

Лекции по аналитической механике. Весенний семестр.

Муницына Мария Александровна

23 июня 2018 г.

*Набор и рисунки: Александр Валентинов.
За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю.*

*Источник: <https://github.com/valentiay/analmech>
Сообщить о ошибках можно здесь <https://github.com/valentiay/analmech/issues>
или здесь <https://vk.com/valentiay>. Pull-реквесты приветствуются.*

Содержание

1	Равновесие динамических сил	2
1.1	Общая теория статики	2
1.2	Равновесие голономных систем	2
1.3	Элементы теории устойчивости	4
1.4	Прямой метод Ляпунова	5
1.5	I-й метод Ляпунова	8
1.6	Равновесие натуральных систем	10
1.7	Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия	12
1.8	Элементы теории бифуркации	13
1.9	Малые Колебания	16
1.10	Вынужденные колебания в линейных системах	18
2	Гамильтонова механика	21
2.1	Преобразования Лежандра	21
2.2	Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона	22
2.3	Скобки Пуассона	24
2.4	Принцип Гамильтона	26
2.5	Интегральный инвариант	27
2.6	Теорема Лиувилля	29
2.7	Обратные теоремы теории интегральных инвариантов	29
2.8	Канонические преобразования	30
2.9	Свободные канонические преобразования	34
2.10	Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби	35
2.11	Метод разделения переменных	37

Лекция 1 от 07.02.2018**1 Равновесие динамических сил**

$$\bar{r}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \bar{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots)^T$$

Определение. r_0 — положение равновесия, если

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0, \quad \dot{\bar{r}}(t_0) = 0 \Rightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}_0$$

Замечание. Положение равновесия зависит от системы отсчета.

1.1 Общая теория статики

$$\bar{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots)^T$$

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(\bar{r}, t) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, k \Leftrightarrow \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}} \dot{\bar{r}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \\ f_\beta(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0, \quad \beta = k+1, \dots, n \quad f_\beta = B(\bar{r}, t)\dot{\bar{r}} + \bar{\gamma} = 0 \end{aligned} \right\} \Phi \dot{\bar{r}} + \bar{\psi} = 0$$

$\delta \bar{r}$ — виртуальное перемещение, $\Phi \delta \bar{r} = 0$

$$\bar{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots)^T,$$

$$(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0 \text{ — условие идеальности связей} \quad (1)$$

Принцип Даламбера. Если наложенные на систему связи идеальны, то некоторые ее положения являются положениями равновесия, тогда, и только тогда, когда работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящем систему из этого положения, равна нулю.

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия} \Leftrightarrow (\bar{F}, \delta \bar{r}) = 0 \quad (\text{связи идеальны.})$$

Доказательство.

1. Принцип виртуальных перемещений: $\bar{r}(t)$ — движение системы $\Leftrightarrow (M\dot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) = 0$.
2. Принцип детерминированности.

■

1.2 Равновесие голономных систем

Голономная система:

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \text{ — обобщенные координаты.}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия, } \bar{r}_0 = \bar{r}(\bar{q}_0, t)$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$(\bar{F}, \delta \bar{r}) = (\bar{Q}, \delta \bar{q}), \quad \delta q_1, \dots, \delta q_n \text{ — независимы.}$$

$$(1) \Leftrightarrow \bar{Q}(\bar{q}_0, 0, t) \equiv 0$$

Система голономна, силы потенциальны:

$$\exists \Pi(\bar{q}, t) : \bar{Q} = -\text{grad } \Pi(\bar{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$$

$$\bar{q}_0 \text{ — критическая точка } \Pi(\bar{q}, t)$$

Натуральная Лагранжева система (связи идеальны, голономны, стационарны, силы потенциальны и $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$):

$$T = T_2 = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi = \Pi(\bar{q})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + \Pi = const \right)$$

Определение. \bar{q}_0 — положение равновесия, если $\bar{q}(t) \equiv \bar{q}_0$ — решение уравнений Лагранжа.

Утверждение. \bar{q}_0 — положение равновесия натуральной системы, тогда, и только тогда, когда $\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$.

Доказательство.

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} \right) \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 - \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial \bar{q}} \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0$$

■

Пример (Математический маятник).

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi$$

1) Положение равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

2) Уравнение движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

3) Интеграл энергии:

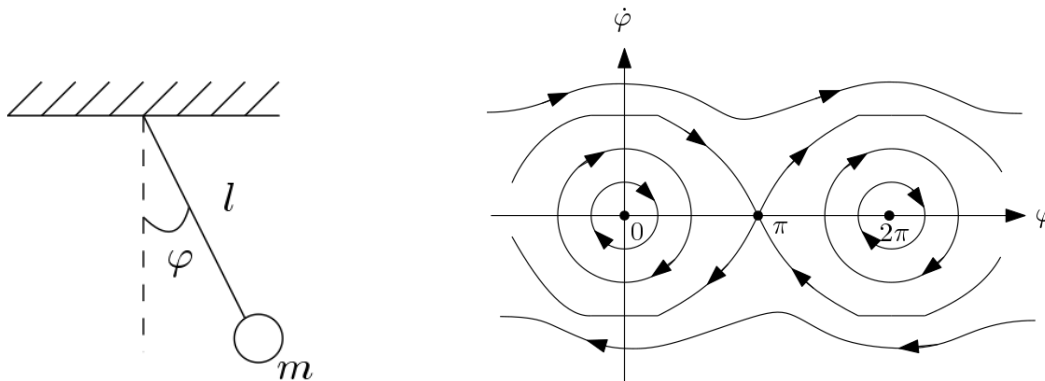
$$T + \Pi = h = const$$

$$\frac{1}{2}mgl^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = h$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}(h - \Pi(\varphi))$$

$$\dot{\varphi} = \pm \alpha \sqrt{h - \Pi(\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} = const$$

$(\varphi, \dot{\varphi})$ — фазовая плоскость.



1) $h < -mgl$ ∅

- 2) $h = -mgl$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ — равновесие
 3) $-mgl < h < mgl$ — колебания
 4) $h = mgl$ — либо равновесие $\varphi = \pi$, либо движение к $\varphi = \pi$
 5) $h > mgl$ — вращение

Пример (Маятник во вращающейся плоскости).

$$n = 1, q = \varphi$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{v}^2 = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi)$$

$$\Pi = -mgr \cos \varphi$$

$$L = T - \Pi, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 \underbrace{-T_0 + \Pi}_{\Pi^*} = \text{const}$$

$$\Pi^* = -mgr \cos \varphi - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi - \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin 2\varphi = mr \sin \varphi (g - r\omega^2 \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow$$

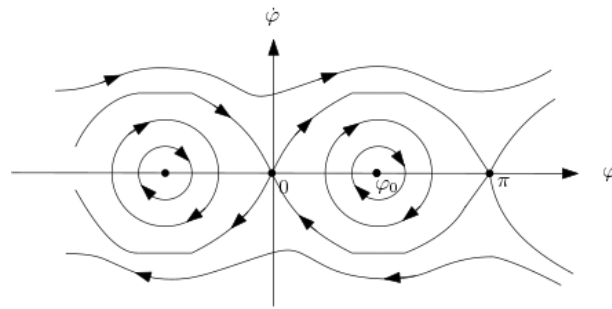
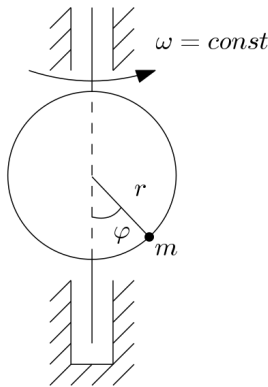
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm \arccos \frac{g}{r\omega^2} = \varphi_0, \omega^2 > \frac{g}{r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} = mgr \cos \varphi - mr^2 \omega^2 \cos 2\varphi$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mr(g - r\omega^2) \geq 0 \quad \omega^2 \leq \frac{g}{r}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -mr(g + r\omega^2) < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = mgr \frac{g}{r\omega^2} - mr^2 \omega^2 \left(2 \frac{g^2}{r^2 \omega^4} - 1 \right) = mr\omega^2 \left(r - \frac{g^2}{2\omega^4} \right) < 0$$



Лекция 2 от 14.02.2018

1.3 Элементы теории устойчивости

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{f} \in C^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t, \bar{x}(0)) \text{ — начальные условия.} \quad (2)$$

Определение. $\bar{x} = \bar{x}_0$ — положение равновесия (2), если $\bar{f}(\bar{x}_0) = 0$ ($\bar{x}(t, \bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0$), $\bar{x}_0 = 0$ без ограничения общности.

Определение. Равновесие (2) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что любое решение с начальными условиями в δ -окрестности равновесия существует при всех $t > 0$ и находится в ε -окрестности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |\bar{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Определение. $\bar{x} = 0$ — неустойчивое, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \bar{x}(0), t_1 > 0 : |\bar{x}_0| < \delta \quad |\bar{x}(t_1, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

Определение. $\bar{x} = 0$ — устойчиво асимптотически, если

1. $\bar{x} = 0$ — устойчиво,
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t, \bar{x}(0)) = 0$.

1.4 Прямой метод Ляпунова

$$V(x)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \bar{f}$$

Определение. \dot{V} — производная функции V по времени вдоль решения (2).

