Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №2
по дисциплине «Уравнения математической физики»

Решение эллиптических краевых задач методом конечных разностей

Факультет: ПМИ

Группа: ПМ-63

Студенты: Шепрут И.И.

Вариант: 10

Преподаватель: Патрушев И.И.

Новосибирск
2019

1 Цель работы

Разработать программу решения эллиптической краевой задачи методом конечных разностей. Протестировать программу и численно оценить порядок аппроксимации.

2 Задание

1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы A и вектора правой части b для метода простой итерации.
2. Реализовать программу решения нелинейной задачи методом простой итерации с учетом следующих требований:
   ● язык программирования C++ или Фортран;
   ● предусмотреть возможность задания неравномерных сеток по пространству и по времени, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
   ● матрицу хранить в ленточном формате, для решения СЛАУ использовать метод LU - разложения;
   ● предусмотреть возможность использования параметра релаксации.
3. Протестировать разработанную программу.
4. Провести исследования реализованных методов на различных зависимостях коэффициента от решения (или производной решения) в соответствии с заданием. На одних и тех же задачах сравнить по количеству итераци метод простой итерации. Исследовать скорость сходимости от параметра релаксации.

   Вариант 5: уравнение $-\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u) + \sigma\frac{\partial u}{\partial t} = f$. Базисные функции - линейные.

3 Анализ задачи

Необходимо решить задачу:

$-\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u) + \sigma\frac{\partial u}{\partial t} = f$

Первые краевые условия записываются в виде: $u(x, y)|_\Gamma = g_1(x, y)$, где $g_1(x, y)$ — известная функция.

На первом этапе решения задачи нужно построить сетку. Матрица формируется одним проходом по всем узлам, для регулярных узлов заполняется согласно пятиточечному шаблону, для прочих – в соответствии с краевыми условиями.

4 Исследования

Далее под точностью решения будет подразумеваться L_2 норма между вектором q, полученным в ходе решения, на последнем моменте времени, и между реальным значением узлов, которые мы знаем, задавая функцию u. В исследованиях на порядок сходимости эта норма будет ещё делиться на число элементов, для нахождения среднего отклонения от идеального решения.

4.1 Точность для разных функций

Здесь показана точность решения и количество итераций в зависимости от функций $u(x, t)$ и $\lambda(u)$. Запускается со следующими параметрами:

• $sigma = 1$.
• $\varepsilon = 0.001$.
• $\text{iters}_{max} = 500$.
• Функция правой части высчитывается автоматически.
• Сетка по пространству равномерная: $(1, 1.1, \cdots, 1.9, 2)$. Сетка по времени равномерная: $(0, 0.1, \cdots, 0.9, 1)$.
• Начальное приближение: для функций u, линейных по t начальное приближение — $(1, 1, ...)$.
• Для функций u, нелинейных по t начальное приближение в момент $t = 0$ — $(u(1,0), u(1.1,0), \cdots, u(1.9,0)$ то есть истинное решение.

