Newtonverfahren

Projektmitglieder:

Patrik Misurec
Patrick Mittendorfer
Neli Petkova
Ajla Kasic
Nico Fallosch

Newtonverfahren - Einleitung

- Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Algorithmus zur Suche von Nullstellen einer stetig differenzierbaren reellen Funktion f

- günstigen Startwert auswählen

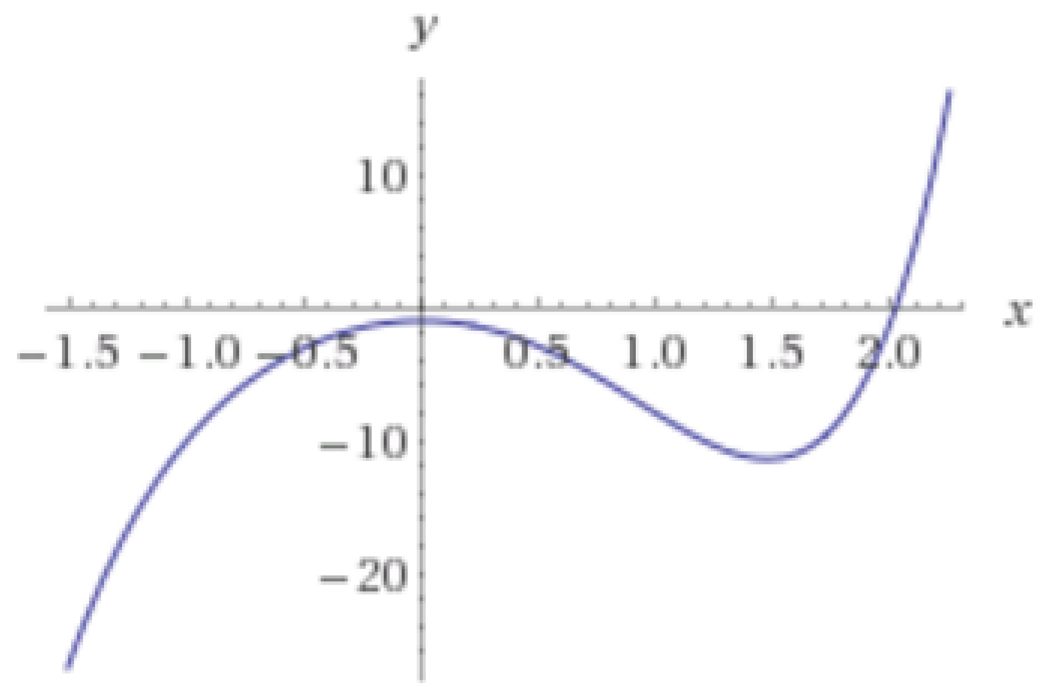
(relativ nahe zum Optimum) => gute Konvergenz

Beispiel

$f(x) = x^5 - 8x^2 - 1$

$f'(x) = 5x^4 - 16x$

$f''(x) = 20x^3 - 16$



n	x_n
1	2
2	1.673611111
3	1.526359766
4	1.495201647
5	1.493885423
6	1.493883132
7	1.493883132
8	1.493883132
9	1.493883132
10	1.493883132

Approximation durch Nullsetzen der Ableitung

- Angenommen g(x) = f´(x)
- Gleichung der Tangente $m = g'(x_0).$ im ausgewählten Startpunkt x_0
- Schnittpunkt mit x- Achse ergibt einen weiteren Punkt x_1
- Analog wird mit der Iterationsformel $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$ weitergesetzt.

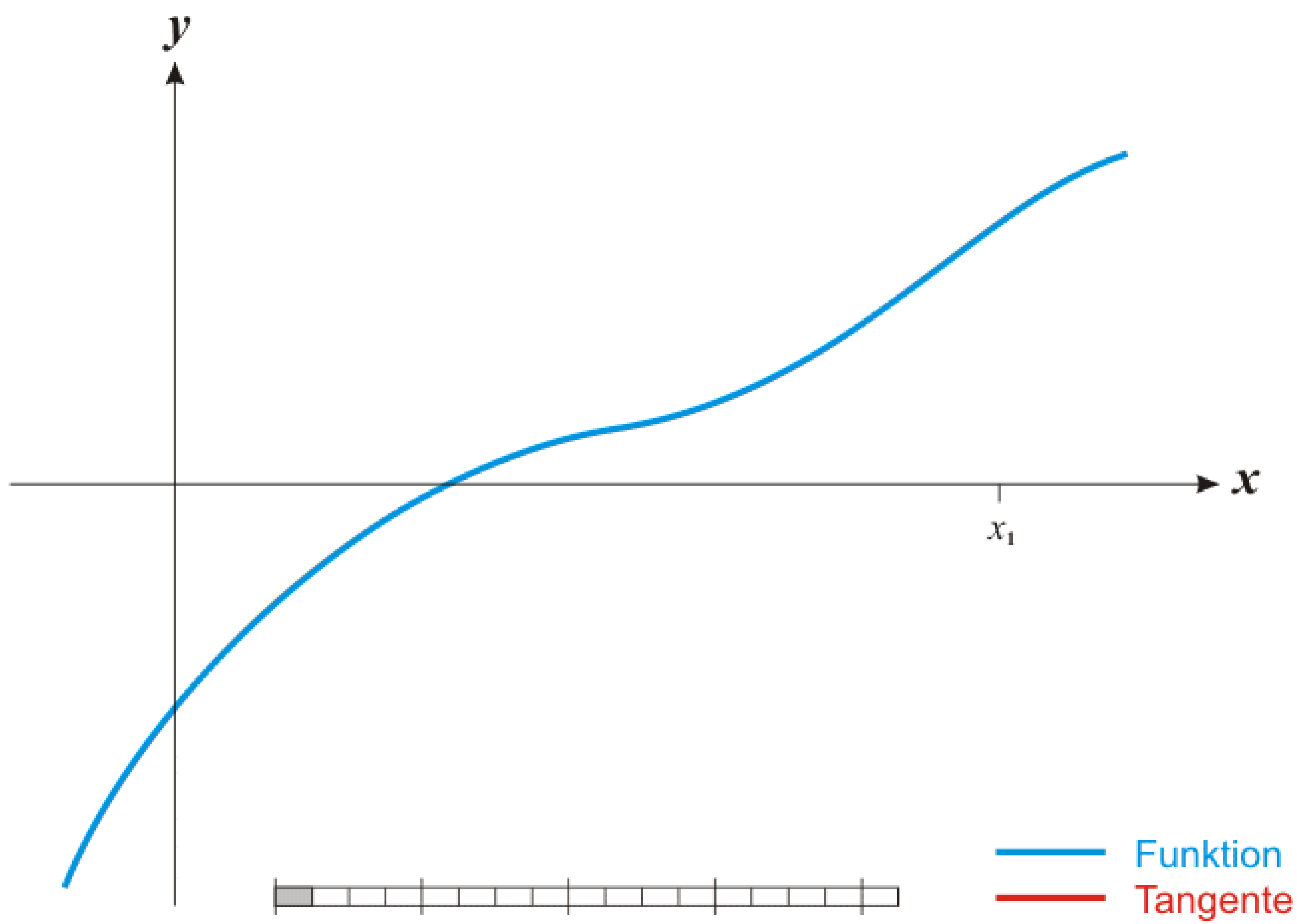
$$m = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

$$g'(x_0) = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)}{(x_0 - x_1)}$$

