

Лекции по аналитической механике. Весенний семестр.

Муницына Мария Александровна

30 мая 2018 г.

Набор и рисунки: Александр Валентинов
За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю
Об ошибках писать: <https://vk.com/valentiay>

Горизонтальные черты обозначают границы между лекциями.

Содержание

1	Равновесие динамических сил	2
1.1	Общая теория статики	2
1.2	Равновесие голономных систем	2
1.3	Элементы теории устойчивости	4
1.4	Прямой метод Ляпунова	5
1.5	I-й метод Ляпунова	6
1.6	Равновесие натуральных систем	9
1.7	Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия	10
1.8	Элементы теории бифуркации	11
2	Малые Колебания	11
2.1	Общие сведения	11
2.2	Вынужденные колебания в линейных системах	13
3	Гамильтонова механика	15
3.1	Преобразования Лежандра	15
3.2	Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона	17
3.3	Скобки Пуассона	18

1 Равновесие динамических сил

$$\bar{r}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \bar{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots)^T$$

Определение. r_0 — положение равновесия, если

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0, \quad \dot{\bar{r}}(t_0) = 0 \Rightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}_0$$

Замечание. Положение равновесия зависит от системы отсчета.

1.1 Общая теория статики

$$\bar{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots)^T$$

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(\bar{r}, t) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, k \Leftrightarrow \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}} \dot{\bar{r}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \\ f_\beta(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0, \quad \beta = k+1, \dots, n \quad f_\beta = B(\bar{r}, t)\dot{\bar{r}} + \bar{\gamma} = 0 \end{aligned} \right\} \Phi \dot{\bar{r}} + \bar{\psi} = 0$$

$\delta \bar{r}$ — виртуальное перемещение, $\Phi \delta \bar{r} = 0$

$$\bar{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots)^T,$$

$$(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0 \text{ — условие идеальности связей} \quad (1)$$

Принцип Даламбера. Если наложенные на систему связи идеальны, то некоторые ее положения являются положениями равновесия, тогда, и только тогда, когда работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящем систему из этого положения, равна нулю.

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия} \Leftrightarrow (\bar{F}, \delta \bar{r}) = 0 \quad (\text{связи идеальны.})$$

Доказательство.

1. Принцип виртуальных перемещений: $\bar{r}(t)$ — движение системы $\Leftrightarrow (M\dot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) = 0$.
2. Принцип детерминированности.

■

1.2 Равновесие голономных систем

Голономная система:

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \text{ — обобщенные координаты.}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия, } \bar{r}_0 = \bar{r}(\bar{q}_0, t)$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$(\bar{F}, \delta \bar{r}) = (\bar{Q}, \delta \bar{q}), \quad \delta q_1, \dots, \delta q_n \text{ — независимы.}$$

$$(1) \Leftrightarrow \bar{Q}(\bar{q}_0, 0, t) \equiv 0$$

Система голономна, силы потенциальны:

$$\exists \Pi(\bar{q}, t) : \bar{Q} = -\text{grad } \Pi(\bar{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$$

$$\bar{q}_0 \text{ — критическая точка } \Pi(\bar{q}, t)$$

Натуральная Лагранжева система (связи идеальны, голономны, стационарны, силы потенциальны и $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$):

$$T = T_2 = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi = \Pi(\bar{q})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + \Pi = \text{const} \right)$$

Определение. \bar{q}_0 — положение равновесия, если $\bar{q}(t) \equiv \bar{q}_0$ — решение уравнений Лагранжа.

Утверждение. \bar{q}_0 — положение равновесия натуральной системы, тогда, и только тогда, когда $\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$.

Доказательство.

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} \right) \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 - \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial \bar{q}} \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0$$

■

Пример (Математический маятник).