$u(x,t)$ \ $\lambda(u)$	1	u	u^2	u^2+1	u^3	u^4	e^u	$\sin u$
$3x+t$	10 0.01	20 $0.28 \cdot 10^{-7}$	48 $0.44 \cdot 10^{-4}$	46 $0.38 \cdot 10^{-4}$	51 $0.63 \cdot 10^{-3}$	62 $0.67 \cdot 10^{-3}$	86 $0.1 \cdot 10^{-2}$	2704 19
$2x^2+t$	10 0.01	40 $0.35 \cdot 10^{-3}$	53 $0.31 \cdot 10^{-2}$	50 $0.27 \cdot 10^{-2}$	72 $0.4 \cdot 10^{-2}$	5010 20	16 $2.4 \cdot 10^{5}$	5010 $2.8 \cdot 10^{2}$
x^3+t	10 $0.75 \cdot 10^{-2}$	39 $0.13 \cdot 10^{-2}$	64 $0.84 \cdot 10^{-2}$	58 $0.61 \cdot 10^{-2}$	106 0.01	5010 18	12 $3.8 \cdot 10^{5}$	5010 62
x^4+t	10 0.014	49 $0.46 \cdot 10^{-2}$	70 0.044	64 0.037	3074 0.061	5010 29	5010 *nan*	5010 $4.5 \cdot 10^{2}$
e^x+t	10 0.01	36 $0.18 \cdot 10^{-3}$	46 $0.99 \cdot 10^{-3}$	45 $0.87 \cdot 10^{-3}$	55 $0.29 \cdot 10^{-2}$	70 $0.71 \cdot 10^{-2}$	24 $1.2 \cdot 10^{5}$	5010 $1.1 \cdot 10^{2}$
$3x+t^2$	10 0.38	17 0.062	38 0.011	38 0.01	46 $0.19 \cdot 10^{-2}$	56 $0.3 \cdot 10^{-3}$	64 $0.38 \cdot 10^{-3}$	5010 63
$3x+t^3$	10 1.4	20 0.22	36 0.04	36 0.039	43 $0.74 \cdot 10^{-2}$	49 $0.6 \cdot 10^{-3}$	61 $0.38 \cdot 10^{-2}$	5010 $2.4 \cdot 10^{4}$
$3x+e^t$	10 0.65	20 0.081	40 0.011	40 0.011	40 $0.19 \cdot 10^{-2}$	50 $0.31 \cdot 10^{-3}$	74 $0.15 \cdot 10^{-2}$	5010 48
$3x+sin(t)$	10 0.17	11 0.029	38 $0.51 \cdot 10^{-2}$	38 $0.49 \cdot 10^{-2}$	45 $0.67 \cdot 10^{-3}$	56 $0.42 \cdot 10^{-3}$	68 $0.11 \cdot 10^{-2}$	5010 24
e^x+t^2	10 0.38	29 0.06	38 0.013	38 0.012	51 $0.27 \cdot 10^{-2}$	64 $0.32 \cdot 10^{-2}$	81 0.011	5010 $2.7 \cdot 10^{2}$
e^x+t^3	10 1.4	27 0.22	35 0.044	35 0.042	45 $0.86 \cdot 10^{-2}$	59 $0.26 \cdot 10^{-2}$	71 0.022	5010 $2.2 \cdot 10^{3}$
e^x+e^t	10 0.65	30 0.081	40 0.012	40 0.012	50 $0.3 \cdot 10^{-2}$	60 $0.24 \cdot 10^{-2}$	98 0.025	5010 $7.7 \cdot 10^{3}$
$e^x+sin(t)$	10 0.17	30 0.028	39 $0.52 \cdot 10^{-2}$	39 $0.49 \cdot 10^{-2}$	50 $0.28 \cdot 10^{-2}$	64 $0.95 \cdot 10^{-2}$	82 0.032	5010 $2.5 \cdot 10^{3}$

4.2 Зависимость точности от нелинейной сетки

4.2.1 Функции нелинейной сетки

В ходе выполнения лабораторной работы были обнаружены функции, позволяющие легко задавать неравномерную сетку, сгущающуюяся к одному из концов.

Если у нас задано начало сетки — a, конец — b, а количество элементов n, тогда сетку можно задать следующим образом:

$x_i = a + m\left(\frac{i}{n}\right) \cdot (b - a), i = \underline{0, n}$,

где $m(x)$ — некоторая функция, задающая неравномерную сетку. При этом x обязаны быть принадлежать области $[0, 1]$, а функция m возвращать значения из той же области, и при этом быть строго монотонной на этом участке. Тогда гарантируется условие на сетке, что $x_j \leqslant x_i$ при $j \leqslant i$.

Пример: при $m(x) = x$, сетка становится равномерной.

Найденные функции:

$$m_{1,t}(x) = x^t$$

$$m_{2,t}(x) = x^{\frac{1}{t}}$$

$$m_{3,t}(x) = \frac{t^x - 1}{t - 1}$$

$$m_{4,t}(x) = \frac{\frac{1}{t^x}}{\frac{1}{x} - 1}$$

Что интересно, эти функции вырождаются в x при $t = 1$, а при $t = 0$, они вырождаются в сетку, полностью находящуюся на одном из концов: 1, 3 фукнции стремятся к концу b; а функции 2, 4 стремятся к концу a. 1 и 2 функции симметричны, как 3 и 4.

