Лекции по аналитической механике. Весенний семестр.

Муницына Мария Александровна

23 июня 2018 г.

Набор и рисунки: Александр Валентинов.
За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю и Алексею Петрову.

Источник: `https://github.com/valentiay/analmech`
Сообщить о ошибках можно здесь `https://github.com/valentiay/analmech/issues`
или здесь `https://vk.com/valentiay`*. Pull-реквесты приветствуются.*

Содержание

Лекция 1 от 07.02.2018

1 Равновесие динамических сил

$$\overline{r}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad \overline{r} = (x_1, y_1, z_1, \ldots)^T$$

Определение. r_0 — *положение равновесия, если*

$$\overline{r}(t_0) = \overline{r}_0,\ \dot{\overline{r}}(t_0) = 0 \Rightarrow \overline{r}(t) = \overline{r}_0$$

Замечание. *Положение равновесия зависит от системы отсчета.*

1.1 Общая теория статики

$\overline{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \ldots)^T$

$$\left.\begin{matrix} f_\alpha(\overline{r}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k \ \Leftrightarrow \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}}\dot{\overline{r}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \\ f_\beta(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = 0, \quad \beta = k+1, \ldots, n \qquad f_\beta = B(\overline{r}, t)\dot{\overline{r}} + \overline{\gamma} = 0 \end{matrix}\right\} \Phi\dot{\overline{r}} + \overline{\psi} = 0$$

$\delta\overline{r}$ — виртуальное перемещение, $\Phi\delta\overline{r} = 0$

$\overline{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \ldots)^T$,

$$(\overline{R}, \delta\overline{r}) = 0 \text{ — условие идеальности связей} \tag{1}$$

Принцип Даламбера. Если наложенные на систему связи идеальны, то некоторые ее положения являются положениями равновесия, тогда, и только тогда, когда работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящем систему из этого положения, равна нулю.

$$\overline{r}_0 \text{ — положение равновесия} \Leftrightarrow (\overline{F}, \delta\overline{r}) = 0 \quad \text{(связи идеальны.)}$$

Доказательство.

1. Принцип виртуальный перемещений: $\overline{r}(t)$ — движение системы $\Leftrightarrow (M\dot{\overline{r}} - \overline{F}, \delta\overline{r}) = 0$.
2. Принцип детерминированности.

■

1.2 Равновесие голономных систем

Голономная система:

$\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — обобщенные координаты.
$\overline{r} = \overline{r}(\overline{q}, t)$
$\overline{r}_0$ — положение равновесия, $\quad \overline{r}_0 = \overline{r}(\overline{q}_0, t)$
$\overline{Q} = \overline{Q}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$
$(\overline{F}, \delta\overline{r}) = (\overline{Q}, \delta\overline{q}), \quad \delta q_1, \ldots, \delta q_n$ — независимы.
$(1) \Leftrightarrow \overline{Q}(\overline{q}_0, 0, t) \equiv 0$

Система голономна, силы потенциальны:

$$\exists\Pi(\overline{q}, t) : \overline{Q} = -\operatorname{grad}\Pi(\overline{q}, t) = -\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{q}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left.\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{q}}\right|_{\overline{q}=\overline{q}_0} \equiv 0$$

$\overline{q}_0$ — критическая точка $\Pi(\overline{q}, t)$

Натуральная Лагранжева система (связи идеальны, голономны, стационарны, силы потенциальны и $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$):

$$T = T_2 = \frac{1}{2}(A(\overline{q})\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}), \quad \Pi = \Pi(\overline{q})$$
$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + \Pi = const\right)$$

Определение. $\overline{q}_0$ — *положение равновесия, если* $\overline{q}(t) \equiv \overline{q}_0$ — *решение уравнений Лагранжа.*

Утверждение. $\overline{q}_0$ — *положение равновесия натуральной системы, тогда, и только тогда, когда* $\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Big|_{\overline{q}=\overline{q}_0} \equiv 0$.

Доказательство.

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\Bigg|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\overline{q}}}\right)\Bigg|_{\dot{q}=0}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial \overline{q}}\Bigg|_{\dot{q}=0}}_{0} + \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Bigg|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Bigg|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0$$

■

Пример (Математический маятник).

$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \Pi = -mgl\cos\varphi$

1) Положение равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{array}\right.$$

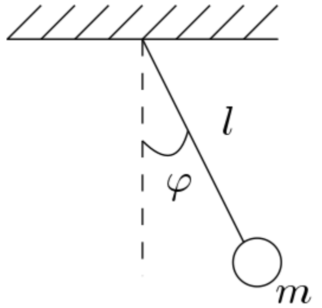
2) Уравнение движения:

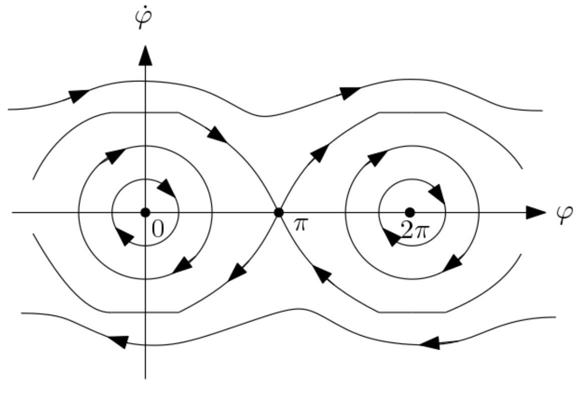
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

3) Интеграл энергии:

$$T + \Pi = h = const$$
$$\frac{1}{2}mgl^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = h$$
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}(h - \Pi(\varphi))$$
$$\dot{\varphi} = \pm\alpha\sqrt{h - \Pi(\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} = const$$

$(\varphi, \dot{\varphi})$ — *фазовая плоскость.*





$1) h < -mgl \quad \varnothing$

2)$h = -mgl$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ — *равновесие*

3) $-mgl < h < mgl$ — *колебания*

4)$h = mgl$ — *либо равновесие* $\varphi = \pi$, *либо движение к* $\varphi = \pi$

5)$h > mgl$ — *вращение*

Пример (Маятник во вращающейся плоскости).

$n = 1, q = \varphi$

$T = \dfrac{m}{2}\overline{v}^2 = \dfrac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\varphi\right)$

$\Pi = -mgr\cos\varphi$

$L = T - \Pi,\quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 \underbrace{-T_0 + \Pi}_{\Pi^*} = const$

$\Pi^* = -mgr\cos\varphi - \dfrac{m}{2}r^2\omega^2\sin^2\varphi$

$\dfrac{\partial \Pi^*}{\partial\varphi} = mgr\sin\varphi - \dfrac{1}{2}mr^2\omega^2\sin 2\varphi = mr\sin\varphi(g - r\omega^2\sin\varphi) = 0 \Leftrightarrow$

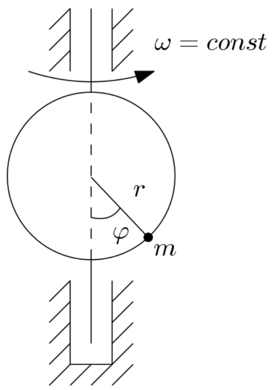
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm\arccos\frac{g}{r\omega^2} = \varphi_0, \omega^2 > \frac{g}{2} \end{array}\right.$

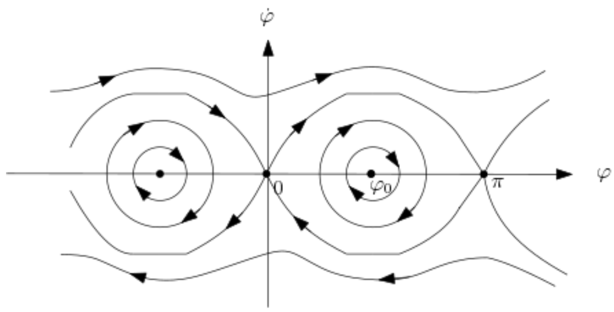
$\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2} = mgr\cos\varphi - mr^2\omega^2\cos 2\varphi$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = mr(g - r\omega^2) \gtrless 0 \quad \omega^2 \lessgtr \dfrac{g}{r}$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -mr(g + r\omega^2) < 0,$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} = mgr\dfrac{g}{r\omega^2} - mr^2\omega^2\left(2\dfrac{g^2}{r^2\omega^4} - 1\right) = mr\omega^2\left(r - \dfrac{g^2}{2\omega^4}\right) < 0$





<u>Лекция 2 от 14.02.2018</u>

1.3 Элементы теории устойчивости

$$\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}), \overline{x} \in \mathbb{R}^n, \overline{f} \in C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \overline{x}(t) = \overline{x}(t, \overline{x}(0)) \text{ — начальные условия.} \tag{2}$$

Определение. $\overline{x} = \overline{x}_0$ — *положение равновесия* (2), *если* $\overline{f}(\overline{x}_0) = 0$ $(\overline{x}(t, \overline{x}_0 \equiv \overline{x}_0))$, $\overline{x}_0 = 0$ *без ограничения общности.*

Определение. *Равновесие* (2) *устойчиво по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что любое решение с начальными условиями в* δ*-окрестности равновесия существует при всех* $t > 0$ *и находится в* ε*-окрестности.*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ |\overline{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\overline{x}(t)| < \varepsilon,\ \forall t > 0.$$

Определение. $\overline{x} = 0$ — *неустойчивое, если*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \overline{x}(0), t_1 > 0 : |x_0| < \delta \ |\overline{x}(t_1, \overline{x}_0)| > \varepsilon$$

Определение. $\overline{x} = 0$ — *устойчиво асимптотически, если*

1. $\overline{x} = 0$ — *устойчиво,*
2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \overline{x}(t, \overline{x}(0)) = 0.$

1.4 Прямой метод Ляпунова

$V(x)$

$\dot{V} = \dfrac{\partial V}{\partial \overline{x}} \dot{\overline{x}} = \dfrac{\partial V}{\partial \overline{x}} \overline{f}$

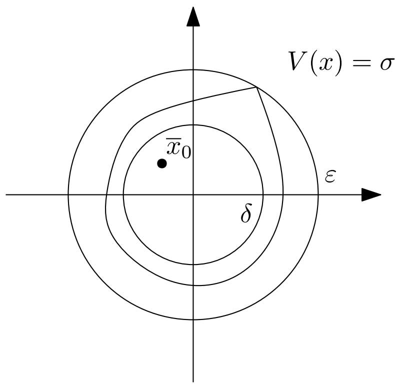
Определение. $\dot{V}$ — *производная функции V по времени вдоль решения* (2).

Теорема (Ляпунова об устойчивости)**.** *Если существует гладкая функция $V(x)$ определенная в ε-окрестности равновесия $x = 0$ системы* (2)*, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $$V(0) = 0, \ \forall x \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$
2. $$\dot{V} \leqslant 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon,$$

то $x = 0$ — устойчиво по Ляпунову.

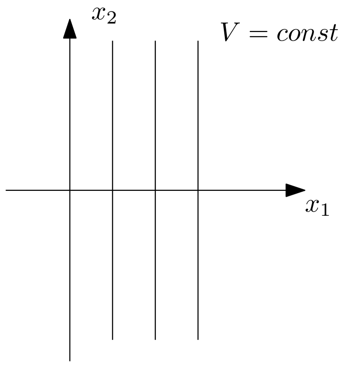
Доказательство.
1)$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \sigma = \min V(\overline{x}), |\overline{x}| = \varepsilon$
2)$V \in C^1 \Rightarrow \exists \delta : V(\overline{x}) < \sigma \ \forall \overline{x} : |\overline{x}| < \delta$
3)$\forall \overline{x}_0 : \ |\overline{x}_0| < \delta \ V(\overline{x}(t)) < \sigma \Rightarrow |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon \quad (\overline{x}_0(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_0))$



■

Замечание.
1)$V(0) = 0, V(\overline{x}) > 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow$ V — *положительно определенная функция в 0.*
2)$V(0) = 0, V(\overline{x}) < 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow$ V — *отрицательно определенная функция в 0.*
3)$V(0) = 0, V(\overline{x}) \geqslant (\leqslant) \ 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow$ V — *знакопостоянная функция в 0.*

Пример.
$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ — *положительно определена в* $x_1 = x_2 = 0$
$V(x_1, x_2) = x_1^2$ — *не является положительно определенной в* $x_1 = x_2 = 0$



Замечание. *Если в условии теоремы Ляпунова в условии* 2) *поставить строгое неравенство, устойчивость станет асимптотической.*

Теорема. *Барбашина-Красовского Если* $\exists V(x) \in C^1 : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$, *то*

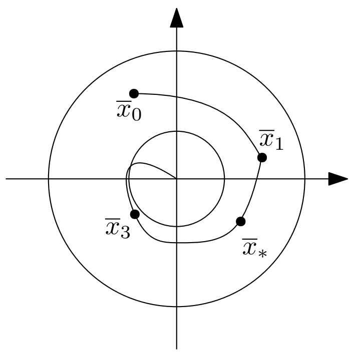
1. $$V(0) = 0 \ V(\overline{x}) > 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2. $$\dot{V} \leqslant 0 \ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon,$$

