1. Теория

Решаемое уравнение в общем виде в декартовой системе координат:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

Первые краевые условия:
Эквивалентная постановка в форме уравнения Галёркина:
Аппроксимация уравнения Галёркина на конечномерных подпространствах:
Формулы для билинейных базисных функций прямоугольных элементов:
Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$M_{ij}^{\gamma} = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$b_i = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\mathbf{G} = \frac{\bar{\lambda}}{6} \frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\bar{\lambda}}{6} \frac{h_x}{h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{\gamma} = \bar{\gamma} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^t$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

Схема Кранка-Николсона:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2}$$

$$u = \frac{u^j + u^{j-2}}{2}$$

$$f = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}$$

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} \frac{u^j + u^{j-2}}{2}\right) + \gamma \frac{u^j + u^{j-2}}{2} + \sigma \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t} + \chi \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2} = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}$$

Подставляя это в уравнение Галёркина, получаем СЛАУ:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \frac{\mathbf{M}^\gamma}{2} + \frac{\mathbf{M}^\sigma}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{M}^\chi}{\Delta t^2}\right)\mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} - \frac{\mathbf{M}^\gamma \mathbf{q}^{j-2}}{2} + \frac{\mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-2}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}^\chi\left(-2\mathbf{q}^{j-1} + \mathbf{q}^{j-2}\right)}{\Delta t^2}$$

В нашем случае, так как γ, σ, χ являются константами, можно записать:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\Delta t} + \frac{\chi}{\Delta t^2}\right)\right)\mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}^{j-1}\frac{2\chi}{\Delta t^2} + \mathbf{q}^{j-2}\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\Delta t} - \frac{\chi}{\Delta t^2}\right)\right)$$

Для неравномерной же сетки по времени имеем только отличие в:

$$t_2 = t^{j-2}, \quad t_1 = t^{j-1}, \quad t_0 = t^j$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^j - u^{j-2}}{t_2 - t_1} = \frac{u^j - u^{j-2}}{d_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{u^j - u^{j-1}\frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2} + u^{j-2}\frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}}{t_0\left(t_0 - t_1 - t_2\right) + t_1 t_2} = \frac{u^j - u^{j-1}m_1 + u^{j-2}m_2}{d_2}$$

Эти выражения были упрощены при помощи замен:

$$d_1 = t_0 - t_2, \quad d_2 = \frac{t_0\left(t_0 - t_1 - t_2\right) + t_1 t_2}{2}, \quad m_1 = \frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2}, \quad m_2 = \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}$$

И итоговый результат будет:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{d_1} + \frac{\chi}{d_2}\right)\right)\mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}^{j-1}\frac{m_1\chi}{d_2} + \mathbf{q}^{j-2}\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{d_1} - \frac{m_2\chi}{d_2}\right)\right)$$