Таким образом, можно исследовать различные неравномерные сетки на итоговую точность и число итераций, изменяя параметр от 0 до 1.

4.2.2 Описание исследований

Параметры остаются прежними, с небольшими изменениями:

• iters$_{max} = 100$.
• Сетка по пространству неравномерная, если исследование происходит по сетке пространству, и равномерная, если исследование происходит по сетке времени.

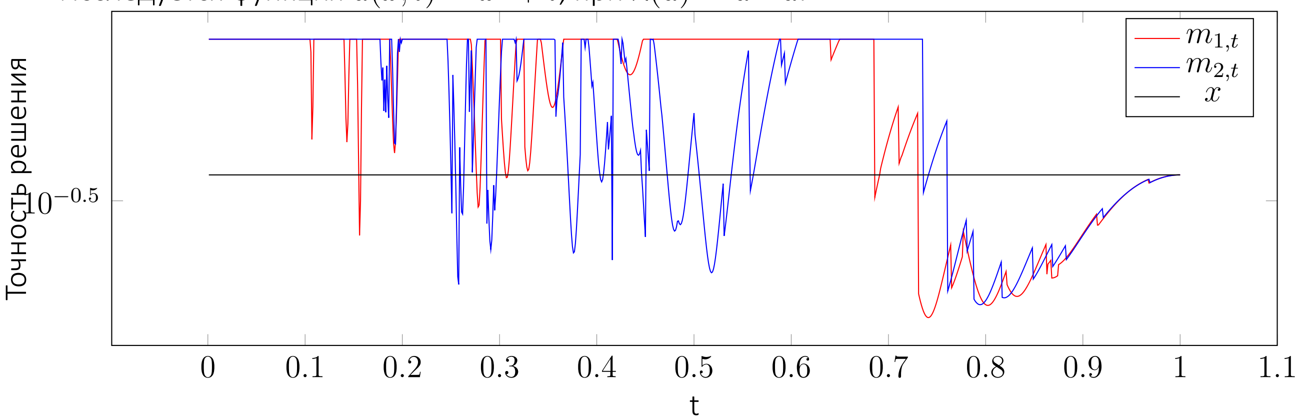
Исследуется скорость и качество сходимости в зависимости от параметра неравномерной сетки.

