasi kylvää tulevaisuuden taloudelliset unelmasi. Muista, että jokainen euro on siemen, joka voi kasvaa suureksi puuksi!

## 12.3. Mahtavaa matikkaa mailmalla - Tiede tarttuu taulukoihin

Matematiikka on kieli, jota käytämme puhuaksemme todella selkeästi - ja kun se tulee tieteiden maailmaan, se muuttuu todelliseksi taikasauvaksi! Onpa kyse fysiikasta, kemiasta tai biologiasta, matematiikka on perusta, jolle kaikki nämä tieteet rakennetaan. Mitä jos kurkistaisimme, miten matematiikka muuttuu tieteellisten oivallusten työkaluiksi?

### Fysiikka - Luonnonlakien laskelmat

Ajattelepa fysiikkaa maailmankaikkeuden pelisääntöjen kirjana. Jokainen näistä säännöistä kätkee sisäänsä matematiikan kaavoja. Kun heität pallon ilmaan, sen lentorata noudattaa parabolista käyrää, jonka muotoon vaikuttavat painovoima, lähtönopeus ja kulma. Matematiikan avulla voimme laskea tarkasti, missä kohtaa pallo putoaa maahan. Yksi fysiikan kauneimpia kaavoja on  $E = mc^2$ , Albert Einsteinin ikoninen yhtälö, joka liittää energian (E) massa (m) ja valon nopeuteen tyhjiössä (c). Tämä yhtälö on perusta modernille fysiikalle ja kertoo meille, että massa ja energia ovat erilaisia muotoja samasta asiasta.

### Kemia - Atomeista yhtälöihin

Kemiassa matematiikka saa aineen tanssimaan aivan uudella tavalla. Puhumme atomien ja molekyylien määristä mooleina, ja käytämme stoikiometrian laskuja ymmärtääksemme, kuinka aineet reagoivat keskenään. Stoikiometriset laskut voivat olla kuin keittiössä leipomista - missä on tärkeää tuntea reseptin ainesosien suhteet saadaksemme tarvitsemamme lopputuloksen. Perustutkimuksesta lääkekehitykseen, jokainen kemiallinen yhdiste ja reaktio noudattaa

matemaattisia suhteita, jotka määrittävät mm. lääkkeiden oikeat annostelut ja materiaalien ominaisuudet.

## **Biologia - Elämän matemaattiset mallit**

Elävä luonto on täynnä toistuvia kuvioita ja rakenteita, joita matematiikka auttaa meitä ymmärtämään ja ennustamaan. Biologiassa käytämme matematiikkaa esimerkiksi selvittämään populaatioiden kasvukäyriä ja niiden ekosysteemeihin vaikuttamia tekijöitä. Mendelin perinnöllisyyslaeista DNA:n sekvenssianalyysiin, matematiikka auttaa meitä ymmärtämään, miten elämän ohjekirja toimii. Lisäksi, matematiikka on keskeisessä asemassa epidemiologiassa - tutkimusalalla, joka mallintaa sairauksien leviämistä ja auttaa meitä ennakoimaan ja hallitsemaan tartuntatautien purkauksia.

## **Tiede taulukoihin ja kokeisiin**

Matematiikka ei ole vain numeroita ja yhtälöitä paperilla - se on väline, jonka avulla tiede saadaan käytäntöön. Oli kyseessä sitten raketin lento Marsiin, uuden lääkkeen kehittäminen tai ilmastomuutoksen vaikutusten ennustaminen, tarvitsemme matematiikkaa tieteellisten ongelmien ratkaisemiseen.

Kun opit matematiikkaa, opit kielen, joka avaa oven äärettömien mahdollisuuksien maailmaan. Tieteessä tämä kieli on väline, joka auttaa meitä ymmärtämään luontoa ja keksimään uusia keinoja elämän parantamiseen. Jokainen laskutoimitus, jokainen yhtälö ja jokainen graafi on askel kohti uutta keksintöä, ja sinä voit olla osa tätä upeaa tutkimusmatkaa! Niinpä, aina kun perehdyt matematiikan saloihin, muista, että olet matkalla kohti ymmärrystä, joka muokkaa maailmaa. Mahtavaa matikkaa maailmalla - tiede todella tarttuu taulukoihin!

## **12.4. Taivaalliset taidegalleriat - Symmetriasta sensaatio**

Ajattele hetki taivaan tähtiä tai kaunista perhosen siipeä. Mitä ne kertovat sinulle symmetriasta? Voitko huomata, kuinka luonto käyttää symmetriaa luodakseen hämmästyttäviä ja esteettisiä muotoja? Mutta symmetria ei ole vain luonnon oma taideteos; me ihmiset olemme inspiroituneet tästä loistavasta ilmiöstä luodessamme omaa taidettamme, rakennuksiamme ja jopa matemaattisia teoksiamme. Tässä luvussa sukellamme taiteen ja matematiikan risteykseen, jossa symmetria on pääosassa.

### **Mikä on symmetria?**

Symmetria on järjestystä ja tasapainoa. Se on idean, jolla voimme kuvata asioita, jotka ovat samankaltaisia tai jopa identtisiä, kun niitä katsotaan eri suunnista tai käännösten jälkeen. Voit löytää symmetriaa monesta paikasta: arkkitehtuurista, taiteesta, ja jopa omissa kasvoissasi. Symmetriatyypien ymmärtämiseen käytämme usein termejä, kuten 'kuvioinnit', tai 'kuvio', ja 'tasosymmetria', joihin voimme perehtyä tarkemmin seuraavaksi.

## **Tasosymmetria**

Tasosymmetria ilmenee kahdessa eri muodossa, joita kutsutaan aksiaalisymmetriaksi ja keskussymmetriaksi. Aksiaalisymmetriassa jokin kuviota halkovista linjoista toimii peilinä, jolloin kuviot ovat peilikuvia toisistaan. Keskussymmetriassa taas, kun kohde käännetään 180 astetta keskipisteen ympäri, se näyttää samalta kuin ennen käännöstä.

## **Kuvioinnit ja Mosaiikit**

Kuvionnilla tarkoitetaan toistuvia malleja, joiden avulla voimme luoda tasaisesti kuvioituja pintoja ilman aukkoja tai päällekkäisyyksiä. Esimerkiksi laatan mukaiset kuvioinnit kylpyhuoneessasi ovat tyypillisiä kuvioinnin sovellutuksia, joissa jokainen laatta on aseteltu tasaisesti, muodostaen tasaisen pinnan.

## **Taiteen Tarinoita Symmetriasta**

Renesanssin taiteilijat, kuten Leonardo da Vinci, käyttivät symmetriaa luodakseen visuaalisesti miellyttäviä ja harmonisia teoksia. Da Vincin "Vitruvian Man" on erinomainen esimerkki aksiaalisymmetrian käytöstä piirtämällä ihminen symmetrisesti, kun taas M.C. Escherin graafiset kuvat hämmentävät meitä keskussymmetrian ja toistuvien kuvioinnin avulla.

## **Symmetrian Löytäminen Matematiikasta**

Matematiikassa symmetria on paitsi esteettinen, myös tärkeä työkalu. Symmetrian avulla voimme yksinkertaistaa monimutkaisia ongelmia ja ymmärtää paremmin geometrisia kuvioiden ominaisuuksia. Ota esimerkiksi lumihiutale: se on kuusikulmainen kuvio, jolla on kuusi täydellistä aksiaalisymmetrialinjaa. Tällaisen kuvion matemaattisen analyysin ymmärtäminen vaatii symmetrian periaatteiden tuntemista.

## **Tehtävät**

### **1. Symmetrian Metsästys:**

- Etsi esimerkkejä aksiaalisymmetriasta ja keskussymmetriasta luonnosta tai ympäristöstäsi.

- Keskustelkaa luokassa, miten nämä symmetriat vaikuttavat esineen tai kuvion esteettisyyteen.

## 2. Luo Oma Symmetriataideteos:

- Käytä symmetriaperiaatteita luodaksesi oman kuviointisi, joko käsin tai tietokoneohjelman avulla.
- Analysoi ja esitele luomasi teoksen symmetriatyypit.

## 3. Matemaattinen Lumihiutale:

- Leikkaa kuusikulmainen lumihutale paperista.
- Merkitse siihen kaikki mahdolliset symmetria-akselit, ja keskustele, miten symmetria näkyy kuvioden toistossa.

## Loppuajatus

Matematiikka ja taide eivät ole erillisiä maailmoja, vaan ne kietoutuvat tiiviisti yhteen symmetrian ihmeellisessä taidegalleriassa. Niin kuin taiteilijat ovat vuosisatojen ajan käyttäneet matematiikkaa inspiraationa, voimme mekin löytää luovuutta matemaattisista käsitteistä. Seuraavan kerran, kun pysähdyt ihailemaan kaunista mosaiikkia tai täydellisen symmetristä rakennusta, muista, että olet todistamassa matematiikan ja taiteen välistä harmoniaa.

# 13. Heräte - Hyppää mukaan matikkaan!

Hei nuori matemaatikko! Oletko koskaan ajatellut, että matematiikka voisi olla jännittävää seikkailua, tiivistunnelmaista kilpailua tai oivalluksia täynnä oleva matka tuntemattomiin? Tässä luvussa sukellamme matematiikan kiehtovaan maailmaan monialaisten projektien ja matematiikkakilpailujen kautta.

## Monialaiset projektit - Matematiikka Elämässä

Monialaiset projektit ovat kuin matematiikan maustamia oppitunteja, joissa yhdistetään usean eri aineen tietoja ja taitoja. Tällaisessa projektissa voit päästä soveltamaan matematiikkaa esimerkiksi seuraavissa tilanteissa:

- **Luonnontieteet:** Laskemme, kuinka monta litraa vettä tarvitaan koulun viheralueiden kasteluun viikossa ja mietimme, mistä se vesi saadaan kestäväen kehityksen mukaisesti.

- **Yhteiskuntaoppi:** Tutkimme, kuinka äänestysprosentti vaikuttaa vaalitulokseen ja määrittelemme todennäköisyyslaskentaa käyttäen, mikä puolue voi voittaa seuraavat vaalit.
- **Liikunta:** Muodostamme sini- ja kosinikäyriä juoksijoiden radan pituuden ja heidän juoksemansa ajan perusteella.
- **Kuvataide:** Suunnittelemme ja toteutamme geometrisia muotoja tai symmetriaa sisältäviä taideteoksia, hyödyntäen oppimaamme pinta-alan ja tilavuuden laskentaa.

