universität wien

Newtonverfahren

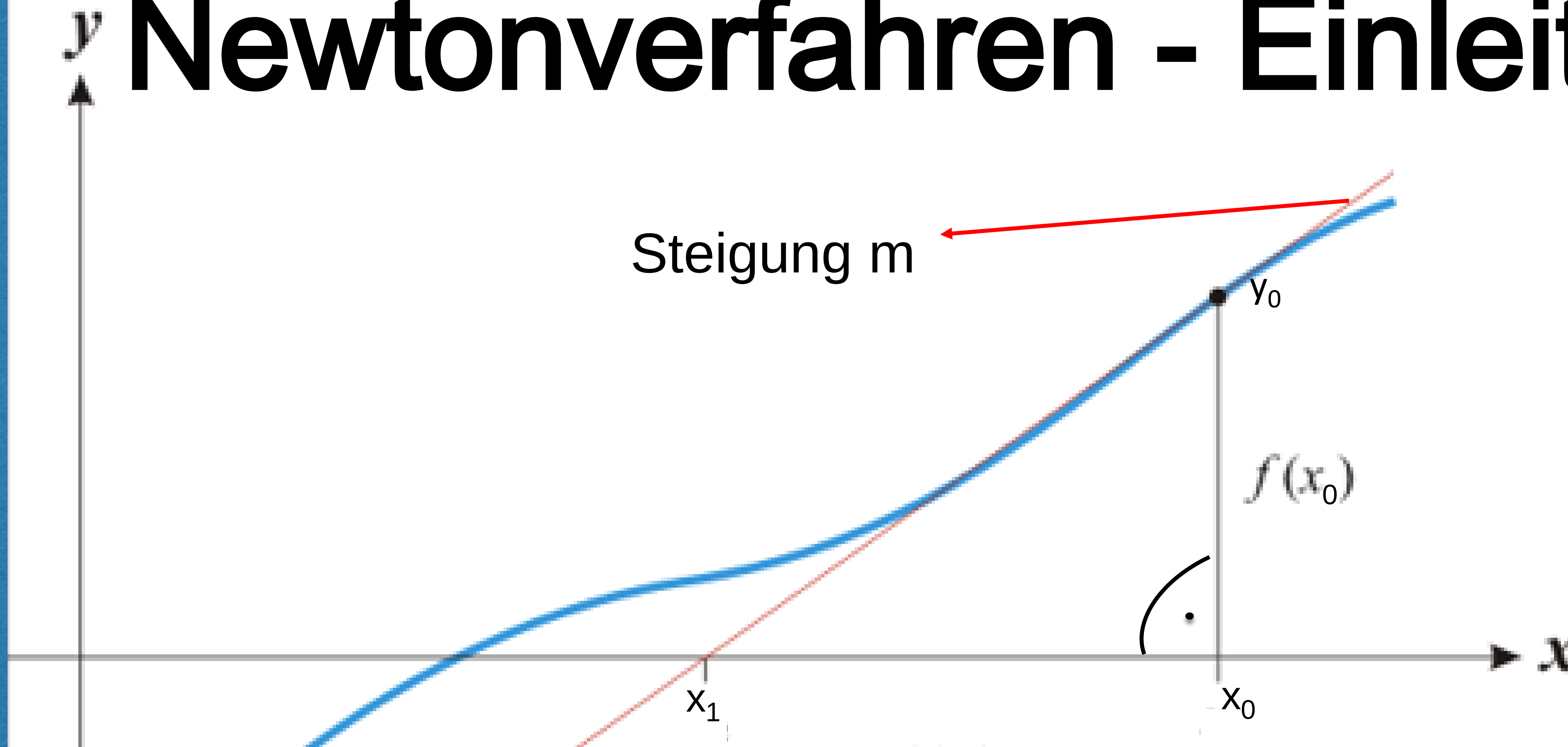
Projektmitglieder:

Patrik Misurec
Patrick Mittendorfer
Neli Petkova
Ajla Kasic
Nico Fallosch

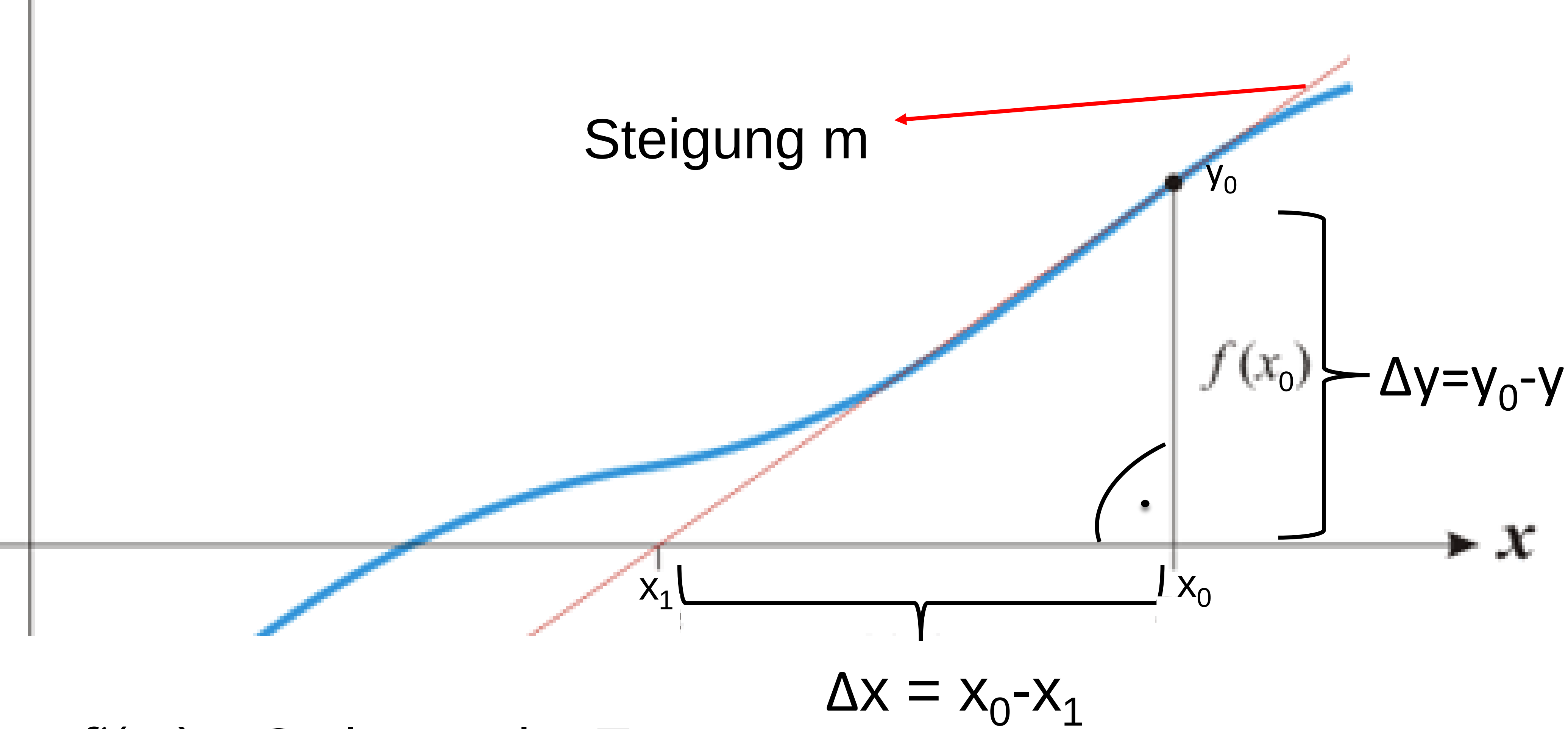
Newtonverfahren - Einleitung

- Iterationsverfahren $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
- Algorithmus zur Suche von Nullstellen einer stetig differenzierbaren reellen Funktion f
- günstigen Startwert auswählen (relativ nahe zum Optimum)=> gute Konvergenz

Newtonverfahren - Einleitung



Newtonverfahren - Einleitung

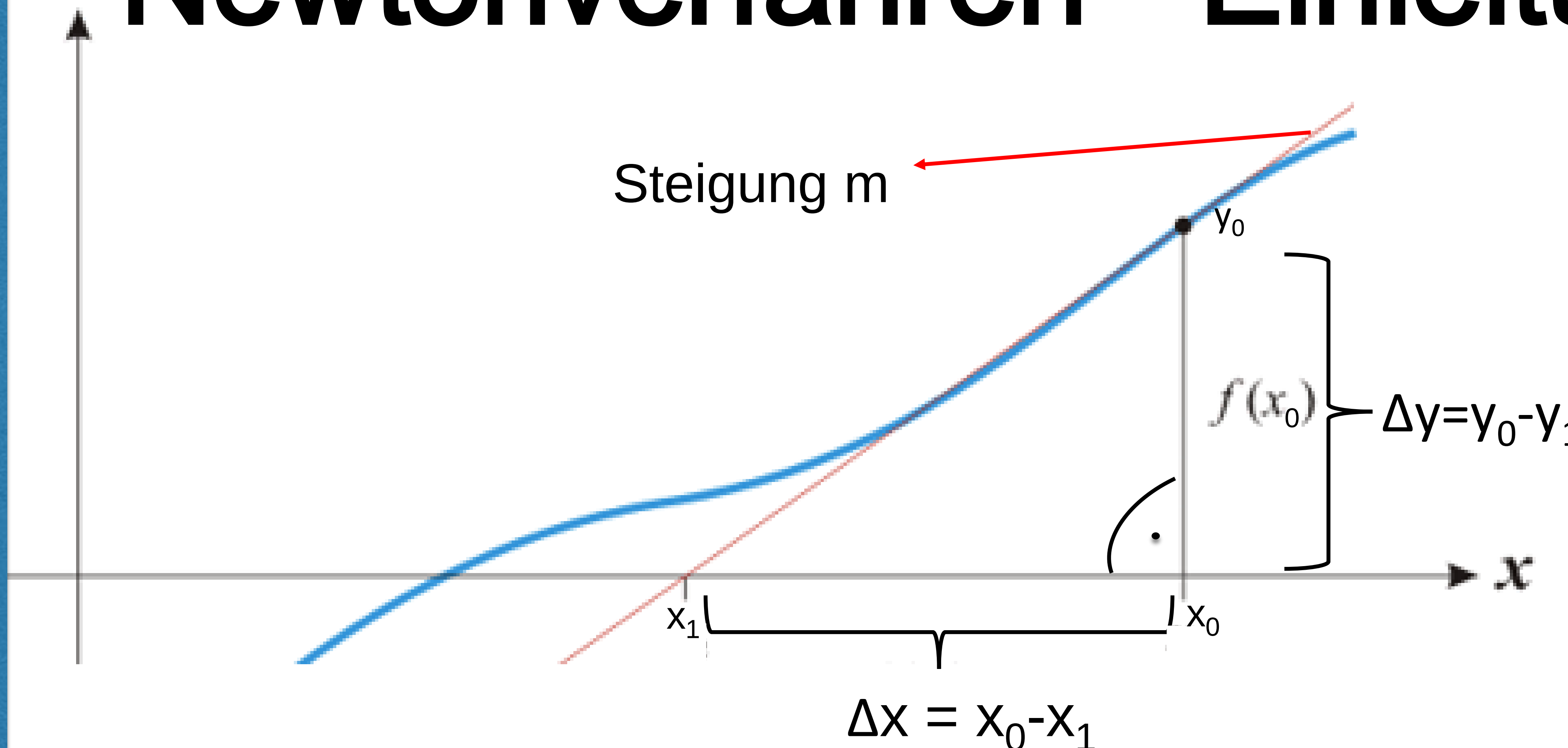


$m = f'(x_0)$ – Steigung der Tangente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$X_1 = ?$

Newtonverfahren - Einleitung



$m = f'(x_0)$ – Steigung der Tangente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$X_1 = ?$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x0 - x1} \longrightarrow X_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Approximation durch Nullsetzen der Ableitung

- Angenommen g(x) = f´(x)
- Gleichung der Tangente $\mathrm{m} = g'(x_0).$ im ausgewählten Startpunkt x_0
- Schnittpunkt mit x- Achse ergibt einen weiteren Punkt x_1
- Analog wird mit der Iterationsformel $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$ weitergesetzt.

