어떤 명제의 흥미로운 증명법

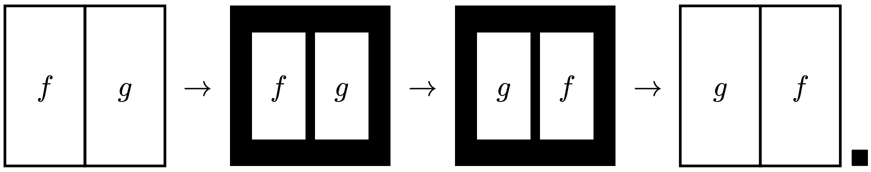
한남대학교 수학과

20172581 김남훈

1. 소개

정리.
T 를 위상공간, $p \in T$ 라 하자. T 의 2 차 호모토피 군 $\pi_2(T, p)$ 는 가환군이다.

증명.



2. 기본 개념

위 증명에 대해 설명하기 전에, 먼저 이해하기 위해 필요한 내용들을 정리해보자.

정의 1. 곱 공간(Product Space)과 곱 위상(Product Topology)
위상공간 (T, τ_T) 와 (S, τ_s) 가 주어졌으며 f, g 가 각각 T 에서 S 로의 연속함수라고 하자. 그리고

$$\mathcal{B}_{T\times S} = \{G \times H \mid G \in \tau_T \land H \in \tau_H\}$$
$$\tau_{T\times S} = \left\{\bigcup F \mid F \in \mathcal{B}\right\}$$

로 놓으면 $\tau_{T\times S}$ 는 $T \times S$ 위의 위상이 되며, 이것을 곱 위상이라고 한다. $(T \times S, \tau_{T\times S})$ 를 T 와 S 의 곱 공간이라 한다.

정의 2. 호모토피(Homotopy)
위상공간 T, S 에 대해 f, g 가 T 에서 S 로의 연속함수라고 하자. 연속함수 $H : T \times [0, 1] \to S$ 가 다음을 만족하면 H 를 f 와 g 사이의 **호모토피** 라 한다.

$$H(t, 0) = f(t)$$
$$H(t, 1) = g(t)$$

f 와 g 사이의 호모토피가 존재한다면 f 와 g 는 **호모토픽**(homotopic) 하다고 하고 $f \simeq g$ 로 나타낸다.

정리 1. 호모토피의 동치성
호모토피 관계 $\simeq$ 는 동치관계이다.

증명.
f, g, h 를 T 에서 S 로의 연속함수라고 하자.

$H : T \times [0, 1] \to S$ 를 $h(t, r) = f(f)$ 로 정의하면 h 는 f 와 f 사이의 호모토피이므로 $\simeq$ 는 반사적이다.

H 가 f 와 g 사이의 호모토피라면, 함수 $H' : T \times [0, 1] \to S$ 를 $H'(t, r) = H(t, 1 - r)$ 로 정의하면 H' 는 g 와 f 사이의 호모토피이다. 따라서 $\simeq$ 는 대칭적이다.

H_1 이 f 와 g 사이의 호모토피, H_2 이 g 와 h 사이의 호모토피라고 하자. $H : T \times [0,1] \to S$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$H(t,r) = \begin{cases} H_1(t, 2r) & \text{if } r \leq \frac{1}{2} \\ H_2(t, 2r-1) & \text{if } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

그러면 H 는 f 와 h 사이의 호모토피이다. 따라서, $\simeq$ 는 추이적이다.

$\simeq$ 는 반사적, 대칭적, 추이적이므로 동치관계이다.

정의 3. 경로(Path)와 경로곱(Path Product)
위상공간 T 와 $x, y \in T$ 에 대해, 연속함수 $f : [0,1] \to T$ 가 $f(0) = x, f(1) = y$ 라면 f 를 x 에서 y 로의 경로라고 한다. $x, y, z \in T$ 이고 f 가 x 에서 y 로의 경로, g 가 y 에서 z 로의 경로라고 하자. 그리고 $h : [0,1] \to T$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{if } t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{if } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

그러면 h 는 f 와 g 의 경로곱이라 하고 $f \star g$ 로 나타낸다.

정리. 경로곱의 호모토피
위상공간 T 와 $x, y, z \in T$ 에 대해 f_1, f_2 가 x 에서 y 로의 경로, g_1, g_2 가 y 에서 z 로의 경로라고 하자. $f_1 \simeq f_2$ 이고, $g_1 \simeq g_2$ 이면면 $f_1 \star g_1 \simeq f_2 \star g_2$ 이다.

증명.
H_f 가 f_1 과 f_2 사이의 호모토피, H_g 가 g_1 과 g_2 사이의 호모토피라 하고 $H : [0,1] \times [0,1] \to S$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$H(t,r) = \begin{cases} H_{f(2t,r)} & \text{if } r \leq \frac{1}{2} \\ H_{g(2t-1,r)} & \text{if } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

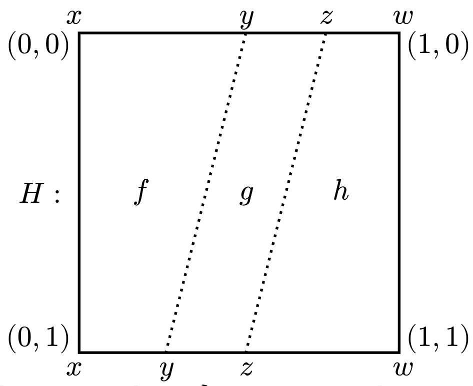
그러면 H 는 $f_1 \star g_1$ 과 $g_1 \star g_2$ 사이의 호모토피이다.

정리. 경로곱 연산의 결합 법칙
위상공간 T 와 $x, y, z, w \in T$ 에 대해 f 가 x 에서 y 로의 경로, g 가 y 에서 z 로의 경로, h 가 z 에서 w 로의 경로라고 하자. 그러면 $f \star (g \star h) \simeq (f \star g) \star h$ 이다.

증명.
연속함수 $H : [0,1] \times [0,1] \to T$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$H(t,r) = \begin{cases} f[2t - 4tr] & \text{if } t - 4r \geq -1 \\ g\left[4t - r + \frac{1}{4}\right] & \text{if } -2 < t - 4r < -1 \\ h\left[\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}r\right] & \text{if } -2 < t - 4r < -1 \end{cases}$$

함수의 값의 변화를 그림으로 직관적으로 살펴보면 아래와 같다.



그림에서 알 수 있듯, $H(t,0) = [f \star (g \star h)](t)$ 이고 $H(t,1) = [(f \star g) \star h](t)$ 이다. 따라서, H 는 $f \star (g \star h)$ 와 $(f \star g) \star h$ 사이의 호모토피이다.

정리 4. 폐경로의 성질
이제 T 를 위상공간, $x \in T$ 이라 하자. e 를 모든 $t \in [0,1]$ 에 대해 $e(t) = x$ x 에서 x 로의 경로라 하고, x 에서 x 로의 경로 f 에 대해 f' 를 모든 $t \in [0,1]$ 에 대해 $f'(t) = f(1-t)$ 인 x 에서 x 로의 경로라 하자.

그러면 x 에서 x 로의 임의의 경로 f 에 대해 다음이 성립한다.

1. $f \star e \simeq e \star f \simeq f$
2. $f \star f' \simeq f' \star f \simeq e$

증명.
H_1, H_2 를 다음과 같이 정의하자.