

Линейные коды

Общие положения

В линейных кодах множество допустимых кодовых слов замкнуто по операции \oplus «сложение по модулю 2»

Общие положения

В линейных кодах множество допустимых кодовых слов замкнуто по операции \oplus «сложение по модулю 2»

Свойства операции \oplus :

- ассоциативность — $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
- наличие нейтрального (нулевого) элемента $e = 000$
- наличие противоположного элемента
- коммутативность $a \oplus b = b \oplus a$

Общие положения

В линейных кодах множество допустимых кодовых слов замкнуто по операции \oplus «сложение по модулю 2»

Свойства операции \oplus :

- ассоциативность — $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
- наличие нейтрального (нулевого) элемента $e = 000$
- наличие противоположного элемента
- коммутативность $a \oplus b = b \oplus a$

Множество элементов вместе с определённой на нём операцией с перечисленными свойствами представляет **коммутативную группу**

Общие положения

Образующие группы – элементы, из комбинации которых можно получить все остальные элементы группы

$G_{n,k}$ – порождающая матрица

n -- общее число разрядов кодового слова

k -- число информационных разрядов

Общие положения

Образующие группы – элементы, из комбинации которых можно получить все остальные элементы группы

$G_{n,k}$ – порождающая матрица

n -- общее число разрядов кодового слова

k -- число информационных разрядов

Пример:

$$\mathbf{G}_{3,3} = \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{vmatrix}$$

Общие положения

Контрольные разряды в линейных кодах определяются как линейные функции от других разрядов:

$$a_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} C_{ij} a_j$$

Общие положения

Контрольные разряды в линейных кодах определяются как линейные функции от других разрядов:

$$a_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} C_{ij} a_j$$

Пример кода с контролем по чётности:

$$a_0 = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k$$

Общие положения

Контрольные разряды в линейных кодах определяются как линейные функции от других разрядов:

$$a_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} C_{ij} a_j$$

Пример кода с контролем по чётности:

$$a_0 = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k$$

$$\mathbf{G}_{4,3} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Коды Хэмминга

Коды Хэмминга – это линейные коды, способные исправлять одну ошибку в контролируемом блоке (слове) и построенные на основе формулы:

$$a_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} C_{ij} a_j$$

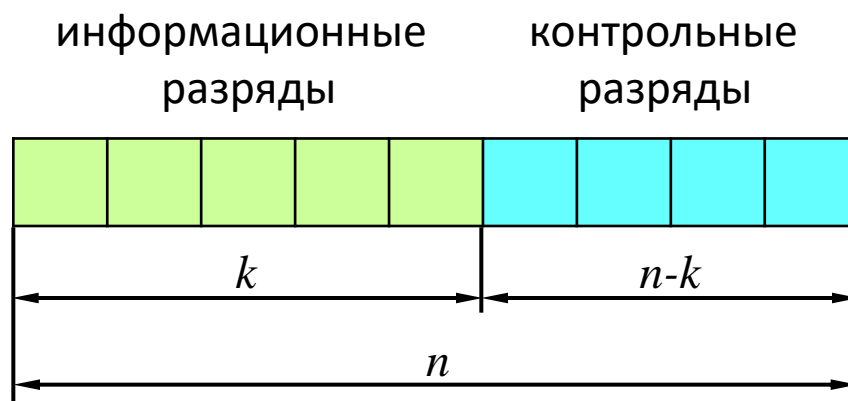
Коды Хэмминга

Вектор ошибки – это слово длины n , которое имеет единицу на месте неверно переданной цифры, а в остальных разрядах имеет нули.

Коды Хэмминга

Вектор ошибки – это слово длины n , которое имеет единицу на месте неверно переданной цифры, а в остальных разрядах имеет нули.