$$\mathrm{m} = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

$$g'(x_0) = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

$$g'(x_0) \times (x_0 - x_1) = g(x_0)$$

$$x_0 - x_1 = \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

Approximation durch quadratisches Polynom I

- Allgemeine Taylorformel für das approximierende Polynom (Taylorpolynom 2. Grades)

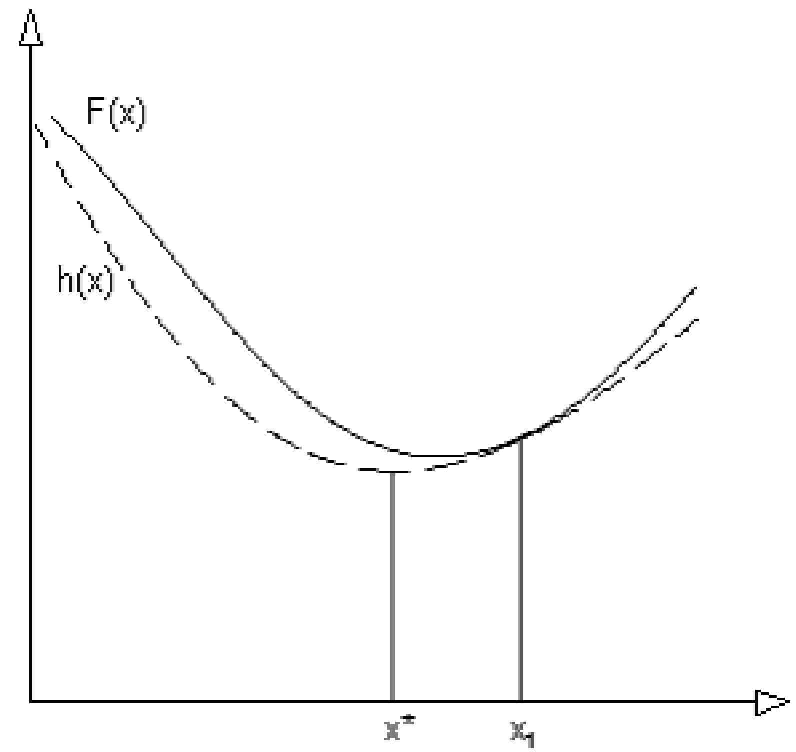
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \times (x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \times (x_1 - x_0)^2$$

- Das lässt sich verallgemeinern

$$f(x) = a \times x^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2a \times x + b$$

$$f''(x) = 2a$$



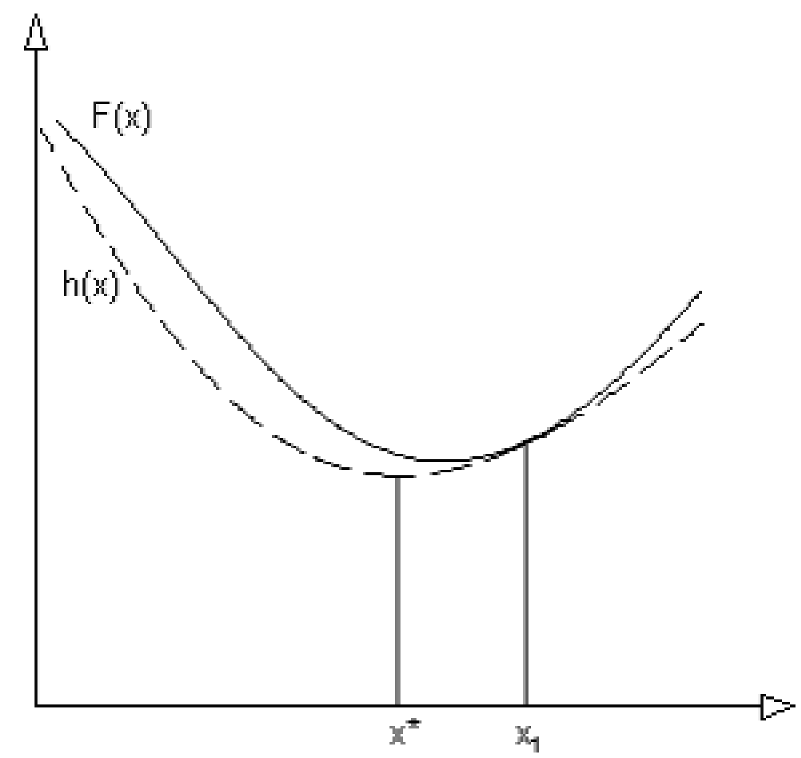
Approximation durch quadratisches Polynom II

- Minimum des Taylorpolynoms

$$f'(x*) = 2a \times x + b = 0 => x* = \frac{-b}{(2a)}$$

$$2a = f''(x)$$

$$b = -2a \times x + f'(x) = -f''(x) \times x + f'(x)$$



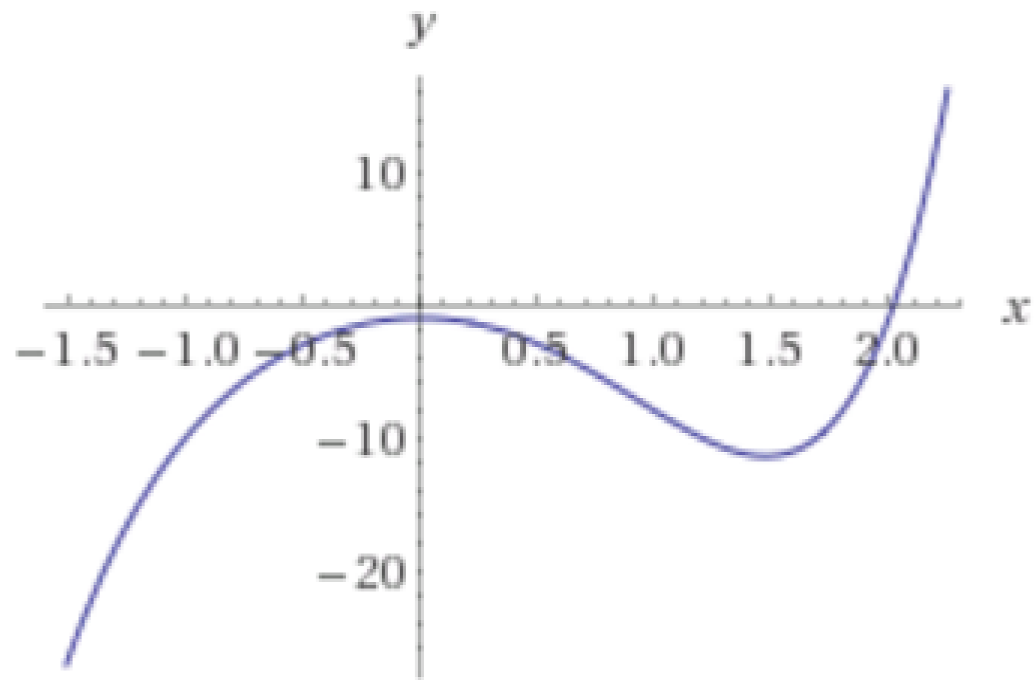
$$x* = \frac{-(-f''(x) \times x + f'(x))}{2 \times \frac{f''(x)}{2}} = \frac{f''(x) \times x - f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

Beispiel

$f(x) = x^5 - 8x^2 - 1$

$f'(x) = 5x^4 - 16x$

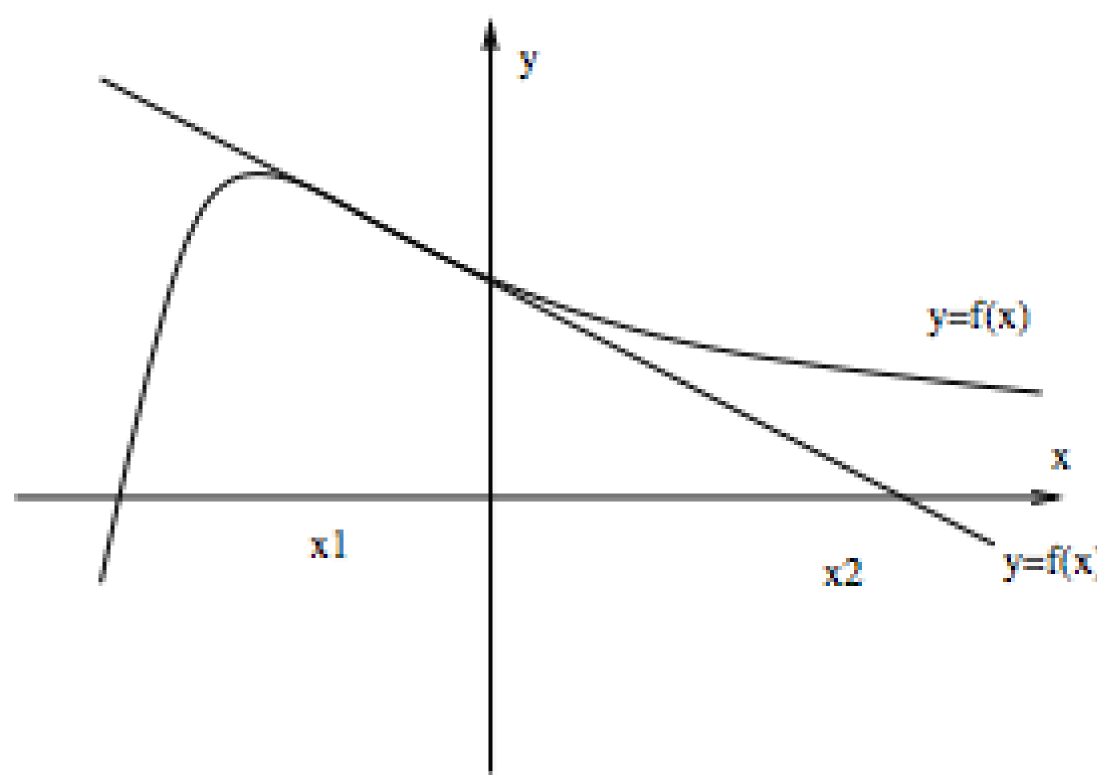
$f''(x) = 20x^3 - 16$



n	x_n
1	2
2	1,666666667
3	1,511121857
4	1,475400801
5	1,473616925
6	1,473612599
7	1,473612599