3. *множество* $\{\overline{x} : \dot{V}(\overline{x}) = 0\}$ *не содержит целиком решения системы* (2), *кроме равновесия* $\overline{x} = 0 \Rightarrow \overline{x} = 0$ — *установившееся асимптотически.*

Замечание. *Если* $\dot{V} < 0$, *то* $\{x : \dot{V} = 0\} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\overline{x} = 0$ установившееся, но не асимптотическое, т.е.
$I)\ \exists \overline{x}_0(t)\ |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon,\ \overline{x}_0 \not\to 0$, т.е.
$\exists \delta, \{t_k\},\ t_{k+1} > t_k\ \delta < |\overline{x}_0(t_k)| < \varepsilon$
$II)\ \exists \{k_s\}\ \overline{x}_s = \overline{x}_0(t_{k_s}) \xrightarrow{s\to+\infty} \overline{x}_*$
$|\overline{x}_s| > \delta \Rightarrow |\overline{x}_*| > \dfrac{\delta}{2}$
$III)\ V(\overline{x}_0(t))$
$1),\ 2) \Rightarrow \exists V = \lim\limits_{t\to+\infty} V(x_0(t))$
$V \in C^1 \Rightarrow V = V(\overline{x}_*)$



$$\boxed{\forall t\ V(\overline{x}_0(t)) \geqslant V} \quad (3)$$

$$(4)$$

$IV)$ Рассмотрим$\overline{x}_s(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_s) = \overline{x}_0(t + t_{k_s}, \overline{x}_0)$
$V)\ \overline{x}_*(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_*)$
$V(\overline{x}_*) = V,\ 2),\ 3) \Rightarrow \exists t^* : \underbrace{V(\overline{x}_*(t_*))}_{V_*} < V$
$VI)\ V$ — непрерывная б.т. $\overline{x}_*(t_*)$

$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x\ |\overline{x} - \overline{x}_*(t_*)| < \delta_1 \Rightarrow |V(\overline{x}) - V(x_*(t_*))| < \varepsilon_1$
Решения (2) непрерывно и зависит от начальных условий ($t < \infty$)
$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x\ |\overline{x} - \overline{x}_*(t_*)| < \delta_2 \Rightarrow |\overline{x}(t_*) - x_*(t_*)| < \varepsilon_2$
$\forall \varepsilon_3 > 0\ \exists s : |\overline{x}_s - x_*| < \varepsilon_3 \forall s > S$

$$\varepsilon_1 = V - V_* > 0 \to S : \left| V(\overline{x}_s(t_*)) - \underbrace{V(\overline{x}_*(t_*))}_{V_*} \right| < V - V_*$$

$V(\overline{x}_s(t_*)) - V_* < V - V_*$ — противоречие с (3)

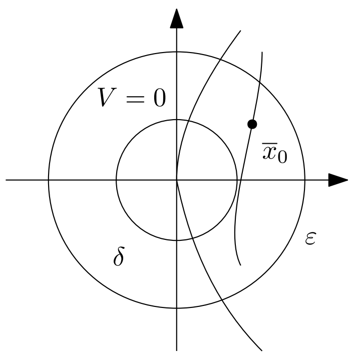
■

Теорема (Красовского)**.** *$\exists V \in C^1 : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ и область Ω:*

1. $V(0) = 0,\ V(\overline{x}) > 0\ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
   $\overline{x} = 0 \in \partial\Omega, V(\overline{x}) = 0\ \forall \overline{x} \in \partial\Omega$
2. $\dot{V} \leqslant 0\ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
3. $\{\overline{x} : \dot{V} = 0\} \Rightarrow \overline{x} = 0$ — *неустойчивое.*

Доказательство.

$\exists \overline{x} = 0$ — устойчивое, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\overline{x}_0| < \delta \Rightarrow |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon$
$1), 2) \Rightarrow \exists \delta : |\overline{x}_0(t)| > 0 \Rightarrow \exists \{x_s\} \to \overline{x}_*,$
$V(\overline{x}_s(t)) \leqslant V(\overline{x}_*) = V$
$\overline{x}_*(t),\ 3) \Rightarrow \exists t_* > 0 : (\overline{x}_*(t_*)) > V$— противоречие как в предыдущей теореме



■

Замечание. $\dot{V} > 0$ — *теорема Четаева.*

Пример (Волчок Эйлера)**.**

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p = \omega \\ q = r = 0 \\ p' = p - \omega \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} A\dot{p}' = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases}$$

$2T = A(p' + \omega)^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap'^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Ap'\omega + A\omega^2 \quad | \cdot A$

$k^2 = A^2p'^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2A^2p'\omega + A^2\omega^2$

$2TA - k^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 0 \cdot p^2$

$V = (2TA - k^2) + (2T - A\omega^2)^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 4A^2\omega^2(p')^2 + O_4(p',\ q,\ r)$

$A > B,\ A > C$

Т.к. все слагаемые больше 0, O_4 мало в окрестности 0.

$\exists u_\varepsilon : V > 0, \forall (p',\ q,\ r) \in U_\varepsilon,\ V \geqslant 0|_{p'=r=q=0}, \dot{V} = 0 \Rightarrow$ *равновесие устойчтво.*

Лекция 3 от 21.02.2018

1.5 I-й метод Ляпунова

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} \quad A = const \quad \det(A - \lambda E) = 0 \tag{5}$$

Утверждение. *Если все корни характеристического многочлена линейной системы* (5) *имеет отрицательные вещественные части, то равновесие* $\overline{x} = 0$ *этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0\ \forall i \Rightarrow \overline{x} = 0 \text{ — асимптотически устойчиво.}$$

Доказательство.

1) $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\lambda_i \neq \lambda_j\ \forall i \neq j$

$\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \overline{u}_i e^{\lambda_i t},\ c_i = const,\ \overline{u}_i = const$

$\overline{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

1) $\lambda_1 = \lambda_2,\ \overline{u}_i \neq \overline{u}_2$ — устойчивость.

2) λ_0 — корень кратности $s:$

$\overline{x} = + \ldots + (C_1\overline{u}_1 + \ldots + C_s\overline{u}_s t^{s-1})e^{-\lambda_0 t} \Rightarrow \overline{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

3) $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ — кратность 1

$\overline{x} = + \ldots + (C_1\overline{u}_1 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} + C_2\overline{u}_2 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}) = + \ldots + e^{\alpha_k t}(C_1'\overline{u}\sin\beta_k t + C_2'\overline{u}\cos\beta_k t) \Rightarrow$ устойчивость.

■

Утверждение. *Если существует хотя бы 1 корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью, то равновесие* $\overline{x} = 0$ *неустойчиво:*

$$\exists\lambda_k > 0 \Rightarrow \overline{x} = 0 \text{ — неустойчиво.}$$

Доказательство. Аналогично. ■

$(*)\ \dot{\overline{x}} = f(\overline{x}) \quad \overline{f}(0) = 0$

$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + O(\|\ \overline{x}\ \|^2) \quad A = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}|_{\overline{x}=0} = const$

$\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$ — линеаризованная система

$\det(A - \lambda E) = 0$

Теорема (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)**.** *Если все корни характеристического уравнения* линеаризованной системы *имеют отрицательные вещественные части, то равновесие* $\overline{x} = 0$ нелинейной системы *асимптотически устойчиво, если же существует корень с положительной вещественной частью, то равновесие неустойчиво.*

Замечание (Критический случай)**.** *Если нет* $\lambda_k > 0$ $\lambda_k = 0$[1], *то про систему ничего нельзя сказать*

Пример.

$C > A > B$

$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases}$ *Линеаризованная:* $\begin{cases} A\dot{p} = 0 \\ B\dot{q} = (C - A)r\omega \\ C\dot{r} = (A - B)q\omega \end{cases}$

$\overline{x} = (p', q, r)^T$

$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-B}{C}\omega & 0 \end{pmatrix}$

[1] Нечетко записано

$$\det(\mathbb{A}-\lambda E)=\lambda\left(\lambda^2-\frac{(C-A)(A-B)}{BC}\omega^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda=\pm\sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}}\omega\end{array}\right.\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \overline{x}=0$ *— неустойчиво, т.к.* $\exists\lambda>0$

(Из прошлой лекции (не успели) $V=BCqr$*)*

Пример.

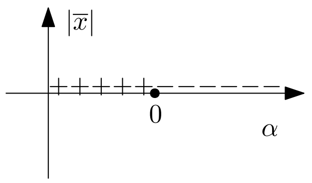
$$\begin{cases}\dot{x}=y+\alpha x^3\\ \dot{y}=-x\end{cases}\qquad(**)$$

Линеаризованная система: $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ $\qquad\lambda=\pm i\begin{cases}x=C_1\sin t+C_2\cos t\\ y=C_1\cos t-C_2\sin t\end{cases}$

$V=\dfrac{x^2+y^2}{2}\quad\dot{V}=(\dot{x}x+\dot{y}y)|_{(**)}=\alpha x^4$

$\underline{\alpha<0}:V(0)=0\quad V(x)>0\ \forall\overline{x}\neq0\quad\dot{V}\leqslant0\ \forall\overline{x}\in U_\varepsilon$

$\dot{V}=0\Leftrightarrow x\equiv0\quad(**)|_{x\equiv0}\quad\begin{cases}0=y+0\\ \dot{y}=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow y=0\Rightarrow\overline{x}=0$ *— устойчиво асимптотически.*



Бифуркационная диаграмма

$\underline{\alpha}>0:\Omega=U_{\varepsilon\setminus\{0\}}$

$V(\overline{x})>0,\quad\dot{V}(\overline{x})>0,\quad\forall\overline{x}\in\Omega$

$V(0)=0,\quad V(\overline{x})=0,\quad\forall\overline{x}\in\partial\Omega(x=0)$

$\Rightarrow$ *неустойчивость, т.к.* $\dot{V}=0\Rightarrow x=y=0$

$$\det(A-\lambda E)=0\qquad a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0,\quad a_0>0\tag{6}$$

Пример.

$n=2:a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0,\ a_0>0$

$a_1^2\geqslant4a_0a_2:\lambda_1+\lambda_2=-\dfrac{a_1}{a_0},\ \lambda_1\lambda_2=\dfrac{a_2}{a_0}$

$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=\lambda_{1,2}<0\Leftrightarrow a_2>0,a_1>0$

$a_1^2<4a_0a_2:\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=-\dfrac{a_1}{a_0}<0\Rightarrow a_2>0,a_1>0$

$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}<0\Leftrightarrow a_i>0,\ i=1,2$

Утверждение (Необходимое условие устойчивости)**.** *Если все корни* (6) *при* $n>2$ *имеют отрицательные вещественные части, то коэффициенты этого уравнения положительны:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i<0\Rightarrow a_i>0\quad i=1,\ldots,n$$

Доказательство.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — действительные корни, $\lambda_i < 0,\ i = 1, \ldots, k$
$\lambda = \alpha_i \pm \beta_i i \quad j = 1, \ldots, m$
$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \alpha_1 - \beta_1 i) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_1 + \beta_1 i) \cdot \ldots$
$= a_0(\lambda + |\lambda_1|) \cdot \ldots \cdot (\lambda + |\lambda_k|)((\lambda + |\alpha_1|)^2 + \beta_1^2) \cdot \ldots = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \quad a_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n$

■

Пример.

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

Теорема (Критерий Рауса-Гурвица). *[б/д]* $\forall i \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Leftrightarrow$ *все главные диагональные миноры определены положительно*

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \Delta_i > 0$$

Замечание.

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

1.6 Равновесие натуральных систем

Натуральная система:

$$L = \frac{1}{2}(A(\overline{q})\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) - \Pi(\overline{q})$$
$$\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}),\ \overline{x} = (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\overline{q} = \overline{q}_0 \text{ — равновесие, } \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\bigg|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0 \right)$$

Определение. $\overline{q} = \overline{q}_0$ — *установившееся равновесие положение равновесия натуральной системы, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \parallel \overline{q}(0) - \overline{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\overline{q}}(0) \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \overline{q}(t) - \overline{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\overline{q}}(t) \parallel < \varepsilon\ \forall t > 0.$$

Теорема (Лагранжа-Дирихле). *Точка строго локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия этой системы:*

Доказательство.

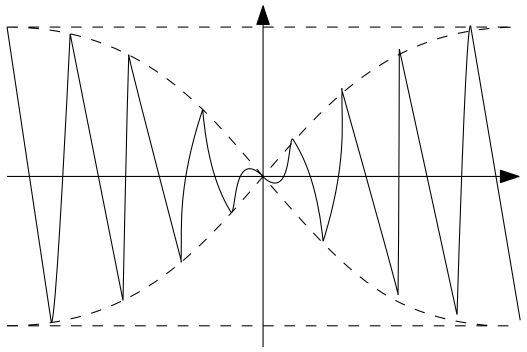
$V = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(\overline{q}_0)$

1) $V|_{\overline{q}=\overline{q}_0,\, \dot{\overline{q}}=0} = 0, V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = \dfrac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) + \Pi(\overline{q}) - \Pi(\overline{q}_0) > 0 \quad$ (A — положительно определенная)
$\forall \overline{q}, \dot{\overline{q}} : \delta > \parallel \dot{\overline{q}} \parallel + \parallel \overline{q} - \overline{q}_0 \parallel > 0$
2) $\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\overline{q}} = 0, \overline{q} = \overline{q}_0$ — устойчиво.

■

Пример.

$\Pi = \begin{cases} 0,\ q = 0 \\ e^{-\frac{1}{|q|}} \cdot \cos\frac{1}{|q|},\ q \neq 0 \end{cases}$
1) $q = 0$ — *положение равновесия*
2) $q = 0 \neq \min \Pi$
3) $T + \Pi = h = const$
$\Pi \leqslant h,\ x = 0$ — *устойчиво по Ляпунову (по опр.)*



$\Pi(\overline{q}) = \Pi(\overline{q}_0) + \Pi^{(1)}(\overline{q}) + \Pi^{(2)}(\overline{q}) + \ldots + \Pi^{(m)}(\overline{q})$

$\Pi^{(1)} = \left.\dfrac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=\overline{q}_0} (\overline{q} - \overline{q}_0) = 0$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

Лекция 4 от 28.02.2018

$\overline{q} = 0$ — положение равновесия

$T = \dfrac{1}{2}(A(q)\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) \quad \Pi = \Pi(0) + \left(\left.\dfrac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\left.\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \overline{q}^2}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q}\right) + \ldots = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \ldots$

$\Pi^{(0)} = \Pi(0) = 0,\ \Pi(1) = \left(\left.\dfrac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q}\right) = 0$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

Пример. *1.* $\Pi(x,y) = \frac{x^4+y^4}{2}$, $x = y = 0$ — *устойчивое положение равновесия.*

2.

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi(x,y) = \frac{x^2}{2} \quad \Pi^{(2)} = \frac{x^2}{2}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \ddot{y} = 0 \qquad y = ct + c_1$$

$x = y = 0$ — *неустойчивое положение равновесия.*

Теорема. *Если T не имеет даже нестрогого минимума в окрестности некоторого положения равновесия натуральной системы, то равновесие неустойчиво.*

Теорема.

$\underline{m = 2, n = 1} : T = \dfrac{1}{2}a(q)q^2,\ a(q) > 0$

$b = \left.\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{q=0} < 0$

$L = \dfrac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \dfrac{1}{2}bq^2 + O_3(q)$

$0 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + a'_q\dot{q}^2 - \dfrac{1}{2}a'_q \cdot \dot{q}^2 + bq + O_2(q) =$

$= a(q)\cdot\ddot{q} + bq + O_2(q,\dot{q})$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q = \dot{q} \\ \frac{d}{dt}\dot{q} = -\frac{bq - O_2(q,\dot{q})}{a(0)+O_1(q)} = -\frac{bq}{a(0)} + \cancel{O_2(q,\dot{q})} \end{cases}$$

$\overline{x} = (q, \dot{q})^T$, $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a(0)} & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \dfrac{b}{a(0)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\dfrac{b}{a(0)} > 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{a(0)}}$

$\operatorname{Re}\lambda_+ > 0 \Rightarrow q = 0$ — *неустойчивое положение равновесия.*

Замечание.

$L = \underbrace{\dfrac{1}{2}a(t)q^2 - \dfrac{1}{2}bq^2}_{L^*} + O_3(q, \dot{q})$

$C = \left.\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right|_{q=0}$

C — *положительно определена* $\Rightarrow q = 0$ — *устойчиво*

$\det C = 0$ — ?

$\exists\Delta_i < 0$

1.7 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \dfrac{\partial L}{\partial \overline{q}} = Q^*$

$L = \dfrac{1}{2}(A(q)\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) - \Pi(q)$

$\dot{E} = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \qquad E = T + P$

- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) = 0$, то $\overline{Q}^*$ — гироскопическая.
- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) \leqslant 0$, то $\overline{Q}^*$ — диссипативная.
- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) < 0$, то $\overline{Q}^*$ обладает полной диссипацией.

Теорема (Кельвина-Четаева 1). *Если $q = 0$ — точка строгого локального минимума Π натуральной системы, то даже при добавлении в систему гироскопических и (или) диссипативных сил, она является устойчивым положением равновесия A. Если при этом диссипативные силы обладают полной диссипацией, то это равновесие устойчиво асимптотически.*

Доказательство.

$V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(q)$

$q = 0$ — строгий локальный минимум $\Pi(q) \Rightarrow V(0,0) = 0,\ V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) > 0 \quad \forall \overline{q}, \dot{\overline{q}}\ 0 < \parallel q \parallel^2 + \parallel \dot{q} \parallel^2 < \varepsilon$

$a)\dot{V} = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \leqslant 0 \Rightarrow q = 0$ — устойчиво по теореме Ляпунова

$b)\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\overline{q}} = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Rightarrow q = 0$ — устойчиво асимптотически по т. Барабашина-Красовского

■

Теорема (Кельвина-Четаева 2). *Если в изолированном положении равновесия Π не имеет даже нестрогого минимума, а силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от направления гироскопических сил).*

Доказательство.

$V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(0)$

$q = 0$ — ... $\Rightarrow \Omega : \Pi(\overline{q}) < \Pi(0)\ \forall q \in \Omega$

$$\Pi(q) = \Pi(0)\ \forall q \in \partial\Omega,\ q = 0 \in \partial Q$$

$V < 0, \dot{V} < 0 \quad \forall \{\overline{q}, \dot{\overline{q}}\} \in \Omega' = \{\overline{q}, \dot{\overline{q}} : q \in \Omega, \dot{\overline{q}} = 0\}$

$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \overline{q} = 0$

$\Rightarrow q = 0$ — неустойчиво по теореме Красовского.

■

Пример.

$\ddot{x} = 0,\ x = 0$ — *неустойчиво.*

$\ddot{x} = -k\dot{x},\ k > 0$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$\ddot{x} = 0,\ x = 0$ — *неустойчиво.*

$\ddot{x} = -k\dot{x},\ k > 0$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ — *устойчиво.*

Пример (Гироскопическая стабильность)**.**

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \qquad \Pi = -\frac{x^2 + y^2}{2} \qquad \overline{Q}^* = \alpha\dot{y}\overline{e}_x - \alpha\dot{x}\overline{e}_y$$

$(\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) = \alpha\dot{y}\dot{x} - \alpha\dot{x}\dot{y} = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = \alpha\dot{y} \\ \ddot{y} - y = -\alpha\dot{x} \end{cases} \qquad \left(\dot{\overline{x}} = A\overline{x},\ \det(A - \lambda E) = 0\right)$$

$A\ddot{\overline{x}} + B\dot{\overline{x}} + C\overline{x} = 0$

$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 + \alpha^2\lambda^2$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lambda^2 = -2 & \qquad \lambda = \pm\sqrt{2}i \\ \lambda^2 = -\frac{1}{2} & \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$$

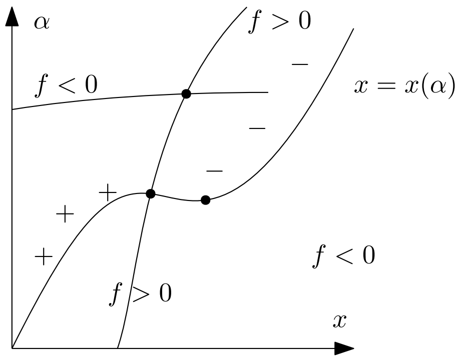
$x = y = 0$ — *устойчивое.*

1.8 Элементы теории бифуркации

$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, \alpha),\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^n$

Кривые равновесий $\overline{x} = \overline{x}(\alpha) : \overline{f}(\overline{x}(\alpha), \alpha) = 0$

Точка бифуркации $(\overline{x}_*, \alpha_*)$: $\left.\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x} = \overline{x}^*(\alpha_*),\ \alpha = \alpha_*} = 0$



<u>$n = 1$</u> $\dot{x} = f(x,\ \alpha)$

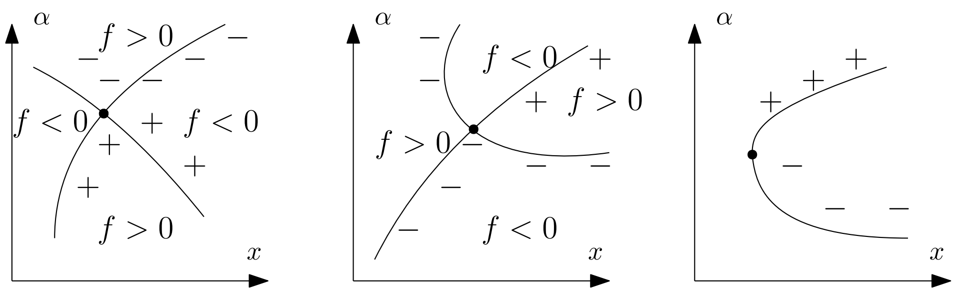
$\dot{x} = f'_x(x - x(\alpha)) + O_2(x - x(\alpha))$

$\lambda = f'_x > 0 \Rightarrow x = x(\alpha)$ — неустойчиво.

$\lambda = f'_x < 0 \Rightarrow x = x(\alpha)$ — устойчиво.

$\lambda = f'_x = 0 \Rightarrow$ бифуркация.

Основные типы бифуркаций.



1) Смена устойчивости, 2) вилка, 3) складка.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = 0 \qquad L = \frac{1}{2}\left(A(q)\dot{\overline{q}},\ \dot{\overline{q}}\right) - \Pi(\overline{q},\ \alpha)$$

Кривая равновесия $\left.\dfrac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q} = \overline{q}(\alpha)} = 0$

Точка бифуркации $\det\left(\left.\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \overline{q}^2}\right|_{\overline{q}_* = \overline{q}(\alpha_*),\alpha = \alpha_*}\right) = 0$

<u>$n = 1$</u> $a\ddot{q} + bq = 0,\ b = \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial q^2}$

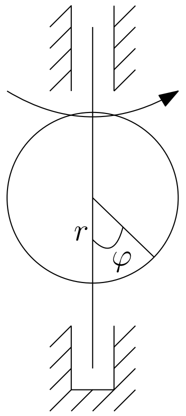
$a\lambda^2 + b = 0$

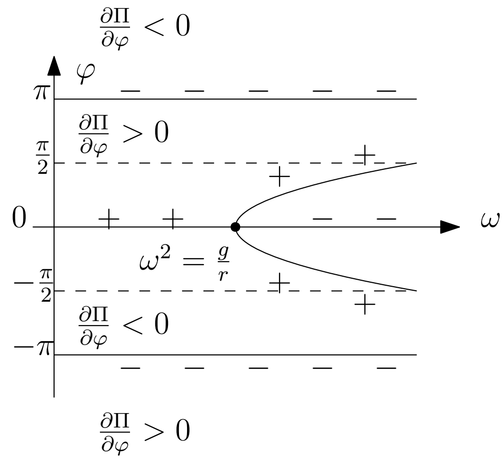
$\lambda^2 = -\dfrac{b}{a}$

1)$b > 0$ $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}i$ — устойчиво.

2)$b < 0$ $\lambda = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{a}}$ — неустойчиво.

Равновесия: $\left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm\arccos\frac{g}{\omega^2 r} \end{array}\right.$





Лекция 5 от 07.03.2018

Пример (Бифуркация Андронова-Копфа).

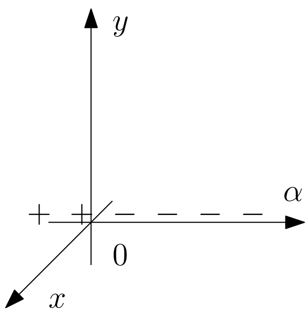
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$ *равновесие. Откинем квадратичную часть.*

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x = y = 0$ — *устойчиво.*

$\alpha > 0 \Rightarrow x = y = 0$ — *неустойчиво.*

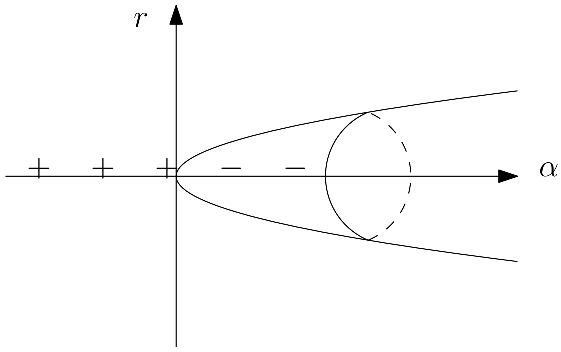


$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = \alpha r\cos\varphi - r\sin\varphi - r\cos\varphi \cdot r^2 & | \cdot \cos\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + \alpha r\sin\varphi - r\sin\varphi \cdot r^2 & | \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r - r^3 \quad (1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

$r = 0,\ r = \pm\sqrt{\alpha}$ — *равносильные уравнению* (1).

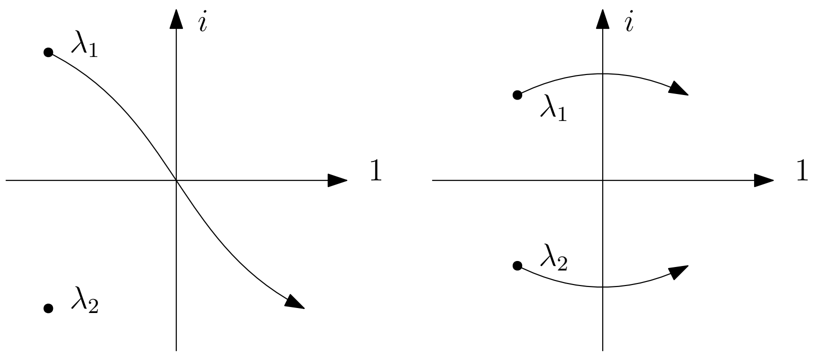


$\delta r = r - \sqrt{\alpha}$

$\delta \dot{r} = \dot{r},\ r = \delta r + \sqrt{\alpha}$

$(1) \Leftrightarrow \delta \dot{r} - (\delta r + \sqrt{\alpha})(-\delta r)(\delta r + 2\sqrt{\alpha}) = -2\alpha \delta r + O_2(\delta r)$

$\delta r = o(r \pm \sqrt{\alpha})$ — *устойчивое.*



1) Дивергенция. 2) Флаттер.

1.9 Малые Колебания

$T = \frac{1}{2}(\Phi(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}),\ \Pi(\bar{q}),\ \bar{q} = 0$ — положение равновесия

$\Pi(\bar{q}) = \underbrace{\Pi(0)}_{0} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \bigg|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \bigg|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + O_3(\bar{q})$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \bigg|_{\bar{q}=0} = c = const, \quad C = C^T$

$T = \frac{1}{2} \left((\Phi(0) + O(\| \bar{q} \|)) \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}} \right) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

$A = \Phi(0) = const,\ A = A^T$

$L = \tilde{L} + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}),\ \tilde{L} = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \frac{1}{2}(C\bar{q}, \bar{q})$

$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} = \frac{1}{2} \underbrace{(A\dot{\bar{q}} + A^T\dot{\bar{q}})}_{\text{Из 3 семестра}} = A\dot{\bar{q}}, \quad \frac{\tilde{L}}{\bar{q}} = -C\bar{q}$ — аналогично

$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = 0}$

A положительно определена $\xrightarrow{\text{Из линейной алгебры}} \exists \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n :\ A \to E, C \to k$

$\bar{q} = \sum \xi_i \bar{e}_i = u\bar{\xi}, \tilde{L} = \frac{1}{2}(E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(k\bar{\xi}, \bar{\xi}),$

$k = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n)$

Уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\overline{\xi}} + k\overline{\xi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1\xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n\xi_n = 0 \end{cases}$$

Пусть $k_i = \omega_i^2 > 0$

k и C — положительно определены, $\overline{q} = 0(\overline{\xi} = 0)$ — устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле

$\ddot{\xi}_i + k_i\xi_i = 0 \quad \lambda^2 + k_i, \quad \lambda^2 + \omega_i^2 = 0 \quad \lambda = \pm\omega_i i$

$\xi_i = C_{1i}\sin\omega_i t + C_{2i}\cos\omega_i t = \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$

$$\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Утверждение.

$\det(A\omega_C^2) = 0$

$$\begin{cases} A(\omega_i^2 - C)e_i = 0 \\ (A\overline{e}_i, \overline{e}_i) = 1 \end{cases}, i = 1, \ldots, n$$

Доказательство.

$2\tilde{\Pi} = (C\overline{q}, \overline{q}) = (CU\overline{\xi}, U\overline{\xi}) = (U^TCU\overline{\xi}, \overline{\xi}) = (k\overline{\xi}, \xi) \Leftrightarrow k = U^TCU$

$2\tilde{T} = (A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) = (U^TAU\overline{\xi}, \overline{\xi}) = (E\dot{\overline{\xi}}, \dot{\overline{\xi}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = U^TAU (\Leftrightarrow (A\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \delta_{ij})$

$k - k_iE = \mathrm{diag}(k_1 - k_i, \ldots, k_{i-1} - k_i, 0, \ldots)$

$\det(k - k_iE) = 0 \Leftrightarrow \det(U^TCU - k_iU^TAU) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det U^T \det(C - Ak_i)\det U = 0 \xleftrightarrow{\det U \neq 0} \det(Ak_i - C) = 0, \det(A\omega_i^2 - C) = 0$

$2)(k - k_iE)(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots)^T$

$(U^TC - k_iU^TA)\underbrace{U(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T}_{\overline{e}_i} \qquad C\overline{q} = \sum \overline{e}_i\xi_i$

$U^T(C - \omega_i^2A)\overline{e}_i = 0 \Leftrightarrow (A\omega_i - C)\overline{e}_i = 0$

■

Определение. $\det(A\omega^2 - C) = 0$ — *вековое уравнение (уравнение частот).* ω_i — *частоты малых колебаний (собственные частоты).*

Следствие. *Частоты малых колебаний не зависят от выбора обобщенных координат.*

Определение. *Если* $(A\omega_i^2 - C)\overline{U}_i = 0$, *то* $\overline{U}_i$ — *амплитудный вектор, соответствующий частоте* ω_i.

Замечание. $\overline{U}_i = \beta_i\overline{e}_i,\ \beta_i = const$

$$\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \overline{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Следствие. *1. Ортогональность*

$$(A\overline{U}_i, \overline{U}_j) = 0,\ i \neq j$$

2. Линейная независимость

$$C_1U_1 + \ldots + C_nU_n = 0$$
$$0 + \ldots + (A\overline{U}_i, C_i\overline{U}_i) + \ldots + 0 = 0 \Leftrightarrow C : (A\overline{U}_i, \overline{U}_i) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0$$
$$(A\overline{U}, \overline{U}) = 0 \Leftrightarrow \overline{U} = 0$$

Замечание. $\tilde{\alpha}, \varphi$ *— определяются начальными условиями.*

$I.$ $\tilde{\alpha}_i = 0, \quad \forall i \neq m : \overline{q} = \tilde{\alpha}_m \overline{U}_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$
главные (нормальные) колебания

$Ia.$ Кратные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$k = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots)$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$(A\omega^2 - C)\overline{U} = 0$

$U = C_1 \overline{U}_1 + C_2 \overline{U}_2$

$II.$ $\exists k_m = 0$

$\ddot{\xi}_m = 0, \ \xi_m = C_1 t + C_2$

$III.$ $\exists k_m < 0, \overline{q} = 0 (\xi = 0)$ — неустойчиво.

$\ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$

$\lambda^2 = -k_m > 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-k_m}$

Теорема. *Если* $\Pi_{(0)}^{(2)}$ *не имеет даже нестрогий минимум, то* $\overline{q} = 0$ *неустойчиво.*

Доказательство.

$\underline{n = 1}$ уже доказано

$\underline{n > 1}$ $\quad \overline{q} \to \overline{\xi}$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

$\exists k_m < 0 : \ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$ —||—

∎

1.10 Вынужденные колебания в линейных системах

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$

$x = x_{\text{одн}} + x_r$

$x_{\text{одн}} = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$

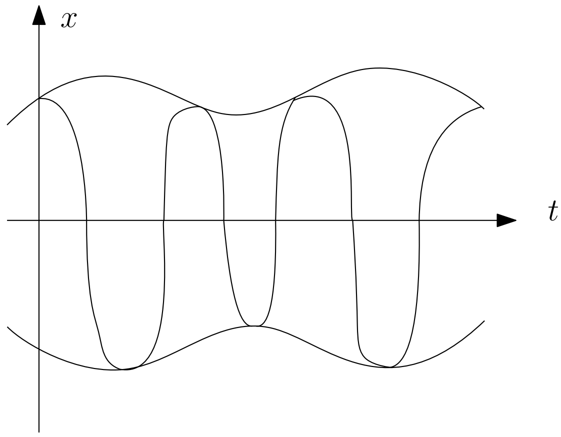
1) $\omega \neq \omega_0 : x_r = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad / \, \omega_0^2$

$\dot{x}_r = \alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t \quad / \, 0$

$\ddot{x}_r = -\alpha\omega^2 \sin \omega t - \beta\omega^2 \cos \omega t \quad / \, 1$

$$\begin{cases} \alpha\omega_0^2 - \alpha\omega^2 = 0 \\ \beta\omega_0^2 - \beta\omega^2 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$



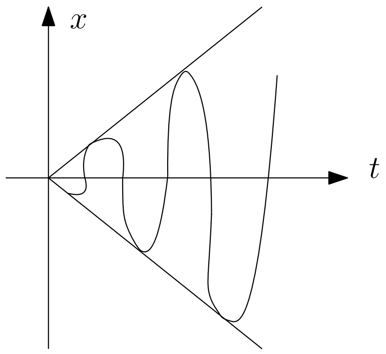
Биения.

2) $\omega = \omega_0 \quad x_r = \alpha t \sin \omega_0 t$

$$\dot{x}_r = \alpha \sin \omega_0 t + \alpha \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{x}_r = \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t - \alpha \omega_0 t \sin \omega_0 t \Rightarrow 2\alpha\omega_0 = f \Rightarrow \alpha = \frac{f}{2\omega_0}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



Резонанс.

$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = \overline{Q}, \quad \overline{Q} = \overline{F} \cos \omega t$

$\overline{q} = U\overline{\xi}, \quad A \to E, \ C \to K$

$(\overline{Q}, \delta\overline{q}) = (\overline{Q}, U\delta\overline{\xi}) = (U^T\overline{Q}, \delta\overline{\xi}) = (\overline{Q}\delta\overline{\xi})$

$\tilde{Q} = U^T\tilde{Q}$

Лекция 6 от 14.03.2018

$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = \overline{Q} = \ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \ldots, n$

1) $\overline{Q} = \overline{F} \cos \omega t, \quad Q_i = \mu_i \cos \omega t \qquad \tilde{Q} = U^T\overline{F}$

$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \mu_i \cos \omega t$

$$\left[\begin{array}{ll} \omega \neq \omega_i, \ \forall i = 1, \ldots, n & \xi_i = \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i) + \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ \omega = \omega_k, \ \mu_k = 0, & \xi_k = \alpha_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + \frac{\mu_k}{2\omega} \sin \omega t \end{array} \right.$$

2) $\overline{Q}$ периодично по t: $(\overline{Q}(t+T) = \overline{Q}(t), \forall t \in (0; +\infty))$

$$\overline{Q}(t) = \overline{F}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T} + Q_k\right)\right)$$

$$\overline{q} = \overline{q}_{\text{одн}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{q}_r^{(k)}$$

$$\omega_i = \frac{2\pi k}{T}$$

Пример.

$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = f\sin\omega t,\ k > 0$

$x = 0$ — *равновесие (установившееся асимптотически) свободной системы*

$\lim\limits_{x\to+\infty} x_{одн} = 0$

$x_r = R\sin(\omega t + \varphi)$

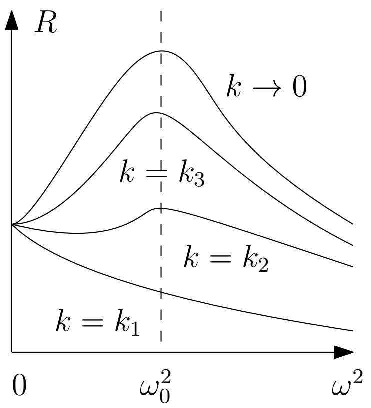
$\dot{x}_r = R\omega\sin(\omega t + \varphi)$

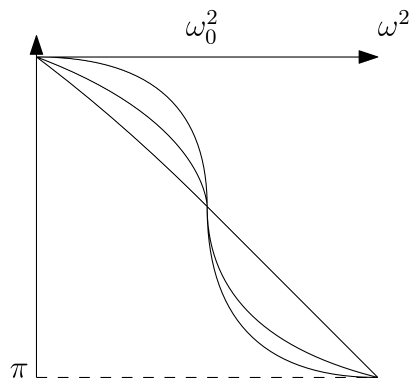
$\ddot{x}_r = -R\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$

$R(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \varphi) + KR\omega\cos(\omega t + \varphi) = f\sin\omega t$

$R = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$((\omega_0^2 - \omega^2) + k^2\omega^2)'_\omega = -2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot 2\omega + 2k^2\omega = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k^2}{2} \end{array}\right.$





$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}^* + \overline{Q}(t)$

$\overline{Q}^* = B\dot{\overline{q}},\ B = const$

$\overline{q} = 0$ — устойчиво асимптотически

$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1,\ldots,n$

$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$

$\overline{Q}(t) = \overline{F}\sin\omega t \Rightarrow \overline{Q}(t) = \overline{F}e^{i\omega t}$

$\overline{q} = \overline{q}_r = \overline{h}e^{i\omega t} \quad \dot{\overline{q}} = \overline{h}i\omega e^{i\omega t} \quad \ddot{\overline{q}} = \overline{h}(i\omega)^2 e^{i\omega t}$

$D(i\omega)\overline{h} = \overline{F} \quad \det D(i\omega) \neq 0$

$\overline{h} = [D(i\omega)]^{-1}\overline{F} = W(i\omega)\overline{F},\ W(i\omega) = (w_{kj}),\ k, j = 1,\ldots,n$

$w_{kj} = |w_{kj}|e^{i\arg\omega_{kj}} = R_{kj}e^{i\varphi_{kj}}$

$R_{kj} = |w_{kj}| \qquad \overline{q} = W(i\omega)\overline{F}e^{i\omega t}$

$\varphi_{kj} = \arg\omega_{kj} \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} w_{kj}F_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj}F_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}$

2 Гамильтонова механика

2.1 Преобразования Лежандра

Рассмотрим $X(\overline{x}):\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ X(\overline{x}) \in C$.

$$\det \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \neq 0$$
$$\overline{y} = \overline{f}(\overline{x}) = \frac{\partial X}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \overline{x} = \overline{f}^{-1}(\overline{y}) = \overline{x}(\overline{y})$$
$$Y(\overline{y}) = ((\overline{x}, \overline{y}) - X(\overline{x}))|_{\overline{x}=\overline{x}(\overline{y})}$$

Определение. $Y(\overline{y})$ — *преобразование Лежандра функции* $X(\overline{x})$ *по переменной* $\overline{x}$.

Свойства преобразований Лежандра[2]:

1. Инвалютивность.

$$X, \overline{x} \to Y,\ \overline{y} \to X, \overline{x}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = x_i + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial y_i}, \overline{y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial y_i}\right) =$$
$$x_i + \left(\underbrace{\overline{y} - \frac{\partial X}{\partial \overline{x}}}_{0}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\right) = x_i,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{\partial Y}{\partial \overline{y}}$$

2.

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{y}} = \left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \overline{x}^2}\right)^{-1}$$
$$\det \frac{\partial^2 Y}{\partial \overline{y}^2} = \left(\det \frac{\partial^2 X}{\partial \overline{x}^2} \neq 0\right)$$

3.

$$\overline{x}, X \to \overline{y}, Y = [(\overline{x}, \overline{y}) - X(\overline{x})]|_{\overline{x}=f'(\overline{y})} \to \overline{z}, Z$$
$$\overline{y} = \overline{f}_2(\overline{z}),\ \overline{z} = \overline{x},\ \overline{y} = f_2^{-1}(\overline{x}),\ f'(f_2^{-1}) = \overline{x}$$
$$Y(\overline{y})_{\overline{y}=f_2^{-1}(\overline{x})} = (\overline{x}, \overline{y}|_{\overline{y}=f_2^{-1}(\overline{x})}) - X(\overline{x})$$
$$X(\overline{x}) = [(\overline{x}, \overline{y}) - Y(\overline{y})]|_{\overline{y}=\overline{y}(x)}$$

4.

$$X = X(\overline{x}, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$
$$Y = Y(\overline{y}, \alpha)$$
$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$$
$$Y(\overline{y}, \alpha) = ((\overline{x}, \overline{y}(\overline{x}, \alpha)) - X(\overline{x}, \alpha))|_{\overline{x}=\overline{x}(\overline{y}, \alpha)}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}, \overline{y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} =$$
$$= \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}, \underbrace{\overline{y} - \frac{\partial X}{\partial \overline{x}}}_{0}\right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha}$$

[2]Возможно, тут чего-то не хватает

Повторим это с лагранжианом.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Определение. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ *— обобщенный импульс.*

$\det \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$

$H(q, p, t) = [(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}$

Определение. H *— гамильтониан (функция Гамильтона).*

Определение. (q, p, t) *— канонические переменные (параметры Гамильтона).*

Теорема. *В канонических переменных уравнения движения имеют вид*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Доказательство.

Инвалютивность $\Rightarrow \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$

$\dot{p} = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dfrac{L}{q} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$

■

Определение.

$\dot{\overline{x}} = \overline{F}(\overline{x}, t)\overline{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ *— гамильтонова система, если*

$\overline{x} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)^T \quad \exists H = H(q, p):$

$\overline{F} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial H}{\partial p_n}, -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T$

ПРИМЕР

Лекция 7 от 21.03.2018

2.2 Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона

Определение. q_k *— циклическая переменная, если* $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$.

Утверждение. *Если* q_k *— циклическая координата, то* $p_n = const$.

Доказательство.

$\dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = const.$

■

Утверждение. *Если* $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$*, то* $H = const$.

Доказательство.

$\dfrac{dH(q, p, t)}{t} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial q}, \dot{q}\right) + \left(\dfrac{\partial H}{\partial p}, \dot{p}\right) + \dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const$

■

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = const = \beta$$
$$H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, \beta, t)$$
$$\tilde{q} = (q_1, \ldots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{n-1})^T$$
$$H = H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)$$
$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q},\tilde{p},\beta,t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = \frac{\partial H(\tilde{q},\tilde{p},\beta,t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$$

Утверждение. *При $\beta = const$ (заданном значении циклического интеграла β) уравнения движения системы имеют вид*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q},\tilde{p},\beta,t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = \frac{\partial H(\tilde{q},\tilde{p},\beta,t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \Leftrightarrow \left.\left(\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}\right)\right|_{\beta=const}$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) \end{cases} \quad (*)$$
$$p_n = \beta = const$$
$$\dot{q}_n = \left.\left(\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, t, \beta)}{\partial p_n}\right)\right|_{(*)} = f(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta)$$
$$\frac{dq_n}{dt} = f \Rightarrow q_n = \int\limits_0^t f(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) d\tau + c_{2n-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q,p) = const = h$$

Пусть $\dfrac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow p_n = p_n(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{n-1}, h) = -K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h)$,

где $\tilde{q} = (q_1, \ldots, q_{n-1})^T$, $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{n-1})^T$, $\tau = q_n$

Определение. $K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h)$ — *функция Уиттекера.*

Утверждение. *Уравнения Гамильтона на фиксированном уровне интеграла энергии локально эквивалентны уравнениям Уиттекера*

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \\ \tilde{p}' = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \end{cases}, \quad \tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tau},\ \tilde{p}' = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}.$$

Доказательство.

$$H(\tilde{q}, \tau, \tilde{p}, -K) \equiv h$$
$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_n \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$
$$\frac{dH}{dq_i} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{p}_i - \dot{q}_n \frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_n} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$
$$\tilde{q} = \tilde{q}(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2})$$
$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2})$$

$$p_n = -K(\tilde{q}(q_m, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \tilde{p}(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}), q_n, h) = p_n(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)$$
$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = f(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)$$
$$\int\limits_0^t \frac{dq_n}{f(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}$$

■

2.3 Скобки Пуассона

Определение. *Скобкой Пуассона двух функций $F(q,p)$ и $G(q,p)$ называется*

$$\{F,G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\right)$$

1. Линейность

   $\{F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\} = \alpha_1\{F, G_1\} + \alpha_2\{F, G_2\}$
   $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$

2. Антикоммутативность

$$\{F,G\} = -\{G,F\}$$

3. Тождество Якоби-Пуассона[3]

   $\{F,\{G,W\}\} + \{G,\{W,F\}\} + \{W,\{F,G\}\} = 0$

   $$\{F,\{G,W\}\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)\right) -$$
   $$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)\right) = \ldots$$

4. Правило Лейбница

   $\{F_1F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$

5. $\{\varphi(F_1, \ldots, F_k), G\} = \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi}{\partial F_i}\{F_i, G\}$

6.

   $F = F(q,p,t),\ G = G(q,p,t)$

   $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\}$$
   $$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial q_i}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial q_i}\right\}$$
   $$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial p_i}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial p_i}\right\}$$

Пример.

$$\begin{cases}\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}\\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot q_i = \{q_i, H\}\\ \dot p_i = \{p_i, H\}\end{cases}$$

Утверждение. *Функция $F(q,p,t)$ — первый интеграл системы с гамильтонианом $H(q,p,t)$ тогда, и только тогда, когда*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0.$$

[3] Доказательство не доведено до конца

Доказательство.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \dot{q}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \dot{p}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

■

Замечание.

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$$

Теорема (Якоби-Пуассона)**.** *Скобка Пуассона двух первых интегралов в уравнении Гамильтона также является первым интегралом этих уравнений.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — первые интегралы системы с гамильтонианом H.

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1, H\} = 0,\ \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\{F_1, F_2\}) + \{\{F_1, F_2\}, H\} = \left\{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\right\} + \left\{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right\} - \{H, \{F_1, F_2\}\} =$$

$= \{F_2, \{F_1, H\}\} + \{F_1, \{H, F_2\}\} + \{H, \{F_1, F_2\}\} = 0 \Leftrightarrow \{F_1, F_2\}$ — первый интеграл.

■

$$L = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) + (B, \dot{q}) - \Pi(q, t)$$

$$H = \frac{1}{2}(A^{-1}(p-B), (p-B)) + \Pi(1, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}p, p)}_{H_2} - \underbrace{(A^{-1}p, B)}_{H_1} + \underbrace{\Pi(q, t) + \frac{1}{2}(A^{-1}B, B)}_{H_0}$$

Утверждение. $H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, f(q_n, p_n), t) \Rightarrow f(q_n, p_n) = const = \alpha$

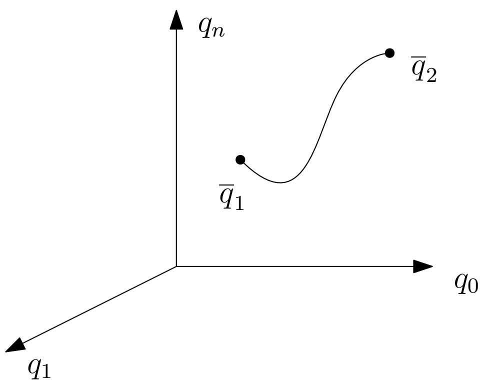
Определение. q_n, p_n — *отделяющиеся переменные*

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

■

Лекция 8 от 28.03.2018



$L = L(q, \dot{q}, t)$

$\gamma = \{q(t), t \in [t_1, t_2]\ q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2\}$ — какая-то траектория

$\Omega = \{q(t) \in C^2, t \in [t_1, t_2]\ q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2\}$

$\gamma \in \Omega$

Определение. *Кривая, соответствующая решению уравнения Лагранжа системы с лагранжианом L называется прямым путем системы. Остальные пути называются окольными.*

Замечание. *Прямой путь не единственный.*

Определение. *S — функционал действия по Гамильтону*

$$S = S(q(t))_{q(t)\in\Omega} = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot q(t), t)dt.$$

Определение. *Семейство кривых $q^\varepsilon(t) = q(t,\varepsilon)^{t\in[t_1,t_2]}_{\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]}$, $q^\varepsilon(t)\in\Omega$ — вариация кривой $q(t)$, если*

1. $q(t_0) = q(t)\ \forall t\in[t_1,t_2]$,
2. $q(\varepsilon, t_1) = q_1,\ q(\varepsilon, t_2) = q_2,\ \forall\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$.

Определение. $\delta S = \left(\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} S(q^\varepsilon(t))\right)\delta\varepsilon$ *— вариация функционала S, соответствующая $q(t)$ при вариации $q^\varepsilon(t)$.*

2.4 Принцип Гамильтона

Утверждение. *Вариация функционала действия на некотором пути равный нулю тогда, и только тогда, когда путь прямой.*

$$\delta S = 0\ \forall q^\varepsilon(t) \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q=q^\varepsilon(t,0)}$$

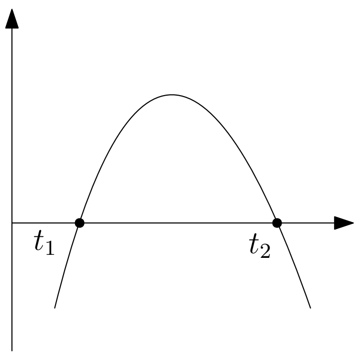
Доказательство.

$$S(q^\varepsilon(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q^\varepsilon(t), \dot q^\varepsilon(t), t)dt$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial\dot q}\cdot\frac{\partial\dot q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial\dot q}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}dt + \frac{\partial L}{\partial\dot q}\cdot\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{t_1}^{t^2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}dt = \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial\dot q}\cdot\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{t_1}^{t^2}} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)dt$$

$$\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} = g(t),\ g(t_1) = g(t_2) = 0$$



$\boxed{\Leftarrow}$ $q(t)$ — прямой путь $\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q=q(t)} = 0 \Rightarrow \delta S = \frac{d}{d\varepsilon}\Bigg|_{q=0} S d\varepsilon = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\delta S = 0$ при $\forall q^\varepsilon(t)$, пусть $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q(t,\,0)} = u(t) \neq 0$

$f(t) = (t - t_1)(t - t_2)$
$q^\varepsilon(t) = u(t)f(t)\varepsilon + q(t,\ 0)$

$$\delta S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \underbrace{u(t)f(t)}_{\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}} u(t)dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} (u(t), u(t))f(t)dt = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0. \text{ Противоречие.}$$

■

2.5 Преобразование лагранижиана при замене координат и времени

$$(q,\ t) \to (\tilde{q}, \tilde{t}) \qquad \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ t) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q,\ t) \end{cases} \qquad \det \frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n,\ \tilde{t})}{\partial(q_1, \ldots, q_n,\ t)} \neq 0$$

$$\begin{cases} q = q(\tilde{q},\ \tilde{t}) \\ t = t(\tilde{q},\ \tilde{t}) \end{cases} \qquad (1)$$

$L = L(q,\ \dot{q},\ t)$

$$\tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} = \frac{\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}dq + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}dt}{\frac{\partial \tilde{t}}{\partial q}dq + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}dt}$$

$$\dot{q} = \frac{d}{dt} = \frac{\frac{\partial q}{\partial \tilde{q}}d\tilde{q} + \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}}d\tilde{t}}{\frac{\partial t}{\partial \tilde{q}}d\tilde{q} + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}d\tilde{t}} \qquad (2)$$

$$L(q,\ \dot{q},\ t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (*)$$

Утверждение. *Если в уравнениях* $(*)$ *произвести замену* (1), (2), *то полученные уравнения будут иметь вид уравнений Лагранжа с лагранжианом*

$$\tilde{L}(\tilde{q},\ \tilde{q}',\ \tilde{t}) = L(q,\ \dot{q},\ t)|_{(1),(2)} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

Доказательство.

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t),\ \dot{q}(t),\ t)dt = \int\limits_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L(q(t),\ \dot{q}(t),\ t)|_{(1),(2)}\frac{dt}{d\tilde{t}}d\tilde{t} = \int\limits_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{L}(\tilde{q}(t),\ \tilde{q}'(t),\ \tilde{t})d\tilde{t}$$

■

Пример.

$L = \dfrac{\dot{q}^2}{2},\ \tilde{q} = qe^{n\alpha},\ \tilde{t} = te^{k\alpha},\ k,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha$ *— параметр.*

$$\tilde{L}(\tilde{q},\ \tilde{q}',\ \tilde{t}) = \frac{(\tilde{q}'e^{(n-k)\alpha})^2}{2} \cdot e^{-k\alpha}\boxed{=}$$

$$\tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{\tilde{t}} = \frac{dqe^{n\alpha}}{dte^{k\alpha}} = \dot{q}e^{(n-k)\alpha},\ \dot{q} = \tilde{q}'e^{(k-n)\alpha}$$

$$\boxed{=}\frac{(\tilde{q}')^2}{2}e^{(2k-2n-k)\alpha} = \frac{(\tilde{q}')^2}{2}e^{(k-2n)\alpha} = L(\tilde{q},\ \tilde{q}',\ \tilde{t})e^{(k-2n)\alpha}$$

Если $k = 2n$, *то* $\tilde{L} = L(\tilde{q},\ \tilde{q}',\ \tilde{t})$.

Определение. *Однопараметрическое семейство преобразования координат*

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ t,\ \alpha) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q,\ t,\ \alpha) \end{cases} \qquad (3)$$

называется группой вариационных симметрий системы с лагранжианом L, *если*

1. $\det \frac{\partial(\tilde q_1,\dots,\tilde q_n,\,\tilde t)}{\partial(q_1,\dots,q_n,\,t)} \neq 0$*;*

2. $\tilde q(q,\ t,\ 0) = q,\ \ \tilde t(q,\ t,\ 0) = t$*;*

3. $\tilde L(\tilde q,\ \tilde q', \tilde t) = L(\tilde q,\ \tilde q',\ \tilde t)$*.*

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q},\ H = (\frac{\partial L}{\partial \dot q},\ \dot q) = L(q,\ \dot q,\ t),\ \eta = \left.\frac{\partial \tilde q}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0},\ \zeta = \left.\frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

Теорема (Эмми Нетер)**.** *Если (3) - группа вариационных симметрий системы, то функция* $f = p\eta - \zeta H$ *является первым интегралом системы.*

Пример.

При $k = 2n : \tilde q = qe^{n\alpha},\ \tilde t = te^{k\alpha}$ *— группа вариационных симметрий.*

$$L = \frac{\dot q^2}{2} \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \dot q \qquad \eta = \left.\frac{\partial \tilde q}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = qe^{n\alpha}n|_{\alpha=0} = nq$$

$$H = p\dot q - L = \dot q^2 - \frac{\dot q^2}{2} = \frac{\dot q^2}{2}$$

$$\zeta = \left.\frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = te^{2n\alpha}\cdot 2n|_{\alpha=0} = 2nt$$

$$f = p\eta - \zeta H = \dot q nq - 2nt\cdot\frac{\dot q^2}{2} = n\dot q(q - \dot q t) = const$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot q = 0 \Rightarrow q = C_1 t + C_2 \Rightarrow f = nC_1(C_2) = const$$

Пример.

$L = L(q,\ \dot q)$

$$\begin{cases}\tilde q = q\\ \tilde t = t + \alpha\end{cases} \quad \text{— группа вариационных симметрий}$$

Лекция 9 от 04.04.2018

$$(1)\begin{cases}\tilde q = \tilde q(q,t,\alpha)\\ \tilde t = \tilde t(q,t,\alpha)\end{cases} \qquad \det\frac{\partial(\tilde q_1,\dots,\tilde q_n,\tilde t)}{\partial(q_1,\dots,q_n,t)} \neq 0$$

$\tilde q(q,t,0) = q,\ \tilde t(q,t,0) = t,\ \tilde L(\tilde q,\tilde q',\tilde t) = L(\tilde q,\tilde q',\tilde t)$

$f = (\eta\cdot p) - \zeta H = const$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q},\ \eta = \left.\frac{\partial \tilde q}{\partial \alpha}\right|_{\alpha} = 0,\ H = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q},\ \dot q\right) - L,\ \zeta = \left.\frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\right|_{\alpha} = 0$$

Доказательство.

$$(1) \Rightarrow \begin{cases}\tilde q = q + \alpha\eta + O_2(\alpha)\\ \tilde t = t + \alpha\zeta + O_2(\alpha)\end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases}q = \tilde q - \alpha\eta + O_2(\alpha)\\ t = \tilde t - \alpha\zeta + O_2(\alpha)\end{cases}$$

$$\dot q = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde q - \alpha\eta + O_2(\alpha)) = \frac{d\tilde q}{d\tilde t}\frac{d\tilde t}{dt} - \alpha\dot\eta + O_2(\alpha) = q'(1 + \alpha\dot\zeta) - \alpha\dot\eta + O_2(\alpha)$$

$$\dot q = \tilde q' + \alpha(\dot\zeta\tilde q' - \dot\eta) + O_2(\alpha) = \tilde q' + \alpha(\zeta\dot q - \dot\eta) + O_2(\alpha) \quad (2)$$

$$\tilde L(\tilde q,\tilde q',\tilde t) = L(q,\dot q,t)|_{(1'),(2)}\cdot\frac{dt}{d\tilde t} = L(\tilde q - \alpha\eta + O_2,\ \tilde q' + \alpha(\zeta\dot q - \dot\eta) + O_2,\ \tilde t - \alpha\zeta + O_2)\cdot\frac{dt}{d\tilde t} =$$

$$= \left(L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q}, -\eta \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \zeta \dot{q} - \dot{\eta} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}(-\zeta) \right] + O_2 \right) (1 - \alpha \dot{\zeta} + O_2) =$$

$$= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[- \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \eta \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{\eta} \right) + \dot{\zeta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \dot{\zeta} L - \frac{\partial L}{\partial t} \zeta \right] + O_2 =$$

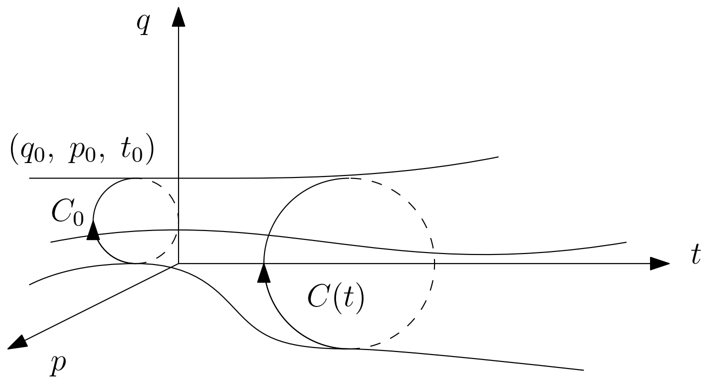
$$= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[-(\dot{p}, \eta) - (p, \dot{\eta}) + \dot{\zeta} H + \frac{\partial H}{\partial t} \zeta \right] + O_2 =$$

$$L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) - \alpha \frac{d}{dt} f + O_2(\alpha) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow f = const$$

■

2.6 Интегральный инвариант



$H = H(q, p, t)$

$$(*) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$\{q, p, t\}$ — расширенное фазовое пространство.

$$\begin{cases} q = q(t,\ q_0,\ p_0) \\ p = p(t,\ q_0,\ p_0) \end{cases} \quad \text{— прямой путь.}$$

$C_0 \to C(t)$

$$I_{\text{п}} = \oint\limits_{C:t=const} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint (p, \delta q) \text{ — универсальный интегральный инвариант Пуанкаре.}$$

Утверждение. *Величина I_n сохраняется на всех контурах (изохронах), охватывающих одну и ту же трубку прямых путей системы $(*)$.*

Доказательство.

$$C(t) : \begin{cases} q = q(\alpha), & \alpha \in [0; 1] \\ p = p(\alpha), & q(0) = q(1) \\ t = const, & p(0) = p(1) \end{cases}$$

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$$\frac{d}{dt} I_{\text{п}} = \oint\limits_{C} (\dot{p}, \delta q) + (p, (\dot{\delta q})) \boxed{=}$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d}{dt} q \right) \delta \alpha = \delta \dot{q}$$

$$\boxed{=}\oint\limits_C (\dot q,\delta q)+(p,\delta\dot q)=\oint\limits_C \delta(p,\dot q)-\oint\limits_C(\delta p,\dot q)+\oint\limits_C(\dot p,\delta q)\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}-\oint\limits_C\left(\frac{\partial H}{\partial p},\delta p\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial q},\delta q\right)=-\oint\limits_C\delta H=0\Rightarrow I_{\text{п}}=const$$

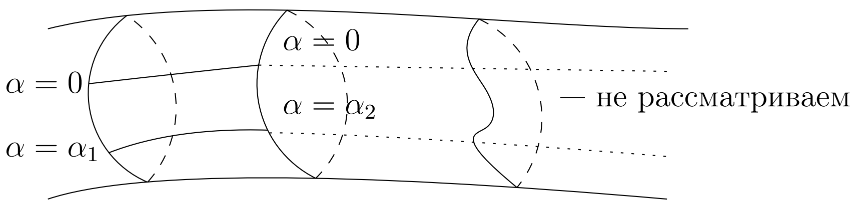
■

Определение.

$$I=\oint\left[A(p,\ q,\ t)+(B(q,\ p,\ t),\delta p)+\gamma(q,\ p,\ t)\delta t\right]$$

I — относительный интегральный инвариант первого порядка системы $(*)$, если I сохраняет свое значение на всех согласованных контурах, охватывающих одну и ту же трубку прямых путей.

Определение. *Контуры согласованы, если если существует такая их параметризация, что каждому значению параметра разных контуров соответствуют точки одного и того же пути.*



Теорема (Теорема Ли Хуа-Чжуна)**.**

$$I=\oint\limits_{C:t=const}(A(q,\ p,\ t),\delta q)+(B(q,\ p,\ t),\delta p)$$

— универсальный (не зависит от гамильтониана) интегральный инвариант системы $(*)$ тогда, и только тогда, когда $I=cI_n,\ c=const$

Доказательство. Для простоты $n=1$.

$$\frac{d}{dt}I=\frac{d}{dt}\oint\limits_{C:t=const}A\delta q+B\delta q=\oint\limits_C\dot A\delta q+\dot B\delta p+A\delta\dot q+B\delta\dot p=\oint\limits_C\delta(A\dot q+B\dot p)-\delta A\dot q-\delta B\dot p+\dot A\delta q+\dot B\delta p=$$

$$=\oint\limits_C\left(\frac{\partial A}{\partial p}\dot p+\cancel{\frac{\partial A}{\partial q}\dot q}+\frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q-\left(\frac{\partial A}{\partial p}\delta p+\cancel{\frac{\partial A}{\partial q}\delta q}\right)\dot q+\left(\cancel{\frac{\partial B}{\partial p}\dot p}+\frac{\partial B}{\partial q}\dot q+\frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p-\left(\cancel{\frac{\partial B}{\partial p}\delta p}+\frac{\partial A}{\partial q}\delta q\right)\dot p=$$

$$=\oint\limits_C-\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{\partial H}{\partial p}\delta p+\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\left(-\frac{\partial A}{\partial q}\right)\delta q+\frac{\partial A}{\partial t}\delta q+\frac{\partial B}{\partial t}\delta p=$$

$$=\oint\limits_C\underbrace{\alpha\delta p+\beta\delta q}_{\delta f}=0\quad\forall C\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial q}=-z\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial t},\ z=\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial q}\\ \frac{\partial f}{\partial q}=-z\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}=\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\Leftrightarrow-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}-z\cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}}+\frac{\partial^2 A}{\partial p\partial t}=-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}-z\cancel{\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}}+\frac{\partial^2 B}{\partial q\partial t}$$

$$-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial t}=0\ \forall H\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial z}{\partial q}=\frac{\partial z}{\partial t}=0\Leftrightarrow z=c=const$$

$$\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=c$$

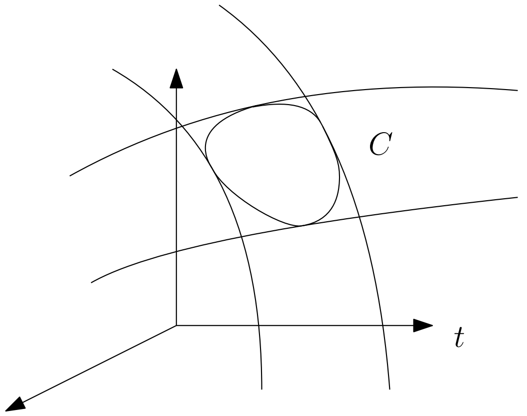
$$\frac{\partial}{\partial p}(A-cp)=\frac{\partial B}{\partial q}\Leftrightarrow(A-cp)\delta q+B\delta p=0$$

$$A\delta p+B\delta p=cp\delta q\Rightarrow I=cI_{\text{п}}$$

■

Определение. $I_{пк} = \oint(p, \delta q) - H\delta t$ *— интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.*

Утверждение. $I_{пк} = const.$



Доказательство.

$C : \tau(q, p, t) = const$

$q_{n+1} = t$

$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$

$$q' = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dH}{dp}\eta$$

$$\eta(q,\ p,\ q_{n+1}) = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$p' = \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}\eta$$

$$p_{n+1} = -H(q,\ p,\ t) \quad q'_{n+1} = \frac{dt}{d\tau} = \eta$$

$$\tilde{H} = \eta(H + p_{n+1}) \qquad p'_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}}\eta = -\frac{\partial H}{\partial t}\eta$$

Докажем, что $\tilde{H}$ — новый гамильтониан.

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial p}(H + p_{n+1}) + \eta\frac{\partial H}{\partial p} = \eta\frac{\partial H}{\partial p} = q'$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} = \frac{\partial \eta}{\partial q}(H + p_{n+1}) + \eta\frac{\partial H}{\partial q} = \eta\frac{\partial H}{\partial q} = -p'$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = \eta = q'_{n+1},\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_{n+1}} = \frac{\partial \eta}{\partial q_{n+1}}(H + p_{n+1}) + \eta\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} = \frac{dt}{d\tau}\frac{\partial H}{\partial t} = -p'_{n+1}$$

$$I = \oint_C (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) - \text{инвариант } \Rightarrow I_{\text{пк}} = \oint (p, dq) - Hdt$$

■

$$I = \int \ldots \int dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n = V$$

<u>Лекция 10 от 11.04.2018</u>

2.7 Теорема Лиувилля

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}) \quad (1)$$

Определение.

$$V = \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n$$

— *фазовый объем.*

Определение. $\overline{x}_0 \to \overline{x} = \overline{x}(t, \overline{x}_0)$ — *фазовый поток системы* (1).

Теорема. *Если* $\operatorname{div} f = 0$*, то* $V = const$.

Доказательство.

$$\overline{x} = \overline{x}_0 + t\overline{f}(\overline{x}_0) + O_2(t)$$

$$V = \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n = \int \ldots \int \left|\det \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{x}_0}\right| dx_{10} \ldots dx_{n0}$$

$$\det \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{x}_0} = \det \left(E + t \frac{\partial \overline{f}(\overline{x}_0)}{\partial \overline{x}_0} + O_2 \right) = 1 + t \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \overline{f}(\overline{x}_0)}{\partial \overline{x}_0} \right) + O_2$$

$$\dot{V}|_{t=0} = \int \ldots \int \left(0 + \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \overline{f}(\overline{x}_0)}{\partial \overline{x}_0} \right) + O_2 \right) dx_{10} \ldots dx_{n0} \qquad \begin{vmatrix} 1 + t\frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} & \overbrace{t \cdot (*)}^{O_2} \\ t \cdot (-*) & 1 + t\frac{\partial f_2}{\partial x_{20}} \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \frac{\partial \overline{f}(\overline{x}_0)}{\partial \overline{x}_0} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=0} = 0$$

$$\operatorname{div} \overline{f} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=t_*},\ \forall t_* \Rightarrow V = const$$

■

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\overline{x} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)^T \\ &\overline{f}_H = \left(\tfrac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \tfrac{\partial H}{\partial p_n}, -\tfrac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\tfrac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \overline{f}_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \Rightarrow V_h = const$$

Замечание. *Такие преобразования фазов. пот. сохраняют* V.

2.8 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Теорема. *Если на любой трубке траектории системы дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{cases} \dot{q} = Q(q,\ p,\ t) \\ \dot{p} = P(q,\ p,\ t) \end{cases} \qquad (*)$$

$I_n = \oint\limits_{C:t=const} (p, \delta q)$ *сохраняется, то данная система гамильтонова.*

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} I_{\text{п}} = \oint\limits_{C:t=const} (\dot{p}, \delta q) + (p, \delta \dot{q}) = \oint\limits_{C:t=const} \delta(p, \dot{q}) - (\delta p, \dot{q}) + (\dot{p}, \delta q) \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \oint\limits_{C} (P, \delta q) - (Q, \delta p) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow \exists H : (P, \delta q) - (Q, \delta p) = -\delta H = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}, \delta p \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \delta q \right)$$

$$Q = \frac{\partial H}{\partial p},\ P = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

■

Теорема. *Если на любой трубке прямых путей системы* $(*)$ $I_{пк} = \oint\limits_{C} (p, dq) - Hdt$*, то система гамильтонова с гамильтонианом* H.

Доказательство. Возьмем C_1, на котором $dt = 0$(изохроны).

$$\oint\limits_C (p, dq) - H dt = \oint\limits_{C_1} (p, dt) \text{ — инвариант} \Rightarrow \text{ по предыдущей теореме } \exists H(q,\ p,\ t) : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I^*_{\text{пк}} = \oint\limits_C (p, dq) - H^* dt = \oint\limits_{C_1} (p, dq)$$

$$I_{\text{пк}} - I^*_{\text{пк}} = \oint\limits_C (H^* - H) dt = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (H^* - H)dt = dF = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, dq\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, dp\right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial p} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial t} = H^* - H$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \text{ система } (*) \text{ гамильтонова с гамильтонианом } H.$$

■

2.9 Канонические преобразования

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ p = p(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \end{cases}$$

$$H = H(q, p, t) \qquad \det \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0$$

$$\dot{\tilde{q}}|_{(1)} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right)\Bigg|_{(1)} = Q(\tilde{q},\ \tilde{p},\ t) \stackrel{?}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}$$

$$\dot{\tilde{p}}|_{(1)} = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}\right)\Bigg|_{(1)} = P(\tilde{q},\ \tilde{p},\ t) \stackrel{?}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}$$

Пример.

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2}, \begin{cases} \tilde{q} = p^2 \\ \tilde{p} = q \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \tilde{p} \\ p = \pm\sqrt{\tilde{q}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q \end{cases} \qquad \begin{matrix} \dot{\tilde{q}} = 2p\dot{p} = -2pq = \mp 2\tilde{p}\sqrt{\tilde{q}} & \stackrel{?}{=} Q = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = p = \pm\sqrt{\tilde{q}} & \stackrel{?}{=} P = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{matrix}$$

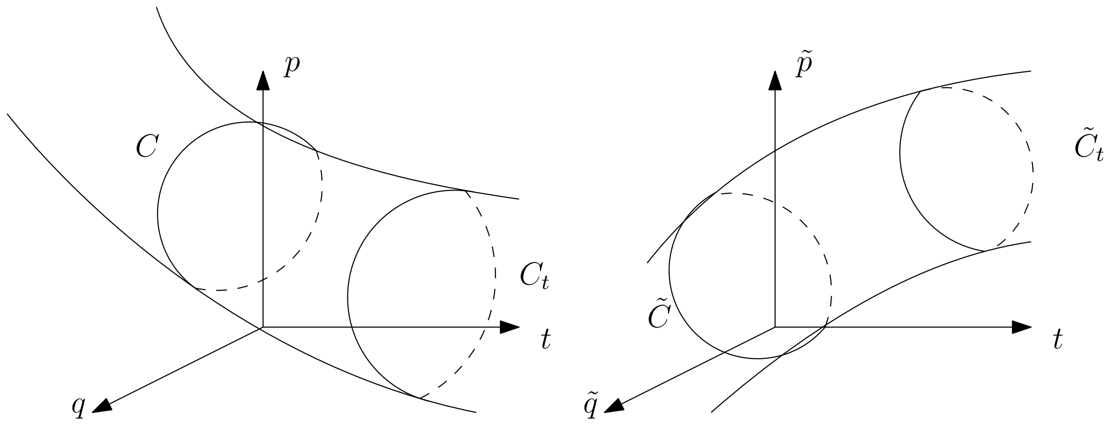
$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{q}} = \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}} \qquad \mp \tilde{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \neq 0 \Rightarrow \text{ *система не гамильтонова.*}$$

Определение. *Неособенное (т.е. обр.) преобразование вида* (2) *называется каноничным, если оно* любую *гамильтонову систему превращает в гамильтонову систему.*

Теорема (Критерий канонического преобразования)**.** *Преобразование* (2) *каноническое* $\Leftrightarrow \exists c \neq 0,\ F(q, p, t)$*:*

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = c((p, dq) - H dt) - dF$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$



$C \xrightarrow{(2)} \tilde{C}$

$$\oint\limits_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint\limits_{\tilde{C}: t=const} (\tilde{p}, \delta\tilde{q}), \qquad \begin{matrix} \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t) \\ \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t) \end{matrix}$$

$$\oint\limits_{C} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint\limits_{C_t} \left(\tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\delta p\right) = \oint\limits_{C_t} (A, \delta q) - (B, \delta p) \overset{\text{т. Ли-Хуанчжуна}}{=}$$

$$= c\oint\limits_{C_t} (p, \delta q) = \left(\oint\limits_{C} (p, dq) - Hdt\right) c$$

$$\oint\limits_{C} \Big((\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt - c[(p, dq) - Hdt]\Big) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = c((p, dq) - Hdt) - dF$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Проинтегрируем равенство

$$\oint\limits_{C} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = c\oint\limits_{C} (p, dq) - Hdt - \underbrace{\oint df}_{0} = I$$

$$\oint\limits_{C} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint\limits_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt \text{ — инвариант, т.к. } I \text{ — инвариант.}$$

По второй обратной теореме система гамильтонова с гамильтонианом $\tilde{H}$.

■

Определение. *$c = const \neq 0$ — валентность преобразования, $F(q,\ p,\ t)$ — производящая функция.*

Лекция 11 от 18.04.2018

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t) \end{cases}$$

Теорема. (2) *канонично тогда, и только тогда, когда $\exists c \neq 0,\ F(q, p, t)$:*

$$c((p, dq) - Hdt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF \qquad (3)$$

Определение. *Если $c = 1$, преобразование унивалентно.*

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, dq\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, dp\right) + \frac{\partial F}{\partial t}dt = \delta F + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

$dq = \delta q$

$d\tilde{q} = \delta\tilde{q} + \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial t}dt$

$(3) \Rightarrow c((p, \delta q) - H dt) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right) dt - \tilde{H} dt + \delta F + \dfrac{\partial F}{\partial t} dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -cH = \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right) - \tilde{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta \tilde{q}) + \delta F \end{cases} \quad \Leftrightarrow \tilde{H} = cH + \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial t}$

Следствие. *Преобразование* (2) *канонично тогда, и только тогда, когда* $\exists c \neq 0,\ F:$

$$c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \delta F \qquad (3')$$

Следствие. $\tilde{H} = cH + \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$ *— правило преобразований Гамильтона*

Рассмотрим $z = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)^T$

$(1) \Leftrightarrow \dot{z} = J\dfrac{\partial H}{\partial z} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$

Определение. J *— симплектическая единица.*

$J^T = J^{-1} = -J; \quad J^2 = -E_{2n}; \quad \det J = 1$

Пусть $\tilde{z} = \tilde{z}(z,\ q)$

$$M = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$\det M \neq 0$

$I.(3')\ c(p, \delta q) = \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\delta q + \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\delta p\right) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial q}, \delta q\right) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial p}, \delta p\right)$

$\dfrac{\partial F}{\partial q_j} = cp_i - \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right),\ i = 1, \ldots, n$

$\dfrac{\partial F}{\partial p_j} = -\left(\tilde{p}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right),\ j = 1, \ldots, n$

Так как предполагаем, что $F \in C^2:$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow 0 - \left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right) - \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_j \partial q_i}\right) = -\left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right) - \left(\tilde{p}, \dfrac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial q_j}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}\right) - \left(\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}\right) = 0 \qquad (4)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_i} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p_i}\right) = 0 \qquad (5)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow c\delta_{ij} - \left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right) - \cancel{\left(\tilde{p}, \dfrac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial p_j \partial q_i}\right)} = -\left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right) - \cancel{\left(\tilde{p}, \dfrac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial p_j}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}\right) - \left(\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}, \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}\right) = c\delta_{ij} \qquad (6)$

$II.\ M^T J M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}$

$$(M^TJM)_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\}$$
$$(M^TJM)_{i,n+j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\}$$
$$(M^TJM)_{n+i,j} = \{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\}$$
$$(M^TJM)_{n+i,n+j} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}$$

Утверждение. $M^TJM = cJ,\ c \neq 0 \Leftrightarrow MJM^T = cJ,\ c \neq 0$

Доказательство.

$$J = c\left(M^T\right)^{-1} JM^{-1} = c\left(MJ^{-1}M^T\right)^{-1}$$
$$J^{-1} = \frac{1}{c}MJ^{-1}M^T \Rightarrow MJM^T = cJ$$

■

Теорема. *Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда* $\exists c \neq 0 : MJM^T = cJ$.

Доказательство.

$$I.\ (3') \Leftrightarrow (4), (5), (6)$$
$$II.\ (MJM^T)_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}\right) = 0 \Leftarrow (4)$$
$$(MJM^T)_{i,n+j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}\right) = c\delta_{ij} \Leftrightarrow (6)$$
$$(MJM^T)_{n+i,j} = \ldots = -c\delta_{ij}$$
$$(MJM^T)_{n+i,n+j} = 0 \Leftrightarrow (5)$$

■

Теорема. *Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда* $\exists c \neq 0$*:*

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0,\ \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = c\delta_{ij}$$

Доказательство.

$$MJM^T = cJ \Leftrightarrow M^TJM = cJ \Leftrightarrow \ldots$$

■

Определение. *Если* $M^TJM = J$*, то* M *— симплектическая. Если* $M^TJM = cJ,\ c \neq 0$*, то* M *— обобщенно симлектическая.*

Замечание. $(\det M)^2 = \det(M^TJM) = \det(cJ) = c^{2n}$, $\det M \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$.

Пример. $\tilde{q} = q,\ \tilde{p} = p \Leftrightarrow M = E \Rightarrow$ *преобразование канонично (унивалентно).*

Утверждение. *Если* M *— обобщенная симлектическая, то* M^{-1} *обобщенная симплектическая (обратное преобразование каноническое).*

Доказательство.

$$\left(M^{-1}\right)^T JM^{-1} = -\left(MJM^T\right)^{-1} = cJ \Leftrightarrow MJM^T = c'J,\ c = \frac{1}{c}$$

■

Утверждение. *Композиция канонических преобразований канонична.*

Доказательство.

$z \to z_1 = z_1(z,t),\ M_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial z},\ M_1^T J M = c_1 J$

$z_1 \to z_2 = z_2(z_1,t),\ M_2 = \dfrac{\partial z_2}{\partial z},\ M_2^T J M_2 = c_2 J$

$\tilde{z} = z_2(z_1(z,t),t)$

$\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \dfrac{\partial z_2}{\partial z},\ \dfrac{\partial z_1}{\partial z} = M_2 M_1$

$(M_2M_1)^T J (M_2M_1) = M_1^T \underbrace{M_2^T J M_2}_{c_2 J} M_1 = c_2 M_1^T J M_1 = c_1 c_2 J = cJ,\ c = c_1c_2 \neq 0$

■

Следствие. *Множество симплистических матриц (множество канонических преобразований) образуют группу.*

Пример.

$\dot{z} = J\dfrac{\partial H}{\partial z},\ z = z(z_0,t)$

$M = \dfrac{\partial z}{\partial z_0}$

$\dfrac{d}{dt}M = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z}{\partial z_0}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z_0}\left(J\dfrac{\partial H}{\partial z}\right) = J\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial z_0} = J\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}H$

$(\dot{M^T}) = M^T\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}J^T$

$(M^T \dot{J} M) = 0 \Rightarrow M^T J M = const = 1,\ \textit{т.к.}\ M|_{t=0} = \dfrac{\partial z_0}{\partial z_0} = 1$

Следствие. *Определитель* $\det M = 1 \Rightarrow$ *фазовый поток сохраняется* ($V = const$).

Лекция 12 от 25.04.2018

(1) $\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t) & (2.1) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t) & (2.2) \end{cases}$ $\det\dfrac{\partial(\tilde{q},\tilde{p})}{\partial(q,p)} \neq 0$

(3) $c((p,dq) - Hdt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF(q,\ p,\ t)$

2.10 Свободные канонические преобразования

Определение. *Преобразование вида* (2) *— свообoдное, если* $\det\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0$.

$(2.1),\ \det\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q,\ \tilde{q},\ t)$

$(2.2),\ p = p(q,\ \tilde{q},\ t) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ \tilde{q}, t)$

$F(q,\ p(q,\ \tilde{q},\ t),\ t) = S(q,\ \tilde{q},\ t)$

$(3) \Rightarrow c((p,dq) - Hdt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + \left(\dfrac{\partial S}{\partial q}, dq\right) + \left(\dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}}, d\tilde{q}\right) + \dfrac{\partial S}{\partial t}dt$

$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$

$\det\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Leftrightarrow \det\dfrac{\partial p}{\partial \tilde{q}} \neq 0 \Leftrightarrow \det\dfrac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q}\partial q} \neq 0 \quad (4)$

Утверждение. *Свободное преобразование канонично тогда, и только тогда, когда* $\exists\Phi$, $S(q,\ \tilde{q}, t)$, $c \neq 0$*:*

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \end{cases}.$$

Тогда, если преобразование канонично, гамильтонова система в новых переменных имеет вид:

$$\tilde{H} = \left(cH(q,\ p,\ t) + \frac{\partial S(q,\ \tilde{q},\ t)}{\partial t} \right) \Bigg|_{\substack{q = q(\tilde{q},\ \tilde{p},\ t) \\ p = p(\tilde{q},\ \tilde{p},\ t)}}$$

Замечание. *Функция* $S(q,\ \tilde{q},\ t)$*, удовлетворяющая условию* (4)*, однозначно определена преобразованием заданной валентности.*

Доказательство.

$$\frac{\partial S(q,\ \tilde{q},\ t)}{\partial q} = cp,\ \det \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q} \partial q} \neq 0 \Rightarrow \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t)$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial S(q,\ \tilde{q},\ t)}{\partial \tilde{q}},\ \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ p,\ t) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t)$$

■

Пример.

$\tilde{q} = q,\ \tilde{p} = p$

$\det \dfrac{\partial q^2}{\partial p} = 0$ — *не свободное.*

Замечание. *Вместо* $(q,\ \tilde{q},\ t)$ *можно рассматривать* $(q,\ \tilde{p},\ t)$*,* $(\tilde{q},\ p,\ t)$*,* $(p,\ \tilde{p},\ t)$*.*

Рассмотрим, например, $(q,\ \tilde{p},\ t)$:

(2) — полусвободное, если $\det \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(q,\ p,\ t),\ \det \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q,\ \tilde{p},\ t),\ \tilde{q} = \tilde{q}(q,\ \tilde{p},\ t)$$

$$c(p, dq) - cHdt = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF$$

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) = d(\tilde{p}, \tilde{q}) - (\tilde{q}, d\tilde{p}),\ F(q,\ p,\ t) + (\tilde{p}, \tilde{q}) = S_1(q,\ \tilde{p},\ y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(p, dq) - cHdt = -(\tilde{q}, d\tilde{p}) - \tilde{H}dt + \left(\frac{\partial S}{\partial q}, dq\right) + \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}, d\tilde{p}\right) + \frac{\partial S}{\partial t}dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{cases}$$

Пример.

$p = \tilde{p},\ q = \tilde{q},\ c = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1(q,\ \tilde{p},\ t)}{\partial q} = \tilde{p} \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = q \end{cases} \qquad S_1 = (q,\ \tilde{p})$$

2.11 Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби

$$\tilde{H} = 0 \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \tilde{q} = \alpha = const \\ \tilde{p} = \beta = const \end{matrix}$$

Будем искать унивалентное исходное преобразование, переводящее гамильтониан в ноль.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right) = 0 \quad (*)$$

Соответствует системе с гамильтонианом $H(q,\ p,\ t)$.

Пример (Математический маятник).

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\textit{Т.к. } L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q},\ \dot{q}) - \Pi(q),\ \textit{то } H = \frac{1}{2}(A^{-1}(q)\dot{p},\ \dot{p}) + \Pi(q)$$

$$H = \frac{p\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - mgl\cos\varphi = 0$$

Определение. *Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется функция $S(q,\ \alpha,\ t)$ такая, что*

1. *удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби,*
2. $\det \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial q} \neq 0$.

$\Rightarrow S$ — полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Теорема (Гамильтона-Якоби). *Если известен полный интеграл Гамильтона-Якоби, то общее решения соответствующих уравнений Гамильтона определяется из соотношения*

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p,\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta \Rightarrow \begin{cases} q = q(\alpha,\ \beta,\ t) \\ p = p(\alpha,\ \beta,\ t) \end{cases}.$$

Замечание. *Можно заменить β на $-\beta$.*

Пример (Движение точки по прямой).

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad H = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0,\ S = S(x,\ \alpha,\ t)$$

$$S = \frac{m(x+\alpha)^2}{2t},\ \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m(x+\alpha)^2}{2t^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t},\ \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial x} = \frac{m}{t} \neq 0$$

S — полный интеграл уравнения $(*)$

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \\ -\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_x = -\beta \\ x = -\frac{\beta}{m}t - \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} p_x = mx_0^2 \\ x = \dot{x}_0 t + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x(0) = m\dot{x}_0 = -\beta \\ x(0) = x_0 = -\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = -m\dot{x}_0 \\ \alpha = -x_0 \end{cases}$$

$$S = S_1(x,\ \alpha) + S_2(t,\ \alpha)$$

$$S = -\alpha t + S_1(x,\ \alpha) \to (*)$$

$$-\alpha + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad \frac{\partial S_1}{\partial x} = \pm\sqrt{2m\alpha} \qquad S_1 = \pm x\sqrt{2m\alpha}$$

Тогда $S = -\alpha t \pm x\sqrt{2m\alpha}$

«+» в области $p_x \geqslant 0$, «−» в области $p_x < 0$

Рассмотрим натуральную систему с одной степенью свободы.

Пример.

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \Pi(q)$$
$$H = \frac{p^2}{2a(q)} + \Pi(q)$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2a(q)}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \Pi(q) = 0$$
$$S = -h(\alpha)t + S_1(q,\ \alpha):$$
$$-h(\alpha) + \frac{1}{2a(q)}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}\right)^2 + \Pi(q) = 0$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = \pm\sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}$$
$$S = -h(\alpha)t \pm \int\limits_{q_0(\alpha)}^{q} \sqrt{2a(\xi)(h(\alpha) - \Pi(\xi))}d\xi$$
$$\det\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}$$
$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\frac{dh}{d\alpha}t \pm \int\limits_{q_0(\alpha)}^{q_0} \frac{d\xi\sqrt{a(\xi)}}{\sqrt{(h(\alpha) - \Pi(\xi))}} \mp \underbrace{\frac{dq_0}{d\alpha}}_{0}\underbrace{\sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}}_{0}$$

2.12 Метод разделения переменных

Теорема (об отделении времени)**.** *Если* $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$*, то* $S(q,\ \alpha,\ t)$ *— полный интеграл уравнения*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \Leftrightarrow S = -h(\alpha)t + S_1(q,\ \alpha),$$

где S_1 *— полный интеграл уравнения* $H\left(q,\ \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha)$ $\left(\text{т.е.} \det\frac{\partial^2 S_1}{\partial q, \partial \alpha} \neq 0\right)$.

Доказательство.

$$S = S_0(t,\ \alpha) + S_1(q,\ \alpha)$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial t},\ \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_1}{\partial q}$$
$$-\frac{dS_0(t, \alpha)}{dt} \equiv H\left(q,\ \frac{\partial S_1(q,\ \alpha)}{\partial 2q}\right) \equiv h(\alpha)$$
$$\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial t} = -h(\alpha) \Leftrightarrow S_0 = -h(\alpha)t + C(\alpha),\ C(\alpha) = const \\ H\left(q,\ \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha) \end{cases}$$
$$\frac{dS_0}{d\alpha} = -\frac{dh}{d\alpha}t + \frac{dC}{d\alpha} \neq 0,\ \frac{dh}{d\alpha} \neq 0$$
$$\det\frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial \alpha} \neq 0 \Leftrightarrow \det\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

■