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \Pi = -mgl \cos \varphi$$

1) Положение равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

2) Уравнение движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

3) Интеграл энергии:

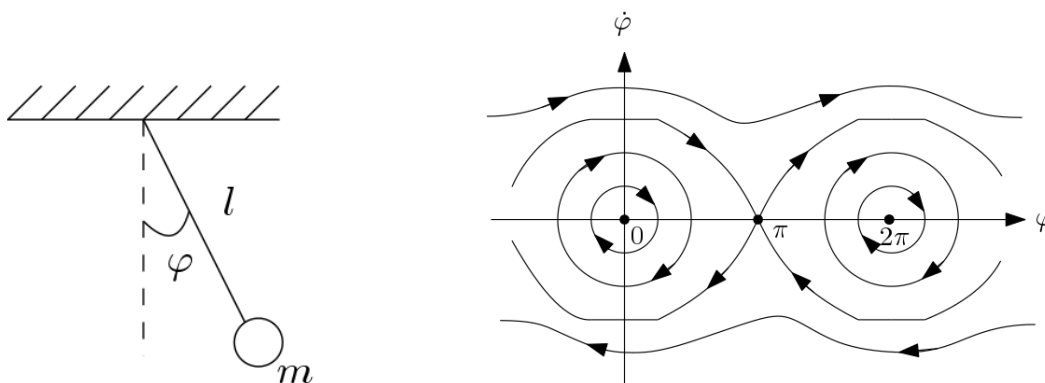
$$T + \Pi = h = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} mgl^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = h$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2} (h - \Pi(\varphi))$$

$$\dot{\varphi} = \pm \alpha \sqrt{h - \Pi(\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} = \text{const}$$

$(\varphi, \dot{\varphi})$ — фазовая плоскость.



$$1) h < -mgl \quad \emptyset$$

$$2) h = -mgl, \quad \varphi = 0, \varphi = 2\pi \text{ — равновесие}$$

$$3) -mgl < h < mgl \text{ — колебания}$$

$$4) h = mgl \text{ — либо равновесие } \varphi = \pi, \text{ либо движение к } \varphi = \pi$$

$$5) h > mgl \text{ — вращение}$$

Пример (Маятник во вращающейся плоскости).

$$n = 1, q = \varphi$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{v}^2 = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi)$$

$$\Pi = -mgr \cos \varphi$$

$$L = T - \Pi, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 \underbrace{-T_0 + \Pi}_{\Pi^*} = const$$

$$\Pi^* = -mgr \cos \varphi - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi - \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin 2\varphi = mr \sin \varphi (g - r\omega^2 \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow$$

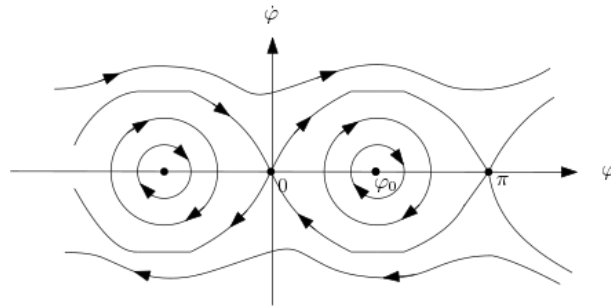
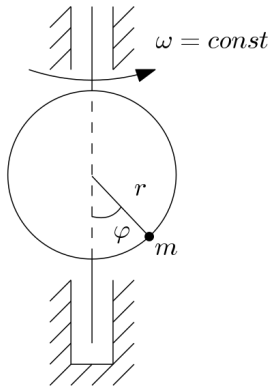
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm \arccos \frac{g}{r\omega^2} = \varphi_0, \omega^2 > \frac{g}{r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} = mgr \cos \varphi - mr^2 \omega^2 \cos 2\varphi$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mr(g - r\omega^2) \geq 0 \quad \omega^2 \leq \frac{g}{r}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -mr(g + r\omega^2) < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = mgr \frac{g}{r\omega^2} - mr^2 \omega^2 \left(2 \frac{g^2}{r^2 \omega^4} - 1 \right) = mr\omega^2 \left(r - \frac{g^2}{2\omega^4} \right) < 0$$



1.3 Элементы теории устойчивости

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{f} \in C^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t, \bar{x}(0)) \text{ — начальные условия.} \quad (2)$$

Определение. $\bar{x} = \bar{x}_0$ — положение равновесия (2), если $\bar{f}(\bar{x}_0) = 0$ ($\bar{x}(t, \bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0$) $\bar{x}_0 = 0$ без ограничения общности.