Mögliche Problemfälle bei schlecht gewähltem Startwert

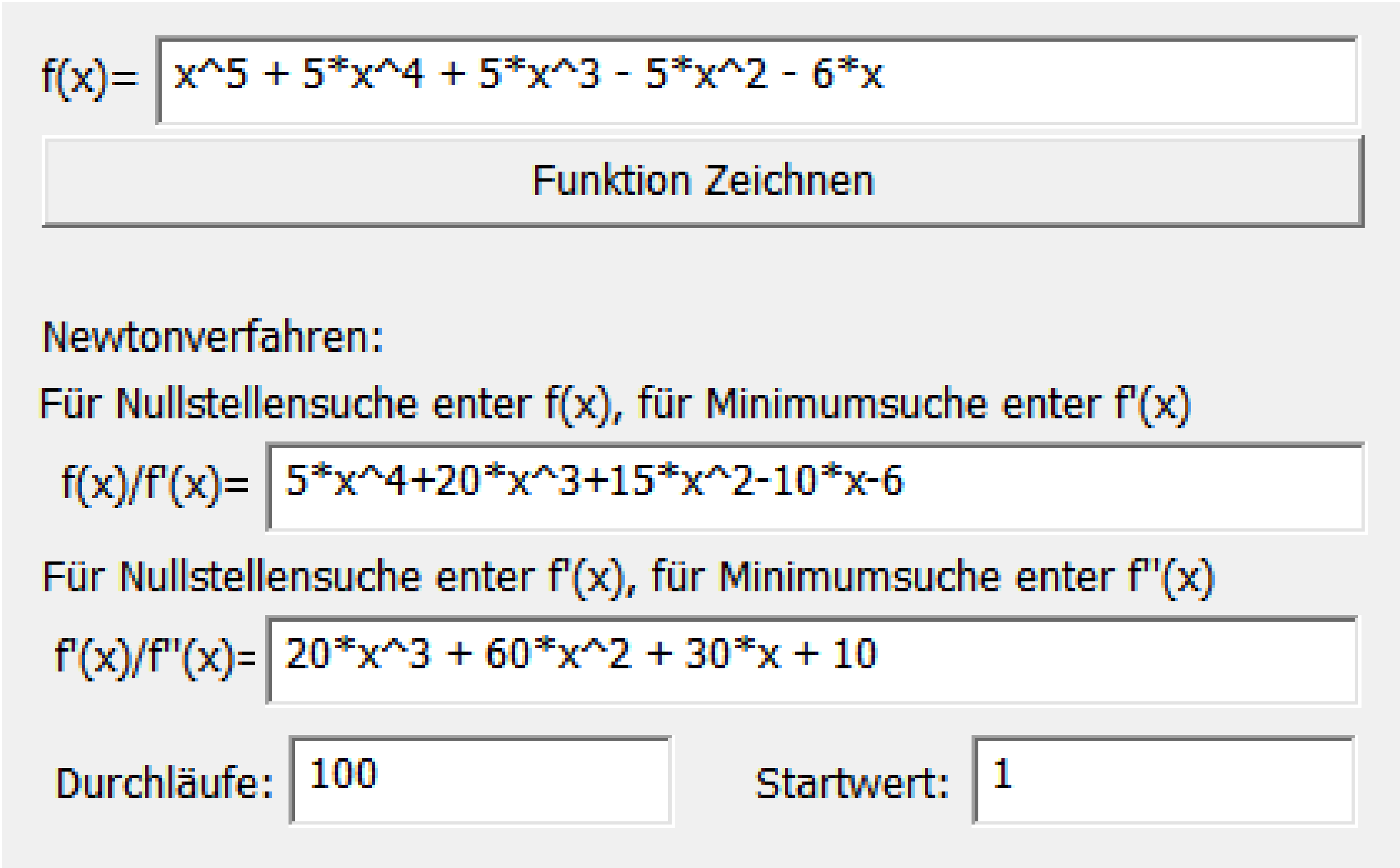
- Die Folge divergiert, der Abstand zum Optimum wächst über alle Grenzen.



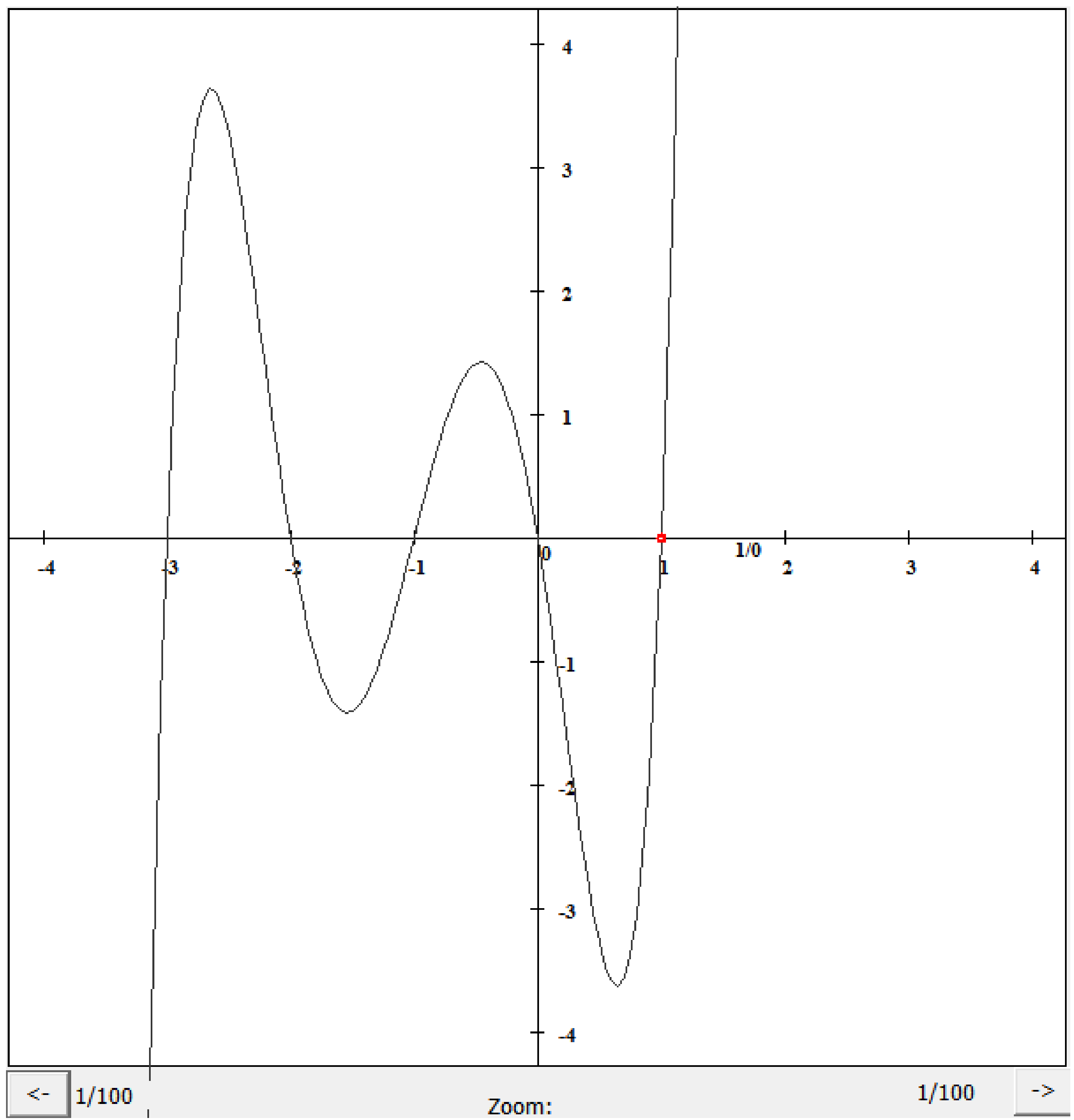
Mögliche Problemfälle bei schlecht gewähltem Startwert

- Falls die Funktion mehrere Optimen hat kann sie gegen ein anderes als des gewünschte Optimum konvergieren.

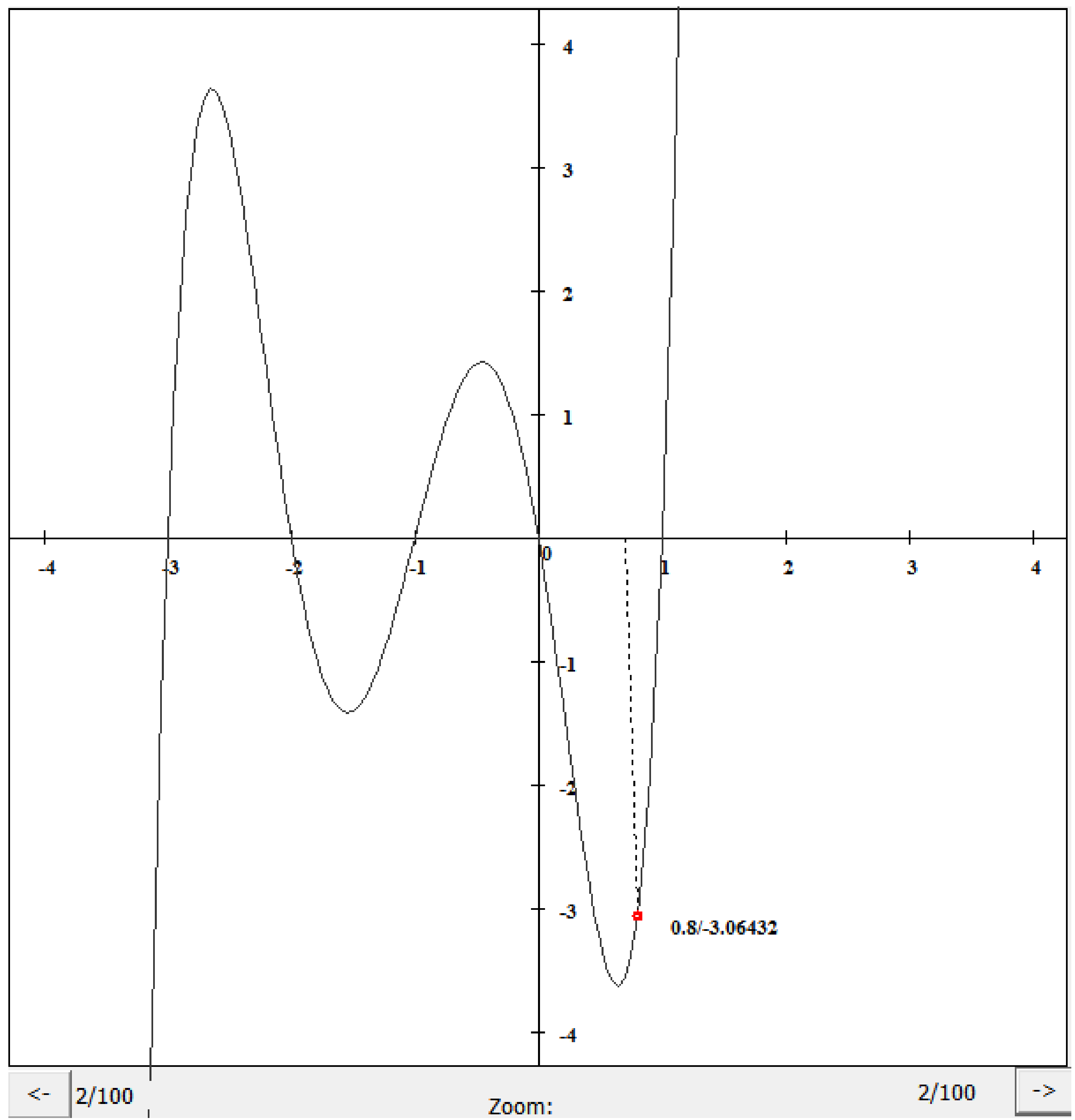
- Z.B.:



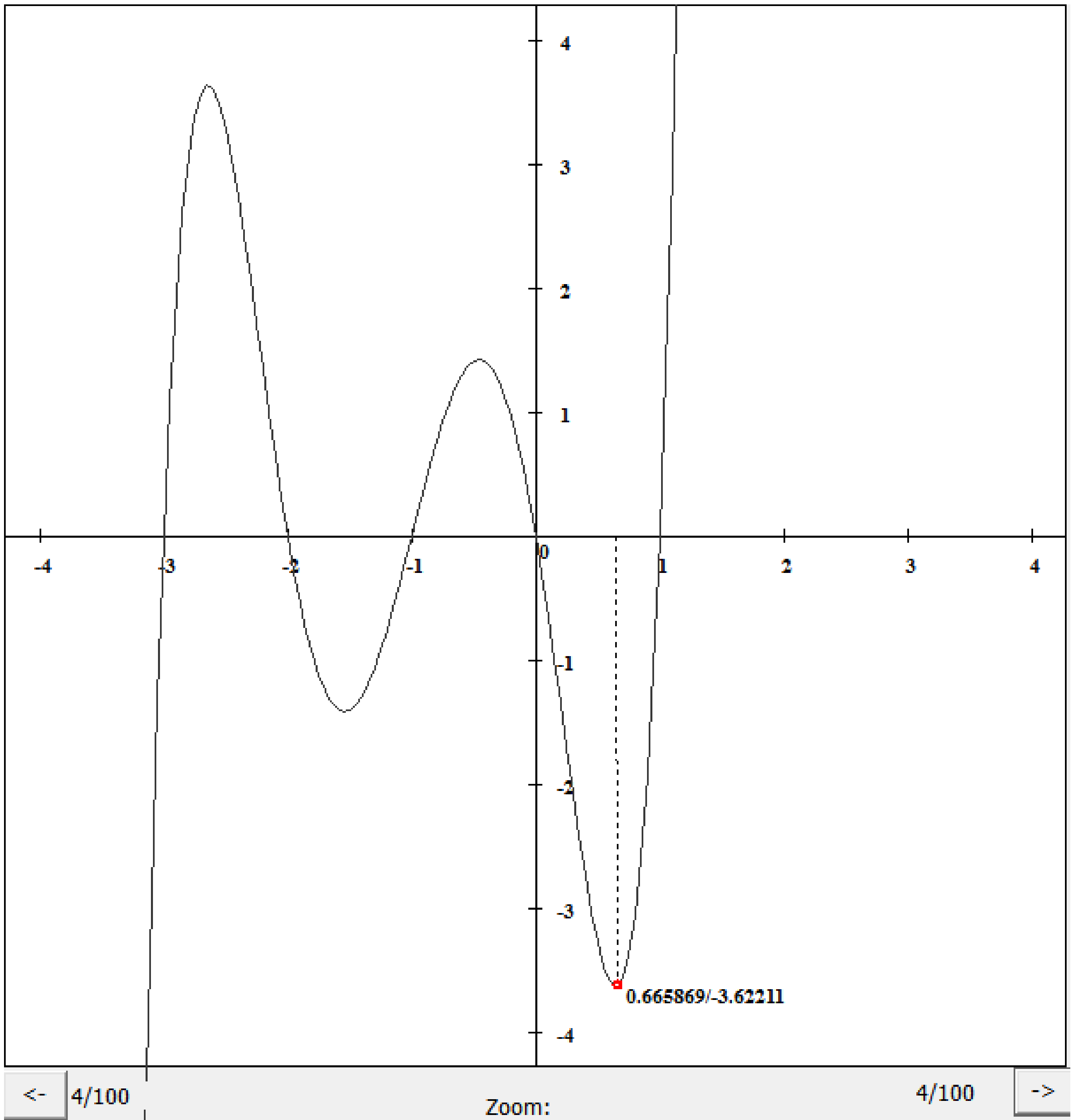
Startpunkt = 1



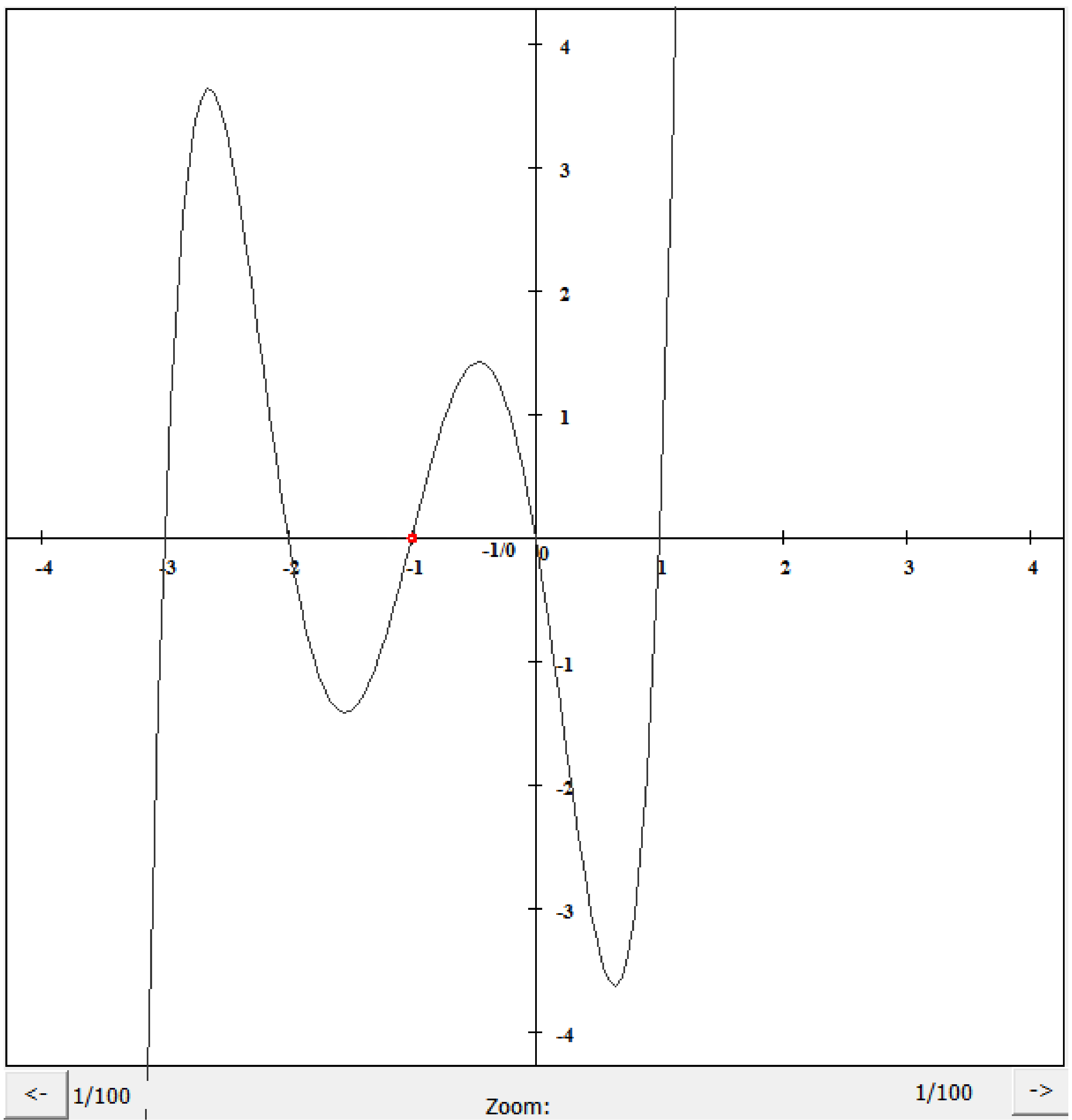
Startpunkt = 1



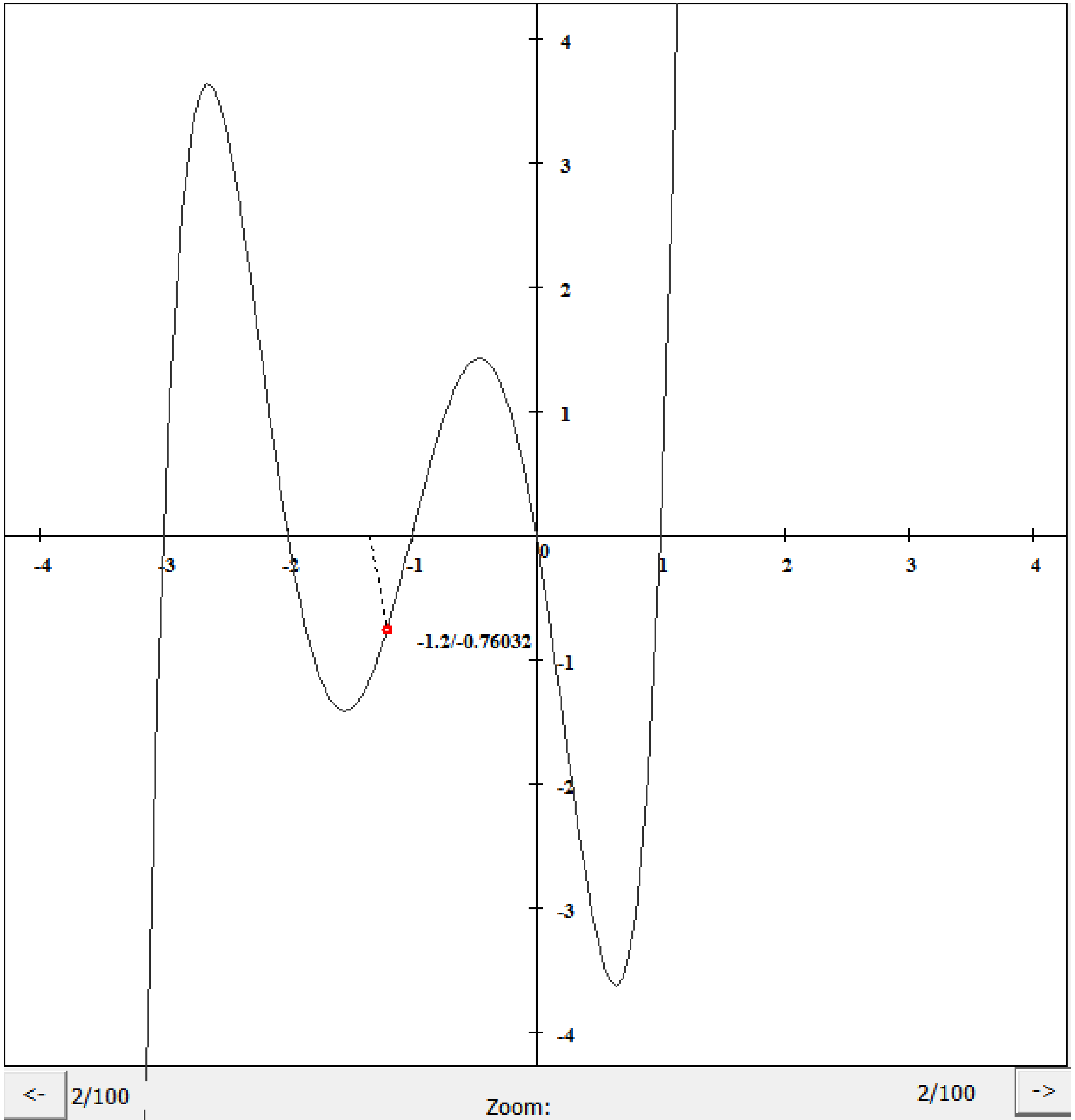
Startpunkt = 1



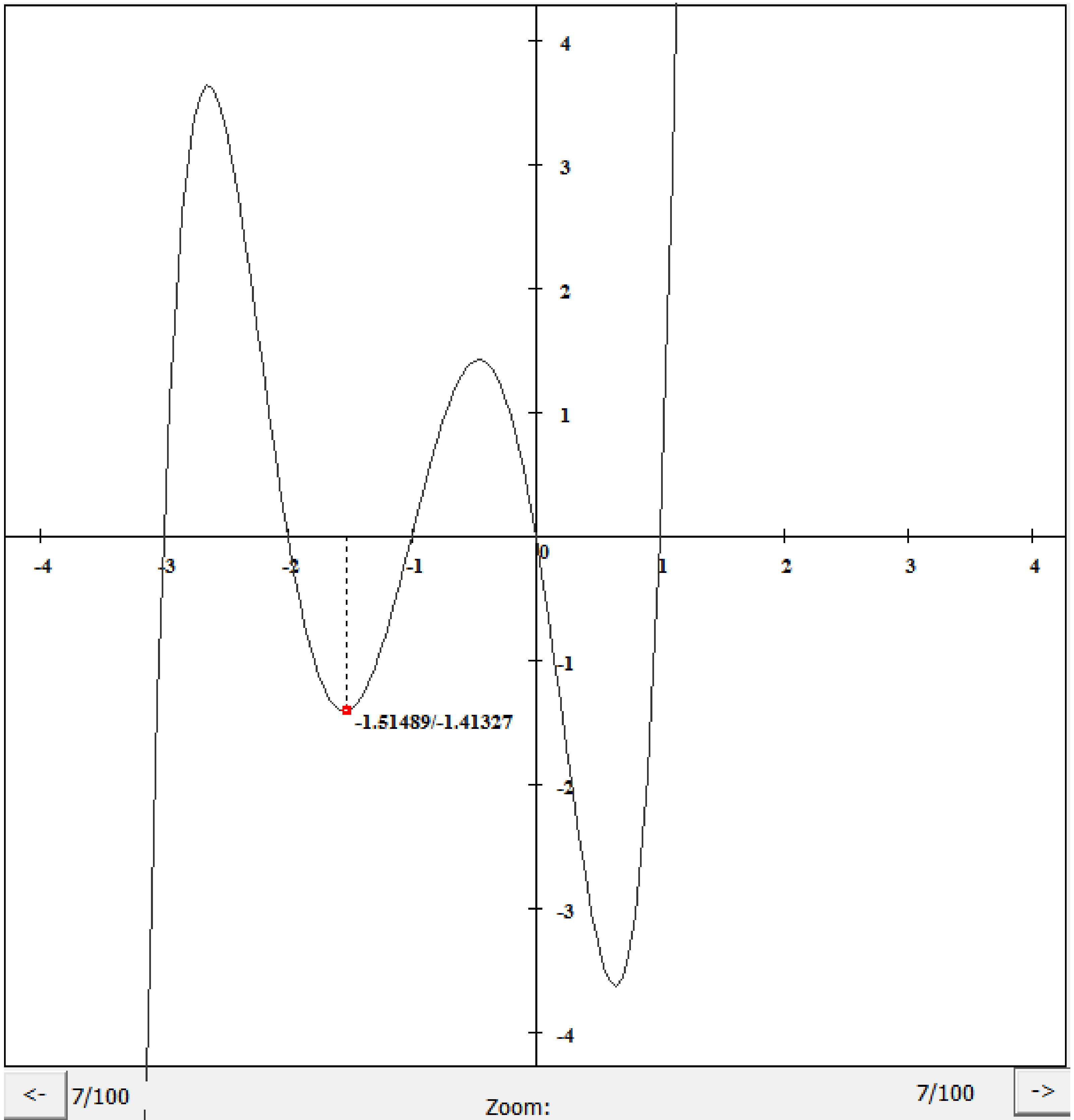
Startpunkt = -1



Startpunkt = -1



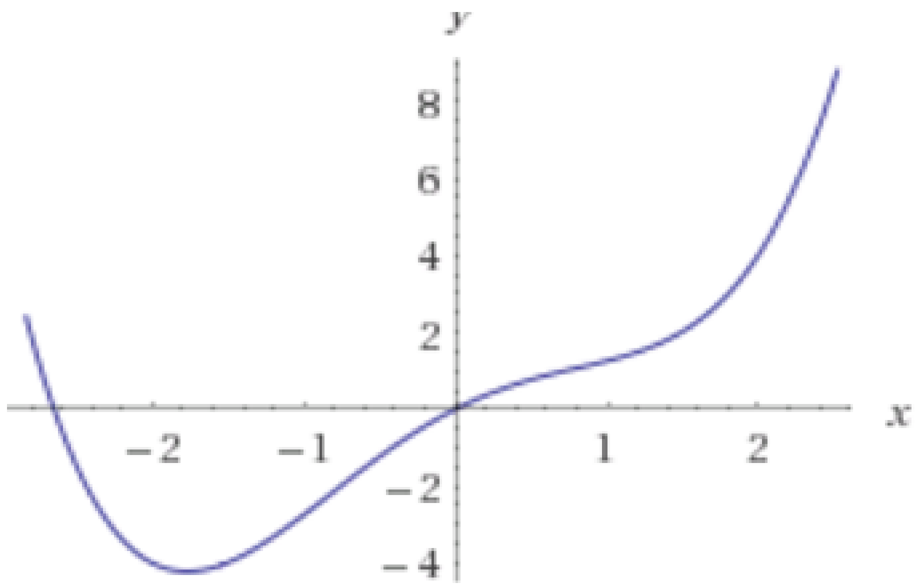
Startpunkt = -1



Mögliche Problemfälle bei schlecht gewähltem Startwert

