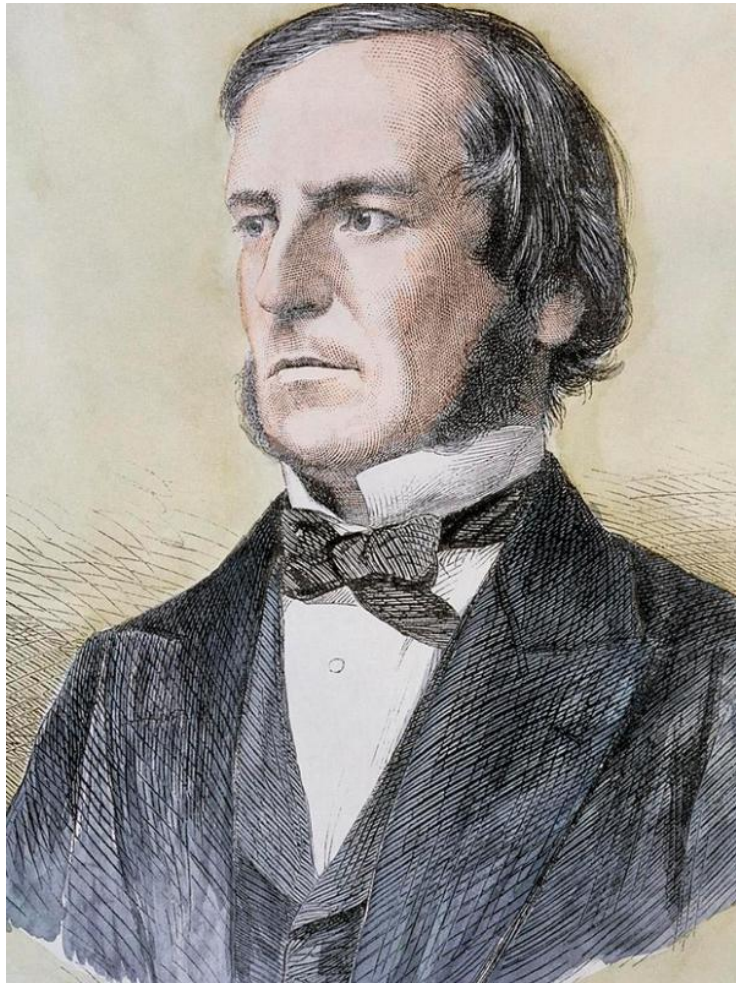


БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Алгебра логики



Джордж Буль
(1815-1864)

— английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка (ныне Университетский колледж Корк) с 1849 года. Один из основателей математической логики.

Булевы переменные и булевы функции

Булева (двоичная) переменная: $x \in \{0,1\}$

$x \in \{ложь, истина\}$

$x \in \{false, true\}$

Булевы переменные и булевы функции

Булева (двоичная) переменная: $x \in \{0,1\}$

$$x \in \{ложь, истина\}$$

$$x \in \{false, true\}$$

Булева (переключательная) функция: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$y \in \{0,1\}$$

Булевы переменные и булевы функции

Булева (двоичная) переменная: $x \in \{0,1\}$

$$x \in \{ложь, истина\}$$

$$x \in \{false, true\}$$

Булева (переключательная) функция: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$y \in \{0,1\}$$

Набор аргументов функции: (x_1, x_2, \dots, x_n)

Булевы переменные и булевы функции

Булева (двоичная) переменная: $x \in \{0,1\}$

$$x \in \{ложь, истина\}$$

$$x \in \{false, true\}$$

Булева (переключательная) функция: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$y \in \{0,1\}$$

Набор аргументов функции: (x_1, x_2, \dots, x_n)

Количество наборов длины n : 2^n

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$

Количество наборов длины 1 : $2^1 = 2$


Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$

Количество наборов длины 1 : $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x			

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$			

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$			

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$	0 0	«0»	

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$	0 0	«0»	Константа «0»

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$	0 0	«0»	Константа «0»
$f_1(x)$	0 1	x	Переменная x

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$


Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$	0 0	«0»	Константа «0»
$f_1(x)$	0 1	x	Переменная x
$f_2(x)$	1 0	\overline{x}	Инверсия x

Булевы функции одного аргумента

Длина набора $n = 1$  $y = f(x)$

Количество наборов длины 1: $2^1 = 2$  $y = f(0)$
 $y = f(1)$

Варианты булевых функций 1 аргумента:

Аргумент	Набор	Обозначение функции	Название функции
x	0 1		
Функция	Значение функции		
$f_0(x)$	0 0	«0»	Константа «0»
$f_1(x)$	0 1	x	Переменная x
$f_2(x)$	1 0	\bar{x}	Инверсия x
$f_3(x)$	1 1	«1»	Константа «1»

Примеры булевых функций двух аргументов

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	1

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое «ИЛИ»

Логическое сложение

$$x_1 \vee x_2 \quad x_1 \parallel x_2$$

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое «ИЛИ»

Логическое сложение

$$x_1 \vee x_2 \quad x_1 \parallel x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое «ИЛИ»

Логическое сложение

$$x_1 \vee x_2 \quad x_1 \parallel x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

Примеры булевых функций двух аргументов

Конъюнкция

Логическое «И»

Логическое умножение

$$x_1 \wedge x_2 \quad x_1 \& x_2 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_1 x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое «ИЛИ»

Логическое сложение

$$x_1 \vee x_2 \quad x_1 \parallel x_2$$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$


Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$


Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0, 0)$


Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0,0)$
 $y = f(0,1)$

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$


Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0, 0)$

$$y = f(0, 1)$$

$$y = f(1, 0)$$

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0,0)$


$$y = f(0,1)$$

$$y = f(1,0)$$

$$y = f(1,1)$$

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0,0)$

$$y = f(0,1)$$


$$y = f(1,0)$$

$$y = f(1,1)$$

Общее число разных булевых функций от n аргументов: $m = 2^{2^n}$

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0,0)$

$$y = f(0,1)$$

$$y = f(1,0)$$


$$y = f(1,1)$$

Общее число разных булевых функций от n аргументов: $m = 2^{2^n}$

Общее число разных булевых функций от двух аргументов: $m(2) = 2^{2^2} = 16$

Булевы функции двух аргументов

Длина набора $n = 2$  $y = f(x_1, x_2)$

Количество наборов длины 2: $2^2 = 4$  $y = f(0,0)$

$$y = f(0,1)$$

$$y = f(1,0)$$

$$y = f(1,1)$$

Общее число разных булевых функций от n аргументов: $m = 2^{2^n}$

Общее число разных булевых функций от двух аргументов: $m(2) = 2^{2^2} = 16$

Булевы функции двух аргументов

Арг.	Набор			
x_1	0 0 1 1			
x_2	0 1 0 1			
Ф-я	Значение ф-ии	Обозначение	Класс. базис	Название функции
f_0	0 0 0 0	«0»	$x \ \& \ \bar{x}$	Константа «0»
f_1	0 0 0 1	$x_1 \ \& \ x_2$		Конъюнкция
f_2	0 0 1 0	$x_1 \Delta x_2$	$x_1 \ \& \ \bar{x}_2$	Запрет по x_2
f_3	0 0 1 1	x_1		Переменная x_1
f_4	0 1 0 0	$x_2 \Delta x_1$	$\bar{x}_1 \ \& \ x_2$	Запрет по x_1
f_5	0 1 0 1	x_2		Переменная x_2
f_6	0 1 1 0	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$	Неравнозначность (сложение по mod 2)
f_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$		Дизъюнкция

Булевы функции двух аргументов

Арг.	Набор			
x_1	0 0 1 1			
x_2	0 1 0 1			
Ф-я	Значение ф-ии	Обозначение	Класс. базис	Название функции
f_8	1 0 0 0	$x_1 \uparrow x_2$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	Стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ)
f_9	1 0 0 1	$x_1 \equiv x_2$	$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$	Равнозначность (эквивалентность)
f_{10}	1 0 1 0	\bar{x}_2		Инверсия x_2
f_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	Импликация от x_2 к x_1
f_{12}	1 1 0 0	\bar{x}_1		Инверсия x_1
f_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	Импликация от x_1 к x_2
f_{14}	1 1 1 0	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 \& x_2}$	Штрих Шеффера (И-НЕ)
f_{15}	1 1 1 1	«1»	$x \vee \bar{x}$	Константа «1»