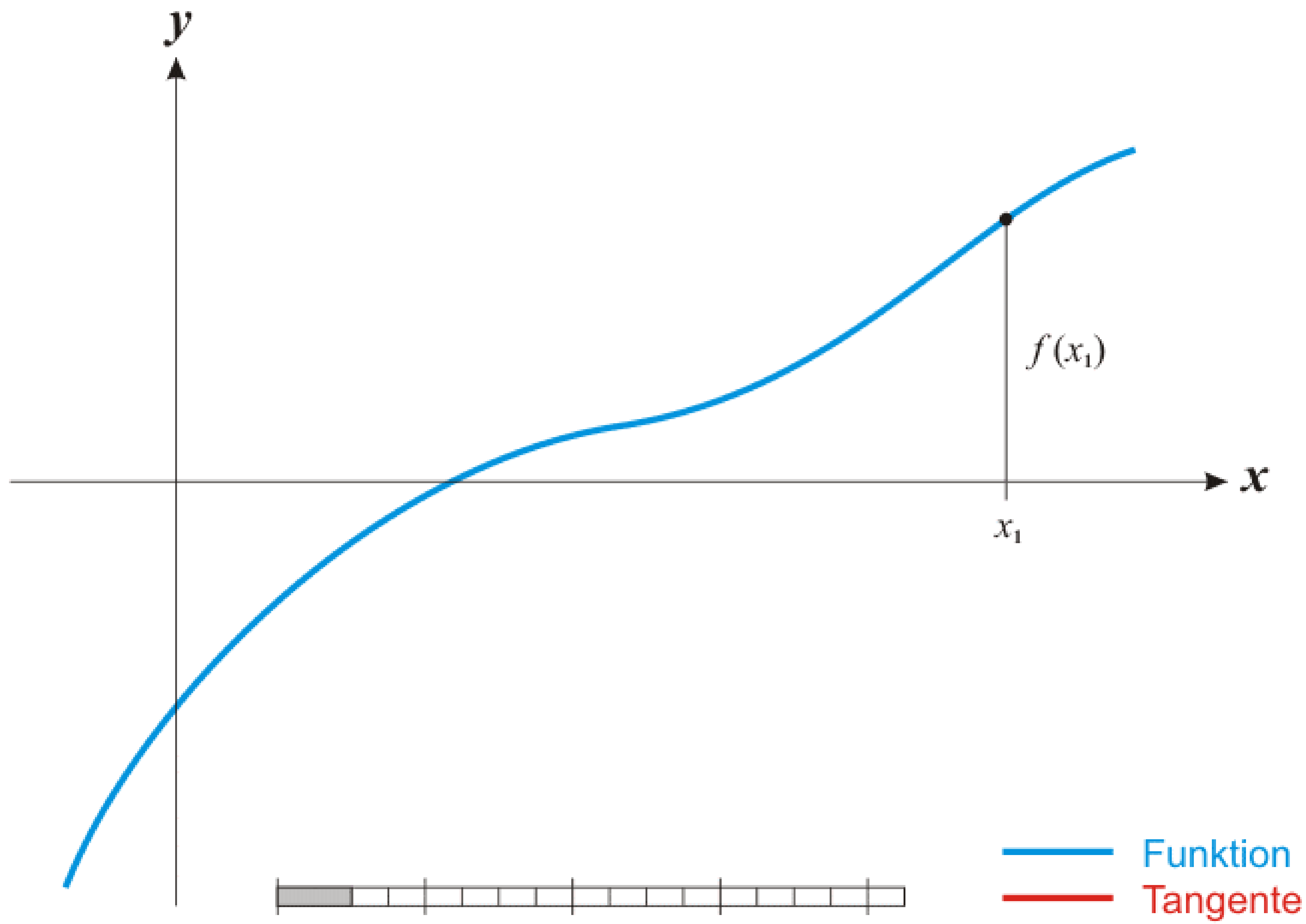
$$g'(x_0) \times (x_0 - x_1) = g(x_0)$$

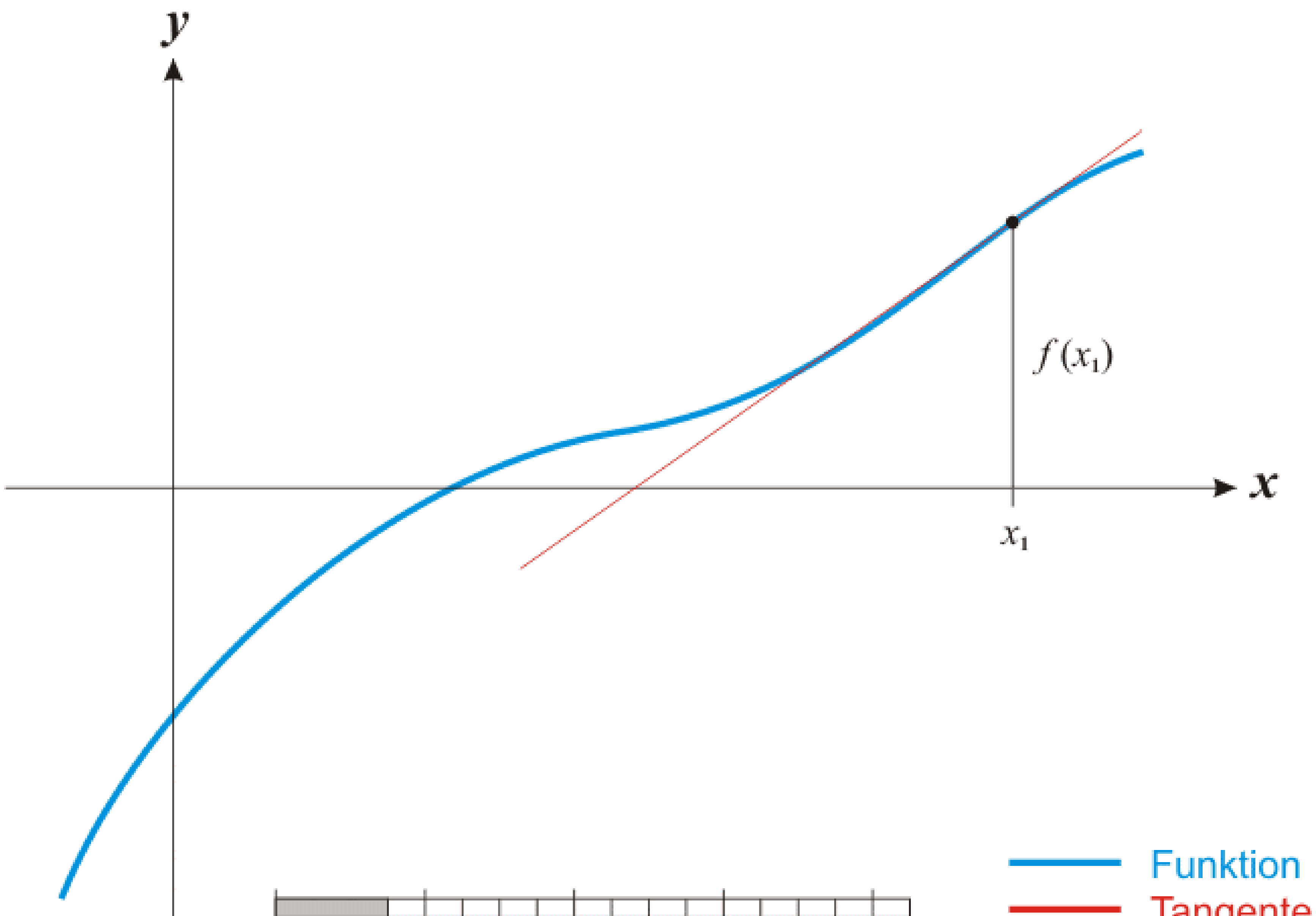
$$x_0 - x_1 = \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

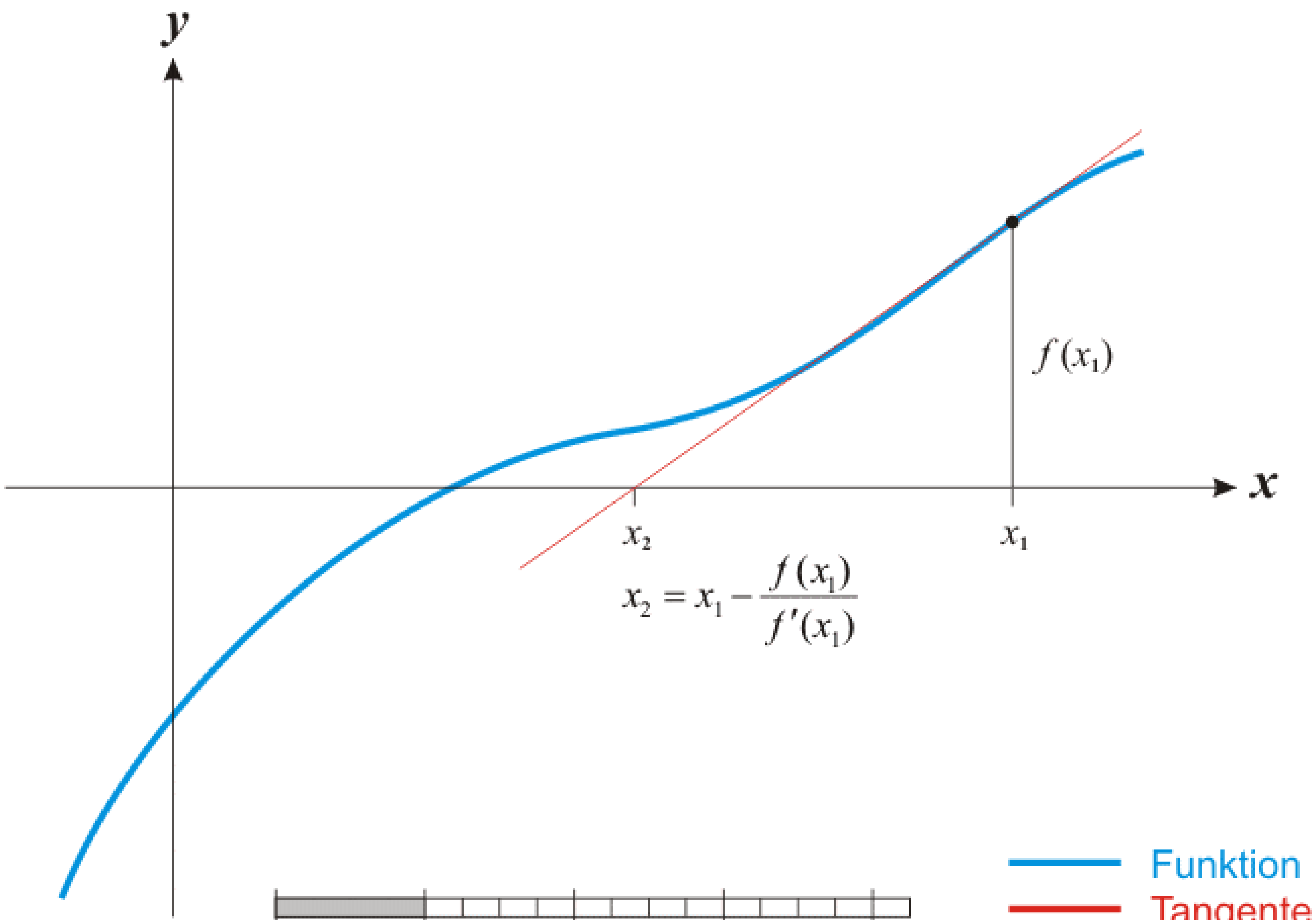
$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