- endlich viele Funktionswerte wechseln sich ab (oszilliert), z.B.:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x$$
$$f'(x) = x^3 - 2x + 2$$
$$f''(x) = 3x^2 - 2$$



$$x_0 = 0$$

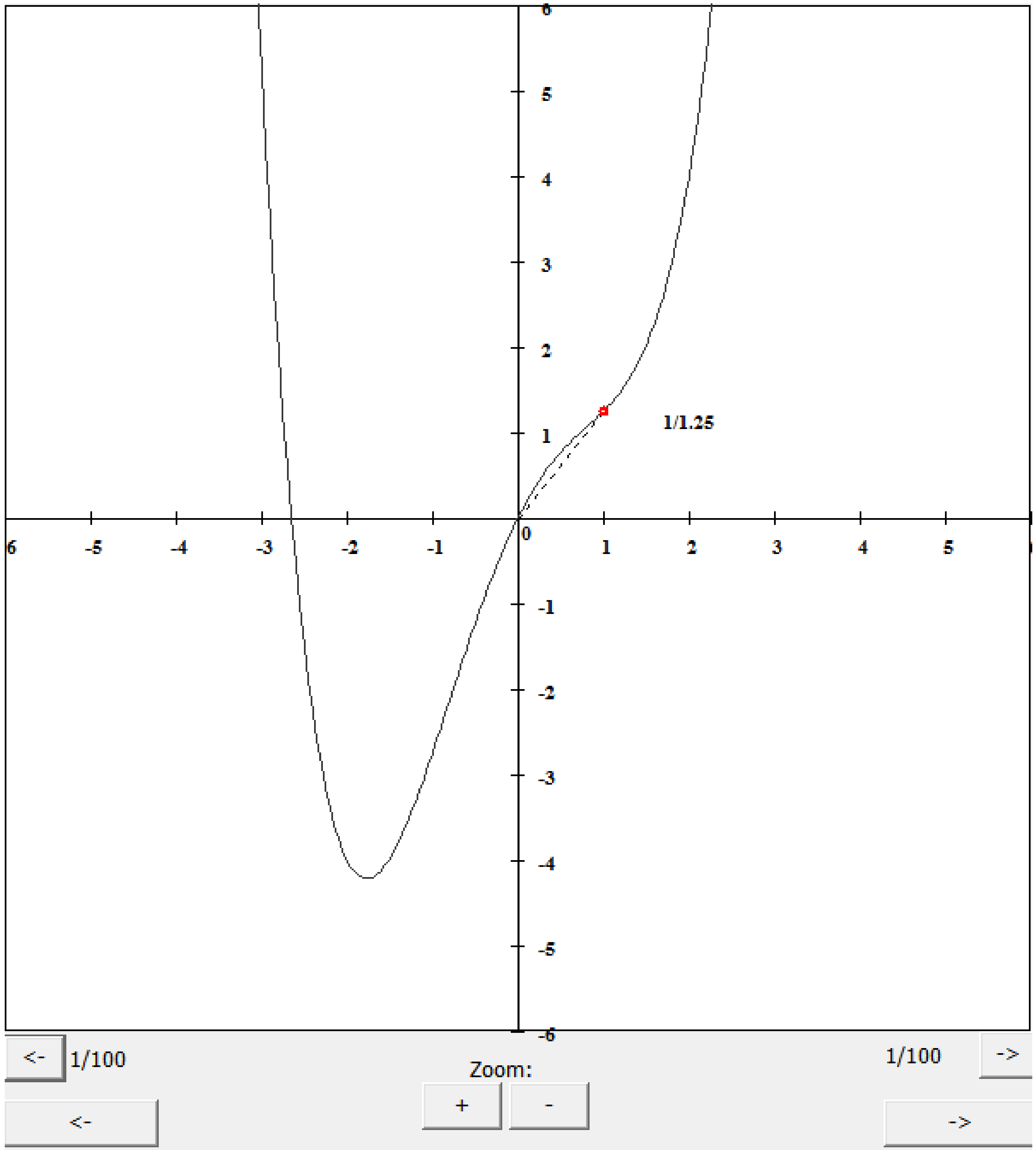
$$x_1 = 0 - \frac{0^3 - 2\times 0 + 2}{3\times 0^2 - 2} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{1^3 - 2\times 1 + 2}{3\times 1^2 - 2} = 0$$

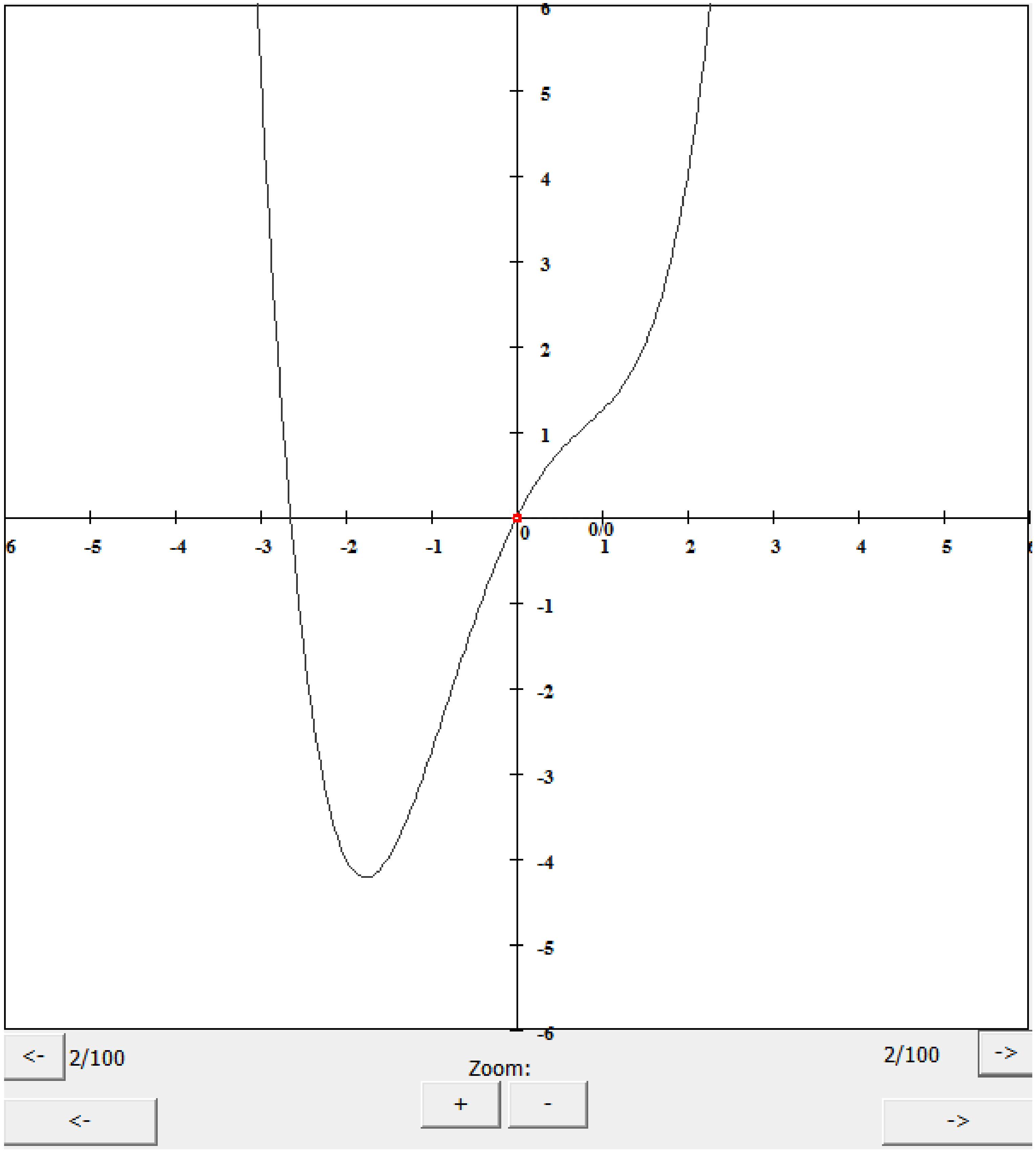
$$x_3 = 0 - \frac{0^3 - 2\times 0 + 2}{3\times 0^2 - 2} = 1$$