Nämä projektit eivät ainoastaan anna sinulle mahdollisuutta nähdä, kuinka matematiikka ilmenee ympärillämme joka päivä, vaan ne myös auttavat kehittämään ryhmätyötaitoja ja soveltavaa ajattelua.

## Matematiikkakilpailut - Mittaa ja Kasvata Matemaattista Älyäsi

Matematiikkakilpailut ovat kuin aivovoimistelua: ne haastavat sinut älyllisesti ja tarjoavat tilaisuuden mitata matemaattista osaamistasi muiden samanikäisten kanssa niin kotimaassa kuin kansainvälisestikin.

- **Kansalliset Kilpailut:** Suomessa järjestetään monia alueellisia matematiikkakilpailuita, joissa voit haastaa itsesi ja näyttää matemaattiset taitosi. Muista, että taitoa ei mitata vain oikeilla vastauksilla, vaan myös luovuudella ja ongelmanratkaisukyvyllä.
- **Kansainväliset Kilpailut:** Kansainvälisissä kilpailuissa, kuten kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa, saat mahdollisuuden tutustua eri kulttuureista tuleviin oppilaisiin ja laajentaa näkemyksiäsi matematiikan käytöstä maailmalla. Lisäksi se on mahdollisuus edustaa Suomea ja kantaa ylpeästi Suomenlippua sydämessäsi.
- **Online-haasteet ja Pelit:** Nykypäivänä internet tarjoaa valtavan määrän matemaattisia pelejä ja haasteita, joista voit löytää paljon iloa ja oppimisen nautintoa. Nämä pelit voivat olla loistava tapa teroittaa loogista ajatteluasi ja nopeuttasi.

## Kuinka osallistua?

1. **Tunne Innostuksesi:** Mieti, mikä matematiikassa sinua eniten kiehtoo. Onko se numeroiden kauneus, logiikan selkeys vai ongelmien ratkaisemisen tyydytys?
2. **Hae Tietoa:** Kysy opettajiltasi, etsi tietoa internetistä tai liity matematiikkakerhoon, jotta löydät kilpailuja ja projekteja, jotka sopivat sinulle.

3. **Kokeile ja Harjoittele:** Ota rohkeasti osaa eri kilpailuihin ja projekteihin. Harjoittelu kehittää, ja matematiikan maailma laajenee jokaisella kerralla.
4. **Nauti Matkasta:** Muista, että matematiikka on matka täynnä seikkailuja. Jokainen virhe on oppimistilaisuus ja jokainen ongelma avaa oven uuteen maailmaan.

Hyppää nyt mukaan matikkaan ja anna numeroiden, yhtälöiden ja kuvioiden viedä sinut matkalle läpi monialaisten projektien ja matematiikkakilpailujen – se voi olla sinun lippusi tulevaisuuden äärimmäisen jännittäviin paikkoihin! □

Onnea ja nautintoa matemaattisille seikkailuillesi!

## 13.1. Projekteista potkua - Yhteisölliset ytyt

Tervetuloa matkaan mukaan, matematiikan maailman löytöretkille! Tämän luvun aikana opit, miten matematiikka yhdistyy muihin oppiaineisiin ja kuinka voit hyödyntää tietojasi monialaisissa projekteissa. Projektityö on mainio tapa syventää oppimaasi ja soveltaa sitä käytäntöön. Olet ehkä jo huomannutkin, että matematiikka ei ole vain kaavojen pyörittelyä paperilla – se on ympärillämme jatkuvasti ja tärkeä osa arkipäiväämme. Projekteissa pääset testaamaan omaa luovuuttasi ja ryhmätyötaitojasi. Joten lähdetään liikkeelle ja tuodaan matematiikka osaksi suurempaa kokonaisuutta!

### Mikä on monialainen projekti?

Monialaisessa projektissa pääset tutkimaan teemoja, jotka eivät rajoitu vain yhteen oppiaineeseen, vaan yhdistävät monia eri aineita. Esimerkiksi, voidaan yhdistää matematiikkaa, biologiaa ja liikuntaa projektissa, jossa lasketaan lentopallon lentoratoja, tutkitaan pelaajien fysiologiaa ja vieläpä mitataan niiden vaikutuksia pelaajien suoritukseen. Näissä projekteissa opit yhteistyötaitoja, tutkimusmenetelmiä ja kriittistä ajattelua – ihan kuin oikeassakin työelämässä!

### Projektin suunnittelu

#### 1. Aiheen valinta

Valitse projektillesi aihe, joka sytyttää innostuksen koko ryhmässäsi. Aiheen tulee mahdollistaa matematiikan soveltaminen ja yhdistäminen muihin aineisiin. Olkaa luovia!

#### 2. Tavoitteet



Määritelkää selvät tavoitteet: Mitä haluatte saavuttaa? Mitä opittavaa tai ymmärrettävää projektinne tarjoaa? Tavoitteiden tulisi olla realistisia ja saavutettavia määräajassa.

### **3. Suunnitelma**

Laatikaa työsuunnitelma, joka sisältää tehtävien jakamisen, aikataulut ja tarvittavat resurssit. Muistakaa myös varasuunnitelma, jos asiat eivät mene odotetusti.

### **4. Tutkimus ja tiedonhankinta**

Käyttäkää monipuolisesti eri lähteitä ja muistakaa arvioida lähteiden luotettavuutta. Muistakaa myös, että matematiikka on loistava työkalu tiedon analysointiin ja tulkintaan.

## **Projektin toteutus**

### **1. Roolien jako**

Jokainen tiimin jäsen ottaa vastuulleen tiettyjä tehtäviä. Muistakaa sallia jokaisen osallistua ja tuoda esiin omia vahvuuksiaan.

### **2. Dokumentointi**

Pitäkää kirjaa edistymisestänne. Kuvatkaa, kirjoittakaa tai piirtäkää muistiinpanoja projektin eri vaiheista. Tämä auttaa loppuraportin kirjoittamisessa ja arvioinnissa.

### **3. Matematiikan käyttö**

Osoittakaa, miten matematiikkaa sovelletaan projektissanne. Kaavioita, taulukoita ja graafeja voi käyttää tiedon visualisointiin ja tulosten esittelyyn.

### **4. Kommunikointi ja esitys**

Valmistautukaa esittelemään projektinne. Miettikää, kuka puhuu mistäkin osiosta ja kuinka tietoa esitetään yleisölle ymmärrettävästi.

## **Arviointi ja palaute**

Kun projekti on valmis, on aika arvioida työnne. Mitä opitte ja saavutitte? Mitä voisitte tehdä toisin seuraavalla kerralla? Arviointi ei ole vain opettajananne tehtävä – itsearviointi ja vertaisarviointi ovat myös erittäin tärkeitä.

## **Projekti-ideoita**

1. **Ilmastonmuutosmatikointi:** Laske hiilijalanjälkesi matematiikan avulla ja ehdota parannuksia.
2. **Historian numerot:** Tutki matematiikan historiaa ja sen merkitystä eri kulttuureissa.
3. **Tiedemessut:** Järjestä tiedenäyttely, jossa matematiikan ilmiöitä esitellään käytännön kokeiden kautta.
4. **Koodaustarinat:** Luo tarina tai peli, joka opettaa matematiikan perusperiaatteita ohjelmointia käyttäen.

Kun olet valmis sukeltamaan projekteihin, pidä mielessä, että matematiikka ei ole ainoastaan laskutoimitusten summa, vaan tapa ajatella maailmaa ja ratkaista ongelmia. Ottakaa siis rohkeasti askelia matematiikan ulkopuolelle ja löytäkää sen yhteyksiä ympärillänne!

## 13.2. Kilvoittelu kannustaa - Matematiikan mestarit

Tervetuloa tutkimaan matematiikan kilpailujen kiehtovaa maailmaa! Tiesitkö, että kilpailut voivat olla yhtä jännittäviä ja palkitsevia kuin urheilussa – ja kyse on usein paljon enemmänstä kuin vain voittamisesta?

### Miksi osallistua matematiikan kilpailuihin?

Matematiikan kilpailut tarjoavat loistavia tilaisuuksia harjoittaa loogista päättelykykyä, oppia uusia matematiikan konsepteja ja ratkaista ongelmia luovasti. Nämä taidot ovat kuin superpolttoainetta aivoillesi ja ne hyödyttävät sinua koko elämäsi ajan. Kilpailuhenki innostaa sinua ylittämään itsesi ja olemaan paras versio itsestäsi.

### Erilaisia matematiikan kilpailuja

Erilaiset matematiikan kilpailut kutsuvat sinut mukaan seikkailuihin numeroilla ja kaavoilla. Olipa kyse sitten kansallisista matematiikkaviikoista tai kansainvälisistä olympialaisista, jokaisella kilpailulla on oma ainutlaatuinen tyylinsä ja haasteensa.

### Koulutaso

Useimmiten matematiikan kilvoittelu alkaa koulun sisäisistä turnauksista. Nämä ovat mainioita tilaisuuksia harjoitella kilpailuedellytyksiä ja kokeilla, miltä tuntuu ratkoa haastavia tehtäviä aikapaineen alla.

### Alueelliset ja kansalliset kilpailut

Kun olet valmis laajentamaan näköalojasi, voit osallistua alueellisiin tai kansallisiin kilpailuihin. Näissä saatat kohdata laajemman kirjon ongelmia ja tavata muita matematiikan harrastajia. Suomessa esimerkiksi matematiikan olympiavalmennus johdattaa sinut kohti kansainvälisiä haasteita.

## **Kansainväliset kilpailut**

Kansainväliset matematiikan kilpailut, kuten kansainvälinen matematiikkaolympiadi (IMO), ovat huipputason koitos, jossa nuoret matemaatikot eri maista mittelevät taidoistaan. Nämä kilpailut ovat unohtumattomia kokemuksia, joissa pääset vertailemaan osaamistasi maailman parhaiden kanssa ja laajentamaan matemaattista näköpiiriäsi.

## **Valmistautuminen kilpailuun**

### **Perusteet kuntoon**

Vahvista matematiikan perusteita. Kaikki huippusuoritukset rakentuvat lujalle perustalle. Varmistu, että ymmärrät kaavat, teorialat ja periaatteet, joiden varassa matematiikan maailma lepää.

### **Harjoittelua ja ongelmanratkaisua**

Ratkaise niin monta erilaista ongelmaa kuin mahdollista. Mitä enemmän harjoittelet, sitä paremmin kykenet kohtaamaan uusia ja odottamattomia pulmia. Hyödynnä vanhoja kilpailutehtäviä valmennuksessasi.

### **Opettele uusia strategioita**

Tutustu erilaisiin ratkaisutaktikoihin ja -menetelmiin. Eri kilpailuissa voi olla hyötyä erilaisista lähestymistavoista. Joskus epätyypillinen oivallus tai poikkeuksellinen metodi voi olla avain huimaan läpimurtoon.

### **Aikataulutus ja hallinta**

Opi hallitsemaan aikataulua. Monissa kilpailuissa joudut ratkomaan tehtäviä tietyn ajan puitteissa, joten tehokas työskentely ja oikeiden strategioiden valinta on tärkeää.

### **Asenne ja motivaatio**

Pidä yllä utelias ja avoin mieli. Ole kärsivällinen itseäsi kohtaan ja muista, että jokainen virhe on tilaisuus oppia.

## Kilpailuhenki ja yhteisö

Vaikka matematiikan kilvoittelu voi tuntua yksilöurheilulta, se luo verratonta yhteisöllisyyttä. Voit löytää ystäviä, jotka jakavat samanlaisen intohimon lukuja kohtaan ja jotka voivat tukea sekä haastaa sinua.

Matematiikan kilpailut ovat seikkailuja, joissa saat mahdollisuuden loistaa ja näyttää matemaattiset kykysi. Ne ovat myös tilaisuuksia kasvaa ja kehittyä – ei vain laskijana, vaan myös ajattelijana ja ongelmanratkaisijana.

Muista: Jokainen matematiikan kilpailija lähtee liikkeelle omalta lähtöviivaltaan. Se, miten pitkälle pääset, on sinusta itsestäsi kiinni. Tartu haasteisiin, ole rohkea ja ennen kaikkea, pidä hauskaa matematiikan parissa!

## 13.3. Haastavat hobit - Luovuuden lähde

Tervetuloa seikkailuun vailla vertaa! Tänään et tarvitse kirveitä tai keihäitä, sillä aseenasasi toimii mahtavin voima mitä on olemassa – omat aivonystyräsi! Tämän luvun ytimekkäät matemaattiset haasteet avaavat salaiset portit luovuuden valtakuntaan – valmistaudu siis kohtaamaan "Haastavat hobit"!

### Mikä tekee ongelmasta haastavan hobin?

Kun matikassa puhutaan ongelmista, moni suorastaan näkee jo nyrjähtäneitä numeroita ja kinkkisiä kaavoja. Mutta nyt puhumme erilaisista ongelmista – niistä, jotka saavat sinut innostumaan, kiehdotuksi ja ihmettelemään. Luovat problemanratkaisutehtävät eivät aina seuraa totuttua kaavaa, vaan ne vaativat kiperää pohdintaa, usein monelta eri kantilta.

### Muutama vinkki älynystyröidesi herättelyyn:

1. **Kokeile erilaisia ratkaisutapoja.** Jos ensimmäinen oivallus ei vie maaliin, älä lannistu! Jatka kokeilemista.
2. **Etsi yhteyksiä olemassa olevaan tietoon.** Usein vastaus piilee jo oppimassasi, mutta sen yhdistäminen uuteen ongelmaan voi olla haaste.
3. **Älä pelkää kysyä.** Kysymällä voit avartaa näkökulmaasi ja saada arvokkaita vinkkejä.

### Tehtävä 1: Jalanjäljet Järjestykseen

Keiju ja peikko kävelevät lumisella polulla. Joka toinen jalanjälki on keijun, joka toinen peikon. Voiko peikko kulkea niin, että sen jalanjäljet ovat aina samassa linjassa suoraan polun varrella, mutta keijun jalanjäljet tekevät siksakkia? Piirrä polku ja merkitse jalanjäljet selvittääksesi tilanteen.

Tehtävä kannustaa visualisoimaan ongelmaa ja hahmottamaan sen konkreettisesti.

## Tehtävä 2: Taikaneliö

Luo 3x3-ruudukko, johon täytät numerot 1-9 niin, että jokaisen rivin, sarakkeen ja päädiagonaalien numeroiden summa on sama. Kuinka monta erilaista taikaneliötä voit muodostaa? Onko olemassa jotain kaavaa, joka pitää paikkansa kaikissa taikaneliöissä?

Tässä tehtävässä harjoitellaan systemaattista kokeilua ja havaitaan symmetriat sekä matemaattiset rakennekaavat.

## Yhteenveto

"Haastavat hobit" on joukko ongelmia, joiden ratkaisu ei ehkä ole ilmeinen. Ne vaativat sinua kurkistamaan laatikon ulkopuolelle, löytämään luovia ratkaisuja ja kehittämään omaa ajatteluasi.

Kun olet valmis rohkeasti kohtaamaan nämä ongelmat, huomaat pian, miten palkitsevaa on ratkaista probleemoja, jotka kutsuvat liikkeelle sisimmässäsi piilevän Sherlock Holmesin. Oppitunnin päätteeksi voit olla ylpeä saavutuksistasi, sillä olet ottanut askeleen kohti luovan problemanratkaisun mestariksi tulemistasi.

## 13.4. Yhdessä ytimeen - Tiimityön temmellyskenttä

Hei nuoret matematiikan tutkimusmatkailijat! Oletteko joskus törmänneet ongelmiin tai pulmiin, jotka tuntuvat liian suurilta tai monimutkaisilta ratkottavaksi yksin? Ei hätää! Aivan kuten urheilussa, musiikissa tai videopelien maailmassa, myös matematiikassa yhteistyö voi olla avain menestykseen.

## Yhteistyön voimaa

Tiimityö tarkoittaa yhdessä ajattelemista, keskustelemista ja ongelmanratkaisua. Kun jaat ajatuksiasi ja kuuntelet muiden ideoita, voit oppia uusia ratkaisutekniikoita ja erilaisia tapoja lähestyä ongelmia. Tämä luku on omistettu tiimityön taidoille matematiikassa, ja me tulemme näkemään, kuinka yhdessä voimme löytää tiemme matemaattisessa maailmassa.

## Miksi tiimityö toimii?

1. **Eri näkökulmat:** Jokaisella on oma ainutlaatuinen tapansa ajatella ja lähestyä ongelmia. Tiimityössä nämä eri näkökulmat voivat kohdata, luoden uusia ideoita ja oivalluksia.
2. **Tukiverkosto:** Työskennellessäsi ryhmässä, saat tukea muilta. Jos jokin askarruttaa, voit kysyä neuvoa tiimikavereiltasi.
3. **Motivaatio:** Kun näet muiden ponnistelevan ja nauttivan matematiikasta, se voi rohkaista sinua ja lisätä omaa motivaatiotasi.
4. **Jaettu vastuu:** Tiimissä et ole yksin vastuussa ongelmien ratkaisusta. Jokainen voi kantaa kortensa kekoon omilla vahvuuksillaan.

## Tiimitaitojen hiominen

Jotta tiimityö sujuisi, on tärkeää harjoitella taitoja, jotka auttavat yhteistyössä:

- **Kommunikaatio:** Selkeä ja avoin keskustelu auttaa tiimiä ymmärtämään jokaisen ajatukset ja löytämään parhaat ratkaisut.
- **Kuuntelu:** On yhtä tärkeää kuunnella muiden ideoita kuin jakaa omiasi.
- **Konfliktien ratkaisu:** Joskus tiimissä on erimielisyyksiä. Tärkeää on löytää rakentavia tapoja ratkaista nämä tilanteet.
- **Luottamus:** Usko tiimikavereihisi ja heidän taitoihinsa, ja anna heidän myös luottaa sinuun.

## Tiimitehtäviä matematiikassa

Kokeilkaa seuraavia harjoituksia tiiminä:

1. Ongelman purkaminen osiin:
  - Valitkaa matemaattinen ongelma ja jakaantukaa pienempiin ryhmiin.
  - Kukin ryhmä keskittyy ratkaisemaan yhtä osa-aluetta.
  - Kokoontukaa yhteen ja yhdistäkää ratkaisunne.
2. Estafettiratkaisu:
  - Ottakaa tehtävä, jossa on useita vaiheita.

- Ensimmäinen henkilö ratkaisee ensimmäisen vaiheen ja siirtää sen seuraavalle.
- Jokainen osallistuu, kunnes ongelma on ratkaistu.

### 3. Ideamyrsky:

- Heittäkää ilmaan erilaisia tapoja lähestyä ongelmaa, kirjatkaa kaikki ylös.
- Puhukaa niistä ja valitkaa yhdessä mitä strategiaa tai strategioita kokeillette.

### 4. Roolipeli:

- Jokainen tiimin jäsen saa tietyn "roolin" – esimerkiksi yksi on "kysyjä", toinen "vastustaja", kolmas "optimisti", neljäs "ratkaisija" ja niin edelleen.
- Käyttäkää näitä rooleja hyväksi lähestyessänne ja ratkaistessanne ongelmaa.

### 5. Vertaisarviointi:

- Kun yksi ryhmän jäsenistä on ratkaissut tehtävän, muut arvioivat ratkaisun ja etsivät mahdollisia virheitä tai parannettavia kohtia.
- Vaihtakaa rooleja niin, että kaikki saavat palautetta ja oppivat kriittistä ajattelua.

## **Vinkit menestymiseen tiimityössä**

- Älkää pelätkö esittää "tyhmiä" kysymyksiä – usein ne ovat kaikkein tärkeimpiä!
- Kunnioittakaa jokaista tiimin jäsentä – kaikkien panos on tärkeä.

# **Osa VII: Työkalujen temppeli**

Matemaattisessa seikkailussa ei edetä ainoastaan laskukaavojen ja teoreemojen avulla. Jokainen ongelma on kuin salaperäinen huone Työkalujen temppelissä, ja juuri oikean välineen valinta auttaa sinua ratkomaan mysteerit ja paljastamaan huoneen salaisuudet. Tässä luvussa sukellamme erilaisten matemaattisten työkalujen ja resurssien maailmaan, jotka auttavat sinua taitavasti ja tehokkaasti navigoimaan numeroiden ja muotojen salakäytävissä. Valmistaudu – on aika avata temppelin portit!

## **Laskimet**

Kulkeeko taskussasi digitaalinen velho, joka hallitsee numeroiden taian? Kyllä, puhumme taskulaskimesta. Tämä pieni laite on täynnä voimaa, joka voi tehdä laskutoimitukset salamannopeasti. Olipa kysymyksessä yksinkertainen yhteenlasku tai monimutkaiset

trigonometriset funktiot, laskin on siellä sinua varten. Mutta muista, oikean vastauksen löytäminen ei ole pelkästään laskimen napin painallusta – sinun täytyy myös ymmärtää, mitä on laskemassa ja miksi.