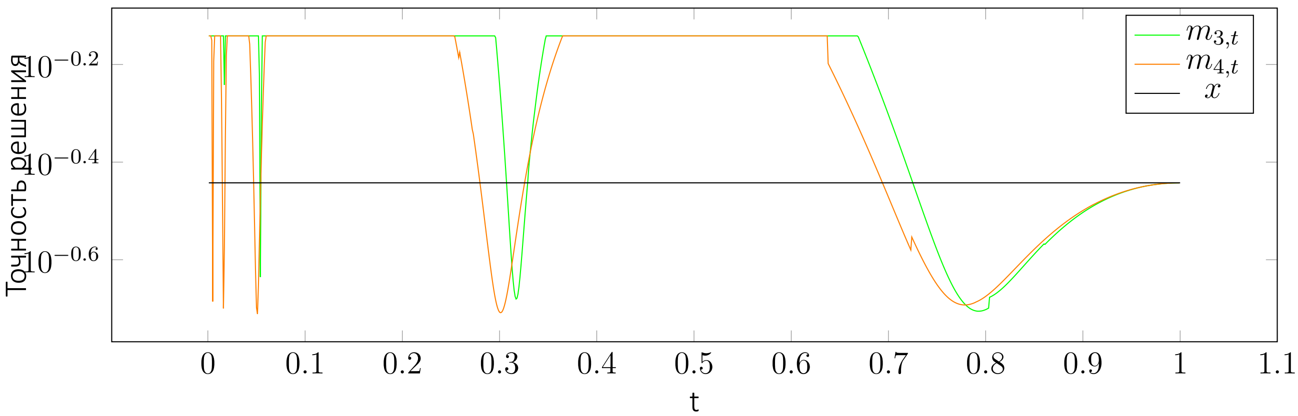
4.2.3 Сетка по пространству

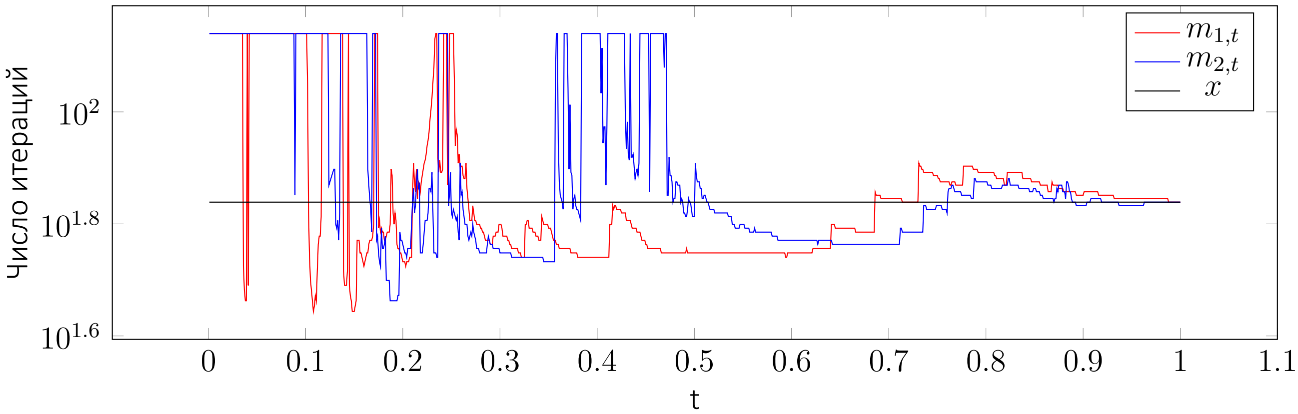
В данных исследованиях неравномерность применяется к сетке по пространству.

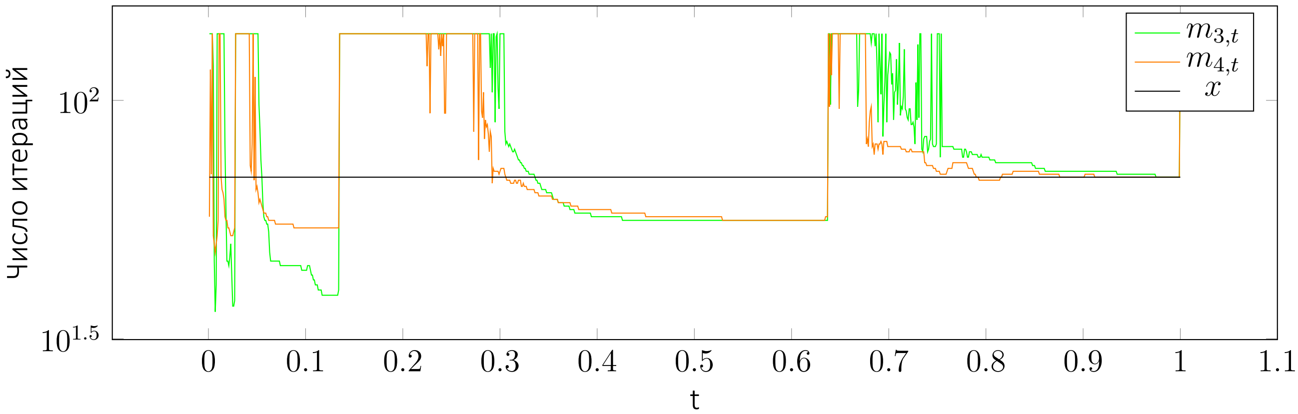
4.2.3.1 u = x4 + t

Исследуется функция $u(x,t) = x^4 + t$, при $\lambda(u) = u * u$.