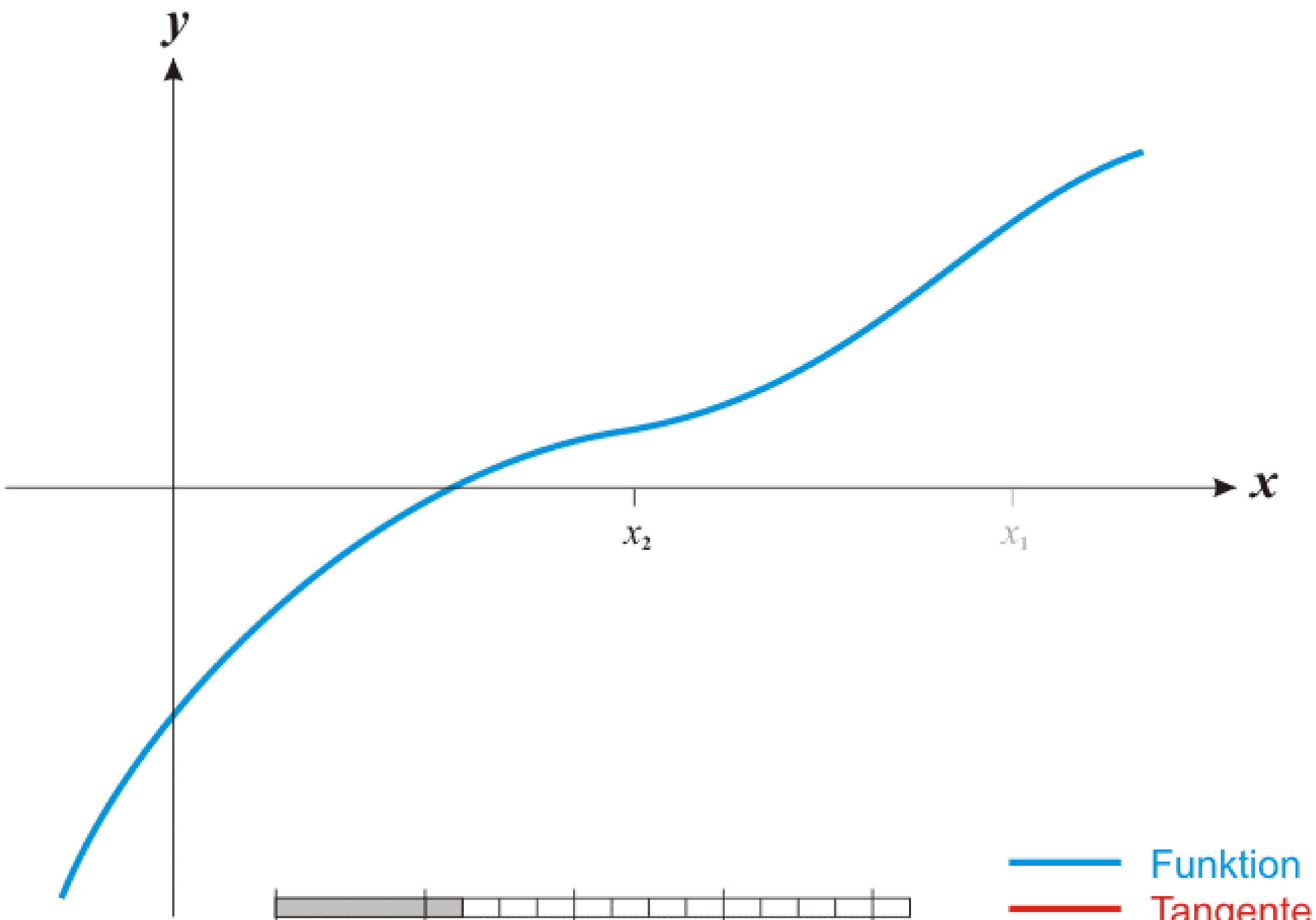


y
x
x1
Funktion
Tangente

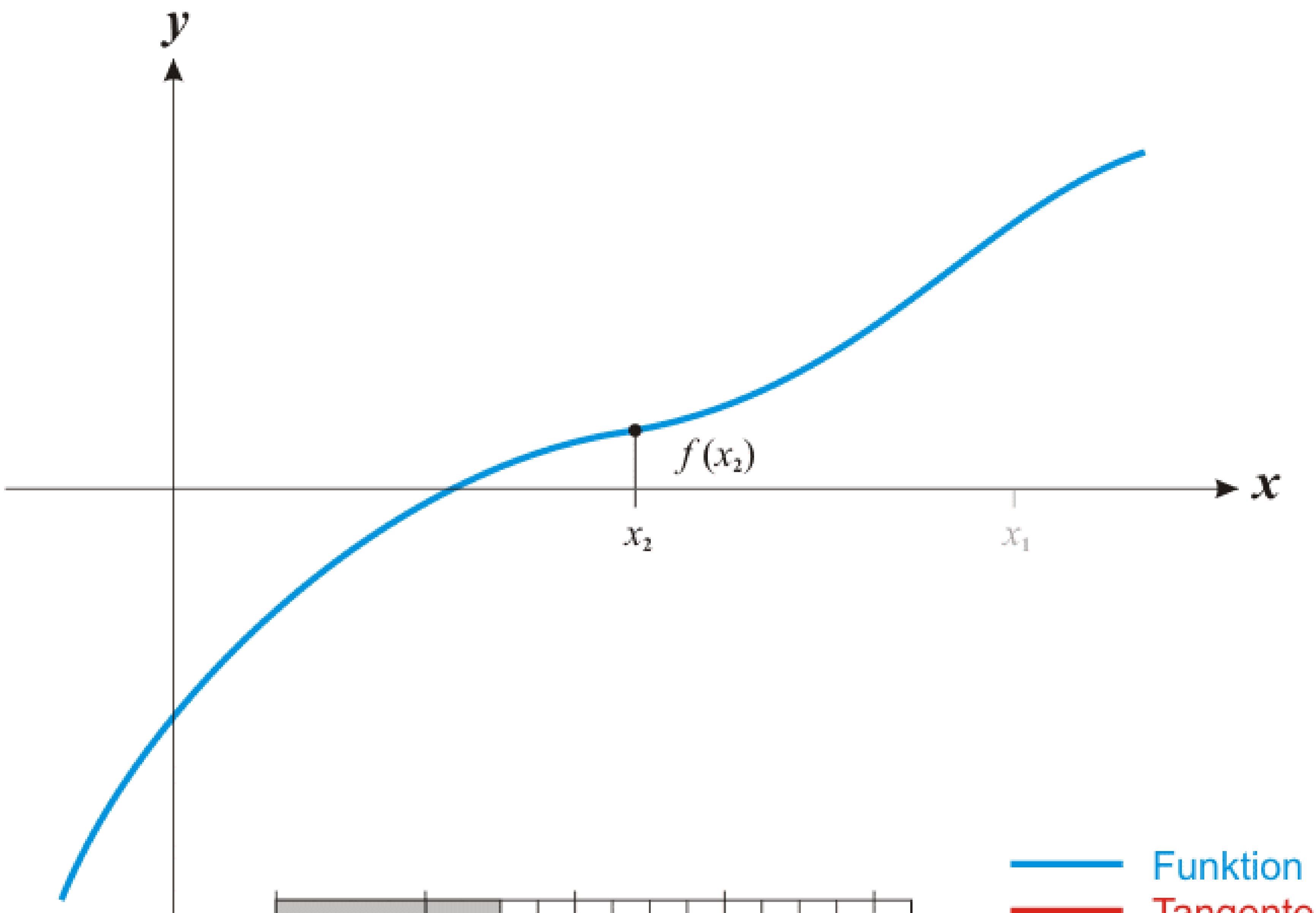

y
x
f (x1)
x1
Funktion
Tangente

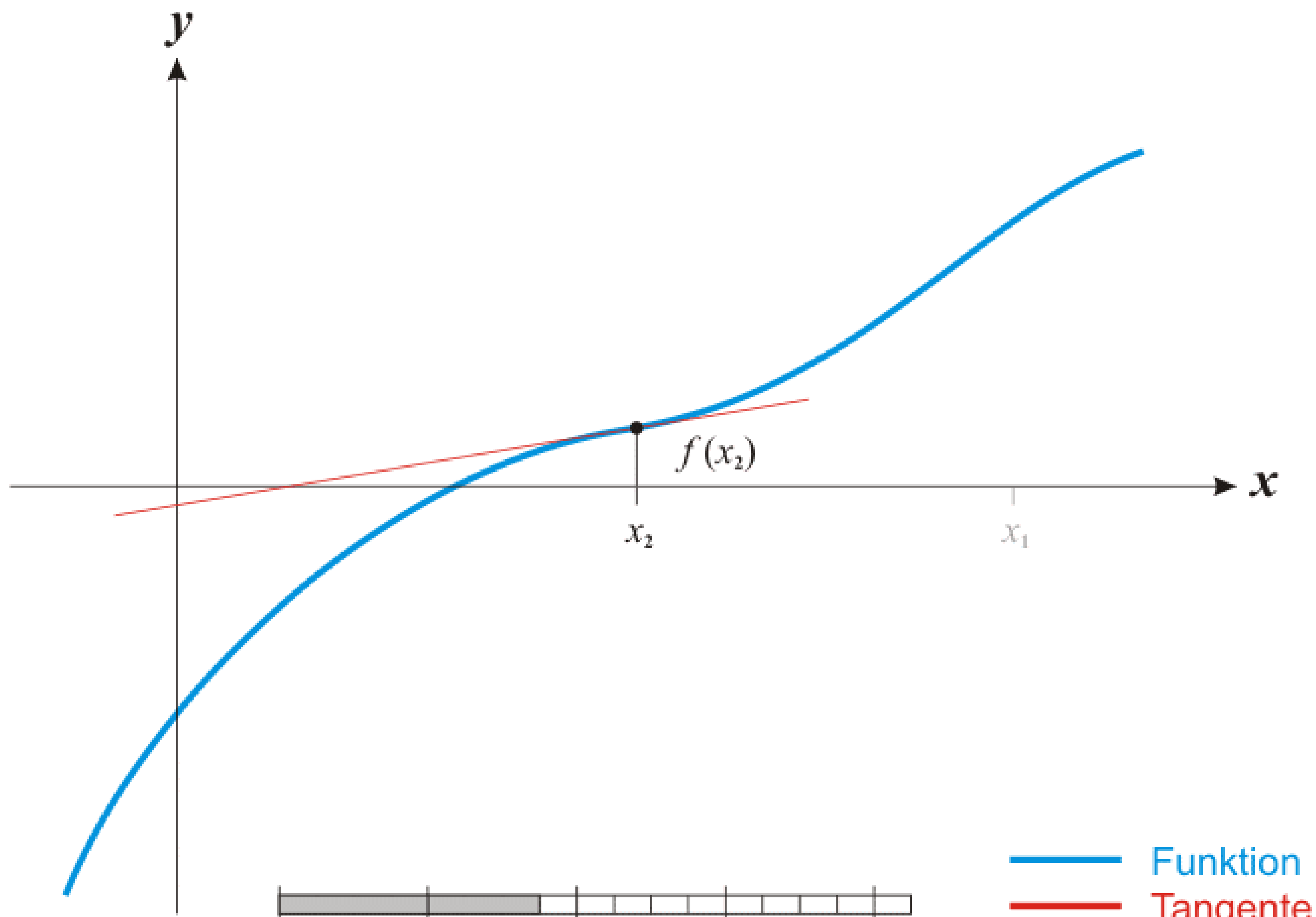

y
x
$f(x_1)$
x_1
Funktion
Tangente

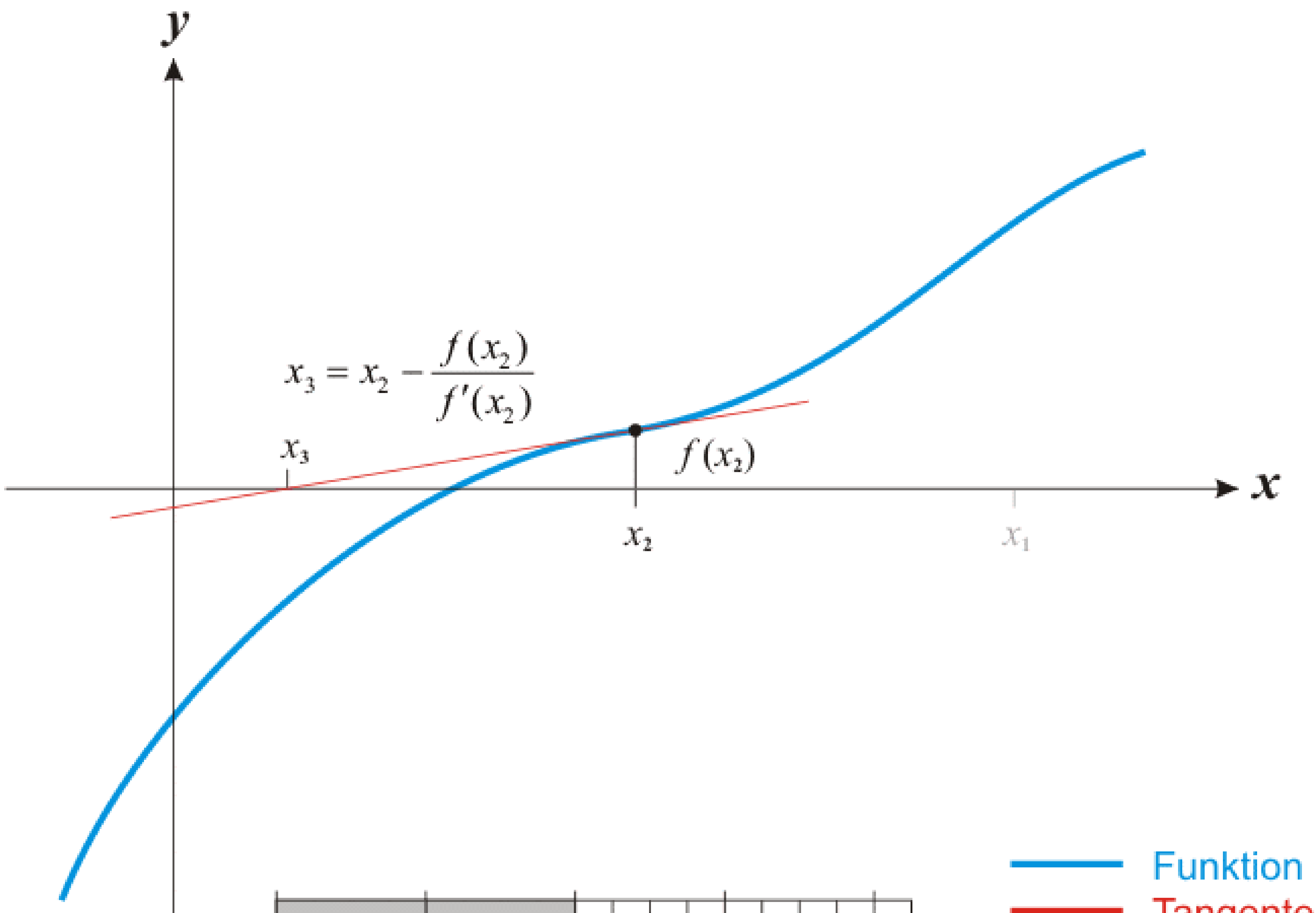

y
x
$f(x_1)$
x_2
x_1
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
Funktion
Tangente