2. Исследования

2.1. Таблицы

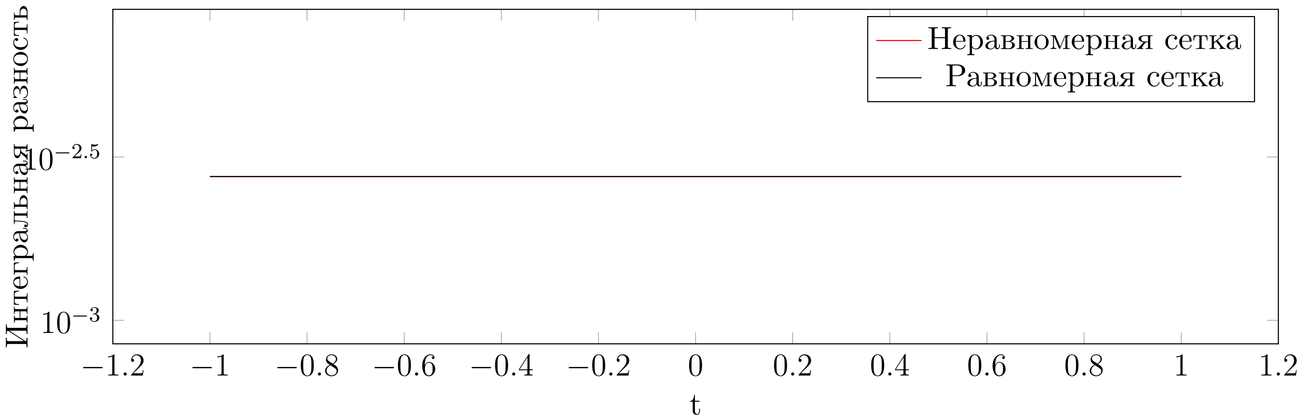
2.1.1. 10 на 10 на 10

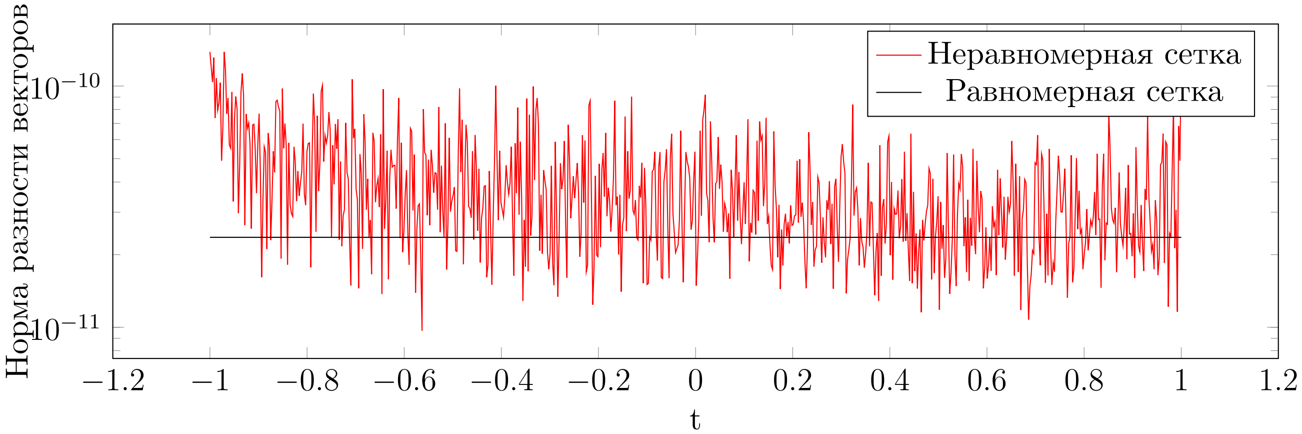
2.1.2. 50 на 50 на 50

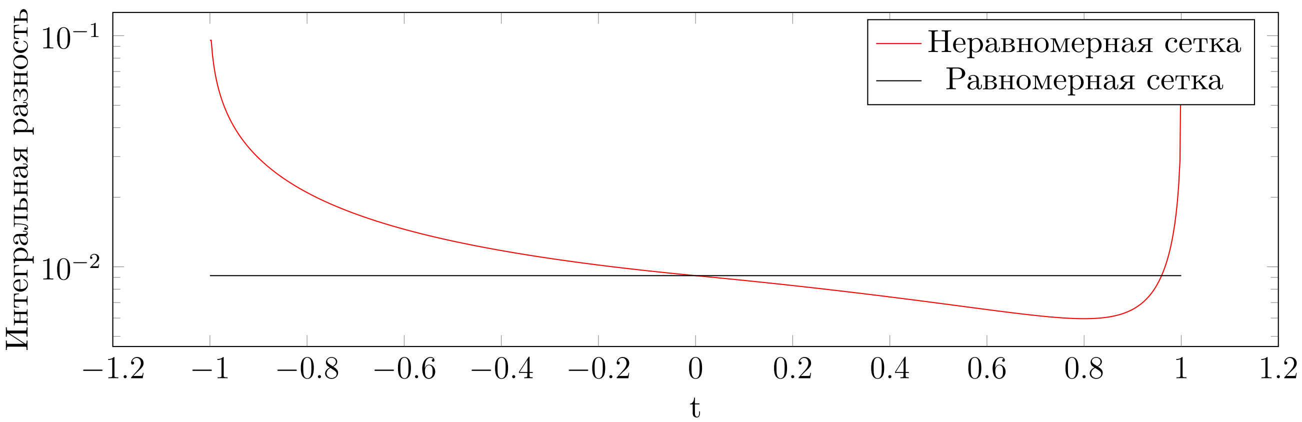
2.2. Неравномерные сетки

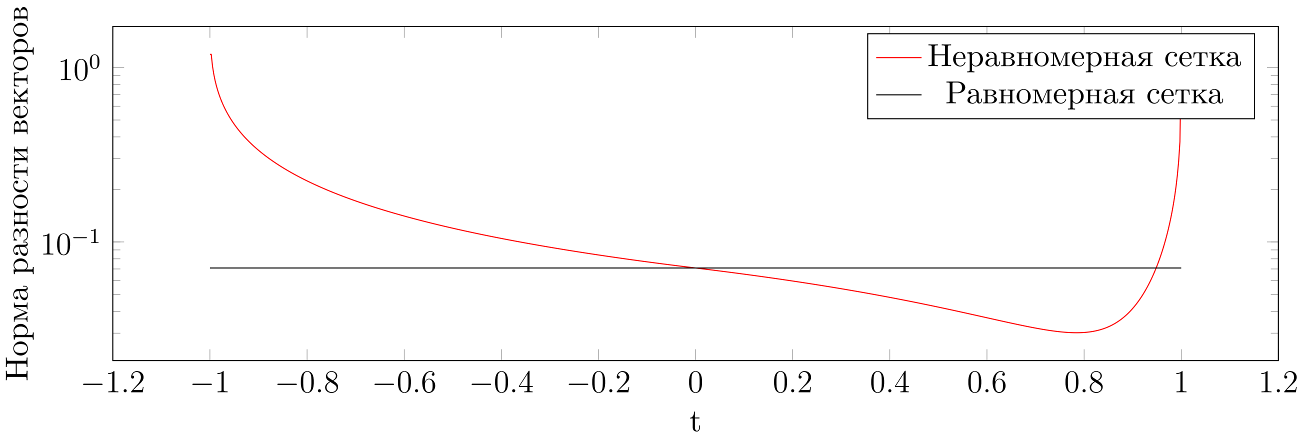
2.2.1. По пространству

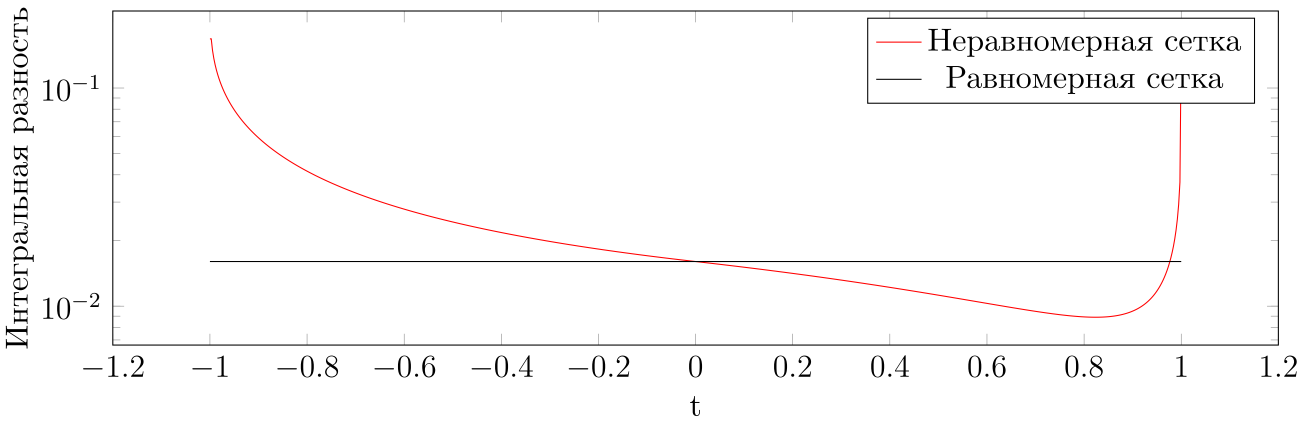
2.2.2. По времени