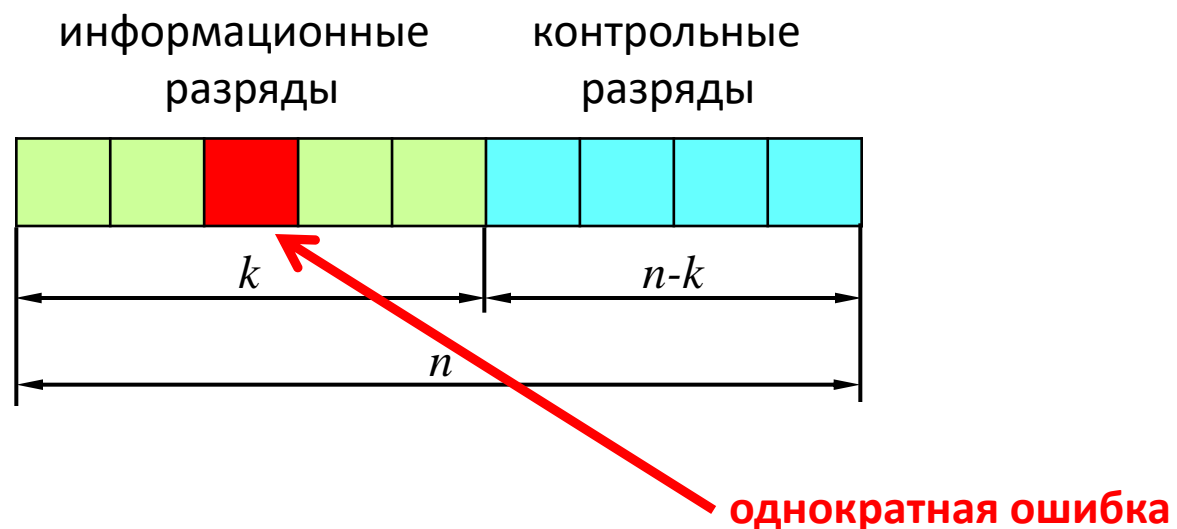
Кодовое слово



Коды Хэмминга

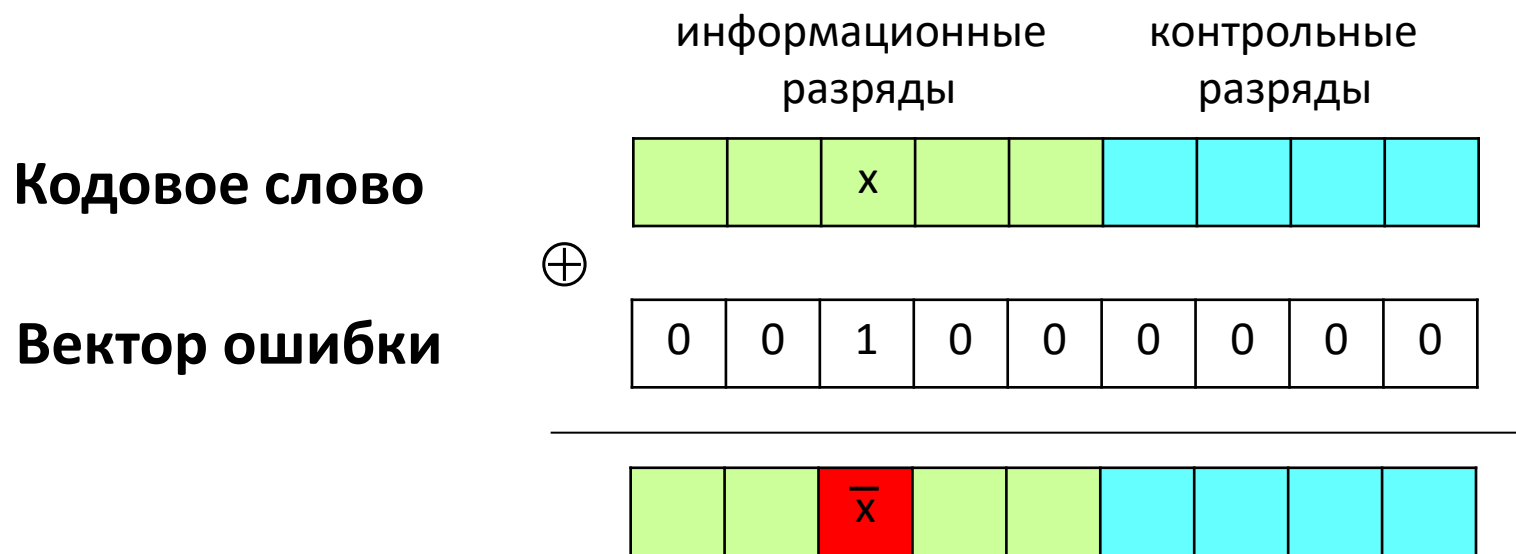
Вектор ошибки – это слово длины n , которое имеет единицу на месте неверно переданной цифры, а в остальных разрядах имеет нули.

Кодовое слово



Коды Хэмминга

Вектор ошибки – это слово длины n , которое имеет единицу на месте неверно переданной цифры, а в остальных разрядах имеет нули.



Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E										
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0				
1	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	0	0				
0	0	1	0	0	0	0				
0	0	0	1	0	0	0				
0	0	0	0	1	0	0				
0	0	0	0	0	1	0				
0	0	0	0	0	0	1				
0	0	0	0	0	0	0				

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	0	0				
0	0	1	0	0	0	0				
0	0	0	1	0	0	0				
0	0	0	0	1	0	0				
0	0	0	0	0	1	0				
0	0	0	0	0	0	1				
0	0	0	0	0	0	0				

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	0	0				
0	0	1	0	0	0	0				
0	0	0	1	0	0	0				
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E							Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	?	?	?