$$x_4 = 1 - \frac{1^3 - 2\times 1 + 2}{3\times 1^2 - 2} = 0$$

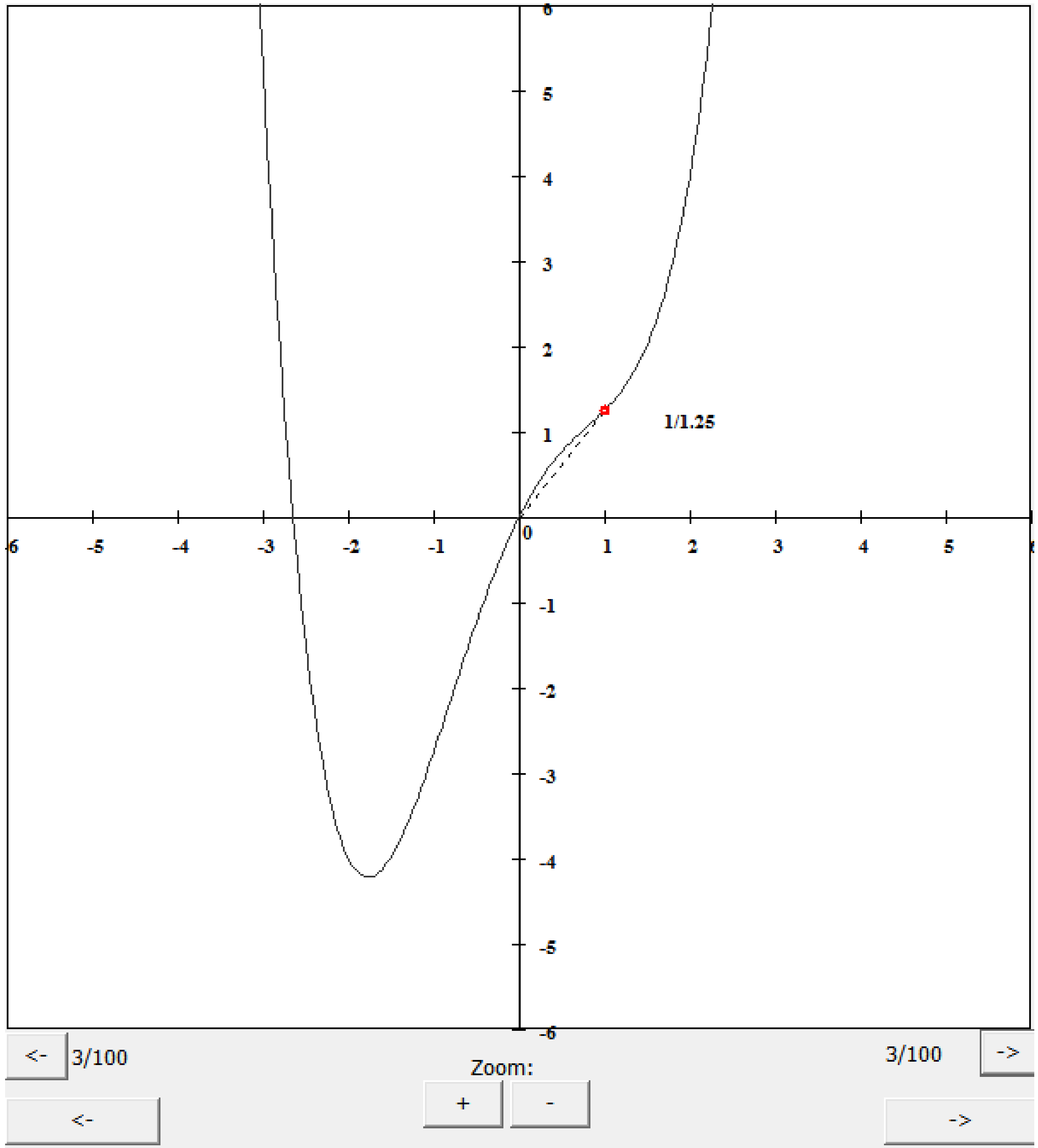
Oszillation



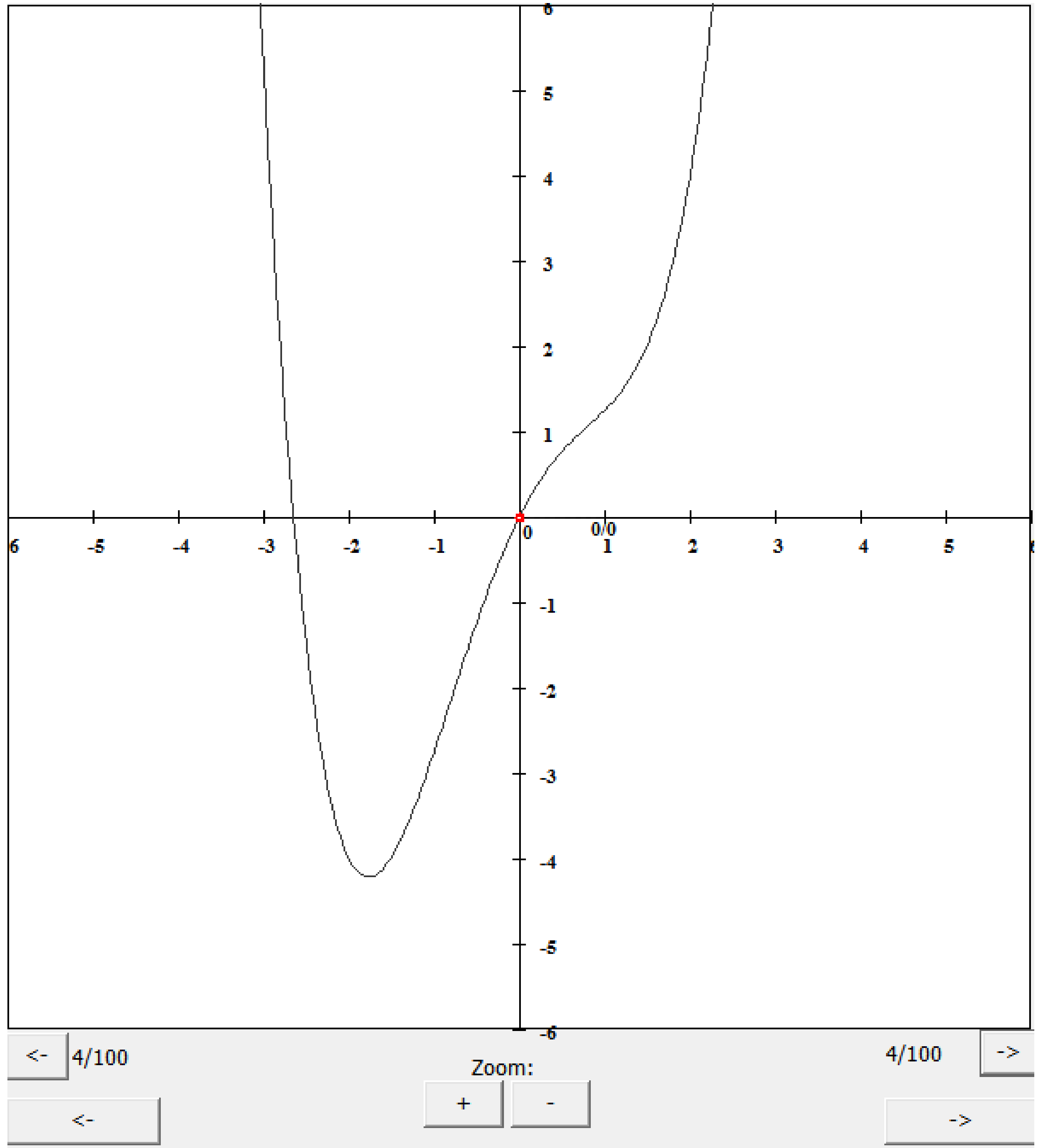
Oszillation



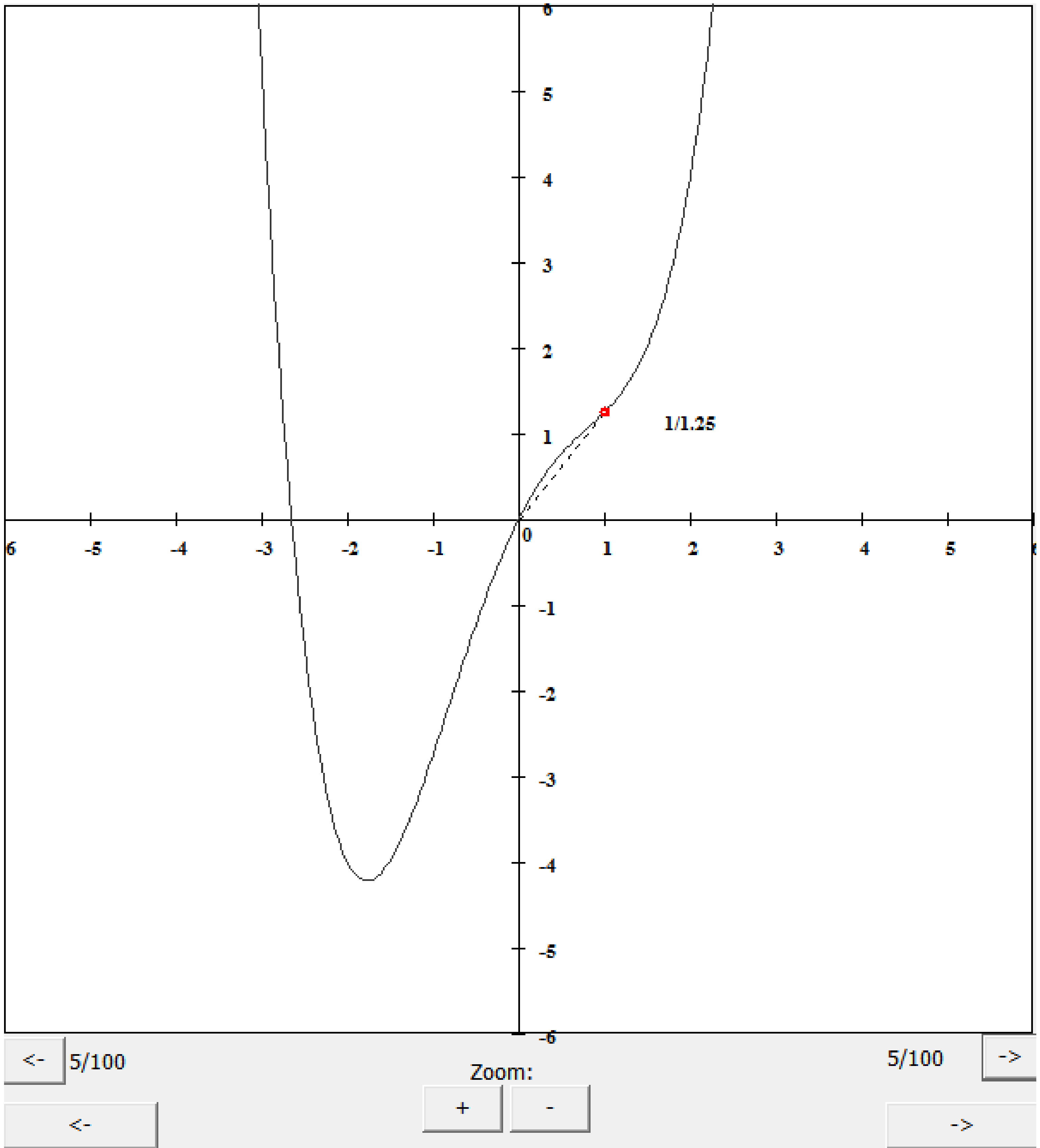
Oszillation



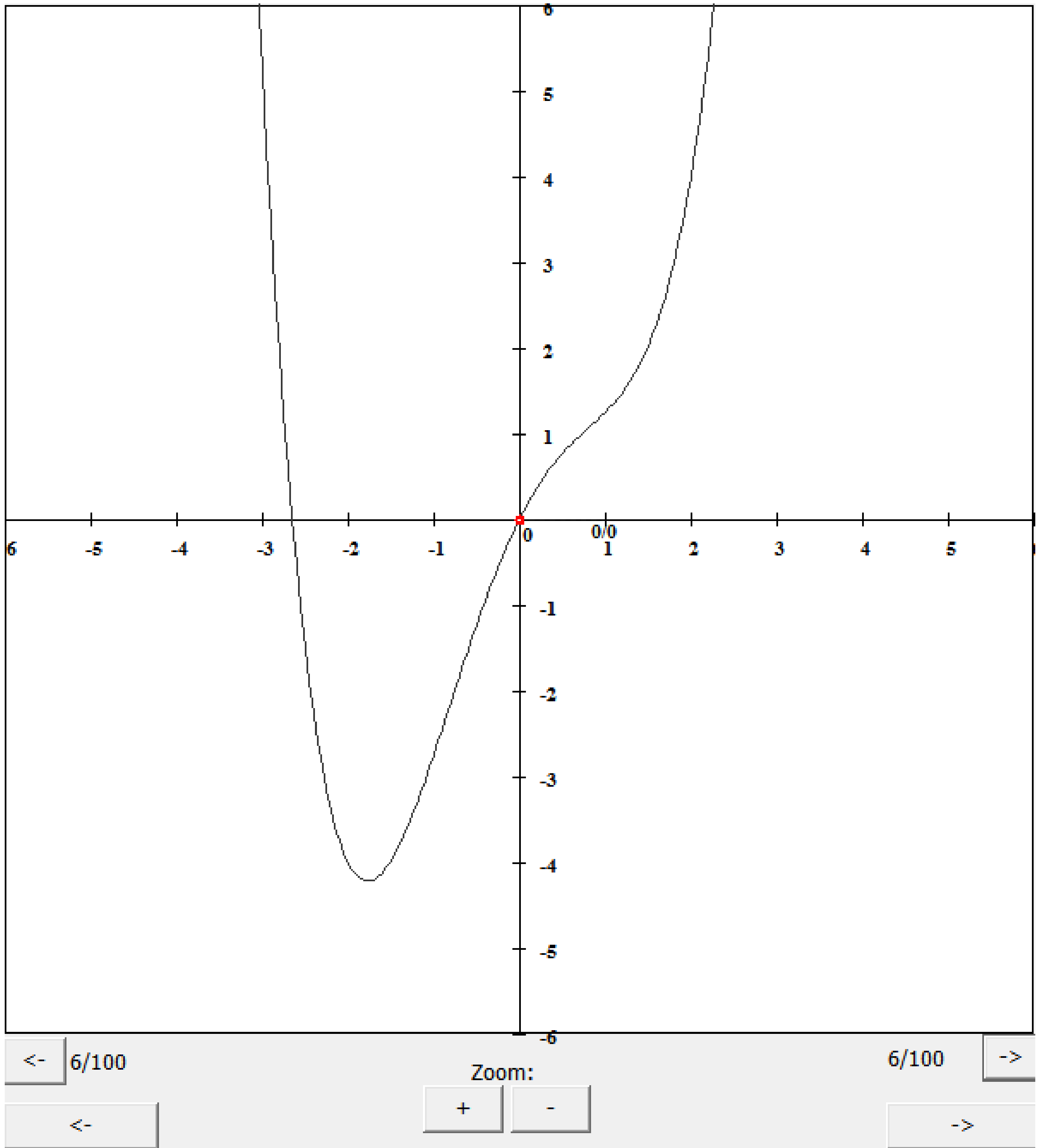
Oszillation



Oszillation



Oszillation



Gedämpftes Newtonverfahren

- Das Newton-Verfahren konvergiert zwar quadratisch, aber nur **lokal.**
- Globale Konvergenz kann ggf. durch einen Dämpfungsterm erreicht werden
- Erweiterung der Iterationsformel um einen Dämpfunsparameter λ