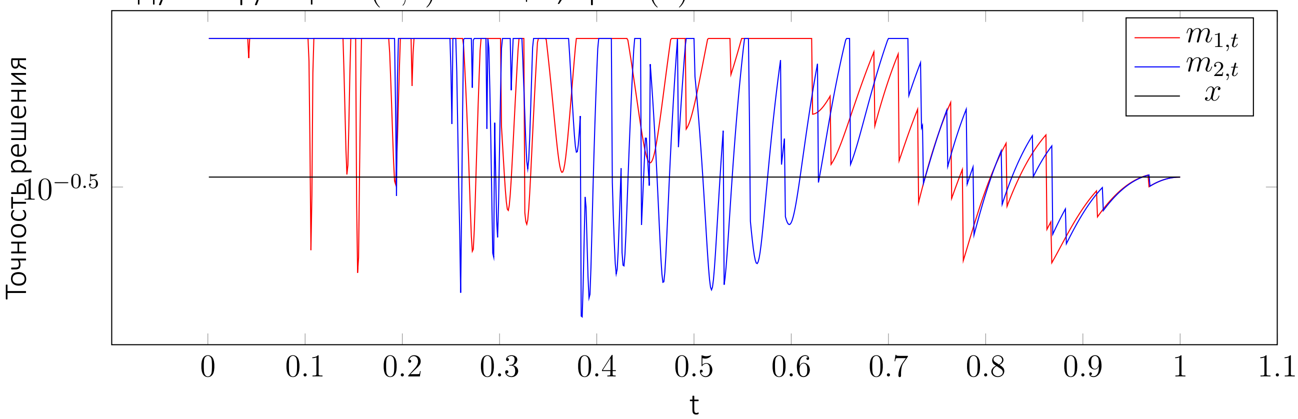


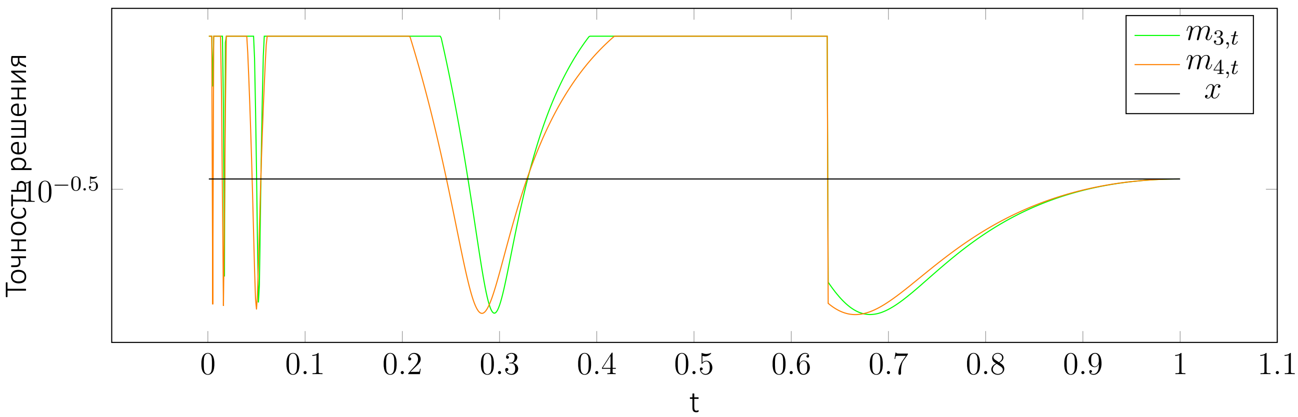


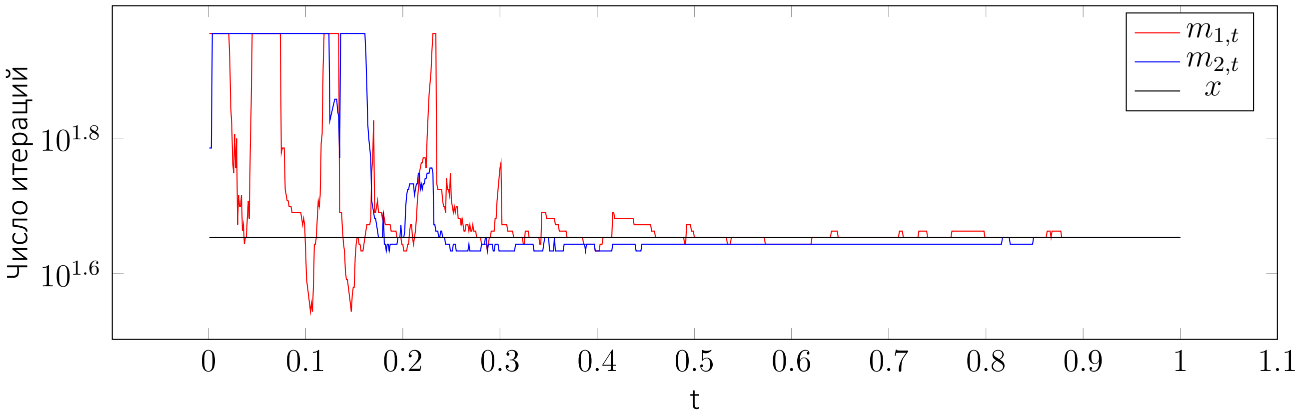