## **Tietokoneohjelmat ja sovellukset**

Nykyajan matemaattiset shamaanit käyttävät myös tietokoneita ja älylaitteita. Erilaiset ohjelmistot, kuten GeoGebra, Desmos ja Microsoft Math Solver, tarjoavat interaktiivisia tapoja tutkia matemaattisia käsitteitä ja ongelmia. Ne eivät vain ratkaise yhtälöitä, vaan näyttävät myös graafeja ja mahdollistavat monimutkaisten matemaattisten mallien visualisoinnin. Tällöin voit nähdä matematiikan elävänä ja värikkäänä, ei vain kuivina numerojoukkoina.

## **Kumppanit ja Ryhmätyö**

Muista, että Työkalujen temppelissä et ole koskaan yksin. Ryhmätyö ja keskustelu kumppaneiden kanssa voivat tuoda uusia näkökulmia ongelmien ratkaisuun. Toisen henkilön ajatukset voivat tarjota juuri sen avaimen, jota tarvitset matemaattisen lukon avaamiseen. Ole siis avoin ja jaa ajatuksiasi, samalla kun kuuntelet ja arvostat muiden ideoita.

## **Kirjat ja Opetusmateriaalit**

Vaikka elämmekin digitaalista aikakautta, älkäämme unohtako perinteisiä oppikirjoja ja opetusmateriaaleja. Nämä viisauden aarteistot ovat täynnä yksityiskohtaisia selityksiä, esimerkkejä ja tehtäviä, jotka on suunniteltu vahvistamaan matemaattista osaamistasi. Kun eteesi tulee haasteellinen tehtävä, kirja voi tarjota perusteellisen esityksen aiheesta ja auttaa sinua ymmärtämään ongelman ytimen.

## **YouTube ja Verkkokurssit**

Jos luet jotain mutta et ihan ymmärrä sitä, älä huoli! On olemassa paljon YouTube-kanavia ja verkkokursseja, jotka tarjoavat selkeitä ja ymmärrettäviä selityksiä monenlaisille matemaattisille aiheille. Toiset oppivat parhaiten kuunnellessaan ja katsellessaan, joten video-opetus voi olla loistava lisä oppimismateriaalisi joukkoon.

## **Itsearviointi ja Palaute**

Kun saavutat temppelin loppuun ja koet olevasi valmis, on aika testata taitojasi. Itsearviointitehtävät ja palaute ovat tärkeitä, sillä ne antavat rehellisen kuvan siitä, mitä osaat ja missä vielä tarvitset harjoitusta. Eri resurssit, kuten koulun oppimisalustat tai sähköiset oppimispäiväkirjat, voivat auttaa sinua seuraamaan kehittymistäsi ja asettamaan uusia tavoitteita.



Nyt, kun olet saanut esimakua kaikista niistä työkaluista, jotka voivat auttaa sinua matematiikan opiskelussa, on aika lähteä omalle tutkimusretkellesi Työkalujen temppeleihin. Käytä rohkeasti erilaisia resursseja ja löydä ne, jotka sopivat parhaiten sinun matemaattisiin seikkailuihisi. Ja muista, vaikka oikean työkalun valitseminen voi olla avain mestariksi tulemiseen, suurin työkalu on aina ollut sinussa – utelias ja avoin mieli, valmiina oppimaan ja ratkomaan ongelmia. Työkalut ovat vain vahvistusta tälle voimalle. Seikkaile viisaasti!

## 14. Matematiikan modernit munkit

Tervetuloa matemaattisten modernien munkkien työpajaan! Aivan kuten keskiajan munkit kopioivat ja säilöivät tärkeitä tekstejä, nykypäivän matematiikan harrastajat ja ammattilaiset kehittävät ja käyttävät työkaluja, jotka auttavat ratkomaan monimutkaisia ongelmia ja jakamaan tietoa tehokkaammin.

### Laskimet - Perusmatemaattisten arvoitusten ratkojat

Laskimet ovat ehkä tunnetuimpia matematiikan työkaluja. Ne ulottuvat yksinkertaisista plus-, miinus-, kerto- ja jakolaskuja suorittavista taskulaskimista aina monimutkaisiin graafisiin laskimiin, jotka pystyvät piirtämään funktioiden kuvaajia ja ratkomaan yhtälöryhmiä. Laskin säästää aikaa ja auttaa sinua suorittamaan laskutoimituksia virheettömästi, antaen sinun keskittyä matemaattisiin konsepteihin ja päättelyketjuihin sen sijaan, että juuttuisit laskuvirheiden suohon.

### Tietokoneohjelmat ja sovellukset - Digitaaliset matemaattiset laboratoriot

Matemaattinen ohjelmisto, kuten GeoGebra, Desmos ja Wolfram Alpha, ovat kuin digitaalisia laboratorioita, joissa voit kokeilla erilaisia matemaattisia ideoita. Ne mahdollistavat yhtälöiden visuaalisen tarkastelun, symbolisen algebraisen laskennan ja jopa tilastollisten aineistojen käsittelyn. Nämä ohjelmat voivat auttaa sinua ymmärtämään matemaattisia käsitteitä syvällisemmin ja nopeasti selvittämään, kuinka erilaiset muuttujat vaikuttavat esimerkiksi funktion muotoon.

### Ohjelmointi - Luovuuden ja logiikan yhdistäminen

Ohjelmointi on syvälinen työkalu matematiikan tutkimisessa ja hyödyntämisessä. Käyttämällä kieliä kuten Python, Scratch tai JavaScript, voit kirjoittaa ohjelmia, joilla teet laskutoimituksia, piirrät geometrisia kuvioita, simuloit satunnaisia tapahtumia tai jopa rakennat omia pelejä. Ohjelmointi opettaa ongelmanratkaisua, algoritmista ajattelua ja logiikkaa – kaikki tärkeitä taitoja, jotka ovat hyödyllisiä paitsi matematiikassa, myös monilla muilla elämänaloilla.

## **Robottiikka ja sensorit - Havainnointia ja vuorovaikutusta**

Matemaattiset mallit eivät ole vain teoreettisia; ne voivat ohjata robotteja ja analysoida sensoridatan tuottamaa tietoa. Koulun robotiikkakerhossa saatat ohjelmoida robottia liikkumaan tietyllä kuvioilla tai reagoimaan ympäristöönsä. Tämä vaatii matematiikkaa, sillä sinun tarvitsee laskea välimatkoja, kulmia ja nopeuksia. Sensorit voivat kerätä dataa ympäristöstä, ja voit käyttää tilastotiedettä ja analytiikkaa tämän datan ymmärtämiseksi ja hyödyntämiseksi.

## **Pilvipalvelut ja yhteistyö - Ideoiden jakaminen reaaliajassa**

Tietotekniikka mahdollistaa yhteistyön ajasta ja paikasta riippumatta. Voit jakaa ongelmia, projekteja ja ratkaisuja reaaliajassa opettajien ja muiden oppilaiden kanssa käyttämällä esimerkiksi Google Docsia tai Microsoft OneNotea. Tämä kollektiivinen tiedonrakennus tuo uuden näkökulman matematiikan oppimiseen: yhdessä voitte arvioida erilaisia lähestymistapoja, keskustella haasteista ja kehittää älykkäitä ratkaisuja.

## **Pelit ja simulaatiot - Hauskaa ja opettavaista uppoutumista**

Matematiikka ei ole pelkästään vakavaa pohdiskelua – se voi olla myös hauskanpitoa! Erilaiset matemaattiset pelit ja simulaatiot antavat sinulle mahdollisuuden kokea ja tutkia matemaattisia konsepteja interaktiivisesti. Kuten lautapeleissä, strategioiden ja todennäköisyyksien ymmärtäminen voi johtaa menestykseen. Digitaalisessa maailmassa simulaatiot, kuten virtuaalitodellisuuden matemaattiset maailmat, vievät oppimisen uudelle tasolle ja tarjoavat ainutlaatuisen tavan kokea matematiikkaa.

## **3D-tulostus - Ideasta fysikaaliseen muotoon**

Todellinen tuotanto voi alkaa matematiikalla, kun käytät tietokoneohjelmia suunnitellaksesi ja toteuttaaksesi kolmiulotteisia esineitä. 3D-tulostuksessa voit muuttaa geometrisia kuvioita ja malleja konkreettisiksi esineiksi. Tämä prosessi auttaa sinua ymmärtämään tilavuuden, pinta-alan ja mittasuhteiden käsitteitä, sillä voit nähdä ja koskettaa matemaattisia malleja todellisessa maailmassa.

Matematiikan modernit munkit eivät siis ole vain syventyneitä vanhoihin kirjoihin. He käyttävät kaikkein nykyaikaisimpia työkaluja ja teknologioita tutkiakseen, keskustellakseen ja hyödyntääkseen matematiikkaa luovilla ja innovatiivisilla tavoilla. Sinäkin voit liittyä tähän seikkailuun ja tutkia matematiikan maailmaa kaikilla näillä työkaluilla, jotka odottavat sinua!

## **14.1. Laskentopyhäkkö - Laskimen lojaalisuus**

Tervetuloa matematiikan maailmaan, jossa luvut ja kaavat saavat elämän! Tässä luvussa tutustumme modernin matematiikan välttämättömään kumppaniin – laskimeen. Laskin ei ole pelkkä kylmä kone, vaan lojaali ystävä matemaattisten seikkailujen tiellä. Mutta kuten kaikissa suhteissa, myös sinun ja laskimesi välillä on tärkeää ymmärtää toisianne. Annetaanpa siis laskimelle sen ansaitsema kunnioitus ja opetellaan, kuinka syötämme siihen kaavoja oikein.

## Laskimen valinta ja perustoiminnot

Ennen kuin aloitat kaavojen syöttämisen, sinun tulee varmistaa, että käytössäsi on oikeanlainen laskin. Laskimia on monenlaisia, peruslaskimista monimutkaisiin graafisiin laskimiin. Koulussa me usein käytämme tieteislaskimia tai graafisia laskimia, ja niiden ominaisuudet mahdollistavat monimutkaistenkin kaavojen laskemisen.

Perustoiminnoilla tarkoitamme yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Sinun on tärkeää opetella käyttämään laskinta tähän peruslaskentaan sujuvasti, koska nämä ovat rakennuspalikoita monimutkaisemmillekin laskutoimituksille.

