

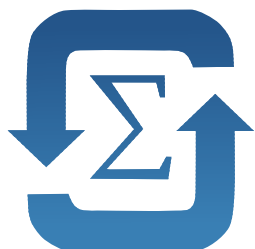
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №1
по дисциплине «Уравнения математической физики»

Решение эллиптических краевых задач методом конечных разностей



Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМ-63
Студенты:	Шепрут И.И.
Вариант:	10
Преподаватель:	Патрушев И.И.

Новосибирск
2019

1 Цель работы

Разработать программу решения эллиптической краевой задачи методом конечных разностей. Протестировать программу и численно оценить порядок аппроксимации.

2 Задание

1. Построить прямоугольную сетку в области в соответствии с заданием. Допускается использовать фиктивные узлы для сохранения регулярной структуры.
2. Выполнить конечноразностную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы A и вектора правой части b .
3. Реализовать программу решения двумерной эллиптической задачи методом конечных разностей с учетом следующих требований:
 - язык программирования C++ или Фортран;
 - предусмотреть возможность задания неравномерных сеток по пространству, учет краевых условий в соответствии с заданием;
 - матрицу хранить в диагональном формате, для решения СЛАУ использовать метод блочной релаксации [2, стр. 886], [3].
4. Протестировать разработанные программы на полиномах соответствующей степени.
5. Провести исследования порядка аппроксимации реализованных методов для различных задач с неполиномиальными решениями. Сравнить полученный порядок аппроксимации с теоретическим.

Вариант 10: Область имеет Ш-образную форму. Предусмотреть учет первых и третьих краевых условий.

3 Анализ задачи

Необходимо решить задачу:

$$\Delta u = f(x, y)$$

Первые краевые условия записываются в виде: $u(x, y)|_{\Gamma} = g_1(x, y)$, где $g_1(x, y)$ — известная функция.

Третьи краевые условия записываются в виде: $u'(x, y) + A \cdot u(x, y)|_{\Gamma} = g_3(x, y)$ где $g_3(x, y)$ — известная функция.

На первом этапе решения задачи нужно построить сетку. Матрица формируется одним проходом по всем узлам, для регулярных узлов заполняется согласно пятиточечному шаблону, для прочих — в соответствии с краевыми условиями.

4 Таблицы и графики

Параметры:

- Сетка имеет Ш-образную форму.
- Область сетки: $[0, 1] \times [0, 1]$.
- Количество элементов: 20 по обеим осям.
- Сетка равномерная.

- Точностью решения является норма L_2 разности векторов истинных значений и значений, вычисленных с помощью конечно-разностной аппроксимации.
- СЛАУ решается при помощи метода Гаусса-Зейделя с точностью 10^{-12} , максимальным числом итераций 3000 и параметром релаксации 1.4.

4.1 Точность для разных функций

$u(x, t)$ \ $\lambda(u)$	1	u	u^2	$u^2 + 1$	u^3	u^4	e^u	$\sin u$
$3x + t$	10 0.01	20 $0.28 \cdot 10^{-7}$	48 $0.44 \cdot 10^{-4}$	46 $0.38 \cdot 10^{-4}$	51 $0.63 \cdot 10^{-3}$	62 $0.67 \cdot 10^{-3}$	86 $0.1 \cdot 10^{-2}$	2704 19
$2x^2 + t$	10 0.01	40 $0.35 \cdot 10^{-3}$	53 $0.31 \cdot 10^{-2}$	50 $0.27 \cdot 10^{-2}$	72 $0.4 \cdot 10^{-2}$	5010 20	16 $2.4 \cdot 10^5$	5010 $2.8 \cdot 10^2$
$x^3 + t$	10 $0.75 \cdot 10^{-2}$	39 $0.13 \cdot 10^{-2}$	64 $0.84 \cdot 10^{-2}$	58 $0.61 \cdot 10^{-2}$	106 0.01	5010 18	12 $3.8 \cdot 10^5$	5010 62
$x^4 + t$	10 0.014	49 $0.46 \cdot 10^{-2}$	70 0.044	64 0.037	3074 0.061	5010 29	5010 <i>nan</i>	5010 $4.5 \cdot 10^2$
$e^x + t$	10 0.01	36 $0.18 \cdot 10^{-3}$	46 $0.99 \cdot 10^{-3}$	45 $0.87 \cdot 10^{-3}$	55 $0.29 \cdot 10^{-2}$	70 $0.71 \cdot 10^{-2}$	24 $1.2 \cdot 10^5$	5010 $1.1 \cdot 10^2$
$3x + t^2$	10 0.38	17 0.062	38 0.011	38 0.01	46 $0.19 \cdot 10^{-2}$	56 $0.3 \cdot 10^{-3}$	64 $0.38 \cdot 10^{-3}$	5010 63
$3x + t^3$	10 1.4	20 0.22	36 0.04	36 0.039	43 $0.74 \cdot 10^{-2}$	49 $0.6 \cdot 10^{-3}$	61 $0.38 \cdot 10^{-2}$	5010 $2.4 \cdot 10^4$
$3x + e^t$	10 0.65	20 0.081	40 0.011	40 0.011	40 $0.19 \cdot 10^{-2}$	50 $0.31 \cdot 10^{-3}$	74 $0.15 \cdot 10^{-2}$	5010 48
$3x + \sin(t)$	10 0.17	11 0.029	38 $0.51 \cdot 10^{-2}$	38 $0.49 \cdot 10^{-2}$	45 $0.67 \cdot 10^{-3}$	56 $0.42 \cdot 10^{-3}$	68 $0.11 \cdot 10^{-2}$	5010 24
$e^x + t^2$	10 0.38	29 0.06	38 0.013	38 0.012	51 $0.27 \cdot 10^{-2}$	64 $0.32 \cdot 10^{-2}$	81 0.011	5010 $2.7 \cdot 10^2$
$e^x + t^3$	10 1.4	27 0.22	35 0.044	35 0.042	45 $0.86 \cdot 10^{-2}$	59 $0.26 \cdot 10^{-2}$	71 0.022	5010 $2.2 \cdot 10^3$
$e^x + e^t$	10 0.65	30 0.081	40 0.012	40 0.012	50 $0.3 \cdot 10^{-2}$	60 $0.24 \cdot 10^{-2}$	98 0.025	5010 $7.7 \cdot 10^3$
$e^x + \sin(t)$	10 0.17	30 0.028	39 $0.52 \cdot 10^{-2}$	39 $0.49 \cdot 10^{-2}$	50 $0.28 \cdot 10^{-2}$	64 $0.95 \cdot 10^{-2}$	82 0.032	5010 $2.5 \cdot 10^3$

4.2 Зависимость точности от размера сетки

Параметры остаются прежними, с небольшими изменениями:

