

Типовые формы выражений булевой алгебры

Простейшие действия

Простейшие действия

$$x \mathbf{\&} 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

Простейшие действия

$$x \& 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

Простейшие действия

$$x \& 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \& x = x$$

$$x \vee x = x$$

Простейшие действия

$$x \& 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \& x = x$$

$$x \vee x = x$$

$$x \& \bar{x} = 0$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

Простейшие действия

$$x \& 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$\overline{0} = 1$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

$$x \& x = x$$

$$x \vee x = x$$

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$x \& \overline{x} = 0$$

$$x \vee \overline{x} = 1$$

Правила булевой алгебры

Правила булевой алгебры

ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

Правила булевой алгебры

ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

коммутативность конъюнкции и дизъюнкции

$$ab = ba$$

$$a \vee b = b \vee a$$

Правила булевой алгебры

дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

$$ab \vee ac = a(b \vee c)$$

Правила булевой алгебры

дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

$$ab \vee ac = a(b \vee c)$$

и наоборот:

$$(a \vee b)(a \vee c) = a \vee bc$$

Правила булевой алгебры

идемпотентность

$$a \& a = a$$

$$a \vee a = a$$

Правила булевой алгебры

идемпотентность

$$a \& a = a$$

$$a \vee a = a$$

правило де-Моргана

$$\overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

$$\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \& \overline{b}$$

Правила булевой алгебры

правило поглощения

$$a \vee ab = a$$

$$a(a \vee b) = a$$

Правила булевой алгебры

правило поглощения

$$a \vee ab = a$$

$$a(a \vee b) = a$$

правило склеивания

$$ab \vee a\bar{b} = a$$

$$(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a$$

Правила булевой алгебры

правило поглощения

$$a \vee ab = a$$

$$a(a \vee b) = a$$

правило склеивания

$$ab \vee a\bar{b} = a$$

$$(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a$$

правило вычеркивания

$$ab \vee \bar{a} = b \vee \bar{a}$$

Совершенные нормальные формы

Примеры эквивалентных булевых выражений:

$$a = a \mathbf{\&} 1 = a(b \vee \overline{b}) = ab \vee a\overline{b} \vee 0 = \dots$$

Дизъюнктивная нормальная форма

$$f(a, b, c) = abc \vee \overline{b}c \vee \overline{a}b$$

Дизъюнктивная нормальная форма

$$f(a, b, c) = abc \vee \overline{b}c \vee \overline{a}b$$

минтермы



Конъюнктивная нормальная форма

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \vee c)(b \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$$

Конъюнктивная нормальная форма

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \vee c)(b \vee \bar{c})(a \vee b \vee c)$$

макстермы



Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a} b \bar{c}$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \overline{a} b \overline{c}$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a} b \bar{c}$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ:

$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ:
$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a,b,c) =$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a, b, c) =$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a, b, c) =$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$f(a,b,c) = (a \vee b \vee c)$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$f(a,b,c) = (a \vee b \vee c)$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a, b, c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c})$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee c)$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee c) \& (\bar{a} \vee b \vee \bar{c})$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee c) \& (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$$

Пример описания функции в СДНФ и СКНФ

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(a,b,c)$	0	0	1	1	0	0	1	0

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

СКНФ:

$$f(a, b, c) = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee c) \& (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$$

Получение СДНФ

- применяя правило де-Моргана избавиться от всех инверсий, относящихся более, чем к одной букве;
- раскрыть все скобки;
- каждый член, где недостает буквы x_i нужно умножить на равную единице дизъюнкцию $(x_i \vee \bar{x}_i)$
- исключить повторяющиеся члены полученной формулы.

Переход в базис «И-НЕ» (Штрих Шеффера)

$$f(a, b, c) = \overline{\overline{a} b \bar{c}} \vee \overline{\overline{a} b c} \vee \overline{a b \bar{c}} = \overline{\overline{a} b \bar{c}} \& \overline{\overline{a} b c} \& \overline{a b \bar{c}} = (\bar{a} | b | \bar{c}) | (\bar{a} | b | c) | (a | b | \bar{c})$$

$$\bar{x} = \overline{1 \& x} = 1 | x$$

$$\bar{x} = \overline{x \& x} = x | x$$

Переход в базис «ИЛИ-НЕ» (Стрелка Пирса)

$$\begin{aligned}\overline{\overline{f(a,b,c)}} &= \overline{\overline{a} \overline{b} \overline{c} \vee \overline{a} \overline{b} c \vee a \overline{b} \overline{c} \vee a \overline{b} c \vee a b c} = \\ &= \overline{(a \vee b \vee c) \vee (a \vee b \vee \overline{c}) \vee (\overline{a} \vee b \vee c) \vee (\overline{a} \vee b \vee \overline{c}) \vee (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})} = \\ &= (a \uparrow b \uparrow c) \uparrow (a \uparrow b \uparrow \overline{c}) \uparrow (\overline{a} \uparrow b \uparrow c) \uparrow (\overline{a} \uparrow b \uparrow \overline{c}) \uparrow (\overline{a} \uparrow \overline{b} \uparrow \overline{c})\end{aligned}$$

$$\overline{x} = \overline{0 \vee x} = 0 \uparrow x$$

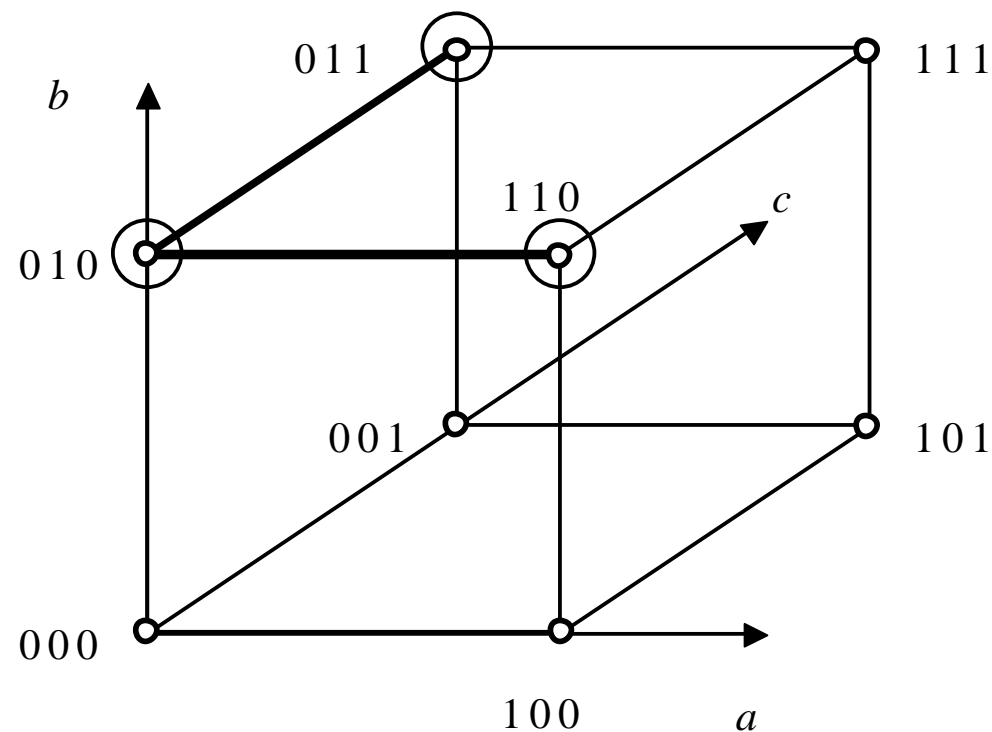
$$\overline{x} = \overline{x \vee x} = x \uparrow x$$