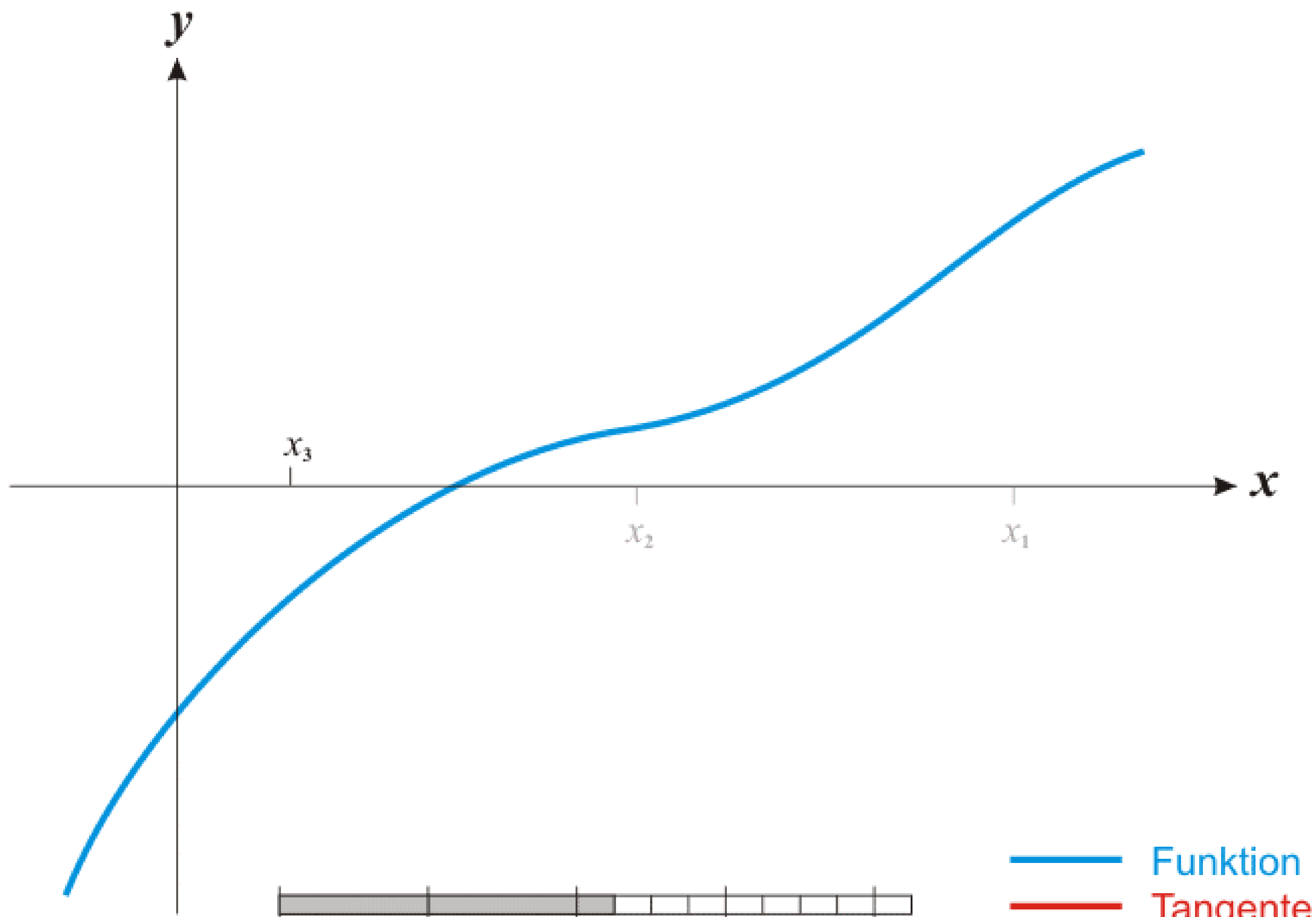


y
x
x_2
x_1
Funktion
Tangente

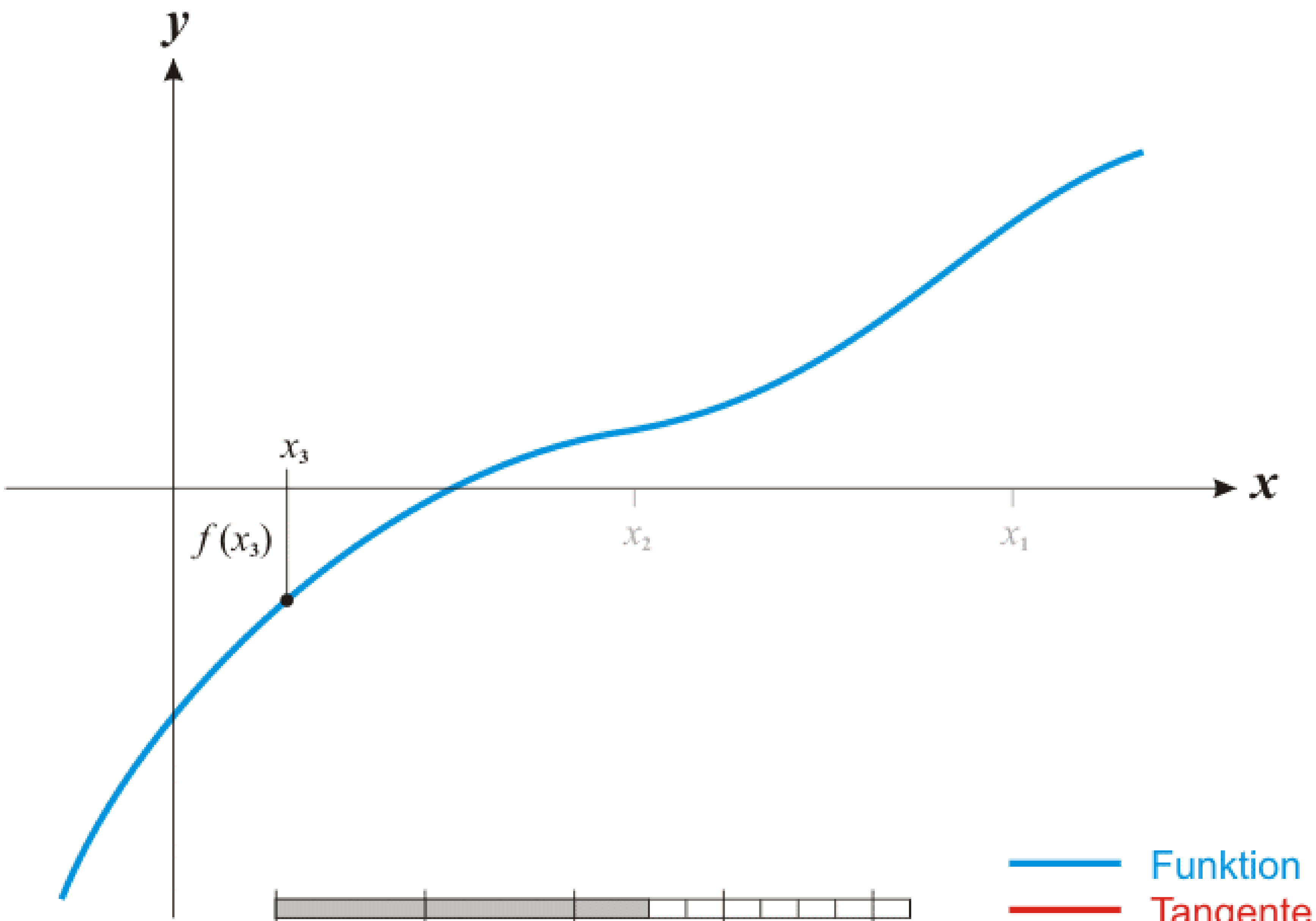

y
x
f (x₂)
x₂
x₁
Funktion
Tangente


y
x
f (x2)
x2
x1
Funktion
Tangente

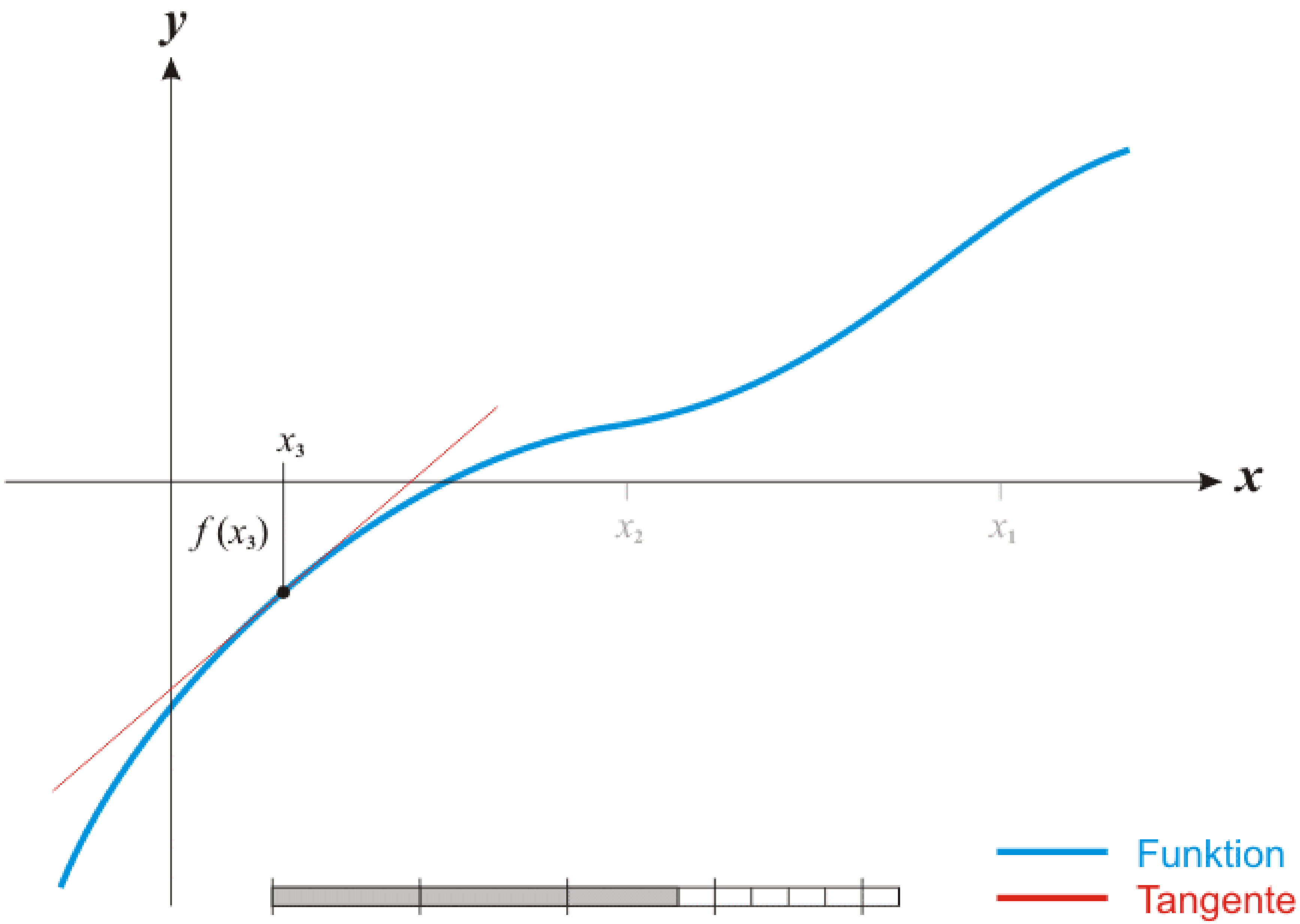

y
x
$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$
x_3
$f(x_2)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente



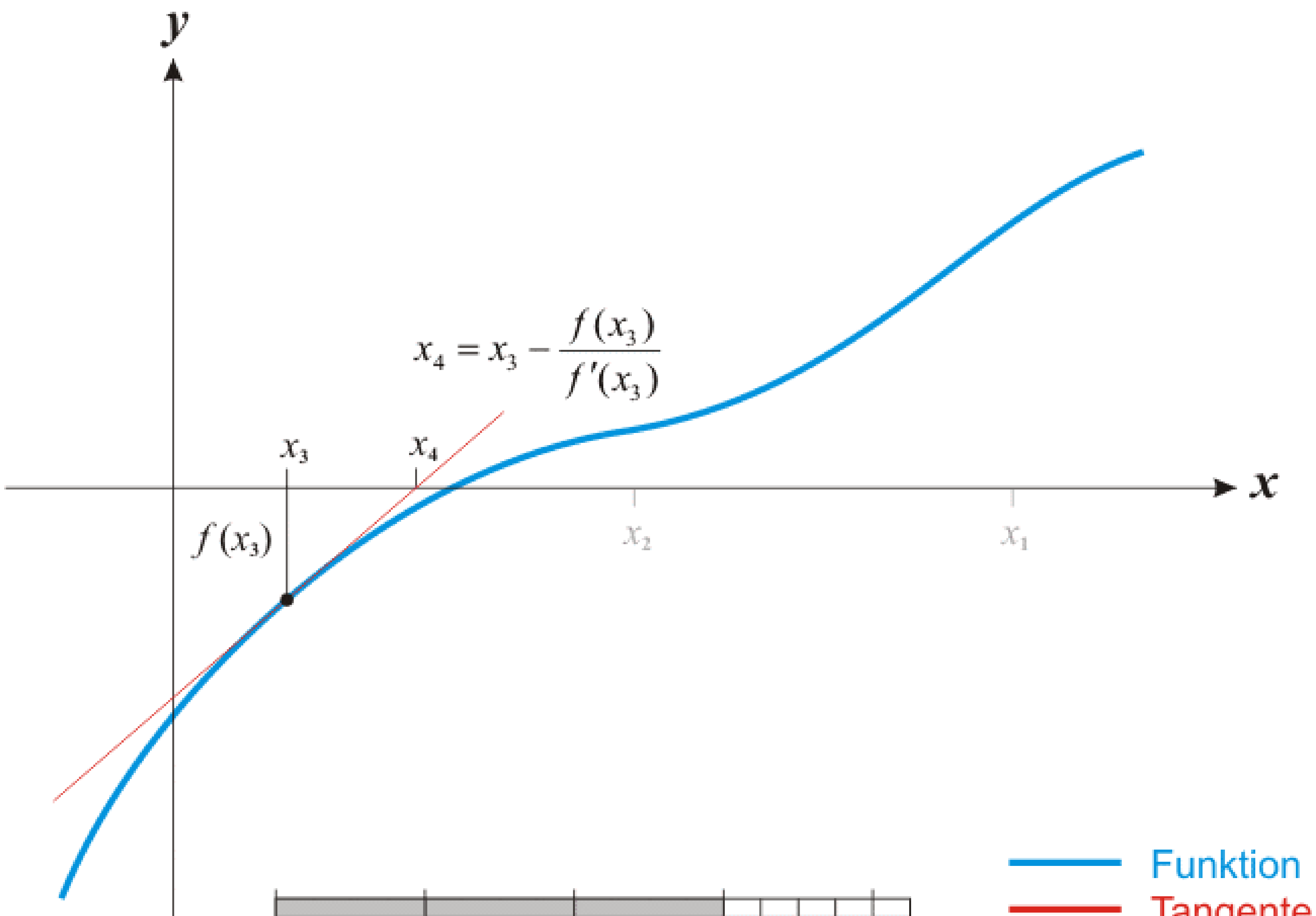
y
x
x_3
x_2
x_1
Funktion
Tangente



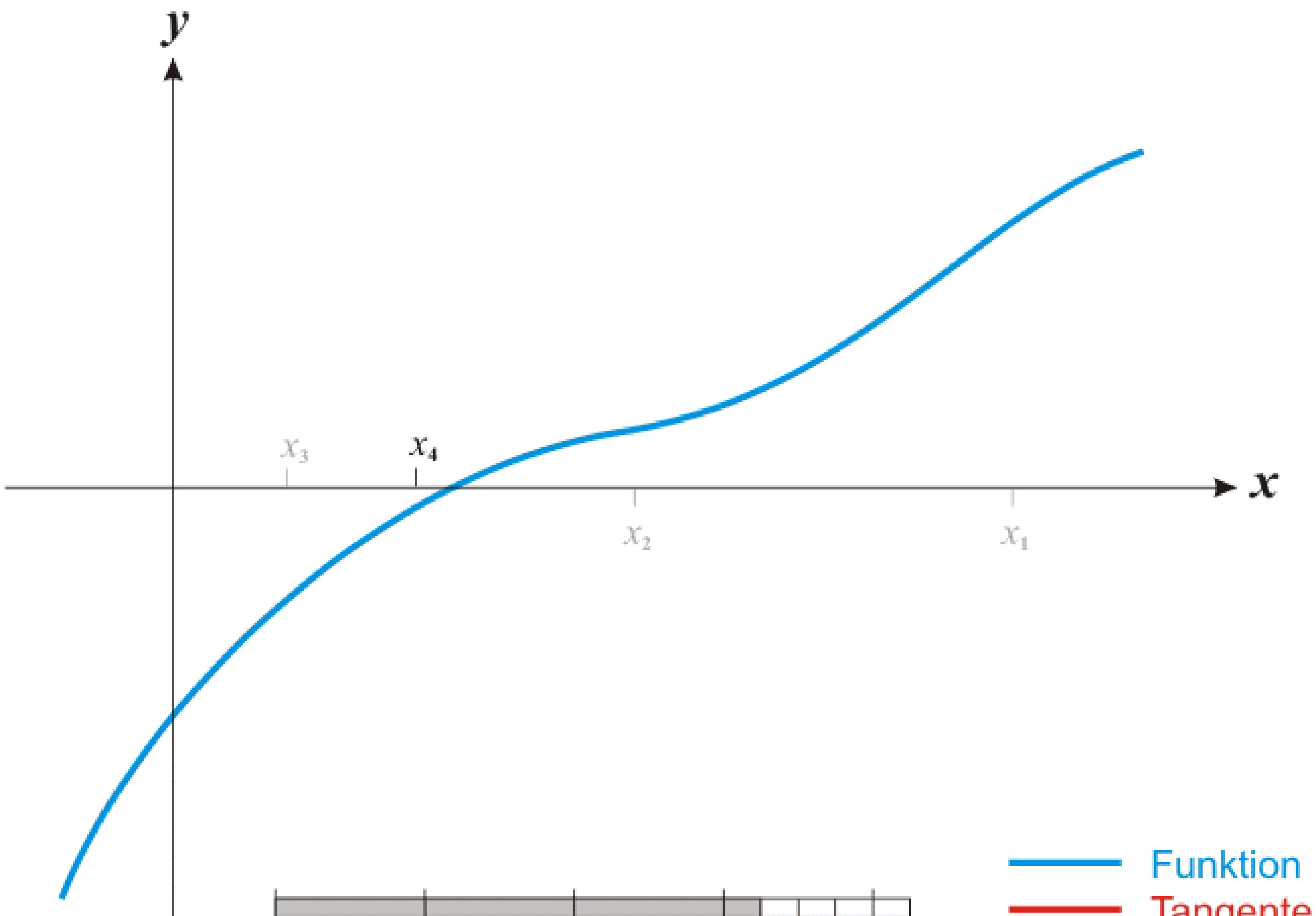
y
x
x_3
$f(x_3)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente

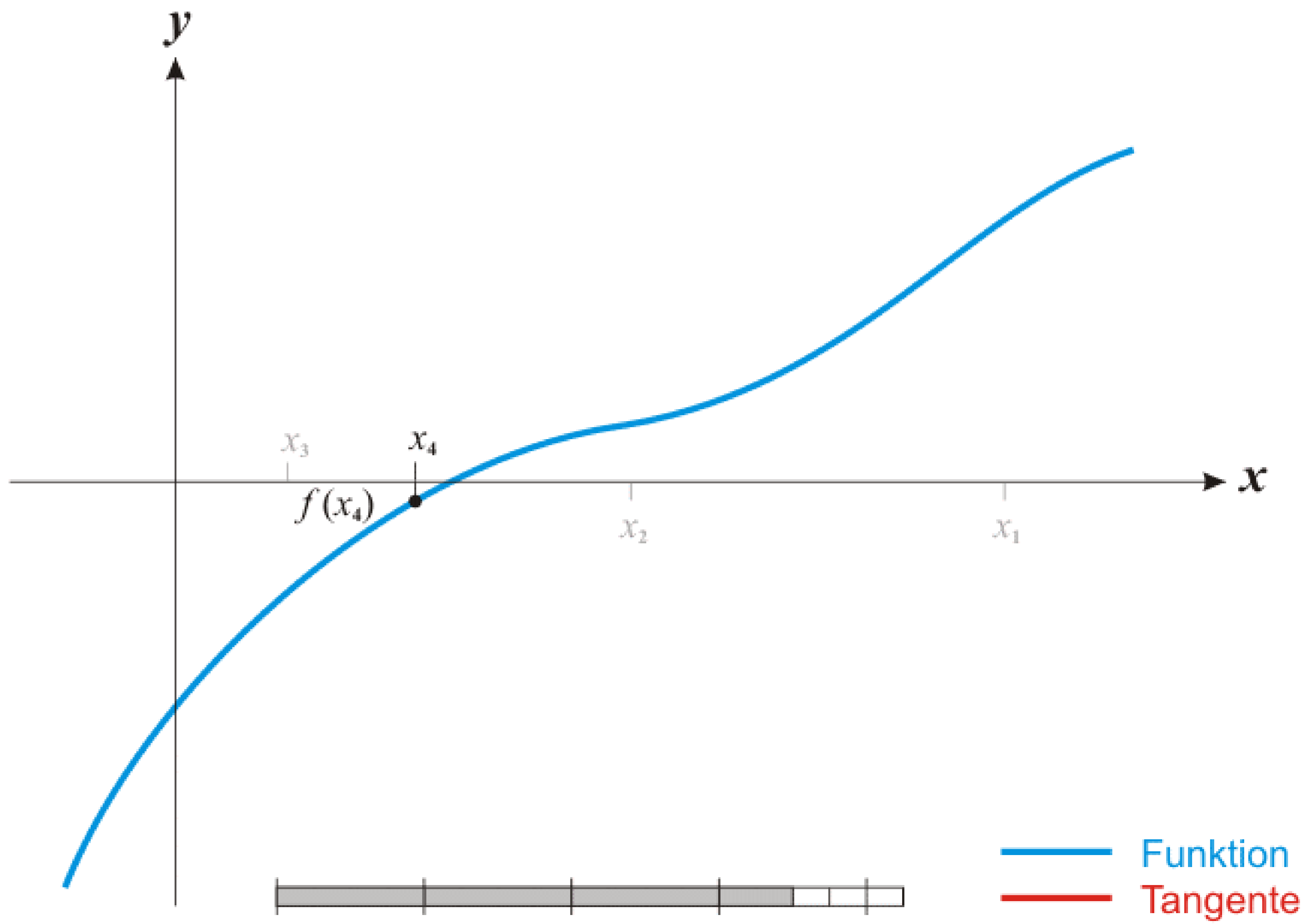


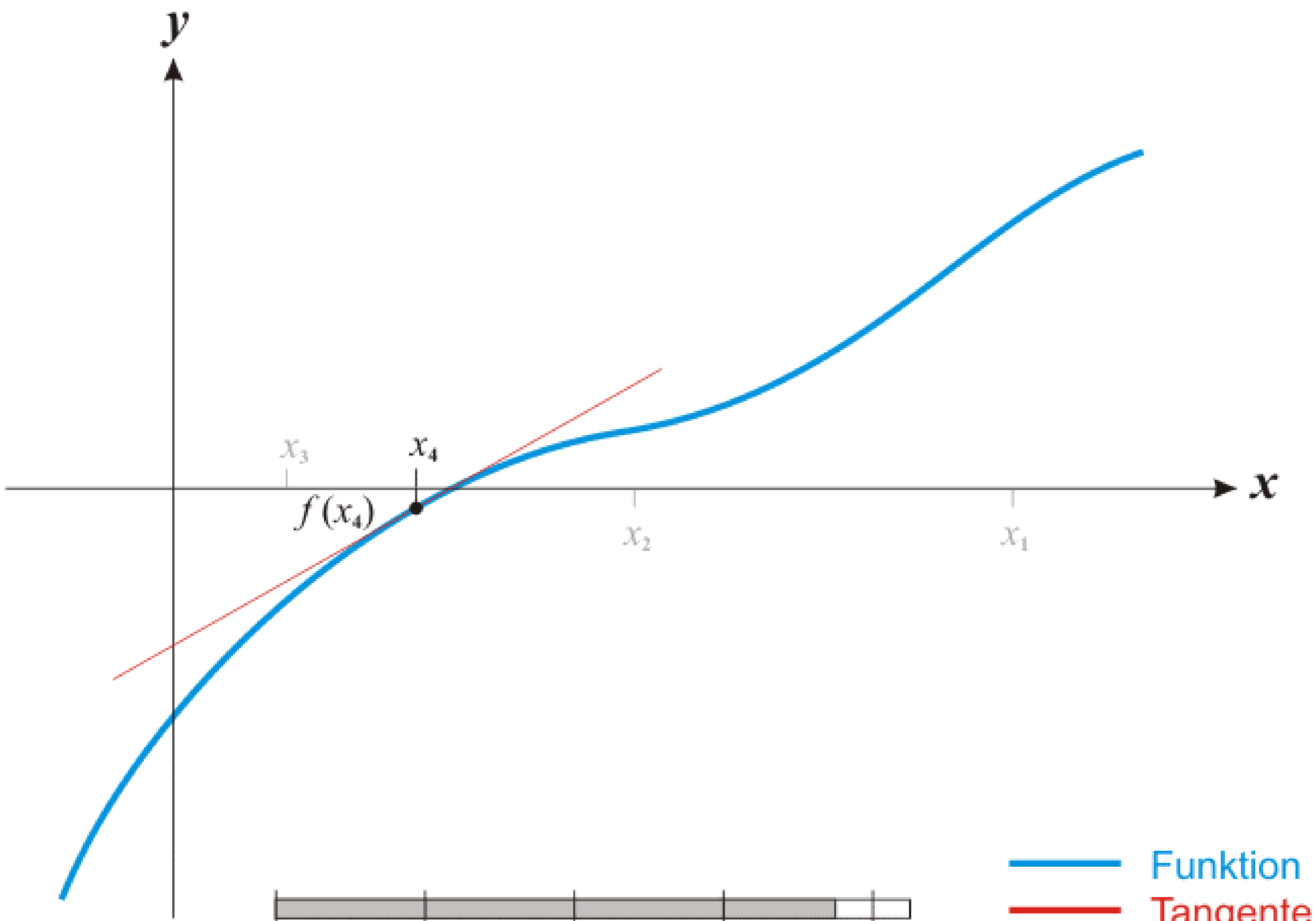
y
x
x_3
$f(x_3)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente



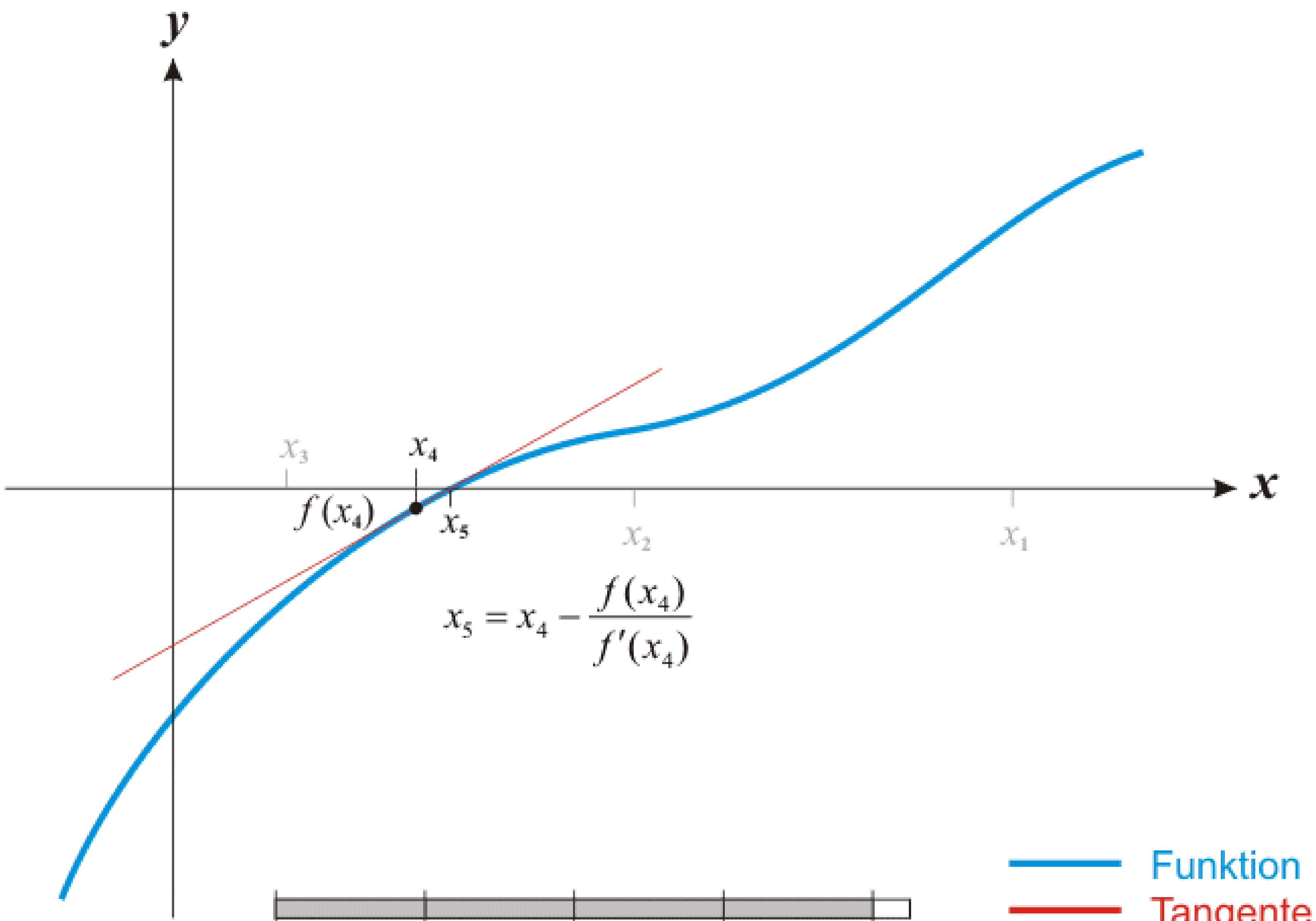
y
x
$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$
x_3
x_4
$f(x_3)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente


y
x
x_3
x_4
x_2
x_1
Funktion
Tangente

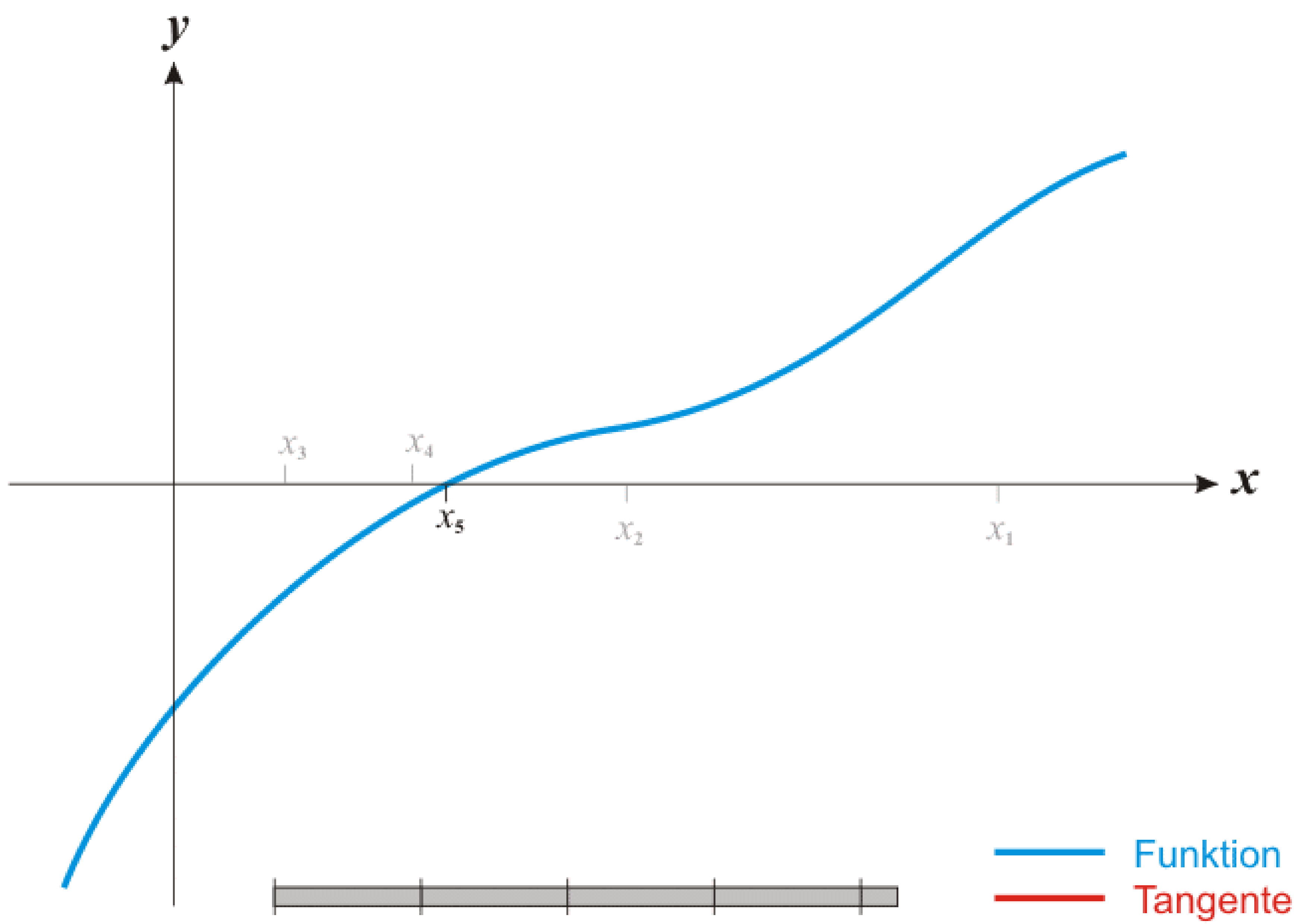

y
x
x_3
x_4
$f(x_4)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente



y
x
x_3
x_4
$f(x_4)$
x_2
x_1
Funktion
Tangente



y
x
x_3
x_4
$f(x_4)$
x_5
x_2
x_1
$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$
Funktion
Tangente


y
x
x3
x4
x5
x2
x1
Funktion
Tangente

Approximation durch quadratisches Polynom I

- Allgemeine Taylorformel für das approximierende Polynom (Taylorpolynom 2. Grades)

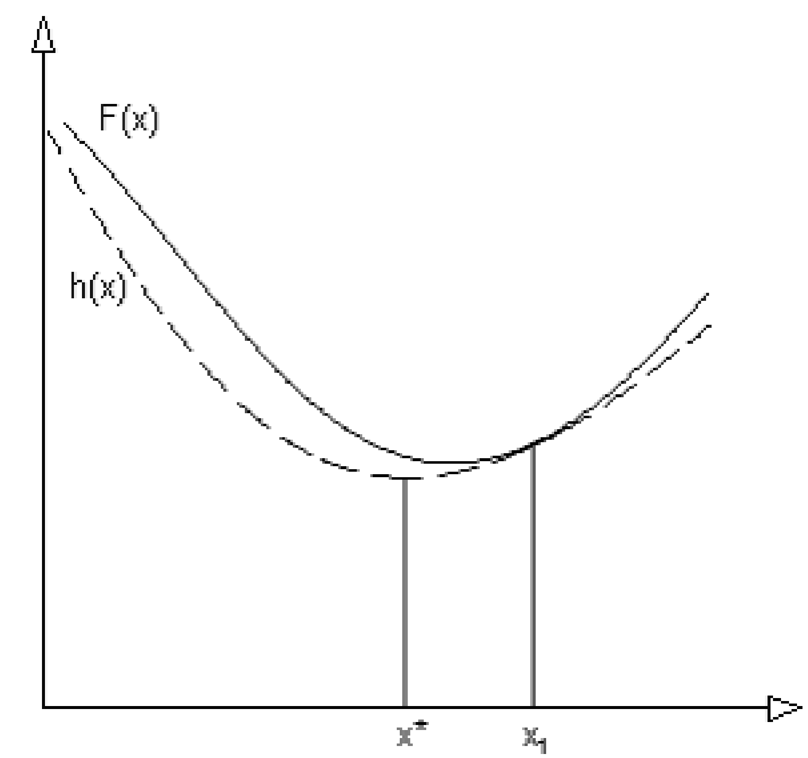
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \times (x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \times (x_1 - x_0)^2$$