## Kaavojen syöttäminen laskimeen

Kaavojen syöttäminen laskimeen on kuin kielen opettelua. Jokaisella laskinmallilla on oma "kielensä", jolla se ymmärtää, mitä haluat sen tekevän. Ensimmäinen askel onkin laskimesi ohjekirjan lukeminen - kyllä, sen tylsän näköisen, usein ohitetun kirjasen, joka kertoo sinulle kaikki laskimesi salaisuudet.

Muista nämä perussäännöt, kun syötät kaavoja laskimeen:

1. **Järjestys on tärkeä:** Laskimet noudattavat matemaattisten toimintojen standardijärjestystä. Varmista, että syötät luvut ja operaattorit (plus, miinus, kerto, jako) oikeassa järjestyksessä.
2. **Sulut ovat ystäviäsi:** Kun käytät monimutkaisempia kaavoja, käytä sulkuja selventämään laskujärjestystä. Laskimet käsittelevät laskutoimituksia sulkeiden sisältä ulospäin.
3. **Muuttujat ja funktiot:** Opi, kuinka laskimesi käsittelee muuttujia (esimerkiksi  $x$  ja  $y$ ) ja funktioita (kuten  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ). Näiden syöttäminen oikein on avain monimutkaisempien ongelmien ratkaisemiseen.
4. **Kokeile ja erehdy:** Harjoittelu tekee mestarin. Kokeile erilaisia kaavoja ja näe, kuinka laskin reagoi. Jos tulos ei ole odotettu, tarkista kaavan syöttö ja yritä uudelleen.

5. **Muistitoiminto:** Monet laskimet antavat sinun tallentaa laskelmia tai jopa kokonaisia kaavoja myöhempää käyttöä varten. Opi, kuinka tämä toimii omassa laskimessasi.

### Harjoitus: Ympyrän pinta-ala ja ympäryys

Katsotaanpa, kuinka voimme syöttää kaavan ympyrän pinta-alan ( $A$ ) ja ympäryksen ( $C$ ) laskemiseksi laskimeen. Käytämme kaavoja  $A = \pi r^2$  ja  $C = 2\pi r$ , missä  $r$  on ympyrän säde.

1. Aloita selvittämällä ympyrän säde, joka voi olla esimerkiksi 5 cm.
2. Avaa laskin ja varmista, että olet oikeassa tilassa (esimerkiksi radiaanit vai asteet ympäryksen laskentaan).
3. Syötä ensin pinta-alan kaava: kertaa-painike ( $\times$ ), pi (useimmiten löytyy  $\pi$ -painikkeesta tai SHIFT-toiminnon takaa), säde, ylösnuoli ( $\wedge$ ) tai neliöpainike ( $x^2$ ), ja lopuksi luku 2.
4. Paina yhtä suuruuden -painiketta ( $=$ ) nähdäksesi tuloksen.
5. Syötä seuraavaksi ympäryksen kaava: numero 2, kertaa-painike, pi, kertaa-painike, ja lopuksi säteen arvo.
6. Paina jälleen yhtä suuruuden -painiketta saadaksesi ympäryksen tuloksen.

### Laskenta on yhteistyötä

Muista, että vaikka laskin onkin työkalu, jonka kanssa yhteistyö voi avata matematiikan saloja, todellinen ymmärrys syntyy omasta päästäsi. Käytä laskinta apuna, mutta pyri aina ensin ymmärtämään, mitä olet laskemassa ja miksi. Laskin on lojaali ystävä, mutta vain sinä olet matemaattisten arvoitusten mestari!

Nyt kun olet ystäväystynyt laskimesi kanssa, on aika lähteä luomaan ja tutkimaan matemaattisia maailmoja yhdessä. Tartu laskimeesi ja luo uusia ratkaisuja!

## 14.2. Digitaaliset dominoijat - Tietokonetyökalujen työpaja

Kun keksit kynän ja paperin avulla ratkaisuja matemaattisiin pähkinöihin, koet varmasti usein, että matematiikka on sekä kiehtovaa että välillä hankalaa. Mutta mitä tapahtuu, kun tuomme tietokoneet osaksi matematiikan opiskeluamme? Maailma avartuu, ja pääsemme osaksi digitaalisten työkalujen vallankumousta! Matematiikka ja tietokoneet sopivat yhteen kuin sudoku ja numerot. Tässä luvussa sukellamme tietokonepohjaisten matemaattisten ohjelmien maailmaan ja tutustumme, miten ne voivat muuttaa tapaamme oppia, harjoitella ja soveltaa matematiikkaa.

## Mikä tekee tietokonepohjaisista työkaluista erinomaisia?

Tietokoneet käsittelevät suuria määriä tietoa salamannopeasti ja virheettömästi. Ne eivät unohda, väsy tai teekään virheitä—kunhan ohjelmisto on suunniteltu ja ohjelmoitu oikein. Digitaalisten matemaattisten ohjelmien kautta voimme:

- Ratkaista monimutkaisia laskuja muutamassa sekunnissa
- Piirtää kuvaajia, jotka auttavat ymmärtämään funktioiden ominaisuuksia
- Testata erilaisia hypoteeseja ja nähdä tulokset välittömästi
- Harjoitella erilaisia matemaattisia taitoja hausalla ja interaktiivisella tavalla
- Käyttää matemaattista ohjelmointia ratkaistaksemme ongelmia luovilla tavoilla

## Suosittut tietokonepohjaiset matemaattiset ohjelmat

- **GeoGebra:** Monipuolinen ohjelma, joka yhdistää geometrian, algebran ja analyysin. Voit tutkia funktioita, piirtää kuvaajia, konstruoida geometrisia kuvioita ja paljon muuta.
- **Desmos:** Nopea ja tehokas graafinen laskin, joka toimii suoraan verkkoselaimessasi. Loistava työkalu kuvaajien tutkimiseen ja yhtälöiden visualisointiin.
- **Mathway tai Symbolab:** Sovellukset, jotka tarjoavat askel askeleelta -ohjeita matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen monilla eri matematiikan osa-alueilla.
- **Scratch:** Ohjelmointialusta, joka opettaa loogista päättelyä ja ongelmanratkaisua visuaalisen ohjelmoinnin avulla. Matemaattiset konseptit tulevat osaksi tarinoita ja pelejä, joita itse suunnittelet ja ohjelmoit.
- **Python tai R:** Korkeamman tason ohjelmointikielet, jotka ovat suosittuja tieteen, tekniikan, matematiikan ja tilastotieteen parissa. Näillä kielillä voit kirjoittaa koodia, joka ratkaisee monimutkaisia matemaattisia ongelmia ja käsittelee suuria datamääriä.

## Miten aloittaa?

Ensimmäinen askel on valita sopiva työkalu ja perehtyä sen käyttöön. Aloita tutustumalla ohjelman perusteisiin - katso ohjevideoita, lue käyttöoppaita tai kysy neuvoa opettajaltasi. Monissa online-ohjelmissa on myös valmiita oppitunteja ja harjoituksia, jotka on suunniteltu erityisesti nuorille matemaatikoille.

## Harjoitus - Tee ja tutki itse

Luo oma kuvaaja GeoGebrassa tai Desmosissa seuraaville funktioille ja tutki niiden ominaisuuksia:

1.  $y = x^2$
2.  $y = \sqrt{x}$
3.  $y = \sin(x)$
4.  $y = e^x$

Tutki kuvaajia muuttamalla funktion parametreja. Miten muutokset vaikuttavat kuvaajan muotoon tai funktion arvoihin?

### **Projektiehdotus: Pelaa ja opi Scratchilla**

1. Suunnittele yksinkertainen matematiikkapeli Scratchissa.
2. Peli voi esimerkiksi testata pelaajan yhteen- ja vähennyslaskutaitoja hausalla tavalla.
3. Tee pelin ohjelmakoodi ja visuaalinen ilme. Kokeile eri vaikeustasoja ja palkitse pelaaja pisteillä oikeista vastauksista.

### **Yhteenveto**

Tietokonepohjaiset matemaattiset ohjelmat voivat avata uusia ovia oppimiseen ja innostaa sinua matematiikan maailmaan uudella tavalla. Digitaaliset työkalut tukevat opiskeluasi ja auttavat sinua ymmärtämään matematiikkaa syvällisemmin. Kokeile erilaisia ohjelmia ja löydä niiden avulla uusia tapoja innostua matematiikasta!

Nyt on sinun vuorosi dominoida digi ja tutkia, kokeilla ja oppia matematiikkaa tietokonepohjaisten välineiden avulla!

## **14.3. Visualisointivirvatuli - Kauniit käppyrät konstein**

Matematiikka on täynnä salaisuuksia ja ihmeitä, jotka odottavat paljastamistaan. Mutta kuinka voimme nähdä nämä salaisuudet silmin, jotka on totutettu ainoastaan maailman fyysiseen kauneuteen? Vastaus on yksinkertainen: visualisoinnin taika. Visualisointi tarkoittaa matemaattisten käsitteiden muuttamista kuviksi tai piirroksiksi, jotta voimme ymmärtää ja ratkaista ongelmia helpommin. Tässä luvussa tutustumme siihen, kuinka visualisoimalla matematiikka herää eloon ja muuttuu oivaltamisen virvatuleksi.

### **Miksi Visualisointi?**

Visualisointi voi tehdä matematiikan oppimisesta helpompaa ja hausempaa. Kun näet ongelmat piirroksina, voit huomata yhteyksiä ja ratkaisuja, jotka olisivat saattaneet jäädä huomaamatta vain numeroina ja kaavoina. Esimerkiksi funktion kuvaaminen koordinaatistossa

voi näyttää, missä pisteissä funktio leikkaa akselit, tai miten funktio käyttäytyy tietyillä arvoalueilla.

## **Miten Visualisoida Matemaattisia Ongelmia?**

### **1. Lue ja Ymmärrä Ongelma**

Ennen kuin aloitat piirtämisen, lue ongelma huolellisesti läpi. Mitä sinulta kysytään? Mitä tietoja sinulle annetaan? Mitkä ovat oleelliset käsitteet?

### **2. Etsi Avainkohdat**

Tunnista ongelman avainkohdat. Esitä itsellesi kysymyksiä, kuten "Onko kyseessä yhtälö tai funktio?", "Tarvitsenko aikajanan tai diagrammin?" tai "Voiko tämän esittää geometrisena kuviona?".

### **3. Käytä Oikeita Työkaluja**

Erilaiset ongelmat vaativat erilaisia visualisointityökaluja. Koordinaatisto on täydellinen funktioille, aikajana ajan visualisointiin, ja kuviot voivat auttaa geometriassa. Käytä kynää, viivoitinta, ehkä värikyniä tai jopa tietokoneohjelmia apunasi.