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \times \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

- Veränderung der Weite des Intervals

$\lambda = 0.5, x_0 = 0 \to 64$ Schritte

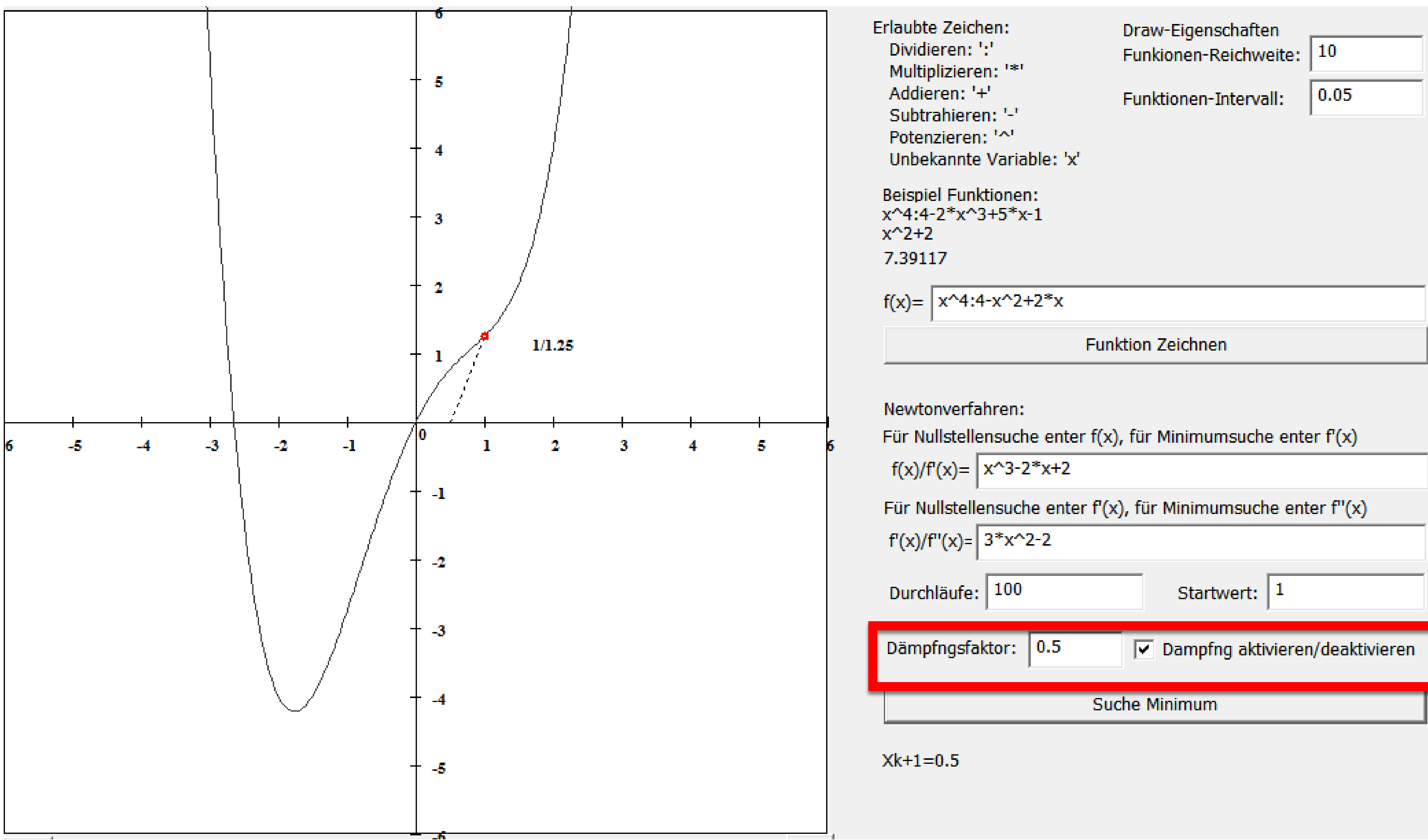
$\lambda = 0.25, x_0 = 0 \to 245$ Schritte

$\lambda = 0.25, x_0 = 0 \to 47$ Schritte

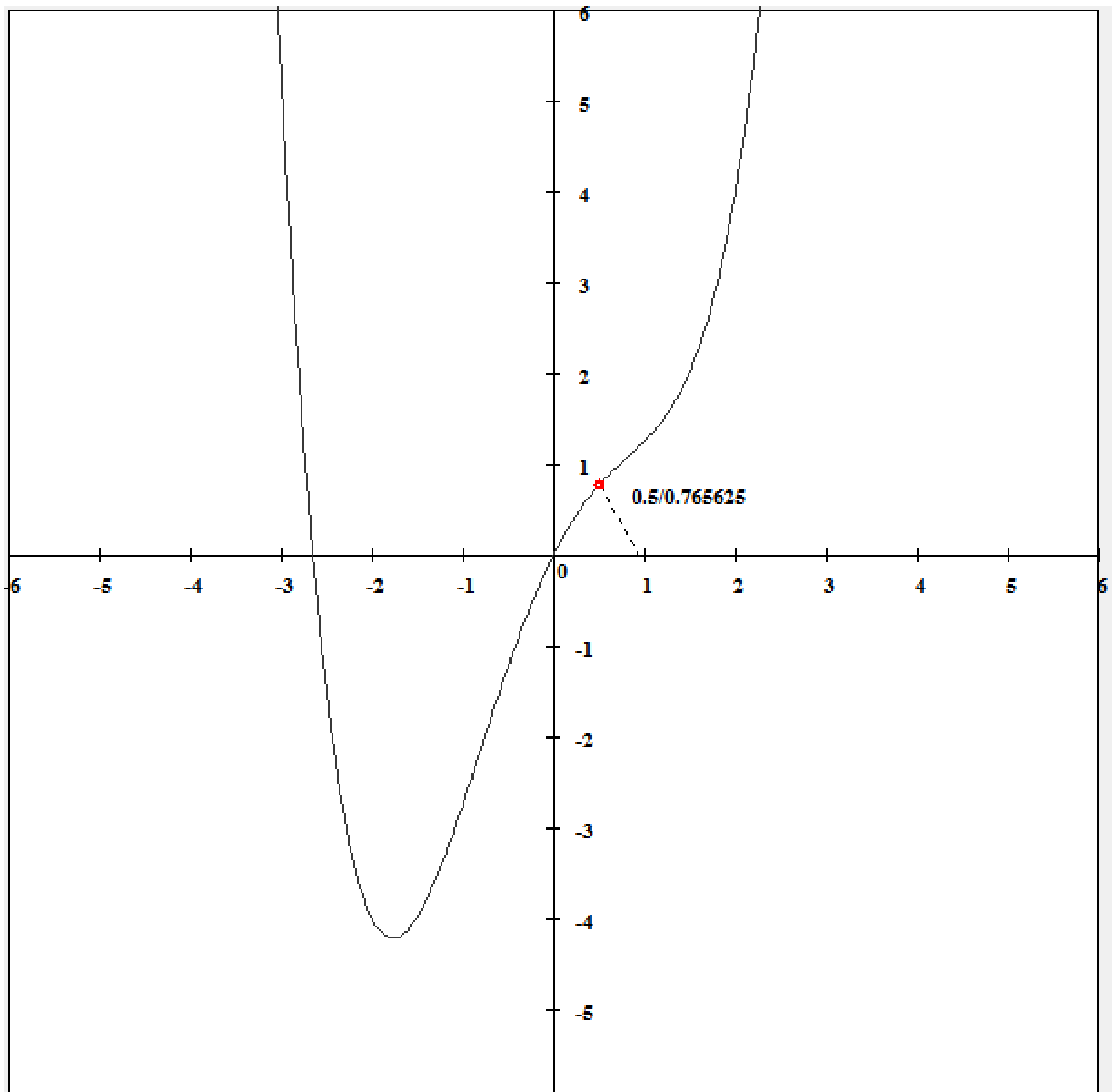
$\lambda = 0.95, x_0 = 0 \to 39$ Schritte

$\lambda = 0.99, x_0 = 0 \to \infty$ Schritte

Gedämpftes Newtonverfahren



Gedämpftes Newtonverfahren



Erlaubte Zeichen:
Dividieren: ':'
Multiplizieren: '*'
Addieren: '+'
Subtrahieren: '-'
Potenzieren: '^'
Unbekannte Variable: 'x'