- Das lässt sich verallgemeinern:

$$f(x) = a \times x^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2a \times x + b$$

$$f''(x) = 2a$$



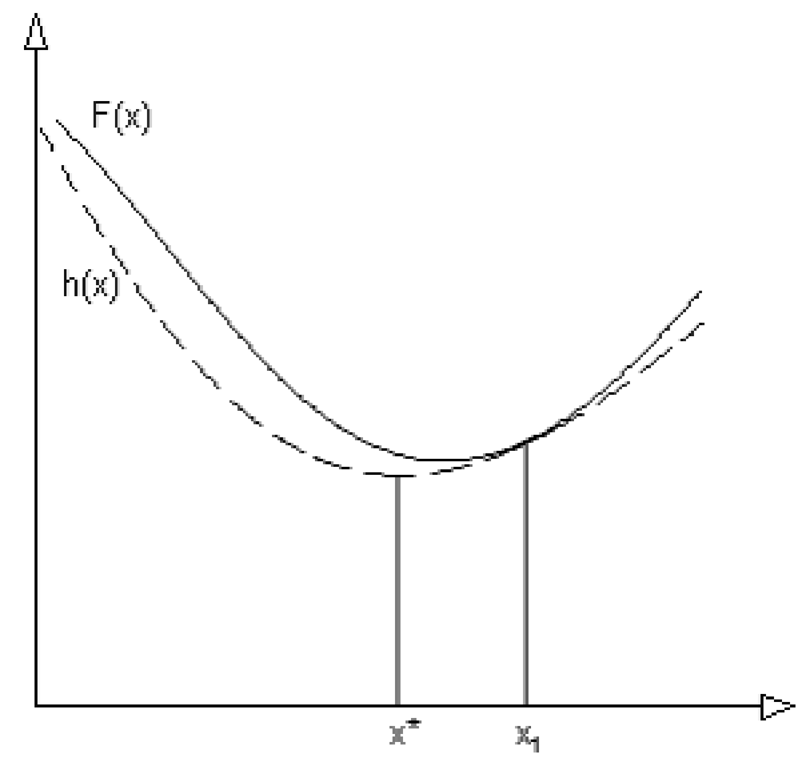
Approximation durch quadratisches Polynom II

- Minimum des Taylorpolynoms

$$f'(x*) = 2a \times x + b = 0 => x* = \frac{-b}{(2a)}$$

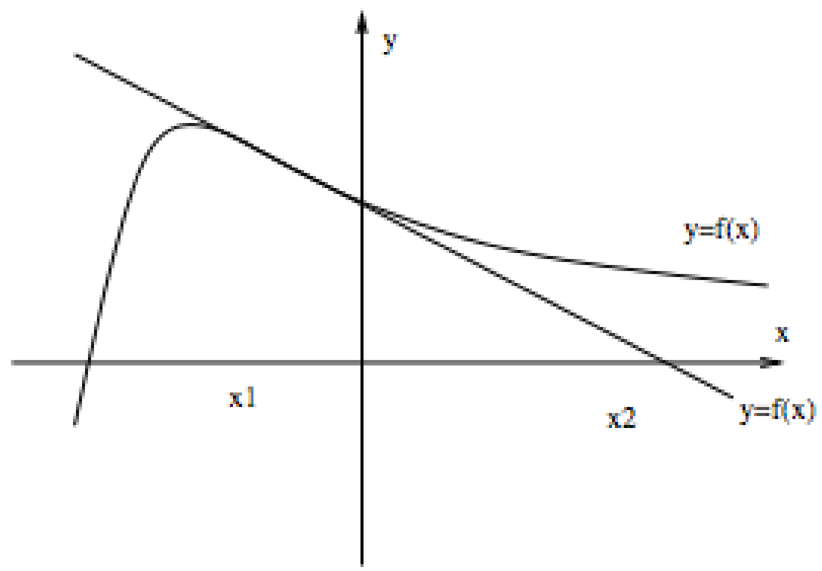
$$2a = f''(x)$$

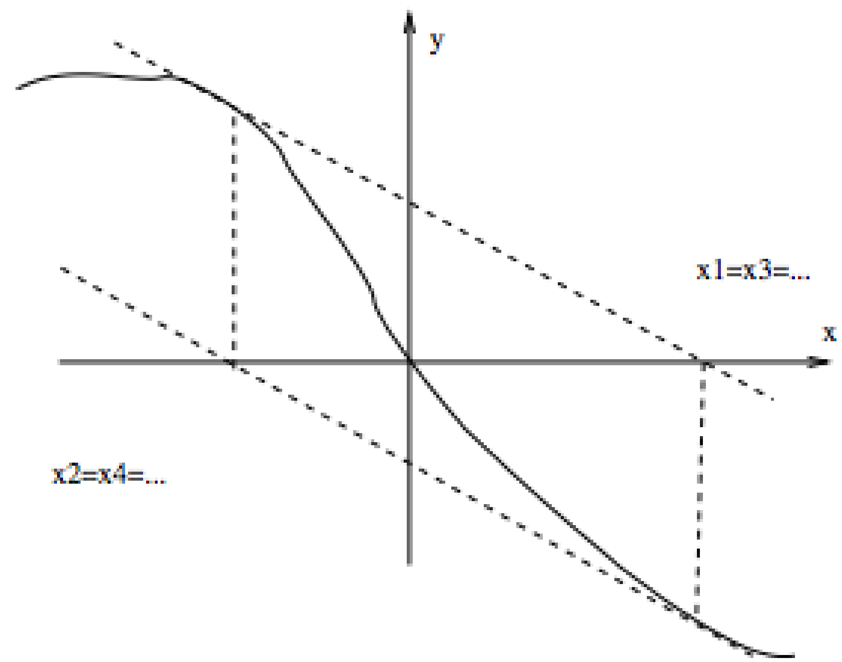
$$b = -2a \times x + f'(x) = -f''(x) \times x + f'(x)$$



$$x* = \frac{-(-f''(x) \times x + f'(x))}{2 \times \frac{f''(x)}{2}} = \frac{f''(x) \times x - f'(x)}{f''(x)} = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

Mögliche Problemfälle





Ist der Startwert schlecht ausgewählt (zu weit weg vom Optimum), kann folgendes passieren:

- Die Folge divergiert, der Abstand zum Optimum wächst über alle Grenzen. (links)

- Die Folge divergiert, bleibt aber beschränkt. Sie kann z.B. periodisch werden, d.h.endlich viele Punkte wechseln sich in immer derselben Reihenfolge ab. Man sagt auch, dass die Folge oszilliert. (rechts)

- Die Folge konvergiert trotz der Distanz zum Optimum, kann jedoch, falls die Funktion mehrere Optimen hat, gegen ein anderes als des gewünschte Optimum (vorausgesetzt, man weiß, welches man finden will) konvergieren.

Osszilazion (Beispiel)

- endlich viele Funktionswerte wechseln sich ab

- Gegeben sei eine Funktion:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x$$
$$f'(x) = x^3 - 2x + 2$$
$$f''(x) = 3x^2 - 2$$

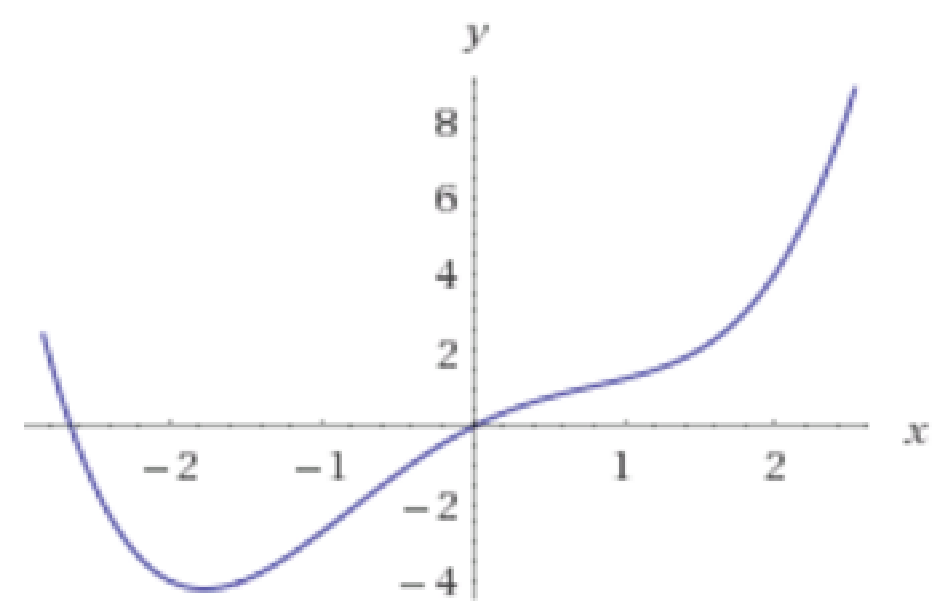
$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - \frac{0^3 - 2\times 0 + 2}{3\times 0^2 - 2} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{1^3 - 2\times 1 + 2}{3\times 1^2 - 2} = 0$$

$$x_3 = 0 - \frac{0^3 - 2\times 0 + 2}{3\times 0^2 - 2} = 1$$

$$x_4 = 1 - \frac{1^3 - 2\times 1 + 2}{3\times 1^2 - 2} = 0$$



Gedämpftes Newtonverfahren

• Das Newton-Verfahren konvergiert zwar quadratisch, aber nur **lokal.**

• Globale Konvergenz kann ggf. durch einen Dämpfungsterm erreicht werden

• Erweiterung der Iterationsformel

um einen Dämpfunsparameter λ

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \times \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

• Veränderung der Weite

des Intervals

$\lambda = 0.5, x_0 = 0 \rightarrow 64$ Schritte

$\lambda = 0.25, x_0 = 0 \rightarrow 245$ Schritte

$\lambda = 0.25, x_0 = 0 \rightarrow 47$ Schritte

$\lambda = 0.95, x_0 = 0 \rightarrow 39$ Schritte

$\lambda = 0.99, x_0 = 0 \rightarrow \infty$ Schritte

Mehrdimensionales Newtonverfahren

- Formel für mehrdimensionale Funktionen:

$$x_{k+1} = x_k - (H_f(x_k))^{-1}(\nabla F(x_k))'$$

- Analog zu eindimensionalem Newtonverfahren

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!