### **4. Arvuuttele ja Kokeile**

Joskus ensimmäinen visualisoimasi kuva ei kerro koko tarinaa. Älä lannistu! Kokeile eri lähestymistapoja, muuta mittakaavaa tai näkökulmaa, kunnes löydät piirroksen, joka auttaa ymmärtämään ongelman paremmin.

### **5. Tarkastele ja Pohdi**

Kun olet saanut kuvion valmiiksi, tarkastele sitä huolellisesti. Mitä uutta oivallat ongelmasta? Onko piirroksesi johdonmukainen annettujen tietojen kanssa?

### **Esimerkki: Yhtälön kuvaaminen**

Kuvitellaan yhtälö  $y = 2x + 3$ . Miten voimme visualisoida tämän?

1. Piirretään koordinaatisto ja merkitään x- ja y-akselit.
2. Valitsemme muutamia x:n arvoja, esimerkiksi -2, 0 ja 2.
3. Laskemme vastaavat y:n arvot yhtälön avulla: y kun x on -2, saamme -1; kun x on 0, saamme 3; ja kun x on 2, saamme 7.

4. Merkitsemme saadut pisteet (-2, -1), (0, 3) ja (2, 7) koordinaatistoon.

5. Piirrämme suoran, joka kulkee näiden pisteiden kautta.

Nyt näemme visuaalisesti, millainen yhtälön kuvaaja on, ja se auttaa meitä ymmärtämään yhtälön käyttäytymistä paremmin.

## Loppusanat

Visualisoinnin avulla matemaattiset ongelmat eivät enää piile pimeässä, vaan ne loistavat opastavaa valoaan kohti ratkaisujen maailmaa. Käyttämällä piirroksia, graafeja ja muita visuaalisia työkaluja voit vangita matematiikan virvatulen, ja tehdä sen periaatteista kauniita. Joten tartu kynään ja anna mielikuvituksesi valaista matematiikan polkuja!

## 14.4. Taulukon taikaa - Taulukkolaskennan triumfi

Jos olet koskaan joutunut laskemaan yhteen pitkän listan numeroita, tiedät, että se voi olla tylsää ja virhealtista. Mutta älä pelkää, tässä luvussa opit kuinka taulukkolaskenta (engl. spreadsheet) muuttaa numeroiden käsittelyn taianomaiseksi seikkailuksi!

Taulukkolaskenta on ohjelma, jota käytetään numeroiden ja tekstin tallentamiseen ja järjestämiseen ruudukkomuodossa, jonka kenttiä kutsutaan soluiksi. Kun nimi Excel, Google Sheets tai LibreOffice Calc kuulostavat tutuilta, olet jo hyvällä alulla!

### Perustoiminnot

Taulukkolaskentaohjelmien yksinkertaisimmat toiminnot ovat arkipäiväsi pelastus. Voit:

- Laskea yhteen ja laskea keskiarvot (SUM, AVERAGE)
- Vähentää, kertoa ja jakaa solujen arvoja
- Käyttää matemaattisia funktioita, kuten potenssiin korotus ja juurifunktiot

Kokeillaanpa!

### Harjoitus 1: Yhteenlasku

1. Avaa taulukkolaskentaohjelma.
2. Kirjoita soluihin A1, A2, A3... lukujen sarja, esimerkiksi 2, 4, 6...
3. Kirjoita soluun A6 funktio `=SUM(A1:A5)` ja paina Enter. Mitä tapahtuu?

### Kaavat ja funktiot



Kaikki soluihin kirjoittamasi kaavat ja funktiot tekevät taulukosta dynaamisen. Voit viitata muihin soluja kaavoissasi, ja kun viitatus solun sisältö muuttuu, myös kaikki siihen viittaavat laskelmat päivittyvät automaattisesti.

## Harjoitus 2: Prosenttilasku

1. Kuvitellaan, että sinulla on solussa A1 hinta €200 ja solussa A2 alennusprosentti 15%.
2. Kirjoita soluun A3 kaava `=A1*(1-A2)` nähdäksesi alennetun hinnan.
3. Muuta alennusprosenttia ja katso, miten lopullinen hinta muuttuu.

## Visuaalinen esitys

Taulukkolaskentaohjelmien avulla voit muuntaa numerot helposti ymmärrettäviksi kaavioiksi ja diagrammeiksi.

## Harjoitus 3: Kaavion luominen

1. Laadi taulukko, jossa on kahden viikon päivät (esim. 1.–14. päivä) sarakkeessa A ja jokaiselle päivälle kerätyt roskat kilogrammoina sarakkeessa B.
2. Valitse tietosi ja luo pylväsdiagrammi, joka näyttää visuaalisesti, kuinka paljon roskaa on kerätty kunkin päivän aikana.

## Vinkkejä ja Varoituksia

Kun taulukkolaskenta näyttäytyy mahtavana työkaluna, muista aina:

- Tuplatarkista kaavasi, piilovirhe voi sotkea koko laskelman.
- Opi käyttämään soluviittauksia, kuten `A1`, jotta kaavasi pysyvät oikeina, kun kopioit niitä.
- Hämmästyä opettajiasi ja luokkakavereitasi kekseliäillä taulukkolaskennan ratkaisuille.

## Tehtävä: Budjetin laadinta

Keksi jokin projekti, kuten luokkaretken suunnittelu tai oman yrityksesi perustaminen. Luo taulukkolaskentaohjelmalla budjetti projektille. Lisää eri kustannusten, tulonlähteiden ja mahdollisten voittojen solut. Varmista, että valitset oikeat kaavat yhteenvetojen laskemiseksi.

## Loppusanat

Taulukkolaskenta on loistava työkalu kaikenlaiseen matemaattiseen ongelmanratkaisuun ja datan visualisointiin. Sen avulla analysoit tietoa, ennustat tulevaisuutta ja teet päätöksiä, jotka

perustuvat vankkoihin laskelmiin. Käytä sitä viisaasti ja matematiikan merkitys avautuu sinulle uudella tavalla!

Onnea matkalle taulukon taian maailmaan!

## Osa VIII: Omien onnistumisten oivallus

Tervetuloa matematiikan mielenkiintoiseen maailmaan! Tässä luvussa me tutustumme siihen, miten voimme arvioida ja arvostaa omia matemaattisia suorituksiamme. Arviointi ja itsearviointi ovat tärkeitä taitoja, jotka eivät ainoastaan auta sinua ymmärtämään, miten hyvin olet oppinut uuden aiheen, vaan myös auttavat tunnistamaan, mitä vielä tarvitsee harjoitella.

### Miksi itsearviointi on tärkeää?

Ennen kuin sukellamme yksityiskohtiin, mietitään hetki, miksi matematiikassa on hyödyllistä osata arvioida omaa osaamista:

- **Itseymmärrys:** Kun pystyt arvioimaan omaa osaamistasi, tiedät missä olet vahva ja missä tarvitset vielä kehitystä.
- **Motivaatio:** Hyvän suorituksen tunnistaminen antaa tyydytystä ja kannustaa jatkamaan eteenpäin.
- **Vastuu Oppimisesta:** Opit ottamaan vastuuta omasta oppimisestasi ja kehität itsenäisiä opiskelutaitoja.
- **Realistinen Kuva Osaamisestasi:** Estät itsesi yliarvioimasta tai aliarvioimasta taitojasi, mikä auttaa asettamaan realistisia tavoitteita.
- **Jatkuva Parantaminen:** Itsearviointi on jatkuvaa oppimista, joka rohkaisee sinua olemaan utelias ja etsimään uusia haasteita.

### Miten arvioit omia onnistumisiiasi?

Arviointiprosessissa on muutama askel, jotka auttavat sinua tarkastelemaan matemaattisia taitojasi:

#### 1. Aseta Tavoitteet

Kun aloitat uuden matemaattisen aiheen opiskelun, aseta itsellesi selkeät ja saavutettavat tavoitteet. Osaatko ratkaista yhtälöitä? Entä ymmärrätkö prosenttilaskennan perusteet? Nämä ovat esimerkkejä hyvistä henkilökohtaisista tavoitteista.

## **2. Tee ja Tarkista**

Kun harjoittelet uutta asiaa, tee tehtäviä huolellisesti ja tarkista sitten vastauksesi. Tämä on ensimmäinen arviointivaihe. Jos vastauksesi ovat oikein, se on selvä merkki siitä, että ymmärrät aiheen. Jos vastauksesi taas ovat väärä, älä lannistu, vaan yritä ymmärtää missä meni vika.

## **3. Reflektoi Prosessia**

Onnistumiset eivät ole aina suoria oikeita vastauksia. Reflektoi, miten lähestyit tehtävää. Olivatko strategiasi ja laskentatapasi tehokkaita ja järkeviä?

## **4. Pyydä Palautetta**

Joskus oma arviointimme voi olla puolueellista. Siksi on hyvä pyytää palautetta opettajalta, vanhemmilta tai kavereilta. Muiden näkökulmat voivat auttaa oivaltamaan asioita, joita et itse ole huomannut.

## **5. Seteliarviointi**

Omaan arviointiisi voi olla hauska yhdistää "seteliarviointi". Kirjoita jokaisen viikon jälkeen pienelle paperilapulle (setelille) miten olet onnistunut ja mitä olet oppinut. Voit myös kirjoittaa, mikä oli haasteellista ja mitä haluat parantaa. Säilytä nämä setelit ja katso niitä myöhemmin, niin näet oppimisesi kehityksen ajan kuluessa.

## **6. Opi Virheistäsi**

Muista, että matematiikkaa ei opita virheettömästi. Virheistä oppii, ja ne ovat asioiden ymmärtämisen ja oppimisen kannalta välttämättömiä. Katso virheitä uudelleen ja mieti, kuinka voisit ratkaista tehtävän eri tavalla.

## **Loppusanat**

Muista, että matematiikan oppiminen on prosessi. Itsearviointi on yksi tärkeä osa tätä prosessia, joka auttaa sinua kehittämään matemaattista ajatteluasi. Käytä yllä esiteltyjä vinkkejä apunasi ja muista, että jokainen onnistuminen, iso tai pieni, on askeleen pidemmälle matematiikan syvällisemmässä ymmärtämisessä. Jatka harjoittelua, ole utelias ja pidä hauskaa matematiikan parissa!

# 15. Arviointiakatemiamia - Miten matematiikka mitataan?

Tervetuloa Arviointiakatemiaan – kiehtovaan maailmaan, jossa matematiikan oppiminen ja osaaminen kohtaavat mitattavan todellisuuden! Tässä luvussa sukellamme yhdessä matematiikan arvioinnin salaisuuksiin ja opimme, miten voimme mitata ja arvioida matemaattisia taitojamme. Luvassa on paljon vinkkejä, harjoituksia ja esimerkkejä!