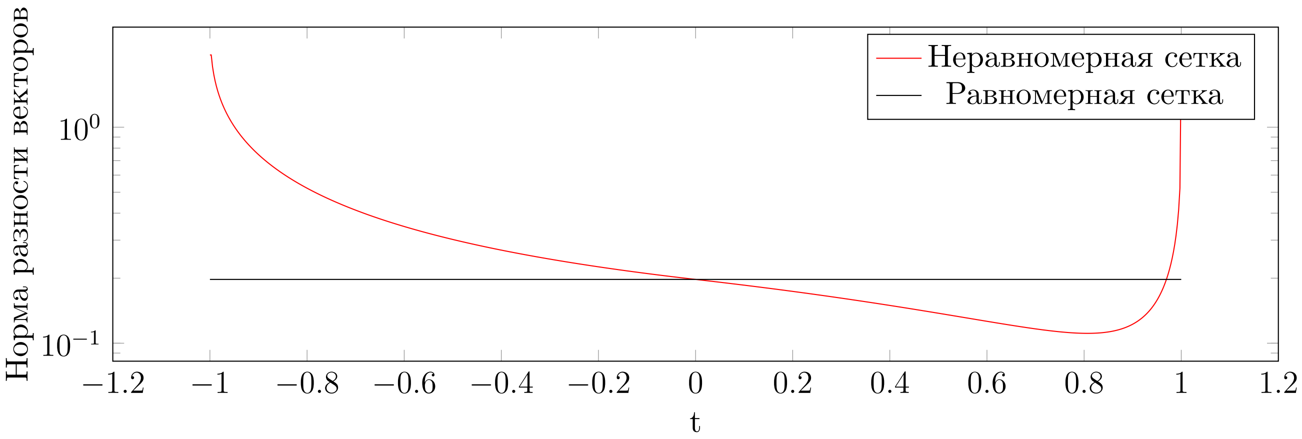


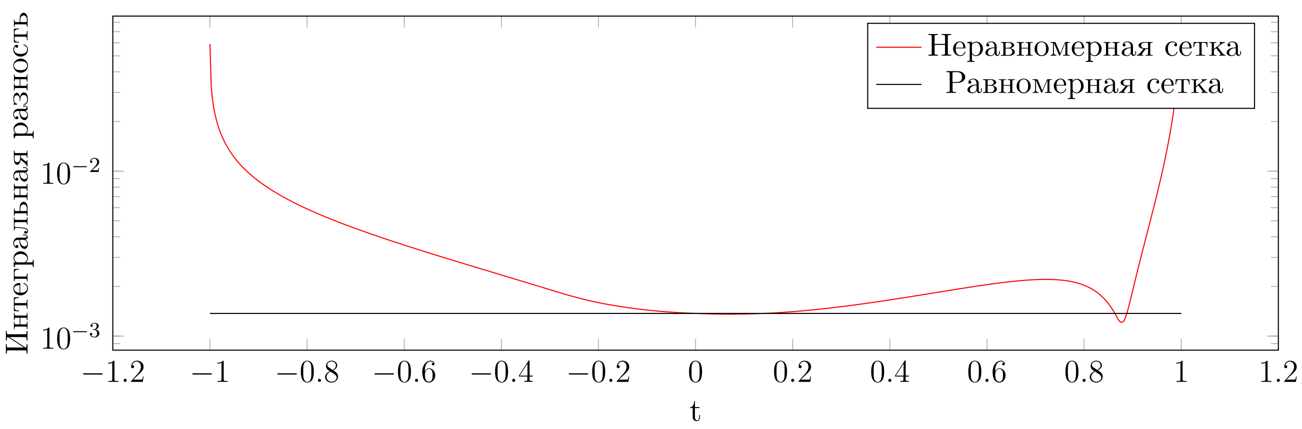


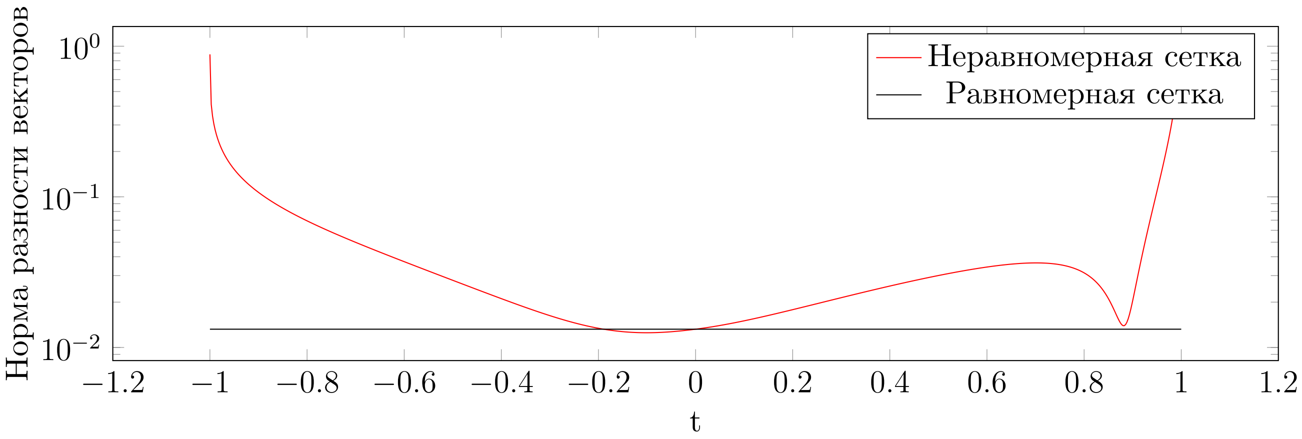


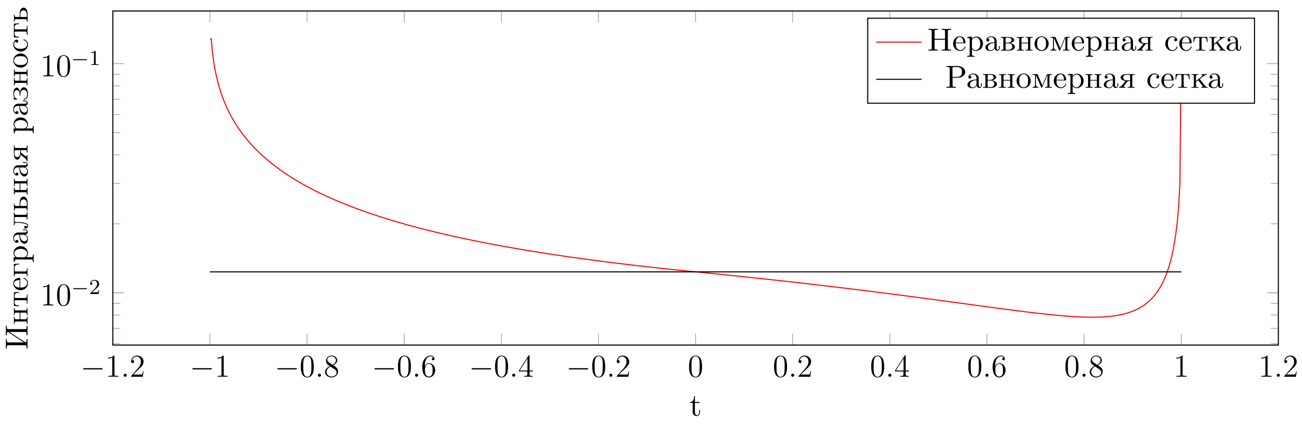

Норма разности векторов
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
10^0
10^{-1}
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
t

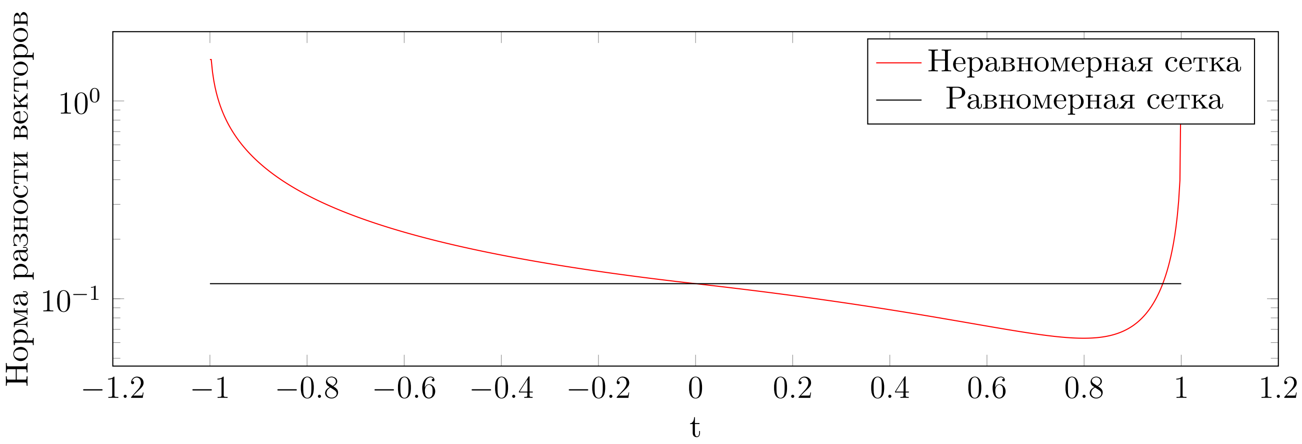

Интегральная разность
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
10^{-1}
10^{-2}
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
t


Норма разности векторов
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
10^0
10^{-1}
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
t


Интегральная разность
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
10^{-2}
10^{-3}
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
t


Норма разности векторов
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
t


Интегральная разность
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
t


Норма разности векторов
Неравномерная сетка
Равномерная сетка
t