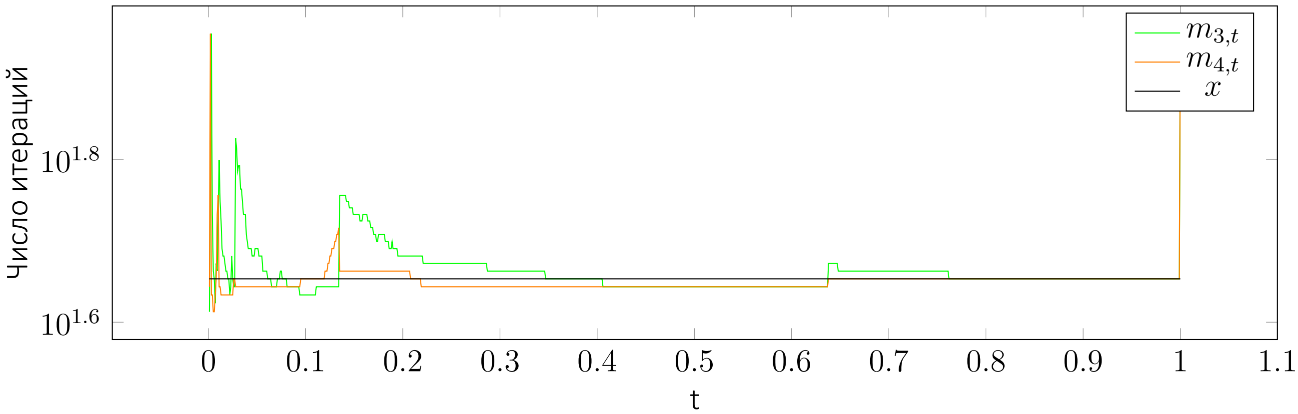
4.2.3.2 u = exp(x) + t

Исследуется функция $u(x,t) = e^x + t$, при $\lambda(u) = u * u$.