Определение. Равновесие (2) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что любое решение с начальными условиями в δ -окрестности равновесия существует при всех $t > 0$ и находится в ε -окрестности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |\bar{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t)| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

Определение. $\bar{x} = 0$ — неустойчивое, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \bar{x}(0), t_1 > 0 : |\bar{x}(0)| < \delta |\bar{x}(t_1, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

Определение. $\bar{x} = 0$ — устойчиво асимптотически, если

1. $\bar{x} = 0$ — устойчиво,

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t, \bar{x}(0)) = 0.$

1.4 Прямой метод Ляпунова

$V(x)$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} f$$

Определение. \dot{V} — производная функции V по времени вдоль решения (2).

Теорема 1 (Ляпунова (об устойчивости)). Если существует гладкая функция $V(x)$ определенная в ε -окрестности равновесия $x = 0$ системы (2), удовлетворяющая следующим условиям:

1.

$$V(0) = 0, \quad \forall x \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{v} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

то $x = 0$ — устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

$$1) \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \min V(\bar{x}), |\bar{x}| = \varepsilon$$

$$2) V \in C^1 \Rightarrow \exists \delta : V(\bar{x}) < \sigma \quad \forall \bar{x} : |\bar{x}| < \delta$$

$$3) \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta \quad V(\bar{x}(t)) < \sigma \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon \quad (\bar{x}_0(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_0))$$

■

Замечание.

$$1) v(0) = 0, v(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V — положительно определенная функция в 0$$

$$2) v(0) = 0, v(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V — отрицательно определенная функция в 0$$

$$3) v(0) = 0, v(\bar{x}) \geq (\leq) 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V — знакопостоянная функция в 0$$

Пример.

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 — положительно определена в $x_1 = x_2 = 0$$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 — не является положительно определенной в $x_1 = x_2 = 0$$$

Замечание. Если в условии теоремы Ляпунова в условии 2) поставить строгое неравенство, устойчивость станет асимптотической.

Теорема 2. Барбашина-Красовского Если $\exists V(x) \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, то

1.

$$V(0) = 0 \quad V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{v} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

3. множество $\{\bar{x} : \dot{v}(\bar{x}) = 0\}$ не содержит целиком решения системы (2), кроме равновесия $\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ — установившееся асимптотически.

Замечание. Если $\dot{V} < 0$, то $\{x : \dot{V} = 0\} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = 0$ установившееся, но не асимптотическое, т.е.

$$I) \exists \bar{x}_0(t) \quad |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon, \quad \bar{x}_0 \not\rightarrow 0, \text{ т.е.}$$

$$\exists \delta, \{t_k\}, \quad t_{k+1} > t_k \quad \delta < |\bar{x}_0(t_k)| < \varepsilon$$

$$II) \exists \{k_s\} \quad \bar{x}_s = \bar{x}_0(t_{k_s}) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \bar{x}_*$$

$$|\bar{x}_s| > \delta \Rightarrow |\bar{x}_*| > \frac{\delta}{2}$$

$$III) V(\bar{x}_0(t))$$

$$1), 2) \Rightarrow \exists V = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_0(t))$$

$$v \in C^1 \Rightarrow v = V(\bar{x}_*)$$

$$\boxed{\forall t \ V(\bar{x}_0(t)) \geq v} \quad (3)$$

(4)

IV) Рассмотрим $\bar{x}_s(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_s) = \bar{x}_0(t + t_{k_s}, \bar{x}_0)$

V) $\bar{x}_*(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_*)$

$$v(\bar{x}_*) = v, \ 2), \ 3) \Rightarrow \exists t^* : \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{v_*} < v$$

VI) v — непрерывная б.т. $\bar{x}_*(t_*)$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \ |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_1 \Rightarrow |V(\bar{x}) - V(\bar{x}_*(t_*))| < \varepsilon_1$$

Решения (2) непрерывно и зависит от начальных условий ($t < \infty$)

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \ |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_2 \Rightarrow |\bar{x}(t_*) - \bar{x}_*(t_*)| < \varepsilon_2$$

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \ \exists s : |\bar{x}_s - \bar{x}_*| < \varepsilon_3 \ \forall s > S$$

$$\varepsilon_1 = v - v_* > 0 \rightarrow S : \left| V(\bar{x}_s(t_*)) - \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{v_*} \right| < v - v_*$$

$V(\bar{x}_s(t_*)) - v_* < v - v_*$ — противоречие с (3)

Теорема 3 (Красовского). $\exists V \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ и область Ω :

1. $V(0) = 0, \ V(\bar{x}) > 0 \ \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
 $\bar{x} = 0 \in \partial\Omega, \ V(\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in \partial\Omega$
2. $\dot{v} \leq 0 \ \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
3. $\{\bar{x} : \dot{v} = 0\} \Rightarrow \bar{x} = 0$ — неустойчивое.

Доказательство.

$\exists \bar{x} = 0$ — устойчивое, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon$$

$$1), 2) \Rightarrow \exists \delta : |\bar{x}_0(t)| > 0 \Rightarrow \exists \{x_s\} \rightarrow \bar{x}_*,$$

$$V(\bar{x}_s(t)) \leq V(\bar{x}_*) = v$$

$\bar{x}_*(t), \ 3) \Rightarrow \exists t_* > 0 : (\bar{x}_*(t_*)) > v$ — противоречие как в предыдущей теореме

Замечание. $\dot{v} > 0$ — теорема Четаева.

Пример (Волчок Эйлера). *MISSING*

1.5 I-й метод Ляпунова

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \quad A = \text{const} \quad \det(A - \lambda E) = 0 \quad (5)$$

Утверждение. Если все корни характеристического многочлена линейной системы (5) имеет отрицательные вещественные части, то равновесие $\bar{x} = 0$ этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову:

$$\text{Re } \lambda_i < 0 \ \forall i \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — асимптотически устойчиво.}$$

Доказательство.

$$1) \ \lambda_i \in \mathbb{R}. \ \lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n C_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t}, \quad c_i = \text{const}, \quad \bar{u}_i = \text{const}$$

$\bar{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

1) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\bar{u}_i \neq \bar{u}_2$ — устойчивость.

2) λ_0 — корень кратности s :

$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 + \dots + C_s \bar{u}_s t^{s-1}) e^{-\lambda_0 t} \Rightarrow \bar{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

3) $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ — кратность 1

$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} + C_2 \bar{u}_2 e^{(\alpha_k - i\beta_k)t}) = + \dots + e^{\alpha_k t} (C'_1 \bar{u} \sin \beta_k t + C'_2 \bar{u} \cos \beta_k t) \Rightarrow$ устойчивость.

■

Утверждение. Если существует хотя бы 1 корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью, то равновесие $\bar{x} = 0$ неустойчиво:

$$\exists \lambda_k > 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — неустойчиво.}$$

Доказательство. Аналогично.

■

$$(*) \quad \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) \quad \bar{f}(0) = 0$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + O(\|\bar{x}\|^2) \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = \text{const}$$

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ — линеаризованная система

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Теорема 4 (Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то равновесие $\bar{x} = 0$ нелинейной системы асимптотически устойчиво, если же существует корень с положительной вещественной частью, то равновесие неустойчиво.