Двойственные функции

$$f_1(x_1, x_2) = \overline{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$$

Двойственные функции

«0» и «1»

$$x_1 \text{ и } x_1 \quad \longrightarrow \quad \text{На любом наборе} \quad x_1 = \overline{\overline{x_1}}$$

$$x_2 \text{ и } x_2 \quad \longrightarrow \quad \text{На любом наборе} \quad x_2 = \overline{\overline{x_2}}$$

$$\overline{x_1} \text{ и } \overline{x_1} \quad \longrightarrow \quad \text{На любом наборе} \quad \overline{x_1} = \overline{\overline{\overline{x_1}}}$$

$$\overline{x_2} \text{ и } \overline{x_2} \quad \longrightarrow \quad \text{На любом наборе} \quad \overline{x_2} = \overline{\overline{\overline{x_2}}}$$

$$\& \text{ и } \vee \quad \longrightarrow \quad x_1 \& x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} \quad (\text{закон де Моргана})$$

Двойственные функции

$$x_1 \Delta x_2 \text{ и } x_2 \rightarrow x_1 \quad \longrightarrow$$

$$\text{Запрет по } x_2 : \quad x_1 \Delta x_2 = x_1 \& \bar{x}_2$$

$$\text{Импликация от } x_2 \text{ к } x_1 : \quad x_2 \rightarrow x_1 = \bar{x}_2 \vee x_1$$

$$\overline{\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1} = \overline{x_2 \vee \bar{x}_1} = \bar{x}_2 \& x_1 = x_1 \Delta x_2$$

$$x_2 \Delta x_1 \text{ и } x_1 \rightarrow x_2 \quad \longrightarrow$$

Доказывается аналогично

Двойственные функции

\oplus и \equiv  Неравнозначность: $x_1 \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 x_2$

Равнозначность: $x_1 x_2 \& \bar{x}_1 \bar{x}_2$

$$\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 \bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \vee \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = (x_1 \vee x_2) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$$

$|$ и \uparrow  Штрих Шеффера: $x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$

Стрелка Пирса: $x_1 \uparrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$

$$\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{\bar{x}_1} \& \overline{\bar{x}_2} = x_1 \& x_2 = x_1 | x_2$$

Замкнутые классы булевых функций

Сохранение нуля $f(0, 0, \dots, 0) = 0$

Сохранение единицы $f(1, 1, \dots, 1) = 1$

Самодвойственность $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$

Монотонность

Линейность $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus \dots \oplus C_n x_n$

Замкнутые классы булевых функций

Арг.	Набор						
x_1	0 0 1 1						
x_2	0 1 0 1						
Ф-я	Значение ф-ии	Обозначение	Сохр. 0	Сохр. 1	Самодв.	Монотон.	Линейн.
f_0	0 0 0 0	«0»	х			х	х
f_1	0 0 0 1	$x_1 \& x_2$	х	х		х	
f_2	0 0 1 0	$x_1 \Delta x_2$	х				
f_3	0 0 1 1	x_1	х	х	х	х	х
f_4	0 1 0 0	$x_2 \Delta x_1$	х				
f_5	0 1 0 1	x_2	х	х	х	х	х
f_6	0 1 1 0	$x_1 \oplus x_2$	х				х
f_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$	х	х		х	

Замкнутые классы булевых функций

Арг.	Набор						
x_1	0 0 1 1						
x_2	0 1 0 1						
Ф-я	Значение ф-ии	Обозначение	Сохр. 0	Сохр. 1	Самодв.	Монотон.	Линейн.
f_8	1 0 0 0	$x_1 \uparrow x_2$					
f_9	1 0 0 1	$x_1 \equiv x_2$		х			х
f_{10}	1 0 1 0	$\overline{x_2}$			х		х
f_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$		х			
f_{12}	1 1 0 0	$\overline{x_1}$			х		х
f_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$		х			
f_{14}	1 1 1 0	$x_1 x_2$					
f_{15}	1 1 1 1	«1»		х		х	х