

Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**»



Кафедра прикладной математики

РГЗ по курсу «ТВиМС»

Часть II

Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМ-63
Студент:	Шепрут И.И.
Вариант:	22
Преподаватели:	Постовалов С.Н. Веретельникова И.В.

Новосибирск
2018

Решаемое уравнение в общем виде в декартовой системе координат:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + \gamma u + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

Первые краевые условия:

Эквивалентная постановка в форме уравнения Галёркина:

Аппроксимация уравнения Галёркина на конечномерных подпространствах:

Формулы для билинейных базисных функций прямоугольных элементов:

Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$M_{ij}^\gamma = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j dx dy$$

$$b_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i dx dy$$

$$\mathbf{G} = \frac{\bar{\lambda} h_y}{6 h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\bar{\lambda} h_x}{6 h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^\gamma = \bar{\gamma} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^t$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

Схема Кранка-Николсона:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2}$$

$$u = \frac{u^j + u^{j-2}}{2}$$

$$f = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}$$

$$-\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} \frac{u^j + u^{j-2}}{2}\right) + \gamma \frac{u^j + u^{j-2}}{2} + \sigma \frac{u^j - u^{j-2}}{2\Delta t} + \chi \frac{u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}}{\Delta t^2} = \frac{f^j + f^{j-2}}{2}$$

Подставляя это в уравнение Галёркина, получаем СЛАУ:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \frac{\mathbf{M}^\gamma}{2} + \frac{\mathbf{M}^\sigma}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{M}^\chi}{\Delta t^2}\right) \mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} - \frac{\mathbf{M}^\gamma \mathbf{q}^{j-2}}{2} + \frac{\mathbf{M}^\sigma \mathbf{q}^{j-2}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}^\chi (-2\mathbf{q}^{j-1} + \mathbf{q}^{j-2})}{\Delta t^2}$$

В нашем случае, так как γ, σ, χ являются константами, можно записать:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\Delta t} + \frac{\chi}{\Delta t^2}\right)\right) \mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}^{j-1} \frac{2\chi}{\Delta t^2} + \mathbf{q}^{j-2} \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\Delta t} - \frac{\chi}{\Delta t^2}\right)\right)$$

Для неравномерной же сетки по времени имеем только отличие в:

$$t_2 = t^{j-2}, \quad t_1 = t^{j-1}, \quad t_0 = t^j$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^j - u^{j-2}}{t_2 - t_1} = \frac{u^j - u^{j-2}}{d_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{u^j - u^{j-1} \frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2} + u^{j-2} \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}}{t_0(t_0 - t_1 - t_2) + t_1 t_2} = \frac{u^j - u^{j-1} m_1 + u^{j-2} m_2}{d_2}$$

Эти выражения были упрощены при помощи замен:

$$d_1 = t_2 - t_1, \quad d_2 = \frac{t_0(t_0 - t_1 - t_2) + t_1 t_2}{2}, \quad m_1 = \frac{t_0 - t_2}{t_1 - t_2}, \quad m_2 = \frac{t_0 - t_1}{t_1 - t_2}$$

И итоговый результат будет:

$$\left(\frac{\mathbf{G}}{2} + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{d_1} + \frac{\chi}{d_2}\right)\right) \mathbf{q}^j = \frac{(\mathbf{b}^j + \mathbf{b}^{j-2})}{2} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{q}^{j-2}}{2} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}^{j-1} \frac{m_1 \chi}{d_2} + \mathbf{q}^{j-2} \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma}{d_1} - \frac{m_2 \chi}{d_2}\right)\right)$$