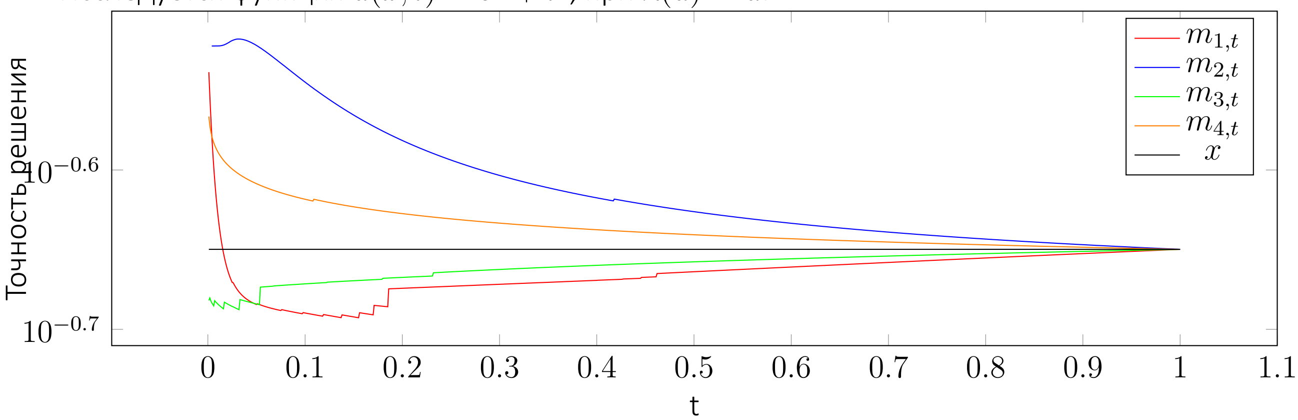


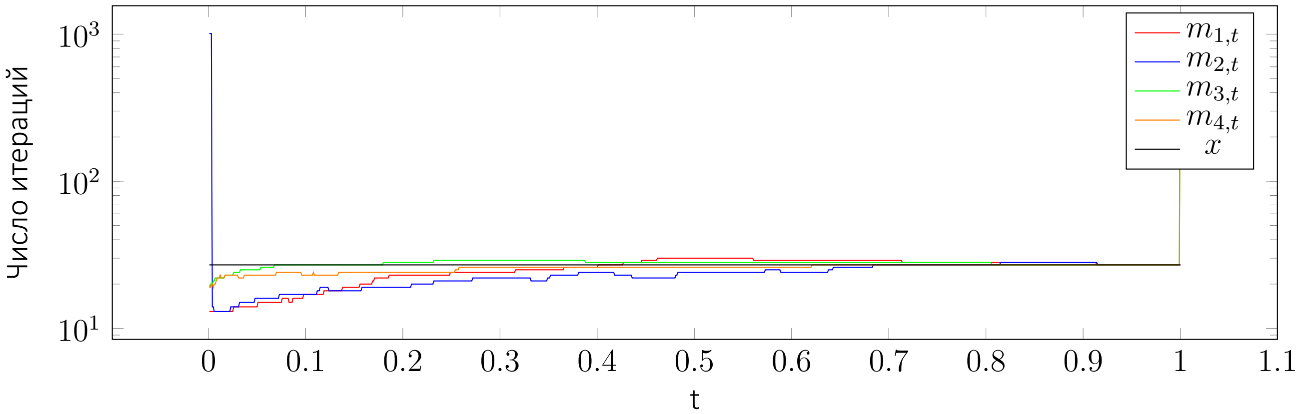
4.2.4 Сетка по времени

В данных исследованиях неравномерность применяется к сетке по времени.

4.2.4.1 u = exp(x) + t3

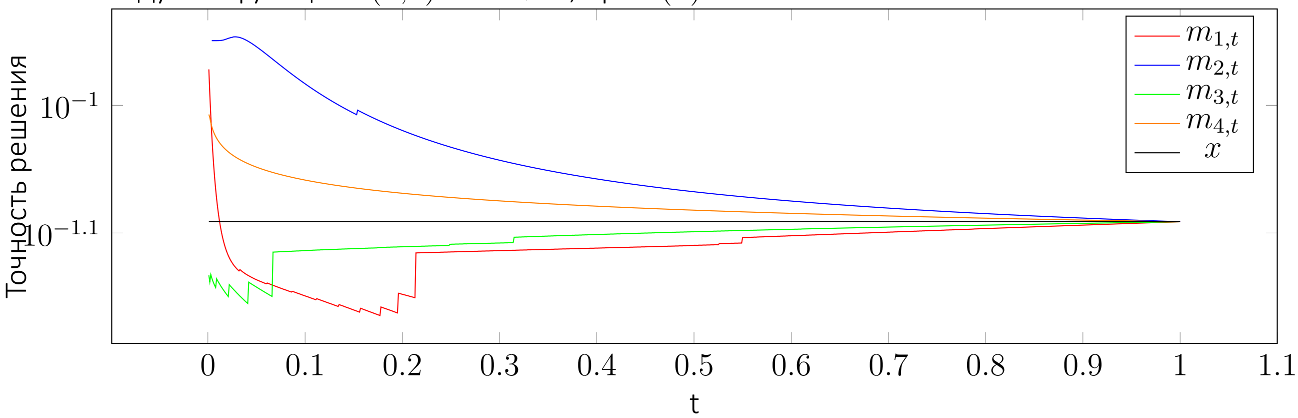
Исследуется функция $u(x,t) = e^x + t^3$, при $\lambda(u) = u$.