Теорема (Ляпунова об устойчивости). Если существует гладкая функция $V(x)$ определенная в ε -окрестности равновесия $x = 0$ системы (2), удовлетворяющая следующим условиям:

1.

$$V(0) = 0, \quad \forall x \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

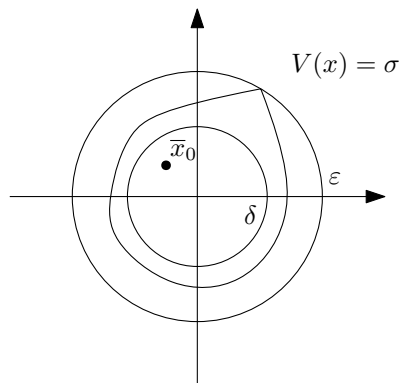
то $x = 0$ — устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

$$1) \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \min V(\bar{x}), |\bar{x}| = \varepsilon$$

$$2) V \in C^1 \Rightarrow \exists \delta : V(\bar{x}) < \sigma \quad \forall \bar{x} : |\bar{x}| < \delta$$

$$3) \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta \quad V(\bar{x}(t)) < \sigma \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon \quad (\bar{x}_0(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_0))$$



Замечание.

$$1) V(0) = 0, V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V \text{ — положительно определенная функция в } 0.$$

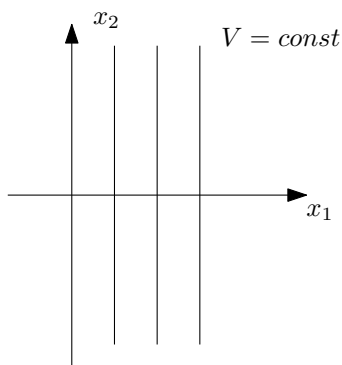
$$2) V(0) = 0, V(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V \text{ — отрицательно определенная функция в } 0.$$

$$3) V(0) = 0, V(\bar{x}) \geq (\leq) 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V \text{ — знакопостоянная функция в } 0.$$

Пример.

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \text{ — положительно определена в } x_1 = x_2 = 0$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 \text{ — не является положительно определенной в } x_1 = x_2 = 0$$



Замечание. Если в условии теоремы Ляпунова в условии 2) поставить строгое неравенство, устойчивость станет асимптотической.

Теорема. Барбашина-Красовского Если $\exists V(x) \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, то

1.

$$V(0) = 0 \quad V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

3. множество $\{\bar{x} : \dot{V}(\bar{x}) = 0\}$ не содержит целиком решения системы (2), кроме равновесия $\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ — установившееся асимптотически.

Замечание. Если $\dot{V} < 0$, то $\{x : \dot{V} = 0\} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = 0$ установившееся, но не асимптотическое, т.е.

I) $\exists \bar{x}_0(t) \quad |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon, \quad \bar{x}_0 \not\rightarrow 0$, т.е.

$\exists \delta, \{t_k\}, \quad t_{k+1} > t_k \quad \delta < |\bar{x}_0(t_k)| < \varepsilon$

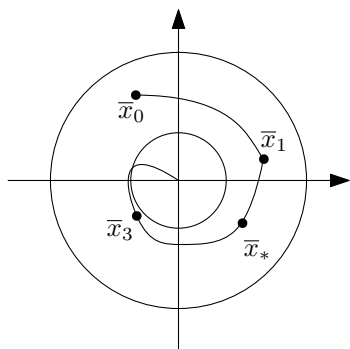
II) $\exists \{k_s\} \quad \bar{x}_s = \bar{x}_0(t_{k_s}) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \bar{x}_*$

$$|\bar{x}_s| > \delta \Rightarrow |\bar{x}_*| > \frac{\delta}{2}$$

III) $V(\bar{x}_0(t))$

$$1), 2) \Rightarrow \exists V = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_0(t))$$

$$V \in C^1 \Rightarrow V = V(\bar{x}_*)$$



$$\boxed{\forall t \quad V(\bar{x}_0(t)) \geq V} \quad (3)$$

(4)

IV) Рассмотрим $\bar{x}_s(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_s) = \bar{x}_0(t + t_{k_s}, \bar{x}_0)$

V) $\bar{x}_*(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_*)$

$$V(\bar{x}_*) = V, \quad 2), 3) \Rightarrow \exists t^* : \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{V_*} < V$$

VI) V — непрерывная б.т. $\bar{x}_*(t_*)$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_1 \Rightarrow |V(\bar{x}) - V(x_*(t_*))| < \varepsilon_1$$

Решения (2) непрерывно и зависит от начальных условий ($t < \infty$)

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_2 \Rightarrow |\bar{x}(t_*) - x_*(t_*)| < \varepsilon_2$$

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \exists s : |\bar{x}_s - x_*| < \varepsilon_3 \forall s > S$$

$$\varepsilon_1 = V - V_* > 0 \rightarrow S : \left| V(\bar{x}_s(t_*)) - \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{V_*} \right| < V - V_*$$

$$V(\bar{x}_s(t_*)) - V_* < V - V_* \text{ — противоречие с (3)}$$

Теорема (Красовского). $\exists V \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ и область Ω :

1. $V(0) = 0, V(\bar{x}) > 0 \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
 $\bar{x} = 0 \in \partial\Omega, V(\bar{x}) = 0 \forall \bar{x} \in \partial\Omega$
2. $\dot{V} \leq 0 \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
3. $\{\bar{x} : \dot{V} = 0\} \Rightarrow \bar{x} = 0$ — неустойчивое.

Доказательство.

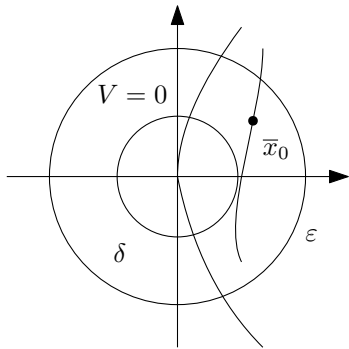
$\exists \bar{x} = 0$ — устойчивое, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon$$

$$1), 2) \Rightarrow \exists \delta : |\bar{x}_0(t)| > 0 \Rightarrow \exists \{x_s\} \rightarrow \bar{x}_*,$$

$$V(\bar{x}_s(t)) \leq V(\bar{x}_*) = V$$

$$\bar{x}_*(t), 3) \Rightarrow \exists t_* > 0 : (\bar{x}_*(t_*)) > V \text{ — противоречие как в предыдущей теореме}$$



Замечание. $\dot{V} > 0$ — теорема Четаева.

Пример (Волчок Эйлера).

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = \omega \\ q = r = 0 \\ p' = p - \omega \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A\dot{p}' = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases}$$

$$2T = A(p' + \omega)^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap'^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Ap'\omega + A\omega^2 \quad | \cdot A$$

$$k^2 = A^2p'^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2A^2p'\omega + A^2\omega^2$$

$$2TA - k^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 0 \cdot p^2$$

$$V = (2TA - k^2) + (2T - A\omega^2)^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 4A^2\omega^2(p')^2 + O_4(p', q, r)$$

$$A > B, A > C$$

Т.к. все слагаемые больше 0, O_4 мало в окрестности 0.

$$\exists u_\varepsilon : V > 0, \forall (p', q, r) \in U_\varepsilon, V \geq 0|_{p'=r=q=0}, \dot{V} = 0 \Rightarrow \text{равновесие устойчиво.}$$

Лекция 3 от 21.02.2018**1.5 I-й метод Ляпунова**

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \quad A = \text{const} \quad \det(A - \lambda E) = 0 \quad (5)$$

Утверждение. Если все корни характеристического многочлена линейной системы (5) имеет отрицательные вещественные части, то равновесие $\bar{x} = 0$ этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — асимптотически устойчиво.}$$

Доказательство.

$$1) \lambda_i \in \mathbb{R}. \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n C_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t}, \quad c_i = \text{const}, \quad \bar{u}_i = \text{const}$$

$\bar{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

$$1) \lambda_1 = \lambda_2, \quad \bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \text{ — устойчивость.}$$

$$2) \lambda_0 \text{ — корень кратности } s :$$

$$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 + \dots + C_s \bar{u}_s t^{s-1}) e^{-\lambda_0 t} \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — устойчиво асимптотически (по определению).}$$

$$3) \lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k \text{ — кратность } 1$$

$$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} + C_2 \bar{u}_2 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}) = + \dots + e^{\alpha_k t} (C'_1 \bar{u} \sin \beta_k t + C'_2 \bar{u} \cos \beta_k t) \Rightarrow \text{устойчивость.}$$

Утверждение. Если существует хотя бы 1 корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью, то равновесие $\bar{x} = 0$ неустойчиво:

$$\exists \lambda_k > 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — неустойчиво.}$$

Доказательство. Аналогично.

$$(*) \quad \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) \quad \bar{f}(0) = 0$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + O(\|\bar{x}\|^2) \quad A = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = \text{const}$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \text{ — линеаризованная система}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Теорема (Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то равновесие $\bar{x} = 0$ нелинейной системы асимптотически устойчиво, если же существует корень с положительной вещественной частью, то равновесие неустойчиво.

Замечание (Критический случай). Если нет $\lambda_k > 0$ $\lambda_k = 0^1$, то про систему ничего нельзя сказать

Пример.

$$C > A > B$$

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases} \quad \text{Линеаризованная:} \quad \begin{cases} A\dot{p} = 0 \\ B\dot{q} = (C - A)r\omega \\ C\dot{r} = (A - B)q\omega \end{cases}$$

$$\bar{x} = (p', q, r)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-B}{C}\omega & 0 \end{pmatrix}$$

¹Нечетко записано

$$\det(\mathbb{A} - \lambda E) = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{BC} \omega^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm \sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}} \omega \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0 - \text{неустойчиво, т.к. } \exists \lambda > 0$$

(Из прошлой лекции (не успели) $V = BCqr$)

Пример.

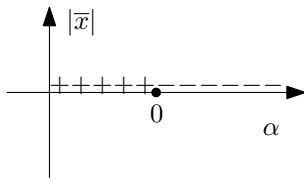
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Линеаризованная система: } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \lambda = \pm i \begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ y = C_1 \cos t - C_2 \sin t \end{cases}$$

$$V = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \dot{V} = (\dot{x}x + \dot{y}y)|_{(**)} = \alpha x^4$$

$$\underline{\alpha} < 0 : V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq 0 \quad \dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (**) |_{x \equiv 0} \quad \begin{cases} 0 = y + 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 - \text{устойчиво асимптотически.}$$



Бифуркационная диаграмма

$$\underline{\alpha} > 0 : \Omega = U_\varepsilon \setminus \{0\}$$

$$V(\bar{x}) > 0, \quad \dot{V}(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega$$

$$V(0) = 0, \quad \dot{V}(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \partial\Omega(x=0)$$

$$\Rightarrow \text{неустойчивость, т.к. } \dot{V} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (6)$$

Пример.

$$n = 2 : a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0$$

$$a_1^2 \geq 4a_0a_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$a_1^2 < 4a_0a_2 : \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{a_0} < 0 \Rightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_i > 0, \quad i = 1, 2$$

Утверждение (Необходимое условие устойчивости). Если все корни (6) при $n > 2$ имеют отрицательные вещественные части, то коэффициенты этого уравнения положительны:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Rightarrow a_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Доказательство.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — действительные корни, $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, k$

$\lambda = \alpha_i \pm \beta_i i$ $j = 1, \dots, m$

$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \alpha_1 - \beta_1 i) \cdot \dots \cdot (\lambda - \alpha_1 + \beta_1 i) \cdot \dots$

$= a_0(\lambda + |\lambda_1|) \cdot \dots \cdot (\lambda + |\lambda_k|)((\lambda + |\alpha_1|)^2 + \beta_1^2) \cdot \dots = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ $a_i > 0$ $i = 1, \dots, n$

■

Пример.

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

Теорема (Критерий Рауса-Гурвица). $[b/\partial] \forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Leftrightarrow$ все главные диагональные миноры определены положительно

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \Delta_i > 0$$

Замечание.

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

1.6 Равновесие натуральных систем

Натуральная система:

$$L = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(\bar{q})$$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_0 - \text{равновесие}, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \right)$$

Определение. $\bar{q} = \bar{q}_0$ — установившееся равновесие положение равновесия натуральной системы, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel \bar{q}(0) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(0) \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \bar{q}(t) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(t) \parallel < \varepsilon \forall t > 0.$$

Теорема (Лагранжа-Дирихле). Точка строго локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия этой системы:

Доказательство.

$$V = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0)$$

$$1) V|_{\bar{q}=\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}=0} = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0) > 0 \quad (A - \text{положительно определенная})$$

$$\forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} : \delta > \parallel \dot{\bar{q}} \parallel + \parallel \bar{q} - \bar{q}_0 \parallel > 0$$

$$2) \dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{q}} = 0, \bar{q} = \bar{q}_0 - \text{устойчиво.}$$

■

Пример.

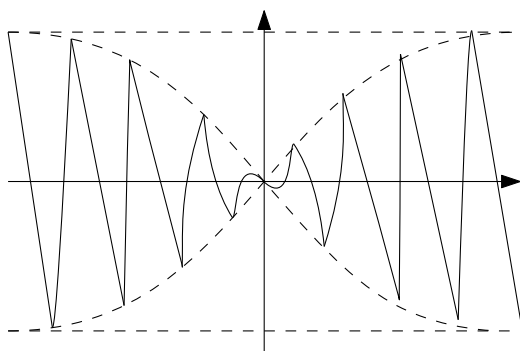
$$\Pi = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ e^{-\frac{1}{|q|}} \cdot \cos \frac{1}{|q|}, & q \neq 0 \end{cases}$$

1) $q = 0$ — положение равновесия

2) $q = 0 \neq \min \Pi$

3) $T + \Pi = h = \text{const}$

$\Pi \leq h, x = 0$ — устойчиво по Ляпунову (по опр.)



$$\Pi(\bar{q}) = \Pi(\bar{q}_0) + \Pi^{(1)}(\bar{q}) + \Pi^{(2)}(\bar{q}) + \dots + \Pi^{(m)}(\bar{q})$$

$$\Pi^{(1)} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0$$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

Лекция 4 от 28.02.2018

$\bar{q} = 0$ — положение равновесия

$$T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) \quad \Pi = \Pi(0) + \left(\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \dots = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \dots$$

$$\Pi^{(0)} = \Pi(0) = 0, \quad \Pi^{(1)} = \left(\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) = 0$$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

Пример. 1. $\Pi(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{2}$, $x = y = 0$ — устойчивое положение равновесия.

2.

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \Pi^{(2)} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \ddot{y} = 0 \quad y = ct + c_1$$

$x = y = 0$ — неустойчивое положение равновесия.

Теорема. Если T не имеет даже нестрогого минимума в окрестности некоторого положения равновесия натуральной системы, то равновесие неустойчиво.

Теорема.

$$m = 2, n = 1 : T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad a(q) > 0$$

$$b = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0} < 0$$

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2 + O_3(q)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + a'_q \dot{q}^2 - \frac{1}{2}a'_q \cdot \dot{q}^2 + bq + O_2(q) =$$

$$= a(q) \cdot \ddot{q} + bq + O_2(q, \dot{q})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q = \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \dot{q} = -\frac{bq - O_2(q, \dot{q})}{a(0) + O_1(q)} = -\frac{bq}{a(0)} + O_2(q, \dot{q}) \end{cases}$$

$$\bar{x} = (q, \dot{q})^T, \dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a(0)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{b}{a(0)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{b}{a(0)} > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{b}{a(0)}}$$

$\operatorname{Re} \lambda_{\pm} > 0 \Rightarrow q = 0$ — неустойчивое положение равновесия.

Замечание.

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}a(t)q^2 - \frac{1}{2}bq^2}_{L^*} + O_3(q, \dot{q})$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0}$$

C — положительно определена $\Rightarrow q = 0$ — устойчиво

$$\det C = 0 \text{ — ?}$$

$$\exists \Delta_i < 0$$

1.7 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*$$

$$L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - \Pi(q)$$

$$\dot{E} = (\overline{Q}^*, \dot{q}) \quad E = T + P$$

- Если $(\overline{Q}^*, \dot{q}) = 0$, то \overline{Q}^* — гироскопическая.
- Если $(\overline{Q}^*, \dot{q}) \leq 0$, то \overline{Q}^* — диссипативная.
- Если $(\overline{Q}^*, \dot{q}) < 0$, то \overline{Q}^* обладает полной диссипацией.

Теорема (Кельвина-Четаева 1). Если $q = 0$ — точка строгого локального минимума Π натуральной системы, то даже при добавлении в систему гироскопических и (или) диссипативных сил, она является устойчивым положением равновесия A . Если при этом диссипативные силы обладают полной диссипацией, то это равновесие устойчиво асимптотически.

Доказательство.

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(q)$$

$$q = 0 \text{ — строгий локальный минимум } \Pi(q) \Rightarrow V(0, 0) = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) > 0 \quad \forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} \text{ } 0 < \|q\|^2 + \|\dot{q}\|^2 < \varepsilon$$

$$a) \dot{V} = (\overline{Q}^*, \dot{q}) \leq 0 \Rightarrow q = 0 \text{ — устойчиво по теореме Ляпунова}$$

$$b) \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ — устойчиво асимптотически по т. Барабашина-Красовского}$$

■

Теорема (Кельвина-Четаева 2). Если в изолированном положении равновесия Π не имеет даже нестрогого минимума, а силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от направления гироскопических сил).

Доказательство.

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(0)$$

$$q = 0 \rightarrow \dots \Rightarrow \Omega : \Pi(\bar{q}) < \Pi(0) \quad \forall q \in \Omega$$

$$\Pi(q) = \Pi(0) \quad \forall q \in \partial\Omega, \quad q = 0 \in \partial Q$$

$$V < 0, \dot{V} < 0 \quad \forall \{\bar{q}, \dot{\bar{q}}\} \in \Omega' = \{\bar{q}, \dot{\bar{q}} : q \in \Omega, \dot{\bar{q}} = 0\}$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \bar{q} = 0$$

$\Rightarrow q = 0$ — неустойчиво по теореме Красовского.

■

Пример.

$\ddot{x} = 0, x = 0$ — неустойчиво.

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad k > 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$\ddot{x} = 0, x = 0$ — неустойчиво.

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad k > 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ — устойчиво.

Пример (Гироскопическая стабильность).

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi = -\frac{x^2 + y^2}{2} \quad \bar{Q}^* = \alpha \dot{y} \bar{e}_x - \alpha \dot{x} \bar{e}_y$$

$$(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) = \alpha \dot{y} \dot{x} - \alpha \dot{x} \dot{y} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = \alpha \dot{y} \\ \ddot{y} - y = -\alpha \dot{x} \end{cases} \quad (\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \det(A - \lambda E) = 0)$$

$$A\ddot{\bar{x}} + B\dot{\bar{x}} + C\bar{x} = 0$$

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 + \alpha^2 \lambda^2$$

$$\begin{cases} \lambda^2 = -2 & \lambda = \pm \sqrt{2}i \\ \lambda^2 = -\frac{1}{2} & \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

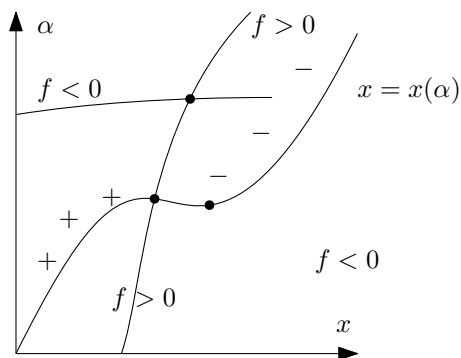
$x = y = 0$ — устойчивое.

1.8 Элементы теории бифуркации

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \alpha), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Кривые равновесий $\bar{x} = \bar{x}(\alpha) : \bar{f}(\bar{x}(\alpha), \alpha) = 0$

Точка бифуркации $(\bar{x}_*, \alpha_*) : \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_*(\alpha_*), \alpha=\alpha_*} = 0$



$$\underline{n=1} \quad \dot{x} = f(x, \alpha)$$

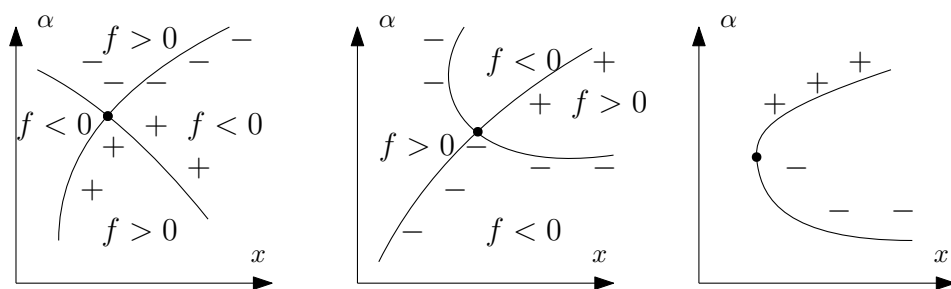
$$\dot{x} = f'_x(x - x(\alpha)) + O_2(x - x(\alpha))$$

$$\lambda = f'_x > 0 \Rightarrow x = x(\alpha) - \text{неустойчиво.}$$

$$\lambda = f'_x < 0 \Rightarrow x = x(\alpha) - \text{устойчиво.}$$

$$\lambda = f'_x = 0 \Rightarrow \text{бифуркация.}$$

Основные типы бифуркаций.



1) Смена устойчивости, 2) вилка, 3) складка.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0 \quad L = \frac{1}{2} (A(q) \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(\bar{q}, \alpha)$$

$$\text{Кривая равновесия} \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}(\alpha)} = 0$$

$$\text{Точка бифуркации} \quad \det \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}_*=\bar{q}(\alpha_*), \alpha=\alpha_*} \right) = 0$$

$$\underline{n=1} \quad a\ddot{q} + bq = 0, \quad b = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial q^2}$$

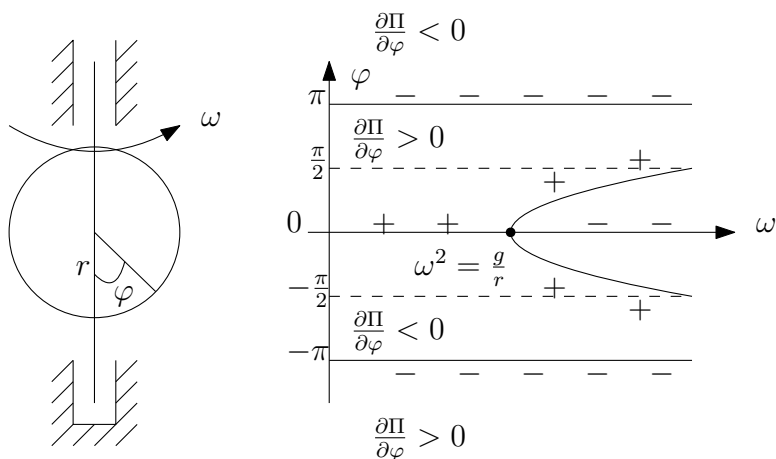
$$a\lambda^2 + b = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{b}{a}$$

$$1) b > 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} i - \text{устойчиво.}$$

$$2) b < 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}} - \text{неустойчиво.}$$

$$\text{Равновесия:} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 r} \end{cases}$$



Лекция 5 от 07.03.2018

Пример (Бифуркация Андронова-Копфа).

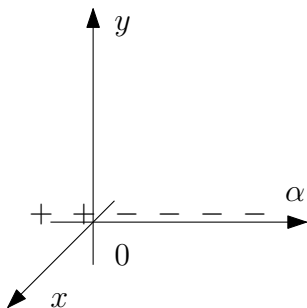
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$ равновесие. Откинем квадратичную часть.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x = y = 0$ — устойчиво.

$\alpha > 0 \Rightarrow x = y = 0$ — неустойчиво.

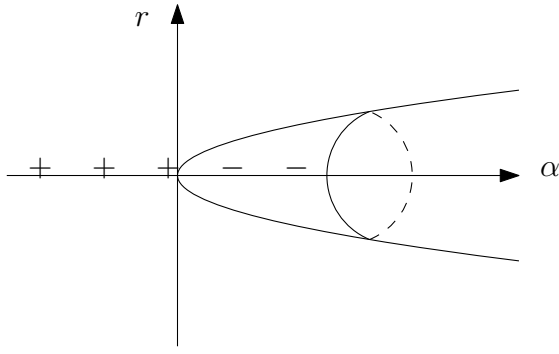


$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = \alpha r \cos \varphi - r \sin \varphi - r \cos \varphi \cdot r^2 & | \cdot \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi - r \sin \varphi \cdot r^2 & | \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r - r^3 & (1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

$r = 0, r = \pm\sqrt{\alpha}$ — равносильные уравнению (1).

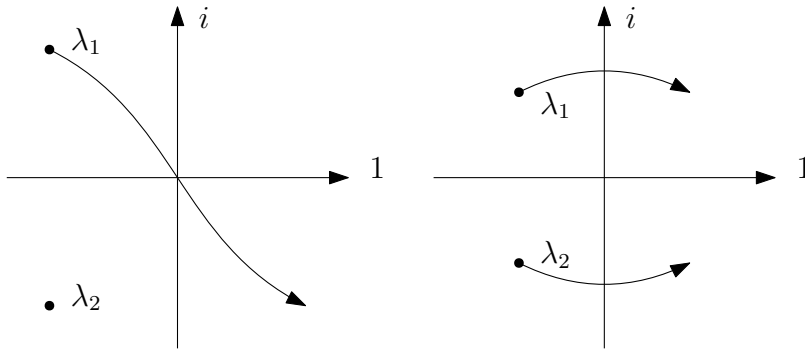


$$\delta r = r - \sqrt{\alpha}$$

$$\delta \dot{r} = \dot{r}, \quad r = \delta r + \sqrt{\alpha}$$

$$(1) \Leftrightarrow \delta \dot{r} - (\delta r + \sqrt{\alpha})(-\delta r)(\delta r + 2\sqrt{\alpha}) = -2\alpha\delta r + O_2(\delta r)$$

$$\delta r = o(r \pm \sqrt{\alpha}) - \text{устойчивое.}$$



1) Дивергенция. 2) Флаттер.

1.9 Малые Колебания

$$T = \frac{1}{2}(\Phi(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi(\bar{q}), \quad \bar{q} = 0 \text{ — положение равновесия}$$

$$\Pi(\bar{q}) = \underbrace{\Pi(0)}_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + O_3(\bar{q})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}=0} = c = \text{const}, \quad C = C^T$$

$$T = \frac{1}{2}((\Phi(0) + O(\|\bar{q}\|))\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

$$A = \Phi(0) = \text{const}, \quad A = A^T$$

$$L = \tilde{L} + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \frac{1}{2}(C\bar{q}, \bar{q})$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} = \frac{1}{2} \underbrace{(A\dot{\bar{q}} + A^T \dot{\bar{q}})}_{\text{Из 3 семестра}} = A\dot{\bar{q}}, \quad \frac{\tilde{L}}{\bar{q}} = -C\bar{q} \text{ — аналогично}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = 0}$$

$$A \text{ положительно определена} \xrightarrow{\text{Из линейной алгебры}} \exists \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n : A \rightarrow E, C \rightarrow k$$

$$\bar{q} = \sum \xi_i \bar{e}_i = u\bar{\xi}, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}(E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(k\bar{\xi}, \bar{\xi}),$$

$$k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\xi} + k\bar{\xi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1\xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n\xi_n = 0 \end{cases}$$

Пусть $k_i = \omega_i^2 > 0$

k и C — положительно определены, $\bar{q} = 0 (\bar{\xi} = 0)$ — устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле

$$\ddot{\xi}_i + k_i\xi_i = 0 \quad \lambda^2 + k_i, \quad \lambda^2 + \omega_i^2 = 0 \quad \lambda = \pm\omega_i i$$

$$\xi_i = C_{1i} \sin \omega_i t + C_{2i} \cos \omega_i t = \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Утверждение.

$$\det(A\omega_C^2) = 0$$

$$\begin{cases} A(\omega_i^2 - C)e_i = 0 \\ (A\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1 \end{cases}, i = 1, \dots, n$$

Доказательство.

$$2\tilde{\Pi} = (C\bar{q}, \bar{q}) = (CU\bar{\xi}, U\bar{\xi}) = (U^T CU\bar{\xi}, \bar{\xi}) = (k\bar{\xi}, \bar{\xi}) \Leftrightarrow k = U^T CU$$

$$2\tilde{T} = (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = (U^T AU\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) = (E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = U^T AU (\Leftrightarrow (A\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij})$$

$$k - k_i E = \text{diag}(k_1 - k_i, \dots, k_{i-1} - k_i, 0, \dots)$$

$$\det(k - k_i E) = 0 \Leftrightarrow \det(U^T CU - k_i U^T AU) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det U^T \det(C - Ak_i) \det U = 0 \xleftarrow{\det U \neq 0} \det(Ak_i - C) = 0, \det(A\omega_i^2 - C) = 0$$

$$2)(k - k_i E)(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots)^T$$

$$(U^T C - k_i U^T A) \underbrace{U(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T}_{\bar{e}_i} \quad C\bar{q} = \sum \bar{e}_i \xi_i$$

$$U^T (C - \omega_i^2 A) \bar{e}_i = 0 \Leftrightarrow (A\omega_i - C) \bar{e}_i = 0$$

■

Определение. $\det(A\omega^2 - C) = 0$ — вековое уравнение (уравнение частот). ω_i — частоты малых колебаний (собственные частоты).

Следствие. Частоты малых колебаний не зависят от выбора обобщенных координат.

Определение. Если $(A\omega_i^2 - C)\bar{U}_i = 0$, то \bar{U}_i — амплитудный вектор, соответствующий частоте ω_i .

Замечание. $\bar{U}_i = \beta_i \bar{e}_i$, $\beta_i = \text{const}$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \bar{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Следствие. 1. Ортогональность

$$(A\bar{U}_i, \bar{U}_j) = 0, i \neq j$$

2. Линейная независимость

$$C_1 U_1 + \dots + C_n U_n = 0$$

$$0 + \dots + (A\bar{U}_i, C_i \bar{U}_i) + \dots + 0 = 0 \Leftrightarrow C : (A\bar{U}_i, \bar{U}_i) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0$$

$$(A\bar{U}, \bar{U}) = 0 \Leftrightarrow \bar{U} = 0$$

Замечание. $\tilde{\alpha}, \varphi$ — определяются начальными условиями.

$$I. \tilde{\alpha}_i = 0, \quad \forall i \neq m : \bar{q} = \tilde{\alpha}_m \bar{U}_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$$

главные (нормальные) колебания

Ia. Кратные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$k = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots)$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$(A\omega^2 - C)\bar{U} = 0$$

$$U = C_1 \bar{U}_1 + C_2 \bar{U}_2$$

II. $\exists k_m = 0$

$$\ddot{\xi}_m = 0, \quad \xi_m = C_1 t + C_2$$

III. $\exists k_m < 0, \bar{q} = 0 (\xi = 0)$ — неустойчиво.

$$\ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$$

$$\lambda^2 = -k_m > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-k_m}$$

Теорема. Если $\Pi_{(0)}^{(2)}$ не имеет даже нестрогого минимума, то $\bar{q} = 0$ неустойчиво.

Доказательство.

$n = 1$ уже доказано

$n > 1 \quad \bar{q} \rightarrow \bar{\xi}$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

$$\exists k_m < 0 : \ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0 \quad ||-$$

■

1.10 Вынужденные колебания в линейных системах

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

$$x = x_{\text{одн}} + x_r$$

$$x_{\text{одн}} = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

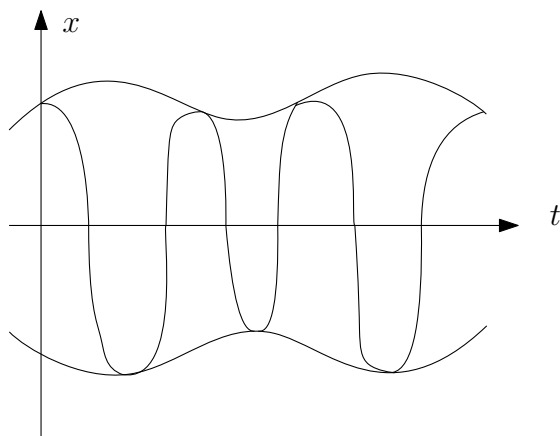
$$1) \omega \neq \omega_0 : x_r = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad / \omega_0^2$$

$$\dot{x}_r = \alpha \omega \cos \omega t - \beta \omega \sin \omega t \quad / 0$$

$$\ddot{x}_r = -\alpha \omega^2 \sin \omega t - \beta \omega^2 \cos \omega t \quad / 1$$

$$\begin{cases} \alpha \omega_0^2 - \alpha \omega^2 = 0 \\ \beta \omega_0^2 - \beta \omega^2 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$



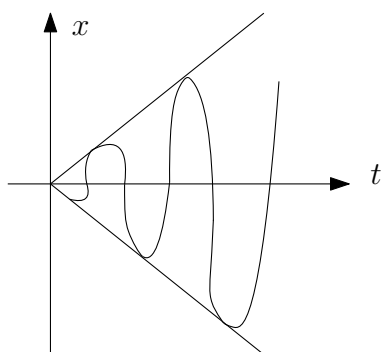
Биения.

$$2) \omega = \omega_0 \quad x_r = \alpha t \sin \omega_0 t$$

$$\dot{x}_r = \alpha \sin \omega_0 t + \alpha \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{x}_r = \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t - \alpha \omega_0 t \sin \omega_0 t \Rightarrow 2\alpha \omega_0 = f \Rightarrow \alpha = \frac{f}{2\omega_0}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



Резонанс.

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{Q}, \quad \bar{Q} = \bar{F} \cos \omega t$$

$$\bar{q} = U\bar{\xi}, \quad A \rightarrow E, \quad C \rightarrow K$$

$$(\bar{Q}, \delta\bar{q}) = (\bar{Q}, U\delta\bar{\xi}) = (U^T \bar{Q}, \delta\bar{\xi}) = (\bar{Q}\delta\bar{\xi})$$

$$\tilde{Q} = U^T \bar{Q}$$

Лекция 6 от 14.03.2018

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{Q} = \ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$1) \bar{Q} = \bar{F} \cos \omega t, \quad Q_i = \mu_i \cos \omega t \quad \tilde{Q} = U^T \bar{F}$$

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \mu_i \cos \omega t$$

$$\begin{cases} \omega \neq \omega_i, \forall i = 1, \dots, n & \xi_i = \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i) + \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ \omega = \omega_k, \mu_k = 0, & \xi_k = \alpha_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + \frac{\mu_k}{2\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$2) \bar{Q} \text{ периодически по } t: (\bar{Q}(t+T) = \bar{Q}(t), \forall t \in (0; +\infty))$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{F} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} + Q_k \right) \right)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_{\text{одн}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{q}_r^{(k)}$$

$$\omega_i = \frac{2\pi k}{T}$$

Пример.

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = f \sin \omega t, \quad k > 0$$

$x = 0$ — равновесие (установившееся асимптотически) свободной системы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{\text{одн}} = 0$$

$$x_r = R \sin(\omega t + \varphi)$$

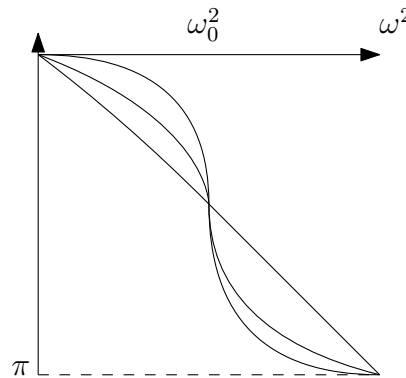
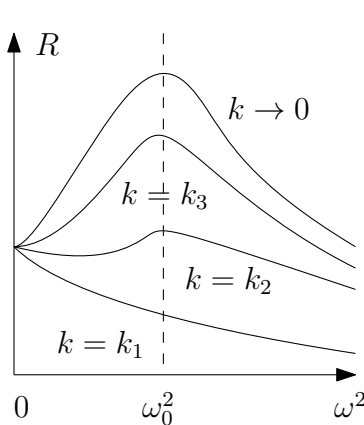
$$\dot{x}_r = R\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}_r = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$R(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + KR\omega \cos(\omega t + \varphi) = f \sin \omega t$$

$$R = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$((\omega_0^2 - \omega^2) + k^2 \omega^2)'_{\omega} = -2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 2k^2 \omega = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k^2}{2} \end{cases}$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \bar{Q}^* + \bar{Q}(t)$$

$$\bar{Q}^* = B\dot{\bar{q}}, \quad B = \text{const}$$

$\bar{q} = 0$ — устойчиво асимптотически

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \Leftrightarrow \text{Re } \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{F} \sin \omega t \Rightarrow \bar{Q}(t) = \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\bar{q} = \bar{q}_r = \bar{h} e^{i\omega t} \quad \dot{\bar{q}} = \bar{h} i \omega e^{i\omega t} \quad \ddot{\bar{q}} = \bar{h} (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

$$D(i\omega) \bar{h} = \bar{F} \quad \det D(i\omega) \neq 0$$

$$\bar{h} = [D(i\omega)]^{-1} \bar{F} = W(i\omega) \bar{F}, \quad W(i\omega) = (w_{kj}), \quad k, j = 1, \dots, n$$

$$w_{kj} = |w_{kj}| e^{i \arg w_{kj}} = R_{kj} e^{i \varphi_{kj}}$$

$$R_{kj} = |w_{kj}| \quad \bar{q} = W(i\omega) \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\varphi_{kj} = \arg w_{kj} \quad \sum_{j=1}^n w_{kj} F_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj} F_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}$$

2 Гамильтонова механика

2.1 Преобразования Лежандра

Рассмотрим $X(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\bar{x}) \in C$.

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} &\neq 0 \\ \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) &= \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \\ \Rightarrow \bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y}) &= \bar{x}(\bar{y}) \\ Y(\bar{y}) &= ((\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x}))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y})} \end{aligned}$$

Определение. $Y(\bar{y})$ — преобразование Лежандра функции $X(\bar{x})$ по переменной \bar{x} .

Свойства преобразований Лежандра²:

1. Инволютивность.

$$\begin{aligned} X, \bar{x} &\rightarrow Y, \bar{y} \rightarrow X, \bar{x} \\ \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= x_i + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i}, \bar{y} \right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) = \\ x_i + \left(\underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_{=0}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) &= x_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{x} &= \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \right)^{-1} \\ \det \frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{y}^2} &= \left(\det \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{x}, X &\rightarrow \bar{y}, Y = [(\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x})]|_{\bar{x}=f'(\bar{y})} \rightarrow \bar{z}, Z \\ \bar{y} = \bar{f}_2(\bar{z}), \bar{z} = \bar{x}, \bar{y} &= f_2^{-1}(\bar{x}), f'(f_2^{-1}) = \bar{x} \\ Y(\bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} &= (\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} - X(\bar{x}) \\ X(\bar{x}) &= [(\bar{x}, \bar{y}) - Y(\bar{y})]|_{\bar{y}=\bar{y}(\bar{x})} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X &= X(\bar{x}, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \\ Y &= Y(\bar{y}, \alpha) \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ Y(\bar{y}, \alpha) &= ((\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}, \alpha)) - X(\bar{x}, \alpha))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y}, \alpha)} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \bar{y} \right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = \\ &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_{=0} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

²Возможно, тут чего-то не хватает

Повторим это с лагранжианом.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Определение. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ — обобщенный импульс.

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

$$H(q, p, t) = [(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)}$$

Определение. H — гамильтониан (функция Гамильтона).

Определение. (q, p, t) — канонические переменные (параметры Гамильтона).

Теорема. В канонических переменных уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Инвариантность} &\Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{L}{q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

■

Определение.

$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, t)\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ — гамильтонова система, если

$$\bar{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T \quad \exists H = H(q, p) :$$

$$\bar{F} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T$$

ПРИМЕР

Лекция 7 от 21.03.2018

2.2 Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона

Определение. q_k — циклическая переменная, если $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ $\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$.

Утверждение. Если q_k — циклическая координата, то $p_n = \text{const}$.

Доказательство.

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const}.$$

■

Утверждение. Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = \text{const}$.

Доказательство.

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

■

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const} = \beta$$

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \beta, t)$$

$$\tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T$$

$$H = H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$$

Утверждение. При $\beta = \text{const}$ (заданном значении циклического интеграла β) уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \right) \Big|_{\beta=\text{const}}$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \end{cases} \quad (*)$$

$$p_n = \beta = \text{const}$$

$$\dot{q}_n = \left(\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, t, \beta)}{\partial p_n} \right) \Big|_{(*)} = f(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = f \Rightarrow q_n = \int_0^t f(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) d\tau + c_{2n-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q, p) = \text{const} = h$$

$$\text{Пусть } \frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow p_n = p_n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{n-1}, h) = -K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h),$$

$$\text{где } \tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T, \quad \tau = q_n$$

Определение. $K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h)$ — функция Уиттекера.

Утверждение. Уравнения Гамильтона на фиксированном уровне интеграла энергии локально эквивалентны уравнениям Уиттекера

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \\ \tilde{p}' = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \end{cases}, \quad \tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tau}, \quad \tilde{p}' = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}.$$

Доказательство.

$$H(\tilde{q}, \tau, \tilde{p}, -K) \equiv h$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_n \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{dH}{dq_i} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{p}_i - \dot{q}_n \frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_n} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$p_n = -K(\tilde{q}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), \tilde{p}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), q_n, h) = p_n(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\int_0^t \frac{dq_n}{f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}$$

■

2.3 Скобки Пуассона

Определение. Скобкой Пуассона двух функций $F(q, p)$ и $G(q, p)$ называется

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

1. Линейность

$$\{F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\} = \alpha_1 \{F, G_1\} + \alpha_2 \{F, G_2\}$$

$$\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}$$

2. Антикоммутативность

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

3. Тождество Якоби-Пуассона³

$$\{F, \{G, W\}\} + \{G, \{W, F\}\} + \{W, \{F, G\}\} = 0$$

$$\{F, \{G, W\}\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) = \dots$$

4. Правило Лейбница

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\}$$

$$5. \{\varphi(F_1, \dots, F_k), G\} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial F_i} \{F_i, G\}$$

6.

$$F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\}$$

Пример.

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

Утверждение. Функция $F(q, p, t)$ — первый интеграл системы с гамильтонианом $H(q, p, t)$ тогда, и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0.$$

³Доказательство не доведено до конца

Доказательство.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Замечание.

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$$

Теорема (Якоби-Пуассона). Скобка Пуассона двух первых интегралов в уравнении Гамильтона также является первым интегралом этих уравнений.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — первые интегралы системы с гамильтонианом H .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1, H\} &= 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\{F_1, F_2\}) + \{\{F_1, F_2\}, H\} &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} - \{H, \{F_1, F_2\}\} = \\ &= \{F_2, \{F_1, H\}\} + \{F_1, \{H, F_2\}\} + \{H, \{F_1, F_2\}\} = 0 \Leftrightarrow \{F_1, F_2\} \text{ — первый интеграл.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) + (B, \dot{q}) - \Pi(q, t) \\ H &= \frac{1}{2}(A^{-1}(p - B), (p - B)) + \Pi(1, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}p, p)}_{H_2} - \underbrace{(A^{-1}p, B)}_{H_1} + \underbrace{\Pi(q, t) + \frac{1}{2}(A^{-1}B, B)}_{H_0} \end{aligned}$$

Утверждение. $H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, f(q_n, p_n), t) \Rightarrow f(q_n, p_n) = \text{const} = \alpha$

Определение. q_n, p_n — отделяющиеся переменные

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 + \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

Лекция 8 от 28.03.2018

$$\begin{aligned} L &= L(q, \dot{q}, t) \\ \gamma &= \{q(t), t \in [t_1, t_2] \mid q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2\} \text{ — какая-то траектория} \\ \Omega &= \{q(t) \in C^2, t \in [t_1, t_2] \mid q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2\} \\ \gamma &\in \Omega \end{aligned}$$

Определение. Кривая, соответствующая решению уравнения Лагранжа системы с лагранжианом L называется прямым путем системы. Остальные пути называются окольными.

Замечание. Прямой путь не единственный.

Определение. S — функционал действия по Гамильтону

$$S = S(q(t))_{q(t) \in \Omega} = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Определение. Семейство кривых $q^\varepsilon(t) = q(t, \varepsilon)_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]}$, $q^\varepsilon(t) \in \Omega$ — вариация кривой $q(t)$, если

1. $q(t_0) = q(t) \forall t \in [t_1, t_2]$,
2. $q(\varepsilon, t_1) = q_1, q(\varepsilon, t_2) = q_2, \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Определение. $\delta S = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S(q^\varepsilon(t)) \right) \delta\varepsilon$ — вариация функционала S , соответствующая $q(t)$ при вариации $q^\varepsilon(t)$.

2.4 Принцип Гамильтона

Утверждение. Вариация функционала действия на некотором пути равный нулю тогда, и только тогда, когда путь прямой.

$$\delta S = 0 \forall q^\varepsilon(t) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \Big|_{q=q^\varepsilon(t,0)}$$

Доказательство.

$$S(q^\varepsilon(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^\varepsilon(t), \dot{q}^\varepsilon(t), t) dt$$

⋮

MISSING

■

Лекция 9 от 04.04.2018

$$(1) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha) \end{cases} \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{t})}{\partial(q_1, \dots, q_n, t)} \neq 0$$

$$\tilde{q}(q, t, 0) = q, \tilde{t}(q, t, 0) = t, \tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$$

$$f = (\eta \cdot p) - \zeta H = const$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \eta = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha} = 0, H = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - L, \zeta = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha} = 0$$

Доказательство.

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{q} = q + \alpha\eta + O_2(\alpha) \\ \tilde{t} = t + \alpha\zeta + O_2(\alpha) \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} q = \tilde{q} - \alpha\eta + O_2(\alpha) \\ t = \tilde{t} - \alpha\zeta + O_2(\alpha) \end{cases}$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{q} - \alpha\eta + O_2(\alpha)) = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} - \alpha\dot{\eta} + O_2(\alpha) = q'(1 + \alpha\dot{\zeta}) - \alpha\dot{\eta} + O_2(\alpha)$$

$$\dot{q} = \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\tilde{q}' - \dot{\eta}) + O_2(\alpha) = \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\dot{q} - \dot{\eta}) + O_2(\alpha) \quad (2)$$

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(q, \dot{q}, t) \Big|_{(1'), (2)} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}} = L(\tilde{q} - \alpha\eta + O_2, \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\dot{q} - \dot{\eta}) + O_2, \tilde{t} - \alpha\zeta + O_2) \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}} =$$

$$= \left(L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q}, -\eta \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{\zeta}\dot{q} - \dot{\eta} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}(-\zeta) \right] + O_2 \right) (1 - \alpha\dot{\zeta} + O_2) =$$

$$= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[- \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \eta \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{\eta} \right) + \dot{\zeta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \dot{\zeta} L - \frac{\partial L}{\partial t} \zeta \right] + O_2 =$$

$$= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[-(\dot{p}, \eta) - (p, \dot{\eta}) + \dot{\zeta} H + \frac{\partial H}{\partial t} \zeta \right] + O_2 =$$

$$L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) - \alpha \frac{d}{dt} f + O_2(\alpha) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$$

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow f = const$$

■

2.5 Интегральный инвариант

РУСУНОК чего-то

$$H = H(q, p, t)$$

$$(*) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$\{q, p, t\}$ — расширенное фазовое пространство.

$$\begin{cases} q = q(t, q_0, p_0) \\ p = p(t, q_0, p_0) \end{cases} \quad \text{— прямой путь.}$$

$$C_0 \rightarrow C(t)$$

$$I_{\Pi} = \oint_{C:t=const} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint (p, \delta q) \text{ — универс.}$$

Утверждение. Величина I_{Π} сохраняется на всех контурах (изохронах), охватывающих одну и ту же трубку прямых путей системы (*).

Доказательство.

$$C(t) : \begin{cases} q = q(\alpha), & \alpha \in [0; 1] \\ p = p(\alpha), & q(0) = q(1) \\ t = const, & p(0) = p(1) \end{cases}$$

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$$\frac{d}{dt} I_{\Pi} = \oint_C (\dot{p}, \delta q) + (p, (\dot{\delta} q)) \quad (\equiv)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d}{dt} q \right) \delta \alpha = \delta \dot{q}$$

$$(\equiv) \oint_C (\dot{q}, \delta q) + (p, \delta \dot{q}) = \oint_C \delta(p, \dot{q}) - \oint_C (\delta p, \dot{q}) + \oint_C (\dot{p}, \delta q) \stackrel{(*)}{=}$$

$$\stackrel{(*)}{=} - \oint_C \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \delta p \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \delta q \right) = - \oint_C \delta H = 0 \Rightarrow I_{\Pi} = const$$

■

Определение.

$$I = \oint [A(p, q, t) + (B(q, p, t), \delta p) + \gamma(q, p, t) \delta t]$$

I — относительный интегральный инвариант первого порядка системы (*), если I сохраняет свое значение на всех согласованных контурах, охватывающих одну и ту же трубку прямых путей.

Определение. Контур согласован, если существует такая их параметризация, что каждому значению параметра разных контуров соответствуют точки одного и того же пути.

РИСУНОК чего-то

Теорема (Теорема Ли Хуа-Чжуна).

$$I = \oint_{C:t=const} (A(q, p, t), \delta q) + (B(q, p, t), \delta p)$$

— универсальный (не зависит от гамильтониана) интегральный инвариант системы (*) тогда, и только тогда, когда $I = c I_n$, $c = const$

Доказательство. Для простоты $n = 1$.

$$\frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt} \oint_{C:t=const} A \delta q + B \delta p = \oint_C \dot{A} \delta q + \dot{B} \delta p + A \delta \dot{q} + B \delta \dot{p} = \oint_C \delta(A \dot{q} + B \dot{p}) - \delta A \dot{q} - \delta B \dot{p} + \dot{A} \delta q + \dot{B} \delta p =$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_C \left(\frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \cancel{\frac{\partial A}{\partial q} \dot{q}} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta q - \left(\frac{\partial A}{\partial p} \delta p + \cancel{\frac{\partial A}{\partial q} \delta q} \right) \dot{q} + \left(\cancel{\frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}} + \frac{\partial B}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \delta p - \left(\cancel{\frac{\partial B}{\partial p} \delta p} + \frac{\partial B}{\partial q} \delta q \right) \dot{p} = \\
&= \oint_C - \left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \right) \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \left(\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \right) \left(-\frac{\partial A}{\partial q} \right) \delta q + \frac{\partial A}{\partial t} \delta q + \frac{\partial B}{\partial t} \delta p = \\
&= \oint_C \underbrace{\alpha \delta p + \beta \delta q}_{\delta f} = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial q} \\
&\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial q} = -z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}, & z = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} = -z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \Leftrightarrow -\frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \cancel{z \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}} + \frac{\partial^2 A}{\partial p \partial t} = -\frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \cancel{z \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}} + \frac{\partial^2 B}{\partial q \partial t} \\
&-\frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad \forall H \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow z = c = const \\
&\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = c \\
&\frac{\partial}{\partial p} (A - cp) = \frac{\partial B}{\partial q} \Leftrightarrow (A - cp) \delta q + B \delta p = 0 \\
&A \delta p + B \delta p = cp \delta q \Rightarrow I = cI_{\text{п}}
\end{aligned}$$

Определение. $I_{\text{пк}} = \oint (p, \delta q) - H \delta t$ — интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

Утверждение. $I_{\text{пк}} = const$.

Доказательство. РИСУНОК

$$C : \tau(q, p, t) = const$$

$$q_{n+1} = t$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$q' = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dH}{dp} \eta$$

$$\eta(q, p, q_{n+1}) = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$p' = \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} \eta$$

$$p_{n+1} = -H(q, p, t) \quad q'_{n+1} = \frac{dt}{d\tau} = \eta$$

$$\tilde{H} = \eta(H + p_{n+1}) \quad p'_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} \eta = -\frac{\partial H}{\partial t} \eta$$

Докажем, что \tilde{H} — новый гамильтониан.

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial p} = \eta \frac{\partial H}{\partial p} = q'$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} = \frac{\partial \eta}{\partial q} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial q} = \eta \frac{\partial H}{\partial q} = -p'$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = \eta = q'_{n+1}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_{n+1}} = \frac{\partial \eta}{\partial q_{n+1}} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial H}{\partial t} = -p'_{n+1}$$

$$I = \oint_C (\tilde{p}, \delta \tilde{q}) - \text{инвариант} \Rightarrow I_{\text{пк}} = \oint (p, \delta q) - H dt$$

$$I = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = V$$

Лекция 10 от 11.04.2018

2.6 Теорема Лиувилля

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (1)$$

Определение.

$$V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

— фазовый объем.

Определение. $\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x} = \bar{x}(t, \bar{x}_0)$ — фазовый поток системы (1).

Теорема. Если $\operatorname{div} f = 0$, то $V = \text{const}$.

Доказательство.

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{f}(\bar{x}_0) + O_2(t)$$

$$V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int \left| \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} \right| dx_{10} \dots dx_{n0}$$

$$\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = \det \left(E + t \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} + O_2 \right) = 1 + t \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} \right) + O_2$$

$$\dot{V}|_{t=0} = \int \dots \int \left(0 + \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} \right) + O_2 \right) dx_{10} \dots dx_{n0} \quad \left| \begin{array}{cc} & \overbrace{t \cdot (*)}^{O_2} \\ 1 + t \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} & \\ t \cdot (-*) & 1 + t \frac{\partial f_2}{\partial x_{20}} \end{array} \right|$$

$$\operatorname{tr} \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=0} = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{f} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=t_*} = 0, \forall t_* \Rightarrow V = \text{const}$$

■

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} & \bar{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} & \bar{f}_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \bar{f}_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \Rightarrow V_h = \text{const}$$

Замечание. Такие преобразования фазов. пот. сохраняют V .

2.7 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Теорема. Если на любой трубке траектории системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{q} = Q(q, p, t) \\ \dot{p} = P(q, p, t) \end{cases} \quad (*)$$

$I_n = \oint_{C: t=\text{const}} (p, \delta q)$ сохраняется, то данная система гамильтонова.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I_{\Pi} &= \oint_{C:t=\text{const}} (\dot{p}, \delta q) + (p, \delta \dot{q}) = \oint_{C:t=\text{const}} \delta(p, \dot{q}) - (\delta p, \dot{q}) + (\dot{p}, \delta q) \stackrel{(*)}{=} \\
 &= \oint_C (P, \delta q) - (Q, \delta p) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow \exists H : (P, \delta q) - (Q, \delta p) = -\delta H = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}, \delta p\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \delta q\right) \\
 Q &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial H}{\partial q}
 \end{aligned}$$

■

Теорема. Если на любой трубке прямых путей системы (*) $I_{\Pi} = \oint_C (p, dq) - H dt$, то система гамильтонова с гамильтонианом H .

Доказательство. Возьмем C_1 , на котором $dt = 0$ (изохроны).

$$\begin{aligned}
 \oint_C (p, dq) - H dt &= \oint_{C_1} (p, dt) - \text{инвариант} \Rightarrow \text{по предыдущей теореме } \exists H(q, p, t) : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow I_{\Pi}^* &= \oint_C (p, dq) - H^* dt = \oint_{C_1} (p, dq) \\
 I_{\Pi} - I_{\Pi}^* &= \oint_C (H^* - H) dt = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (H^* - H) dt = dF = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, dq\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, dp\right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\
 \frac{\partial F}{\partial q} &= \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H^* - H \\
 \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} &\Rightarrow \text{система (*) гамильтонова с гамильтонианом } H.
 \end{aligned}$$

■

2.8 Канонические преобразования

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ p = p(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \end{cases}$$

$$H = H(q, p, t) \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 \dot{q}|_{(1)} &= \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) \Big|_{(1)} = Q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \stackrel{?}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\
 \dot{p}|_{(1)} &= \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) \Big|_{(1)} = P(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \stackrel{?}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad \begin{cases} \tilde{q} = p^2 \\ \tilde{p} = q \end{cases} \quad \begin{cases} q = \tilde{p} \\ p = \pm \sqrt{\tilde{q}} \end{cases} \\
 \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q \end{cases} &\quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = 2p\dot{p} = -2pq = \mp 2\tilde{p}\sqrt{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} = \dot{q} = \pm \sqrt{\tilde{q}} \end{cases} \quad \begin{cases} \stackrel{?}{=} Q = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \stackrel{?}{=} P = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \\
 \frac{\partial Q}{\partial \tilde{q}} = \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}} &\quad \mp \tilde{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \neq 0 \Rightarrow \text{система не гамильтонова.}
 \end{aligned}$$

Определение. Неособенное (т.е. обр.) преобразование вида (2) называется каноническим, если оно любую гамильтонову систему превращает в гамильтонову систему.

Теорема (Критерий канонического преобразования). Преобразование (2) каноническое $\Leftrightarrow \exists c \neq 0, F(q, p, t)$:

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = c((p, dq) - Hdt) - dF$$

Доказательство. \Rightarrow РИСУНОК

$$C \xrightarrow{(2)} \tilde{C}$$

$$\oint_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint_{\tilde{C}: t=const} (\tilde{p}, \delta\tilde{q}), \quad \begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{p}(q, p, t) \\ \tilde{q} &= \tilde{q}(q, p, t) \end{aligned}$$

$$\oint_C (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint_{C_t} \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \delta p \right) = \oint_{C_t} (A, \delta q) - (B, \delta p) \quad \text{т. Ли-Хуанчжун}$$

$$= c \oint_{C_t} (p, \delta q) = \left(\oint_C (p, dq) - Hdt \right) c$$

$$\oint_C \left((\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt - c[(p, dq) - Hdt] \right) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = c((p, dq) - Hdt) - dF$$

\Leftarrow Проинтегрируем равенство

$$\oint_C (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = c \oint_C (p, dq) - Hdt - \underbrace{\oint_C df}_0 = I$$

$$\oint_C (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt = \oint_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt - \text{инвариант, т.к. } I - \text{инвариант.}$$

По второй обратной теореме система гамильтонова с гамильтонианом \tilde{H} .

Определение. $c = const \neq 0$ — валентность преобразования, $F(q, p, t)$ — производящая функция.

Лекция 11 от 18.04.2018

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases}$$

Теорема. (2) канонично тогда, и только тогда, когда $\exists c \neq 0, F(q, p, t)$:

$$c((p, dq) - Hdt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF \quad (3)$$

Определение. Если $c = 1$, преобразование унивалентно.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, dq \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, dp \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt = \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$dq = \delta q$$

$$d\tilde{q} = \delta\tilde{q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} dt$$

$$(3) \Rightarrow c((p, \delta q) - Hdt) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) dt - \tilde{H}dt + \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -cH = \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) - \tilde{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \delta F \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{H} = cH + \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Следствие. Преобразование (2) канонично тогда, и только тогда, когда $\exists c \neq 0$, F :

$$c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta \tilde{q}) + \delta F \quad (3')$$

Следствие. $\tilde{H} = cH + \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$ — правило преобразований Гамильтона

Рассмотрим $z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$

$$(1) \Leftrightarrow \dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

Определение. J — симплектическая единица.

$$J^T = J^{-1} = -J; \quad J^2 = -E_{2n}; \quad \det J = 1$$

Пусть $\tilde{z} = \tilde{z}(z, q)$

$$M = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial p_n} & \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$\det M \neq 0$$

$$I.(3') \quad c(p, \delta q) = \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \delta p\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \delta q\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \delta p\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} = c p_i - \left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = -\left(\tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right), \quad j = 1, \dots, n$$

Так как предполагаем, что $F \in C^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} &= \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow 0 - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right) - \left(\tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_j \partial q_i}\right) = -\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right) - \left(\tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial q_j}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_i} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_i}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} &= \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow c \delta_{ij} - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}\right) - \left(\tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial p_j \partial q_i}\right) = -\left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}\right) - \left(\tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial p_j}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_j}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}\right) = c \delta_{ij} \quad (6) \end{aligned}$$

$$II. \quad M^T J M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$(M^T J M)_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\}$$

$$(M^T J M)_{i,n+j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\}$$

$$(M^T J M)_{n+i,j} = \{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\}$$

$$(M^T J M)_{n+i,n+j} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}$$

Утверждение. $M^T J M = cJ$, $c \neq 0 \Leftrightarrow M J M^T = cJ$, $c \neq 0$

Доказательство.

$$J = c (M^T)^{-1} J M^{-1} = c (M J^{-1} M^T)^{-1}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{c} M J^{-1} M^T \Rightarrow M J M^T = cJ$$

Теорема. Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда $\exists c \neq 0 : M J M^T = cJ$.

Доказательство.

$$I. (3') \Leftrightarrow (4), (5), (6)$$

$$II. (M J M^T)_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j} \right) = 0 \Leftrightarrow (4)$$

$$(M J M^T)_{i,n+j} = \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j} \right) = c \delta_{ij} \Leftrightarrow (6)$$

$$(M J M^T)_{n+i,j} = \dots = -c \delta_{ij}$$

$$(M J M^T)_{n+i,n+j} = 0 \Leftrightarrow (5)$$

Теорема. Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда $\exists c \neq 0$:

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = c \delta_{ij}$$

Доказательство.

$$M J M^T = cJ \Leftrightarrow M^T J M = cJ \Leftrightarrow \dots$$

Определение. Если $M^T J M = J$, то M — симплектическая. Если $M^T J M = cJ$, $c \neq 0$, то M — обобщенно симплектическая.

Замечание. $(\det M)^2 = \det(M^T J M) = \det(cJ) = c^{2n}$, $\det M \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$.

Пример. $\tilde{q} = q$, $\tilde{p} = p \Leftrightarrow M = E \Rightarrow$ преобразование канонично (унивалентно).

Утверждение. Если M — обобщенная симплектическая, то M^{-1} обобщенная симплектическая (обратное преобразование каноническое).

Доказательство.

$$(M^{-1})^T J M^{-1} = - (M J M^T)^{-1} = cJ \Leftrightarrow M J M^T = c'J, c = \frac{1}{c'}$$

Утверждение. Композиция канонических преобразований канонична.

Доказательство.

$$z \rightarrow z_1 = z_1(z, t), M_1 = \frac{\partial z_1}{\partial z}, M_1^T J M_1 = c_1 J$$

$$z_1 \rightarrow z_2 = z_2(z_1, t), M_2 = \frac{\partial z_2}{\partial z_1}, M_2^T J M_2 = c_2 J$$

$$\tilde{z} = z_2(z_1(z, t), t)$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = M_2 M_1$$

$$(M_2 M_1)^T J (M_2 M_1) = M_1^T \underbrace{M_2^T J M_2}_{c_2 J} M_1 = c_2 M_1^T J M_1 = c_1 c_2 J = cJ, \quad c = c_1 c_2 \neq 0$$

■

Следствие. Множество симплических матриц (множество канонических преобразований) образуют группу.

Пример.

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z}, \quad z = z(z_0, t)$$

$$M = \frac{\partial z}{\partial z_0}$$

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \right) = \frac{\partial}{\partial z_0} \left(J \frac{\partial H}{\partial z} \right) = J \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial z_0} = J \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} M$$

$$(\dot{M}^T) = M^T \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} J^T$$

$$(M^T \dot{J} M) = 0 \Rightarrow M^T J M = \text{const} = 1, \quad \text{т.к.} \quad M|_{t=0} = \frac{\partial z_0}{\partial z_0} = 1$$

Следствие. Определитель $\det M = 1 \Rightarrow$ фазовый поток сохраняется ($V = \text{const}$).

Лекция 12 от 25.04.2018

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases} \quad (2.1) \quad (2.2) \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0$$

$$(3) \quad c((p, dq) - H dt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt + dF(q, p, t)$$

2.9 Свободные канонические преобразования

Определение. Преобразование вида (2) — свободное, если $\det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0$.

$$(2.1), \det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q, \tilde{q}, t)$$

$$(2.2), p = p(q, \tilde{q}, t) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q, \tilde{q}, t)$$

$$F(q, p(q, \tilde{q}, t), t) = S(q, \tilde{q}, t)$$

$$(3) \Rightarrow c((p, dq) - H dt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt + \left(\frac{\partial S}{\partial q}, dq \right) + \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}, d\tilde{q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} \neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q} \partial q} \neq 0 \quad (4)$$

Утверждение. Свободное преобразование канонично тогда, и только тогда, когда $\exists \Phi, S(q, \tilde{q}, t), c \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \end{cases}.$$

Тогда, если преобразование канонично, гамильтонова система в новых переменных имеет вид:

$$\tilde{H} = \left(cH(q, p, t) + \frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial t} \right) \bigg|_{\substack{q = q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ p = p(\tilde{q}, \tilde{p}, t)}}$$

Замечание. Функция $S(q, \tilde{q}, t)$, удовлетворяющая условию (4), однозначно определена преобразованием заданной валентности.

Доказательство.

$$\frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial q} = cp, \det \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q} \partial q} \neq 0 \Rightarrow \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t)$$

$$\tilde{p} = -\frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial \tilde{q}}, \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t)$$

■

Пример.

$$\tilde{q} = q, \tilde{p} = p$$

$$\det \frac{\partial q^2}{\partial p} = 0 \text{ — не свободное.}$$

Замечание. Вместо (q, \tilde{q}, t) можно рассматривать (q, \tilde{p}, t) , (\tilde{q}, p, t) , (p, \tilde{p}, t) .

Рассмотрим, например, (q, \tilde{p}, t) :

$$(2) \text{ — полусвободное, если } \det \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t), \det \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q, \tilde{p}, t), \tilde{q} = \tilde{q}(q, \tilde{p}, t)$$

$$c(p, dq) - cHdt = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF$$

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) = d(\tilde{p}, \tilde{q}) - (\tilde{q}, d\tilde{p}), F(q, p, t) + (\tilde{p}, \tilde{q}) = S_1(q, \tilde{p}, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(p, dq) - cHdt = -(\tilde{q}, d\tilde{p}) - \tilde{H}dt + \left(\frac{\partial S}{\partial q}, dq \right) + \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}, d\tilde{p} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{cases}$$

Пример.

$$p = \tilde{p}, q = \tilde{q}, c = 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1(q, \tilde{p}, t)}{\partial q} = \tilde{p} \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = q \end{cases} \quad S_1 = (q, \tilde{p})$$

2.10 Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби

$$\tilde{H} = 0 \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \tilde{q} = \alpha = const \\ \tilde{p} = \beta = const \end{matrix}$$

Будем искать унивалентное исходное преобразование, переводящее гамильтониан в ноль.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (*)$$

Соответствует системе с гамильтонианом $H(q, p, t)$.

Пример (Математический маятник).

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

$$\text{Т.к. } L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - \Pi(q), \text{ то } H = \frac{1}{2}(A^{-1}(q)\dot{p}, \dot{p}) + \Pi(q)$$

$$H = \frac{p\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - mgl \cos \varphi = 0$$

Определение. Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется функция $S(q, \alpha, t)$ такая, что

1. удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби,

$$2. \det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial q} \neq 0.$$

$\Rightarrow S$ — полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Теорема (Гамильтона-Якоби). Если известен полный интеграл Гамильтона-Якоби, то общее решение соответствующих уравнений Гамильтона определяется из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta \Rightarrow \begin{cases} q = q(\alpha, \beta, t) \\ p = p(\alpha, \beta, t) \end{cases}.$$

Замечание. Можно заменить β на $-\beta$.

Пример (Движение точки по прямой).

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad H = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad S = S(x, \alpha, t)$$

$$S = \frac{m(x+\alpha)^2}{2t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m(x+\alpha)^2}{2t^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial x} = \frac{m}{t} \neq 0$$

S — полный интеграл уравнения (*)

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \\ -\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} p_x = -\beta \\ x = -\frac{\beta}{m}t - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} p_x = mx_0^2 \\ x = \dot{x}_0 t + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x(0) = m\dot{x}_0 = -\beta \\ x(0) = x_0 = -\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -m\dot{x}_0 \\ \alpha = -x_0 \end{cases}$$

$$S = S_1(x, \alpha) + S_2(t, \alpha)$$

$$S = -\alpha t + S_1(x, \alpha) \rightarrow (*)$$

$$-\alpha + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} = \pm \sqrt{2m\alpha} \quad S_1 = \pm x \sqrt{2m\alpha}$$

$$\text{Тогда } S = -\alpha t \pm x \sqrt{2m\alpha}$$

«+» в области $p_x \geq 0$, «-» в области $p_x < 0$

Рассмотрим натуральную систему с одной степенью свободы.

Пример.

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \Pi(q)$$

$$H = \frac{p^2}{2a(q)} + \Pi(q)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2a(q)} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \Pi(q) = 0$$

$$\begin{aligned}
S &= -h(\alpha)t + S_1(q, \alpha) : \\
-h(\alpha) + \frac{1}{2a(q)} \left(\frac{\partial S_1}{\partial q} \right)^2 + \Pi(q) &= 0 \\
\frac{\partial S_1}{\partial q} &= \pm \sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))} \\
S &= -h(\alpha)t \pm \int_{q_0(\alpha)}^q \sqrt{2a(\xi)(h(\alpha) - \Pi(\xi))} d\xi \\
\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} &\neq 0 \\
p = \frac{\partial S}{\partial q} &= \pm \sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))} \\
-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -\frac{dh}{d\alpha}t \pm \int_{q_0(\alpha)}^{q_0} \frac{d\xi \sqrt{a(\xi)}}{\sqrt{(h(\alpha) - \Pi(\xi))}} \mp \underbrace{\frac{dq_0}{d\alpha}}_0 \underbrace{\sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}}_0
\end{aligned}$$

2.11 Метод разделения переменных

Теорема (об отделении времени). Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $S(q, \alpha, t)$ — полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \Leftrightarrow S = -h(\alpha)t + S_1(q, \alpha),$$

где S_1 — полный интеграл уравнения $H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha)$ (т.е. $\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q, \partial \alpha} \neq 0$).

Доказательство.

$$\begin{aligned}
S &= S_0(t, \alpha) + S_1(q, \alpha) \\
\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial S_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_1}{\partial q} \\
-\frac{dS_0(t, \alpha)}{dt} &\equiv H\left(q, \frac{\partial S_1(q, \alpha)}{\partial q}\right) \equiv h(\alpha) \\
\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial t} = -h(\alpha) \Leftrightarrow S_0 = -h(\alpha)t + C(\alpha), & C(\alpha) = \text{const} \\ H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha) \end{cases} \\
\frac{dS_0}{d\alpha} &= -\frac{dh}{d\alpha}t + \frac{dC}{d\alpha} \neq 0, \quad \frac{dh}{d\alpha} \neq 0 \\
\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial \alpha} &\neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0
\end{aligned}$$

■