Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики

РГЗ по курсу «ТВиМС»

Часть II

Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМ-63
Студент:	Шепрут И.И.
Вариант:	22
Преподаватели:	Постовалов С.Н.
	Веретельникова И.В.

Новосибирск
2018

Решаемое уравнение в общем виде в декартовой системе координат:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

Первые краевые условия:
Эквивалентная постановка в форме уравнения Галёркина:
Аппроксимация уравнения Галёркина на конечномерных подпространствах:
Формулы для билинейных базисных функций прямоугольных элементов:
Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$M_{ij}^{\gamma} = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$b_i = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\mathbf{G} = \frac{\bar{\lambda}}{6} \frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\bar{\lambda}}{6} \frac{h_x}{h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{\gamma} = \bar{\gamma} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^t$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

Схема Кранка-Николсона:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2}$$

$$u = \frac{u^j + u^{j-2}}{2}$$

$$f = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}$$

$$
-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} \frac{u^j + u^{j-2}}{2}\right) + \gamma \frac{u^j + u^{j-2}}{2} + \sigma \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t} + \chi \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2} = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}
$$

$$
\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}^{\chi}
$$