Замечание (Критический случай). Если нет $\lambda_k > 0$ $\lambda_k = 0^1$, то про систему ничего нельзя сказать

Пример.

$$C > A > B$$

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases} \quad \text{Линеаризованная:} \quad \begin{cases} A\dot{p} = 0 \\ B\dot{q} = (C - A)r\omega \\ C\dot{r} = (A - B)q\omega \end{cases}$$

$$\bar{x} = (p', q, r)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-B}{C}\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{BC} \omega^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm \sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}} \omega \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{x} = 0$ — неустойчиво, т.к. $\exists \lambda > 0$

(Из прошлой лекции (не успели) $V = BCqr$)

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Линеаризованная система:} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \lambda = \pm i \quad \begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ y = C_1 \cos t - C_2 \sin t \end{cases}$$

$$V = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \dot{V} = (\dot{x}x + \dot{y}y)|_{(**)} = \alpha x^4$$

¹Нечетко записано

$$\alpha < 0 : V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq 0 \quad \dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (**) |_{x \equiv 0} \quad \begin{cases} 0 = y + 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \quad - \text{устойчиво асимптотически.}$$

$$\alpha > 0 : \Omega = U_\varepsilon \setminus \{0\}$$

$$V(\bar{x}) > 0, \quad \dot{V}(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega$$

$$V(0) = 0, \quad V(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \partial\Omega(x=0)$$

$$\Rightarrow \text{неустойчивость, т.к. } \dot{V} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (6)$$

Пример.

$$n = 2 : a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0$$

$$a_1^2 \geq 4a_0 a_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$a_1^2 < 4a_0 a_2 : \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{a_0} < 0 \Rightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_i > 0, \quad i = 1, 2$$

Утверждение (Необходимое условие устойчивости). Если все корни (6) при $n > 2$ имеют отрицательные вещественные части, то коэффициенты этого уравнения положительны:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Rightarrow a_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Доказательство.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — действительные корни, $\lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, k$

$$\lambda = \alpha_i \pm \beta_i i \quad j = 1, \dots, m$$

$$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \alpha_1 - \beta_1 i) \cdot \dots \cdot (\lambda - \alpha_1 + \beta_1 i) \cdot \dots$$

$$= a_0(\lambda + |\lambda_1|) \cdot \dots \cdot (\lambda + |\lambda_k|)((\lambda + |\alpha_1|)^2 + \beta_1^2) \cdot \dots = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad a_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

■

Пример.

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

Критерий Рауса-Гурвица $\forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Leftrightarrow$ все главные диагональные миноры определены положительно

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \Delta_i > 0$$

Доказательство. Б/Д

■

Замечание.

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

1.6 Равновесие натуральных систем

Натуральная система:

$$L = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(\bar{q})$$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_0 \text{ — равновесие, } \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \right)$$

Определение. $\bar{q} = \bar{q}_0$ — установившееся равновесие положение равновесия натуральной системы, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel \bar{q}(0) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(0) \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \bar{q}(t) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(t) \parallel < \varepsilon \forall t > 0.$$

Теорема 5 (Лагранжа-Дирихле). Точка строго локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия этой системы:

Доказательство.

$$V = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0)$$

$$1) V|_{\bar{q}=\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}=0} = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0) > 0 \quad (A \text{ — положительно определенная})$$

$$\forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} : \delta > \parallel \dot{\bar{q}} \parallel + \parallel \bar{q} - \bar{q}_0 \parallel > 0$$

$$2) \dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{q}} = 0, \bar{q} = \bar{q}_0 \text{ — устойчиво.}$$

■

Пример.

$$\Pi = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ e^{-\frac{1}{|q|}} \cdot \cos \frac{1}{|q|}, & q \neq 0 \end{cases}$$

$$1) q = 0 \text{ — положение равновесия}$$

$$2) q = 0 \neq \min \Pi$$

$$3) T + \Pi = h = \text{const}$$

$$\Pi \leq h, x = 0 \text{ — устойчиво по Ляпунову (по отр.)}$$

$$\Pi(\bar{q}) = \Pi(\bar{q}_0) + \Pi^{(1)}(\bar{q}) + \Pi^{(2)}(\bar{q}) + \dots + \Pi^{(m)}(\bar{q})$$

$$\Pi^{(1)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0$$

$$\Pi^{(m)} \text{ — первая нетривиальная форма } \Pi$$

$\bar{q} = 0$ — положение равновесия

$$T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) \quad \Pi = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \dots = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \dots$$

$$\Pi^{(0)} = \Pi(0) = 0, \quad \Pi^{(1)} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) = 0$$

$$\Pi^{(m)} \text{ — первая нетривиальная форма } \Pi$$

Пример. 1. $\Pi(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{2}, \quad x = y = 0$ — устойчивое положение равновесия.

2.

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \Pi^{(2)} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \ddot{y} = 0 \quad y = ct + c_1$$

$x = y = 0$ — неустойчивое положение равновесия.

Теорема 6. Если T не имеет даже нестрогого минимума в окрестности некоторого положения равновесия натуральной системы, то равновесие неустойчиво.

Теорема 7.

$$m = 2, n = 1 : T = \frac{1}{2}a(q)q^2, \quad a(q) > 0$$

$$b = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0} < 0$$

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2 + O_3(q)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + a'_q \dot{q}^2 - \frac{1}{2}a'_q \cdot \dot{q}^2 + bq + O_2(q) =$$

$$= a(q) \cdot \ddot{q} + bq + O_2(q, \dot{q})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q = \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \dot{q} = -\frac{bq - O_2(q, \dot{q})}{a(0) + O_1(q)} = -\frac{bq}{a(0)} + \cancel{O_2(q, \dot{q})} \end{cases}$$

$$\bar{x} = (q, \dot{q})^T, \quad \dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a(0)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{b}{a(0)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{b}{a(0)} > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{b}{a(0)}}$$

$\operatorname{Re} \lambda_+ > 0 \Rightarrow q = 0$ — неустойчивое положение равновесия.

Замечание.

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}a(t)q^2 - \frac{1}{2}bq^2}_{L^*} + O_3(q, \dot{q})$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0}$$

C — положительно определена $\Rightarrow q = 0$ — устойчиво

$\det C = 0$ — ?

$\exists \Delta_i < 0$

1.7 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = Q^*$$

$$L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(q)$$

$$\dot{E} = (\overline{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \quad E = T + P$$

- Если $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) = 0$, то \bar{Q}^* — гироскопическая.
- Если $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \leq 0$, то \bar{Q}^* — диссипативная.
- Если $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) < 0$, то \bar{Q}^* обладает полной диссипацией.

Теорема 8 (Кельвина-Четаева 1). Если $q = 0$ — точка строгого локального минимума Π натуральной системы, то даже при добавлении в систему гироскопических и (или) диссипативных сил, она является устойчивым положением равновесия A . Если при этом диссипативные силы обладают полной диссипацией, то это равновесие устойчиво асимптотически.

Доказательство.

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(q)$$

$$q = 0 \text{ — строгий локальный минимум } \Pi(q) \Rightarrow V(0, 0) = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) > 0 \quad \forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} \text{ } 0 < \|q\|^2 + \|\dot{\bar{q}}\|^2 < \varepsilon$$

$$a) \dot{V} = (\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \leq 0 \Rightarrow q = 0 \text{ — устойчиво по теореме Ляпунова}$$

$$b) \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\bar{q}} = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ — устойчиво асимптотически по т. Барабашина-Красовского}$$

■

Теорема 9 (Кельвина-Четаева 2). Если в изолированном положении равновесия Π не имеет даже нестрогого минимума, а силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от направления гироскопических сил).

Доказательство.