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	?	?	?

$$a_0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	?	?	?

$$a_0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	?	?	?

$$a_0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	0	1	1

Передаваемое слово

$$a_0 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	0	0	0	1	1

Принятое слово

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	0	0	0	1	1

Принятое слово

$$s_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	0	0	0	1	1

Принятое слово

$$s_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	0	0	0	1	1

Принятое слово

$$s_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0	1	0	0	0	1	1

Принятое слово

$$s_0 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Синдром = 101

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример построения кода для $n = 7$

Вектор ошибки E								Синдром		
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0		s_2	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	0		1	1	1
0	1	0	0	0	0	0		1	1	0
0	0	1	0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	1	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0	1	0	0		1	0	0
0	0	0	0	0	1	0		0	1	0
0	0	0	0	0	0	1		0	0	1
0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
	0	1	0	0	0	1	1	Принятое слово
\oplus	0	0	1	0	0	0	0	Вектор ошибки

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

Пример передачи слова 0110

	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
	0	1	0	0	0	1	1	Принятое слово
\oplus	0	0	1	0	0	0	0	Вектор ошибки
	0	1	1	0	0	1	1	Исправленное слово

Кодер:

$$a_0 = a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$a_2 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Декодер:

$$s_0 = a_0 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_6$$

$$s_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_6$$

$$s_2 = a_2 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6$$

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n + 1$$

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n + 1$$

число контрольных разрядов

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n + 1$$



число различных
возможных синдромов

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n+1$$

число различных
векторов однократных ошибок
(включая нулевой)

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n + 1$$

Избыточность кода Хэмминга имеет локальные минимумы, когда неравенство превращается в равенство:

код 7,4: $Q = \frac{7-4}{7} \cdot 100\% \cong 43\%$

код 15,11: $Q = \frac{15-11}{15} \cdot 100\% \cong 27\%$

Коды Хэмминга

При заданном числе информационных разрядов k длина кодового слова n :

$$2^{n-k} \geq n + 1$$

Избыточность кода Хэмминга имеет локальные минимумы, когда неравенство превращается в равенство:

код 7,4: $Q = \frac{7-4}{7} \cdot 100\% \cong 43\%$

код 1010, 1000: $Q = \frac{1010-1000}{1010} \cdot 100\% \cong 1\%$

код 15,11: $Q = \frac{15-11}{15} \cdot 100\% \cong 27\%$

Матричное представление линейных кодов

Формирование кодового слова **P** в матричной форме:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{G}$$

где **I** – информационная матрица-строка;

G – генераторная матрица.

Матричное представление линейных кодов

Формирование кодового слова **P** в матричной форме:

$$\mathbf{P} = \mathbf{IG}$$

где **I** – информационная матрица-строка;

G – генераторная матрица.

Пример – код с контролем по чётности при $k = 3$, $\mathbf{I} = 110$

$$\mathbf{P} = (110) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Матричное представление линейных кодов

Формирование кодового слова **P** в матричной форме:

$$\mathbf{P} = \mathbf{IG}$$

где **I** – информационная матрица-строка;

G – генераторная матрица.

Пример – код с контролем по чётности при $k = 3$, $\mathbf{I} = 110$

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= |1 \quad 1 \quad 0| \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= |(1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0) \quad (1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 0) \quad (1 \cdot 0 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 1) \quad (1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1)| = |1 \quad 1 \quad 0 \quad 0|\end{aligned}$$

Матричное представление линейных кодов

Определение правильности принятого слова в матричной форме:

$$\mathbf{P}\mathbf{H}^T$$

где \mathbf{H} – проверочная матрица-строка

Матричное представление линейных кодов

Определение правильности принятого слова в матричной форме:

$$\mathbf{P}\mathbf{H}^T = 0$$

где \mathbf{H} – проверочная матрица-строка

Для рассмотренного примера:

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Матричное представление линейных кодов

Определение правильности принятого слова в матричной форме:

$$\mathbf{R}\mathbf{H}^T = 0$$

где \mathbf{H} – проверочная матрица-строка

Для рассмотренного примера:

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 0 \cdot 1 = 0$$

Матричное представление кода Хэмминга

Генераторная матрица кода 7,4:

$$\mathbf{G}_{7,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричное представление кода Хэмминга

Генераторная матрица кода 7,4:

$$\mathbf{G}_{7,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

единичная матрица
размерности $k \times k$

Матричное представление кода Хэмминга

Генераторная матрица кода 7,4:

$$\mathbf{G}_{7,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

дополнение
размерности $k \times (n-k)$

Матричное представление кода Хэмминга

Генераторная матрица кода 7,4:

$$\mathbf{G}_{7,4} = \begin{vmatrix} 1000111 \\ 0100110 \\ 0010101 \\ 0001011 \end{vmatrix}$$

Пример составления кодового слова:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1010 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1000111 \\ 0100110 \\ 0010101 \\ 0001011 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1010010 \end{vmatrix}$$

Матричное представление кода Хэмминга

Проверочная матрица кода 7,4:

$$\mathbf{H}_{7,4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Строки матриц \mathbf{H} и \mathbf{G} взаимно ортогональны:

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H}^T = 0$$

Матричное представление кода Хэмминга

Синдром:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T$$

Например для допустимого кодового слова 0110011:

$$S = |0110011| \times \begin{array}{c} |111| \\ |110| \\ |101| \\ |011| \\ |100| \\ |010| \\ |001| \end{array} = |000|$$

Матричное представление кода Хэмминга

Синдром:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T$$

Для кодового слова, содержащего однократную ошибку:

$$S = |011011| \times \begin{array}{c} |111| \\ |110| \\ |101| \\ |011| \\ |100| \\ |010| \\ |001| \end{array} = |011|$$