## Miksi matematiikkaa mitataan?

Ennen kuin lähdemme tutkimaan arvioinnin syövereitä, kysytään itseltämme, miksi ylipäätään on tarpeen mitata matematiikan osaamista. Yksi syy on tietenkin se, että opettajien on tiedettävä, miten olet oppinut ja ymmärtänyt opetetun aineksen, jotta voivat auttaa sinua eteenpäin. Arviointi myös antaa sinulle itsellesi mahdollisuuden nähdä, mitä osaat ja missä tarvitset vielä lisäharjoitusta. Lisäksi yhteisten mittareiden avulla voimme verrata osaamista toisiimme ja jopa eri maiden välillä.

## Mitä arvioidaan?

Matematiikassa voidaan arvioida monia asioita: kaavojen ja sääntöjen muistamista, laskurutiinia, ongelmanratkaisutaitoja, loogista päättelykykyä ja kykyä soveltaa opittua käytännön elämän tilanteissa. Nämä kaikki yhdessä muodostavat kokonaisvaltaisen kuvan matematiikan osaamisestasi.

## Miten arviointi tapahtuu?

### Kokeet ja testit

Perinteinen tapa mitata osaamista on käyttää kokeita ja testejä. Niissä tehtävät voivat olla monivalintoja, lyhyiden vastausten tehtäviä tai pitempiä laskuja ja päättelytehtäviä. Oikeat vastaukset antavat pisteitä, ja pisteiden perusteella arvioidaan osaamisen tasoa.

### Arviointiasteikot

Usein käytetty arviointiasteikko Suomessa on numeroasteikko 4-10, jossa 4 on hylätty ja 10 erinomainen. Tärkeää on ymmärtää, mitä kunkin numeron taakse kätkeytyy: mitä taitoja sinun pitäisi osata, jotta saisit tietyn numeron.

### Itsearviointi

Itsearviointi on erittäin tärkeä osa oppimisprosessia. Kun katsot omaa työtäsi kriittisesti, voit oppia paljon omista vahvuuksista ja heikkouksista. Tämä auttaa sinua kehittämään itseäsi ja asettamaan tavoitteet jatkossa korkeammalle.

## **Vertaisarviointi**

Toisinaan voimme oppia paljon myös toistemme töistä. Vertaisarvioinnissa arvioit luokkatoverisi työtä ja annat rakentavaa palautetta. Samalla opit näkemään, miten muut ratkaisevat samanlaisia tehtäviä – ja tämä voi avata uusia näkökulmia omiin laskutapoihisi.

## **Opettajan havainnointi**

Opettaja seuraa oppitunneilla aktiivisesti, miten ymmärrät ja sovellat oppimaasi. Tämä ei ole vain yksittäisten vastausten tarkistamista, vaan myös tapaa, jolla lähestyt ongelmia ja työskentelet niiden parissa.

## **Portfoliot ja projektit**

Matematiikasta voi tehdä myös projekteja tai koota portfolion, joka näyttää laaja-alaisemmin osaamisesi. Kyseessä voi olla pidempi tutkimus, ryhmätyö tai usean eri aihealueen tehtäviä sisältävä kansio, joka arvioidaan kokonaisuutena.

# **15.1. Omalle uralle ohjautuminen – Mikä tekee sinusta matemaatikon?**

Matematiikka on universaali kieli, joka avaa ovia monenlaisiin maailmoihin – oli kyse sitten tähtitieteestä, taloudesta, insinööritieteistä tai jopa taiteesta. Mutta miten voit tietää, onko sinusta matemaatikoksi? Olet ehkä huomannut, että menestyt matematiikassa hyvin, mutta mitä muita merkkejä on siitä, että voisit suunnata urasi matematiikan pariin?

## **Matematiikan menestyksen arvioiminen**

Menestys matematiikassa ei rajoitu vain kokeiden ja tehtävien saamiin pisteisiin. Itse asiassa matemaatikon ominaisuudet ulottuvat paljon kauemmas. Tässä luvussa tutkimme, mitkä piirteet ja taidot voivat viitata siihen, että sinulla on potentiaalia kehittyä matematiikan alalla.

## **Uteliaisuus ja Ongelmanratkaisukyky**

Matemaatikoilla on usein vahva halu ymmärtää maailmaa ja sen lainalaisuuksia. Heidän uteliaisuutensa saa heidät pohtimaan kysymyksiä: "Miksi tämä toimii näin?" ja "Mitä tapahtuisi,

jos muuttaisin jotakin?" Matematiikka tarjoaa työkaluja vastausten etsimiseen ja ongelmien ratkaisemiseen. Jos löydät itsesi usein miettimästä näitä kysymyksiä ja rakastat ongelmien ratkaisua, saatat hyvin olla matematiikan polulla.

## **Kärsivällisyys ja Sinnikkyys**

Matemaattisten ongelmien ratkaiseminen voi joskus olla hidasta ja vaatia paljon yrityksiä. Menestys edellyttää kärsivällisyyttä työskennellä ongelman parissa niin kauan, että ratkaisu löytyy. Matemaatikot eivät luovuta heti, kun vastaan tulee este – heitä ajaa eteenpäin halu päästä ongelman ytimeen ja ratkaista se.

## **Luovuus ja Alkuperäisten Ideoiden Kehittäminen**

Ehkä yllättävää kyllä, matemaatikot ovat usein hyvin luovia ihmisiä. He keksivät uusia tapoja lähestyä vanhoja ongelmia ja kehittävät alkuperäisiä ratkaisuja. Matematiikassa luovuus tarkoittaa eri menetelmien ja lähestymistapojen yhdistelyä tavalla, joka johtaa uudennlaisiin oivalluksiin.

## **Matemaattinen Ajattelu ja Looginen Päättely**

Jos sinusta tuntuu, että kykenet näkemään kaavioita ja suhteita numeroiden ja muotojen välillä, voit hyvin omaavasi matemaattisen ajattelun lahjoja. Looginen päättely on kyky seurata tarkkaa ajatuskulkua ja päättelemistä, joka perustuu tosiasioihin ja aikaisemmin oppimaasi. Matemaatikot rakentavat argumentteja, jotka ovat kuin hyvin tehtyjä rakennelmia: mitään ei jätetä sattuman varaan.

## **Kommunikaatio ja Yhteistyö**

Vaikka matematiikka voi tuntua yksinäiseltä puuhalta, todellisuudessa se on usein joukkuelaji. Menestyvät matemaatikot ovat hyviä kommunikoimaan ideoitaan muiden kanssa ja työskentelemään yhteistyössä ongelmien ratkaisemiseksi. Matematiikan maailmassa yhteistyötä tapahtuu konferensseissa, työryhmissä ja julkaisuprosessissa.

## **Jatkuva Oppiminen ja Itsekehitys**

Matematiikka on elävä tiede, jossa uusia löytöjä tehdään jatkuvasti. Matemaatikon uralla sinulle tärkeää on halu oppia uutta ja kehittää itseäsi. Se, mitä opit tänään, voi olla hyppylauta huomisen innovaatioille.

## **Pohdintaa ja Yhteenvetoa**

Jos nämä piirteet kaikuvat sinussa ja tuntuu, että matematiikka on sinun juttusi, muista, että kyse ei ole pelkästään lahjakkuudesta. Matemaatikon taidot kehittyvät harjoittelun, omistautumisen ja intohimon myötä. Jokainen voi kasvaa matemaatikon polulla, kunhan tunnistaa omat vahvuutensa ja työskentelee niitä kohti sinnikkäästi.

Vaikka matematiikan opinnoissa voi olla ylä- ja alamäkiä, muistathan, että jokainen matematiikkaan käytetty tunti rakentaa perustaa, jolle voit rakentaa ymmärrystäsi ja mielenkiintoisia urapolkuja. Olitpa sitten tuleva tutkija, opettaja, insinööri tai minkä tahansa muun alan ammattilainen, matematiikan ymmärtäminen voi avata ovia, joita et ole edes kuvitellut olevan olemassa.

Matematiikka on paljon muutakin kuin kaavioita ja numeroita paperilla; se on tapa nähdä ja ymmärtää maailmaa. Ja sinä voit olla seuraava matemaatikko, joka näyttää meille, miten tämä ihmeellinen kieli toimii!

## **15.2. Tavoitteet tähän päivään - Aseta itsellesi superpäämäärät**

Matematiikan maailma on täynnä mysteerejä ja mahdollisuuksia, jotka odottavat löytäjäänsä. Tiedän, että joskus matematiikan tehtävät voivat tuntua vaikeilta ja hankalilta, mutta älä anna sen lannistaa sinua! Sinulla on valtava potentiaali kehittyä matematiikan taitajana ja saavuttaa tavoitteesi, olivatpa ne sitten pieniä tai suuria. Aloitetaanpa sillä, että asetamme sinulle omia tavoitteita matematiikan oppimiseen!

### **Miksi asettaa tavoitteita?**

Tavoitteiden asettaminen tekee oppimisesta suunnitelmallista ja mielekästä. Kun tiedät, mitä kohti pyrit, jokainen pienikin edistysaskel tuntuu merkitykselliseltä. Tavoitteita voi ajatella porrasaskelmina kohti jotakin suurta – superpäämäärääsi. Kun tiedostat, mihin pyrit, voit keskittyä juuri niihin taitoihin ja osa-alueisiin, jotka vievät sinut lähemmäksi tavoitettasi.

### **Kuinka asettaa tavoitteita?**

Tavoitteiden asettamisessa on hyvä noudattaa SMART-periaatetta, joka auttaa sinua määrittelemään tavoitteesi tarkasti. SMART on lyhenne sanoista Specific (tarkka), Measurable (mitattava), Achievable (saavutettavissa oleva), Relevant (olennainen) ja Time-bound (aikaan sidottu).

#### **Specific (Tarkka)**

Ole mahdollisimman konkreettinen määritellessäsi, mitä haluat saavuttaa. Esimerkiksi: "Haluan oppia ratkaisemaan yhtälöitä" on tarkempi tavoite kuin "Haluan tulla paremmaksi matematiikassa".

### **Measurable (Mitattava)**

Mieti, kuinka voit seurata edistymistäsi. Jos tavoitteenasi on oppia ratkaisemaan yhtälöitä, voit asettaa tavoitetta seurataksesi vaikkapa kuinka monta yhtälöä pystyt ratkaisemaan oikein itse.