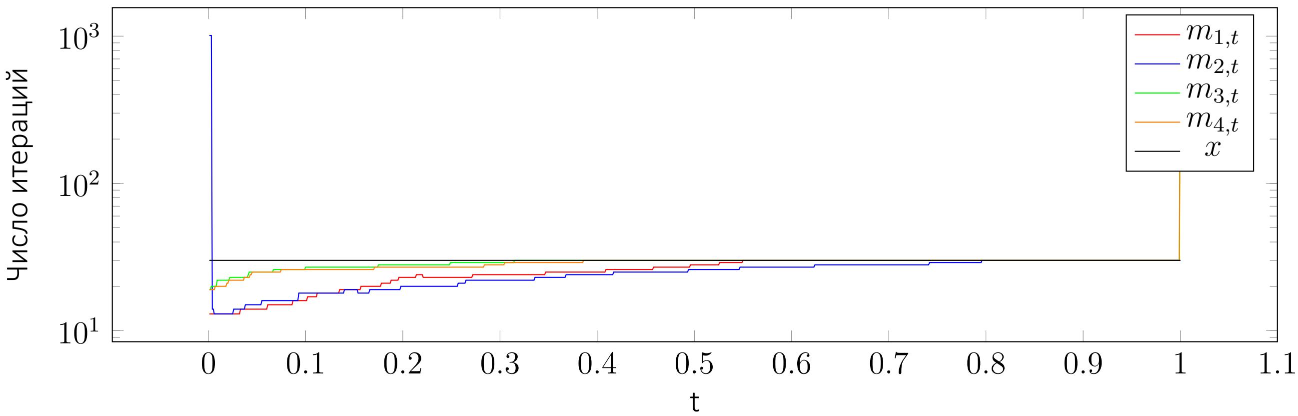




4.2.4.2 u = exp(x) + exp(t)

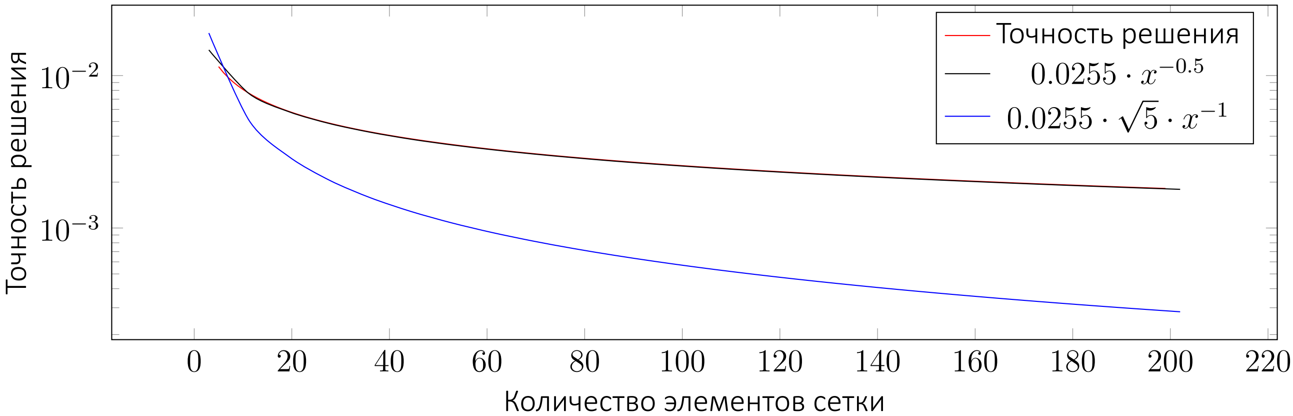
Исследуется функция $u(x,t) = e^x + e^t$, при $\lambda(u) = u$.





4.3 Точность в зависимости от размера сетки

4.3.1 Сетка по пространству



4.3.2 Сетка по времени