Draw-Eigenschaften
Funkionen-Reichweite: 10
Funktionen-Intervall: 0.05

Beispiel Funktionen:
x^4:4-2*x^3+5*x-1
x^2+2
7.39117

f(x)= x^4:4-x^2+2*x

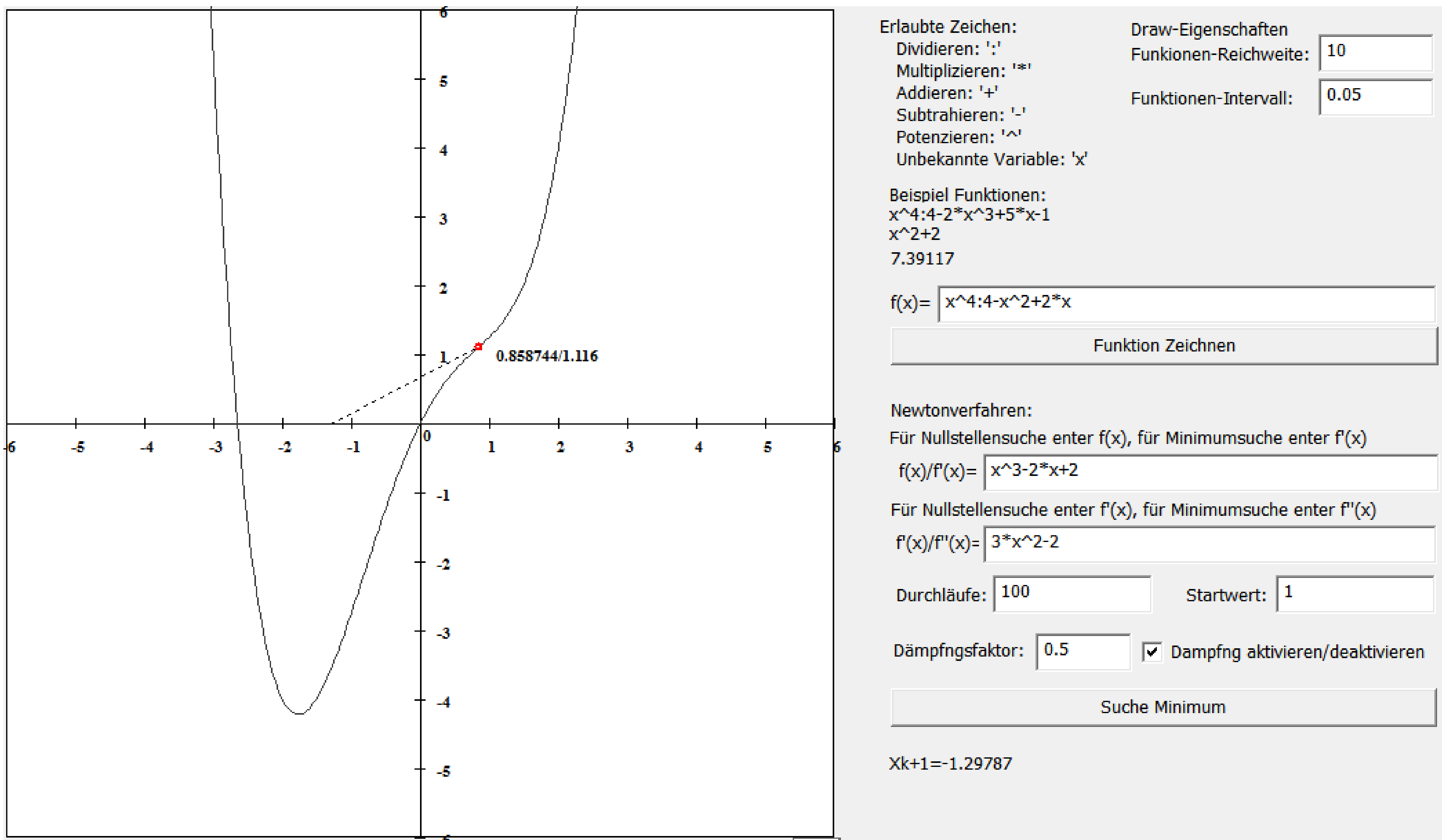
Funktion Zeichnen

Newtonverfahren:
Für Nullstellensuche enter f(x), für Minimumsuche enter f'(x)
f(x)/f'(x)= x^3-2*x+2
Für Nullstellensuche enter f'(x), für Minimumsuche enter f''(x)
f'(x)/f''(x)= 3*x^2-2
Durchläufe: 100 Startwert: 1
Dämpfngsfaktor: 0.5 ☑ Dampfng aktivieren/deaktivieren

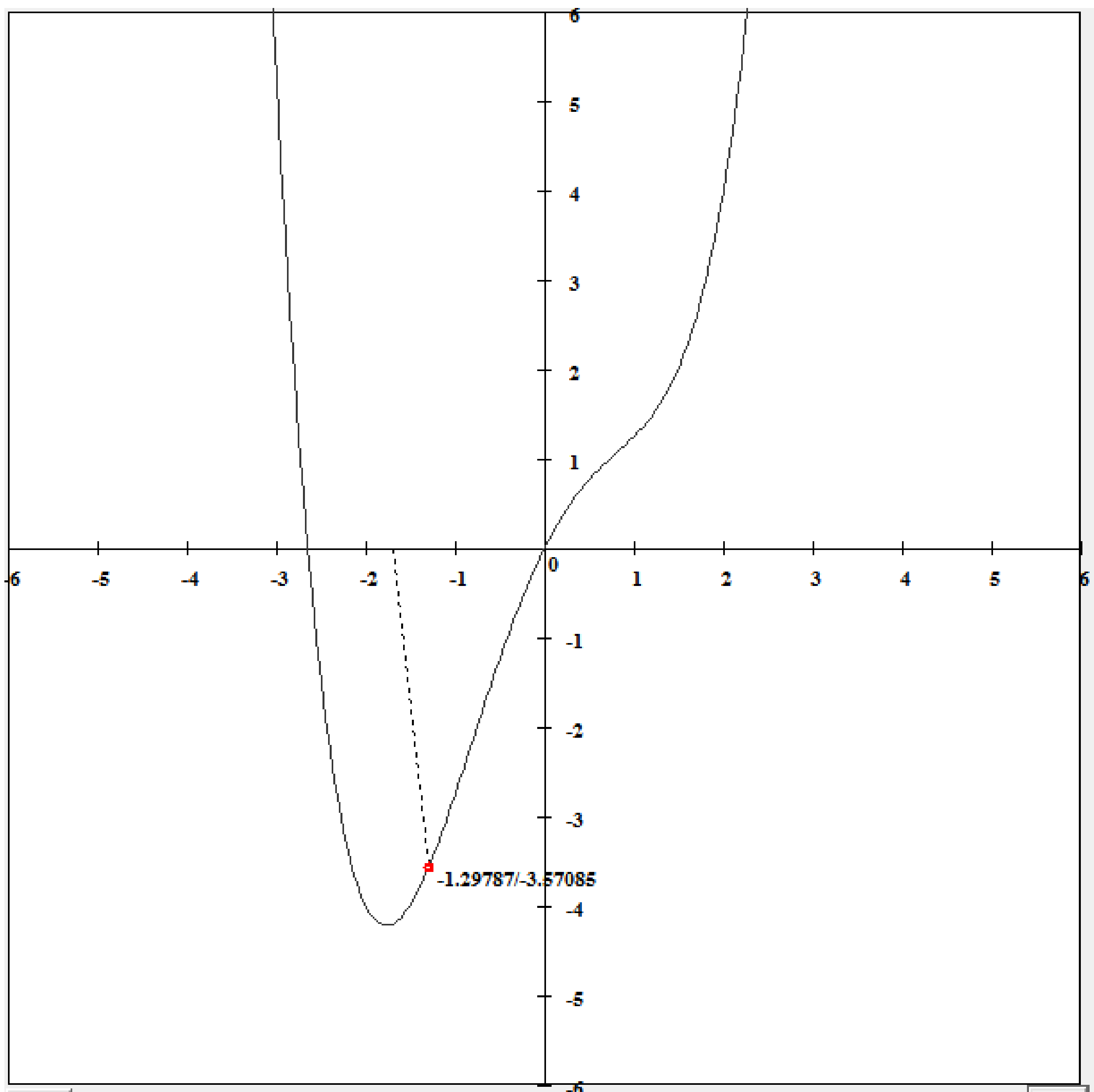
Suche Minimum

Xk+1=0.95

Gedämpftes Newtonverfahren



Gedämpftes Newtonverfahren



Erlaubte Zeichen:
- Dividieren: ':'
- Multiplizieren: '*'
- Addieren: '+'
- Subtrahieren: '-'
- Potenzieren: '^'
- Unbekannte Variable: 'x'

Draw-Eigenschaften

Funkionen-Reichweite: 10

Funktionen-Intervall: 0.05

Beispiel Funktionen:
x^4:4-2*x^3+5*x-1
x^2+2
7.39117

f(x)= x^4:4-x^2+2*x

Funktion Zeichnen

Newtonverfahren:

Für Nullstellensuche enter f(x), für Minimumsuche enter f'(x)

f(x)/f'(x)= x^3-2*x+2

Für Nullstellensuche enter f'(x), für Minimumsuche enter f''(x)

f'(x)/f''(x)= 3*x^2-2

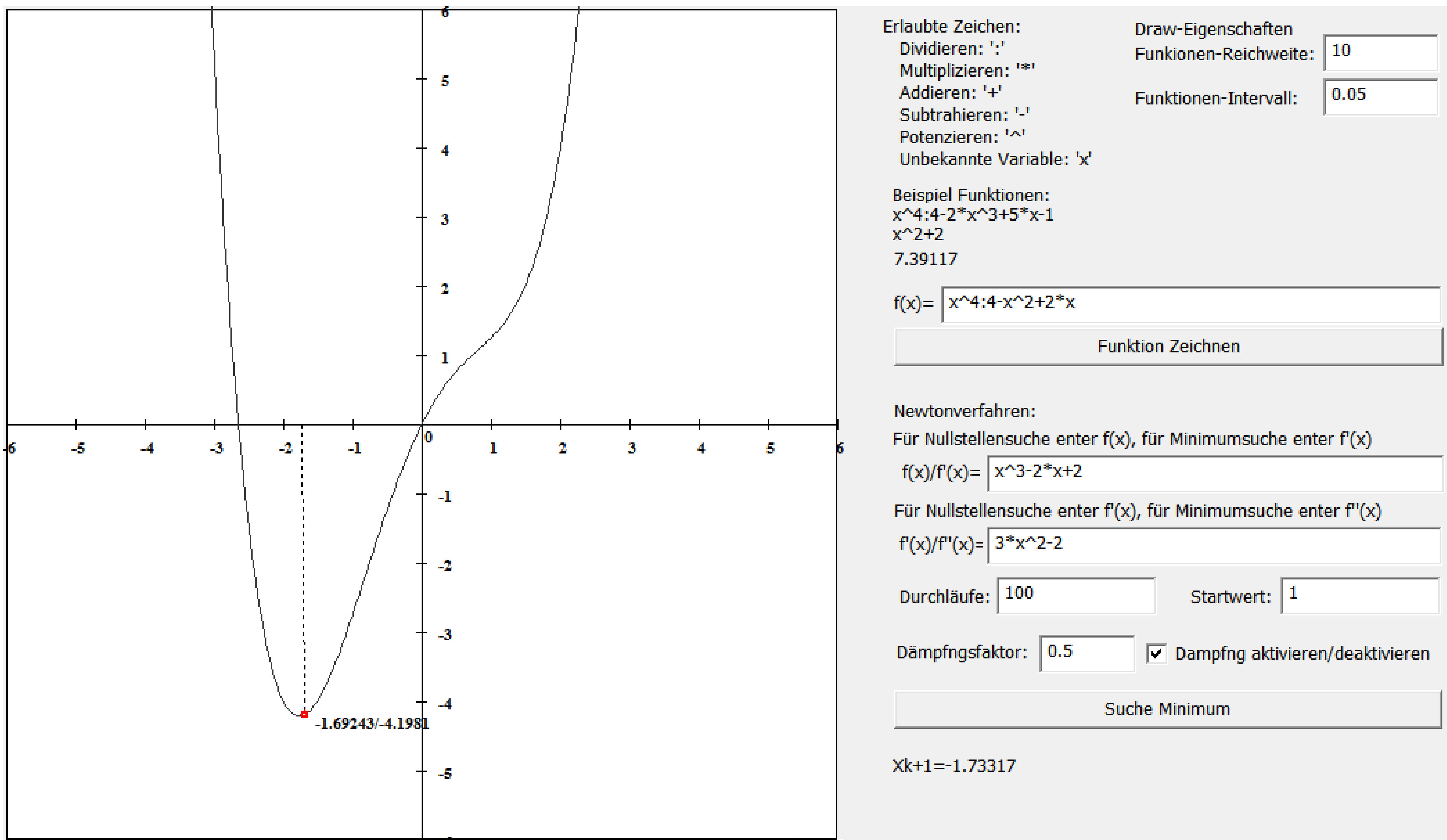
Durchläufe: 100 Startwert: 1

Dämpfngsfaktor: 0.5 ☑ Dampfng aktivieren/deaktivieren

Suche Minimum

Xk+1=-1.69243

Gedämpftes Newtonverfahren



Mehrdimensionales Newtonverfahren

- Formel für mehrdimensionale Funktionen:

$$x_{k+1} = x_k - (H_f(x_k))^{-1}(\nabla F(x_k))'$$

- Analog zu eindimensionalem Newtonverfahren

Vielen Dank für die Aumerksamkeit!