### **Achievable (Saavutettavissa oleva)**

Valitse tavoite, jonka tiedät pystyväsi saavuttamaan. Jos et ole vielä kovinkaan varma yhtälöiden ratkaisemisesta, ei kannata asettaa tavoitteeksi ratkaista vaikeinta mahdollista yhtälöä heti.

### **Relevant (Olennainen)**

Valitse itsellesi tärkeä tavoite. Jos rakastat geometriaa, saattaa geometrian tavoitteiden asettaminen tuntua innostavammalta ja merkityksellisemmältä kuin algebraan keskittyminen.

### **Time-bound (Aikaan sidottu)**

Anna itsellesi realistinen aikaraja tavoitteen saavuttamiseen. Esimerkiksi: "Osaan ratkaista perustason yhtälöt itsenäisesti ensi kuun loppuun mennessä."

### **Pienen pienet tavoitteet - isot isot unelmat**

Tavoitteiden ei tarvitse aina olla suuria. Itse asiassa, pienten, päivittäisten tai viikottaisten tavoitteiden asettaminen voi olla tehokkaampaa, koska ne tuntuvat saavutettavammilta ja niitä kohti on helpompi pyrkiä säännöllisesti. Voisit esimerkiksi pyrkiä oppimaan yhden uuden matemaattisen kaavan tai säännön joka viikko tai ratkaista tietyn määrän tehtäviä päivittäin. Näiden tähtäimenä voisi olla suurempi tavoite, kuten matematiikan numeron parantaminen koulutodistuksessa tai osallistuminen matematiikkakilpailuun.

### **Seuraavat askeleet**

Nyt on sinun vuorosi! Kirjoita tähän oma superpäämääräsi matematiikassa seuraavalle kuukaudelle, käyttäen SMART-periaatetta. Muista, että tavoitteet ovat henkilökohtaisia, ja vain sinä voit tietää, mikä sinulle on tärkeää ja saavutettavissa. Kun olet kirjoittanut tavoitteesi, voit jakaa sen opettajasi tai luokkakavereidesi kanssa saadaksesi kannustusta ja tukea matkallasi.



## Minun matematiikan superpäämääräni:

Tarkka:

Mitattava:

Saavutettavissa oleva:

Olennainen:

Aikaan sidottu:

Ota ensimmäinen askel tänään ja muista, että jokainen matka kohti superpäämäärää alkaa yhdestä rohkeasta askeleesta. Matematiikan taika odottaa sinua – tavoitteletko sitä?

## 15.3. Itsearviointin ilotulitus - Oma edistyminen erinomaiseksi

Matematiikassa, kuten elämän muillakin osa-alueilla, oppiminen on jatkuvaa seikkailua. Yksi taito, joka tekee tästä seikkailusta entistäkin jännittävämmän, on itsearviointi. Itsearviointi tarkoittaa sitä, kun pysähdyt hetkeksi miettimään, kuinka hyvin olet ymmärtänyt uuden asian tai ratkaissut annetun ongelman. Se on kuin henkilökohtainen valmentaja mielessäsi, joka kannustaa sinua tunnistamaan vahvuutesi ja kehittämään heikkouksiasi.

### Miksi itsearviointi on tärkeää?

#### Ennakoiva oppiminen

Itsearviointi auttaa sinua hahmottamaan, mitä jo osaat ja mitä sinun on vielä harjoiteltava. Se on kuin kompassi, joka osoittaa suuntaa oppimismatkallasi.

#### Motivaation ylläpitäminen

Kun näet itse edistymisesi, se kannustaa sinua jatkamaan työskentelyä. Jokainen pienikin onnistuminen on kuin ilotulitus taivaalla, joka valaisee oppimisen polkuasi.

#### Itsenäinen ajattelu

Kun arvioit itseäsi, kehität kriittistä ajattelua – taitoa, joka on välttämätön matematiikassa ja elämässä.

### Kuinka itsearvioida tehokkaasti?

#### Askel 1: Aseta tavoitteet

Ennen kuin aloitat, päättä, mitä haluat saavuttaa. Tavoitteesi voivat liittyä uuden käsitteen oppimiseen, matemaattisen ongelman ratkaisemiseen tai vanhan taidon parantamiseen.

## **Askel 2: Arvioi osaamistasi**

Työskennellessäsi matematiikan parissa, pysähdy aika ajoin miettimään: "Ymmärsinkö tämän oikein?" Vaihda vaikeutta tai strategiaa, jos tunnet, että et ole vielä täysin perillä asiasta.

## **Askel 3: Pyydä palautetta**

Palautteen vastaanottaminen muilta, kuten opettajilta tai kavereilta, voi tuoda uusia näkökulmia. Muista kuitenkin, että ulkopuolinen palaute on hyvä lisä, ei korvike omalle itsearviointillesi.

## **Askel 4: Ole rehellinen itsellesi**

Ole rehellinen arvioidessasi itseäsi. Älä liioittele osaamistasi, mutta älä myöskään aliarvioi sitä. Tavoitteena ei ole olla täydellinen, vaan kehittyä jatkuvasti.

## **Askel 5: Tee korjaavia toimenpiteitä**

Kun huomaat alueita, joissa tarvitset lisää harjoitusta, laadi suunnitelma niiden parantamiseksi. Ehkä tarvitset lisää harjoituksia, tai ehkä sinun täytyy kysyä apua tietyissä kohdissa.

## **Harjoitus: Oma matematiikkaoppimisen reittikartta**

Tee itsellesi "Matematiikan oppimisen reittikartta", jossa tarkastelet edistymistäsi. Käytä seuraavia osioita kartallasi:

1. **Lähtökohtani:** Missä olin ennen tämän luvun alkua? Mitkä olivat vahvuuteni ja haasteeni?
2. **Tavoitteeni:** Mitä toivon oppivani tai saavuttavani tämän luvun aikana?
3. **Saavutukset:** Mitkä ovat olleet suurimmat onnistumiseni tässä luvussa? Missä olen kehittynyt eniten?
4. **Kehityskohteet:** Mihin asioihin haluan keskittyä jatkossa? Millaisia harjoituksia teen tämän saavuttamiseksi?
5. **Seuraavat askeleet:** Millaisia tavoitteita asetan seuraavalle luvulle tai osa-alueelle?

Muista, että oppiminen on matka, joka on täynnä ilotulituksia! Jokainen opittu asia on syy juhlaan. Käytä itsearviointia työkaluna, jonka avulla voit tehdä oppimisestasi entistä valaisevampaa ja innostavampaa. Onnea matkaan matematiikan maailmassa!

## 15.4. Yhteistyön ja kilpailun kuninkuus - Matematiikkaa me-hengessä

Matematiikka on kuin suuri seikkailu, jossa ratkomme arvoituksia, löydämme uusia reittejä ja rakennamme siltoja tiedon saarekkeiden välille. Kuten monet suuret seikkailut, tämäkin matka voi olla entistä mielekkäämpi ja opettavaisempi, jos sen jakaa muiden kanssa. Tässä luvussa me kävelemme yhdessä matematiikan poluilla, tutkiaksemme miten yhteistyö ja kilpailu voivat muovata oppimiskokemustamme.

### Yhteistyö matematiikassa

Yhteistyö matematiikassa tarkoittaa yksinkertaisuudessaan sitä, että työskentelet yhdessä muiden kanssa oppiaksesi ja ratkaistaksesi matemaattisia ongelmia. Tämä voi tapahtua pienryhmissä, pareittain tai koko luokan projektitöinä. Mikä tekee yhteistyöstä niin tehokkaan oppimismetodin?

1. **Erilaiset näkökulmat:** Jokaisella meistä on ainutlaatuinen tapa hahmottaa maailmaa, ja se sisältää myös matematiikan. Työskennellessäsi muiden kanssa saatat löytää uuden tavan lähestyä ongelmaa, jota et välttämättä olisi itse ajatellut.
2. **Selittäminen opettaa:** Kun selität ajattelutapaasi muille, sinun täytyy jäsentää se hyvin selkeäksi. Tämä prosessi auttaa sinua ymmärtämään asian paremmin ja voi paljastaa mahdollisia aukkoja omassa ymmärryksessäsi.
3. **Rohkeus kokeilla:** Yhdessä toimiessaan oppilaat saattavat tuntea olonsa turvallisemmaksi kokeilla uusia menetelmiä tai esittää "hullujakin" ideoita ongelman ratkaisemiseksi. Yksikään idea ei ole liian kaukaa haettu tutkittavaksi.
4. **Taitojen kehittyminen:** Ryhmässä työskentely kehittää kommunikointi- ja yhteistyötaitoja, jotka ovat tärkeitä paitsi matematiikassa, myös monilla muilla elämänaalueilla.

### Kilpailu matematiikassa

Toisaalta, kilpailullinen oppiminen voi myös tarjota omat hyötynsä. Kilpailun avulla voit:

1. **Motivoitua:** Kilpailu voi olla hauskaa ja se voi lisätä motivaatiota harjoitustehtävien parissa työskentelyyn. Nähdessäsi toisten saavutuksia, saatat innostua tavoittelemaan vielä parempia tuloksia.

2. **Asettaa tavoitteita:** Kilpailussa on hyvä olla selkeä päämäärä. Tämä auttaa asettamaan konkreettisia tavoitteita ja työskentelemään määrätietoisesti niiden saavuttamiseksi.
3. **Oppia paineen alla toimimista:** Elämässä tulee väistämättä vastaan tilanteita, jolloin on pärjättävä stressaavissa olosuhteissa. Ystävällismielinen kilpailu antaa harjoitusta tällaisiin hetkiin.

## **Tasapaino on tärkeää**

On tärkeää löytää tasapaino yhteistyön ja kilpailun välillä. Molemmilla on aikansa ja paikkansa, ja ne voivat molemmat olla osa sinun matematiikan oppimismatkaasi. Ehkä jossakin projektissa työskennellään tiiviisti yhdessä, kun taas toisessa voi olla terveellinen annos kilpailua esimerkiksi matematiikkapeliin tai pulmakilpailujen muodossa.

## **Loppusanat**

Muistakaa rakkaat matemaatikot: matematiikan mahtavuus piilee sen kyvyssä yhdistää ihmisiä aivan kuten numeroiden ja kaavojen salaperäinen maailma yhdistää lukemattomia ideoita ja käsitteitä. Olipa kyseessä kilpailu tai yhteistyö, matematiikka opettaa meille, että jokaisella tehtävällä ja pulmalla voi olla monta ratkaisutietä – ja jokainen polku voi johtaa meidät uusiin ja yllättäviin oivalluksiin.