Числовое представление логических функций

СДНФ: $f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$

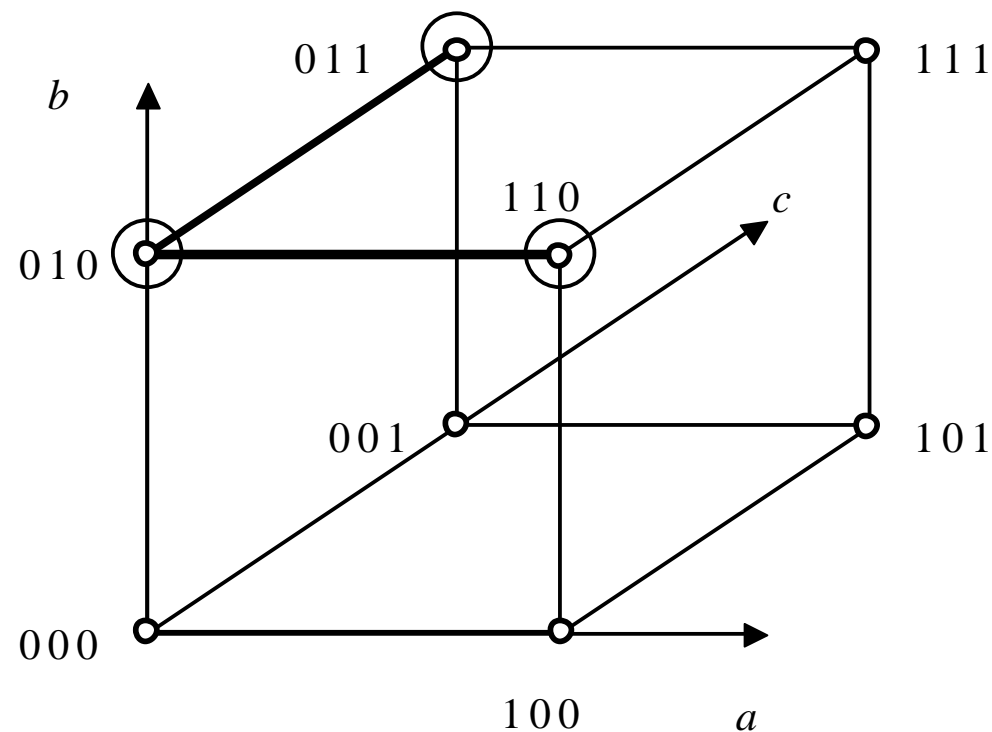
$$f(a, b, c) = \vee(2, 3, 6)$$

Геометрическое представление логических функций



$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee abc\bar{c}$$

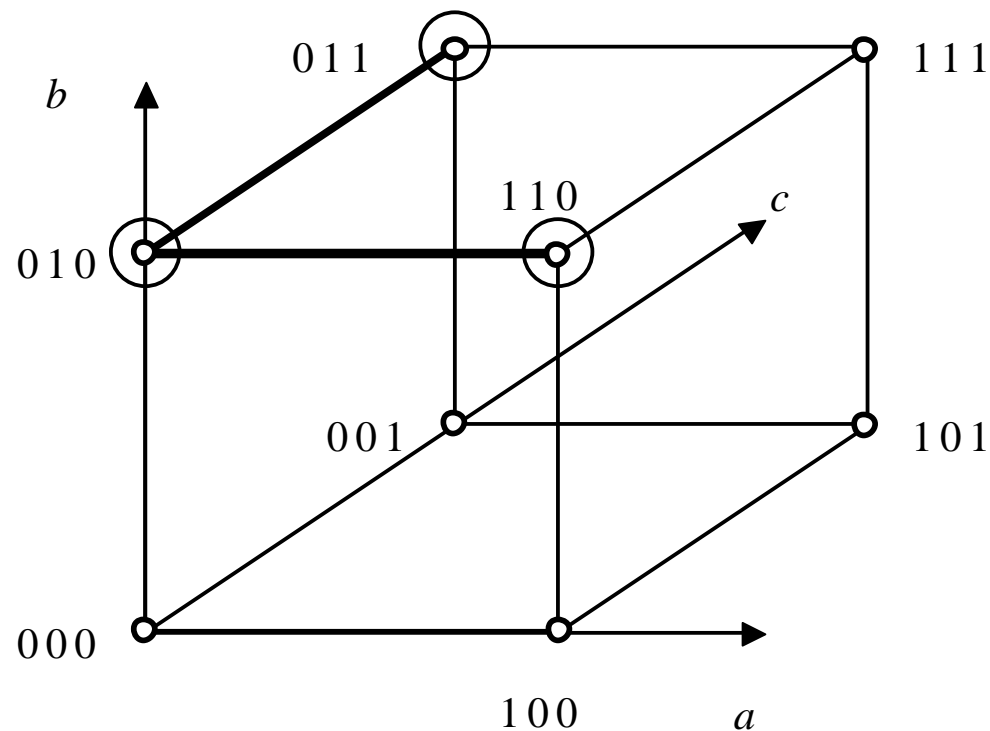
Геометрическое представление логических функций



$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$$

$$C_0 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{0-куб}$$

Геометрическое представление логических функций



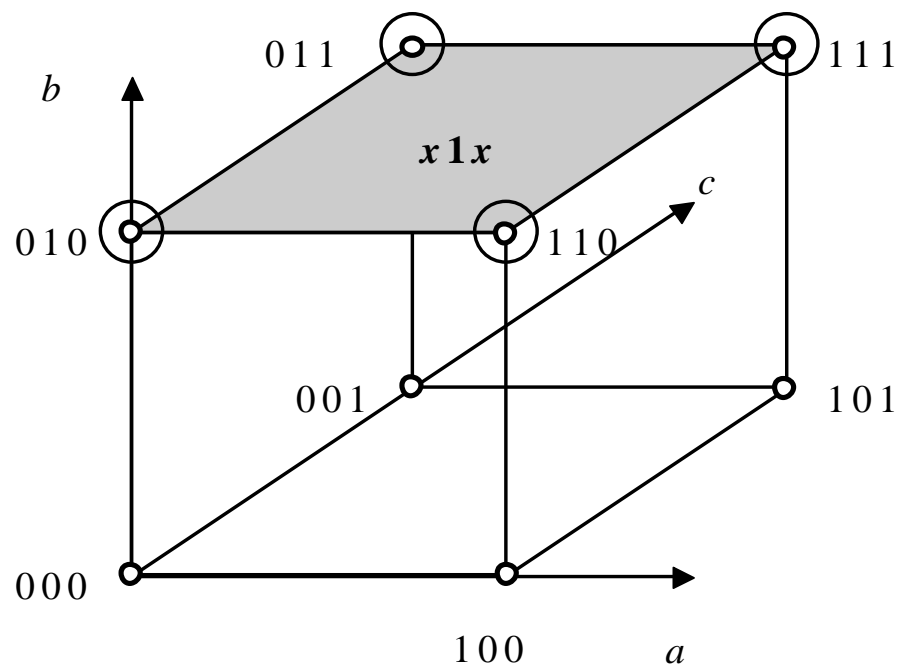
$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee ab\bar{c}$$

$$C_0 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{0-куб}$$

$$f(a, b, c) = \bar{a}b \vee b\bar{c}$$

$$C_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{1-куб}$$

Геометрическое представление логических функций



$$f(a, b, c) = b$$

$$C_2 = \{x1x\} \rightarrow \text{2-куб}$$

Геометрическое представление логических функций