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(0)$$

$$q = 0 \text{ — ... } \Rightarrow \Omega : \Pi(\bar{q}) < \Pi(0) \quad \forall q \in \Omega$$

$$\Pi(q) = \Pi(0) \quad \forall q \in \partial\Omega, \quad q = 0 \in \partial Q$$

$$V < 0, \dot{V} < 0 \quad \forall \{\bar{q}, \dot{\bar{q}}\} \in \Omega' = \{\bar{q}, \dot{\bar{q}} : q \in \Omega, \dot{\bar{q}} = 0\}$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\bar{q}} = 0$$

$$\Rightarrow q = 0 \text{ — неустойчиво по теореме Красовского.}$$

■

Пример. MISSING

1.8 Элементы теории бифуркации

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \alpha), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Кривые равновесий } \bar{x} = \bar{x}(\alpha) : \bar{f}(\bar{x}(\alpha), \alpha) = 0$$

$$\text{Точка бифуркации } (\bar{x}_*, \alpha_*) : \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_*(\alpha_*), \alpha=\alpha_*} = 0$$

MISSING

2 Малые Колебания

2.1 Общие сведения

$$T = \frac{1}{2}(\Phi(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi(\bar{q}), \quad \bar{q} = 0 \text{ — положение равновесия}$$

$$\Pi(\bar{q}) = \underbrace{\Pi(0)}_0 + \left(\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + O_3(\bar{q})$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0} = c = const, \quad C = C^T$$

$$T = \frac{1}{2} ((\Phi(0) + O(\|\bar{q}\|)) \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

$$A = \Phi(0) = \text{const}, \quad A = A^T$$

$$L = \tilde{L} + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), \quad \tilde{L} = \frac{1}{2} (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \frac{1}{2} (C\bar{q}, \bar{q})$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} = \frac{1}{2} \underbrace{(A\dot{\bar{q}} + A^T \dot{\bar{q}})}_{\text{Из 3 семестра}} = A\dot{\bar{q}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = -C\bar{q} - \text{аналогично}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = 0}$$

$$A \text{ положительно определена} \xrightarrow{\text{Из линейной алгебры}} \exists \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n : A \rightarrow E, C \rightarrow k$$

$$\bar{q} = \sum \xi_i \bar{e}_i = u\bar{\xi}, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2} (E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2} (k\bar{\xi}, \bar{\xi}),$$

$$k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\bar{\xi}} + k\bar{\xi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

Пусть $k_i = \omega_i^2 > 0$

k и C — положительно определены, $\bar{q} = 0 (\bar{\xi} = 0)$ — устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле

$$\ddot{\xi}_i + k_i \xi_i = 0 \quad \lambda^2 + k_i, \quad \lambda^2 + \omega_i^2 = 0 \quad \lambda = \pm \omega_i i$$

$$\xi_i = C_{1i} \sin \omega_i t + C_{2i} \cos \omega_i t = \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Утверждение.

$$\det(A\omega_C^2) = 0$$

$$\begin{cases} A(\omega_i^2 - C)e_i = 0 \\ (A\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1 \end{cases}, i = 1, \dots, n$$

Доказательство.

$$2\tilde{\Pi} = (C\bar{q}, \bar{q}) = (CU\bar{\xi}, U\bar{\xi}) = (U^T CU\bar{\xi}, \bar{\xi}) = (k\bar{\xi}, \bar{\xi}) \Leftrightarrow k = U^T CU$$

$$2\tilde{T} = (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = (U^T AU\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) = (E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = U^T AU (\Leftrightarrow (A\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij})$$

$$k - k_i E = \text{diag}(k_1 - k_i, \dots, k_{i-1} - k_i, 0, \dots)$$

$$\det(k - k_i E) = 0 \Leftrightarrow \det(U^T CU - k_i U^T AU) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det U^T \det(C - Ak_i) \det U = 0 \xleftarrow{\det U \neq 0} \det(Ak_i - C) = 0, \det(A\omega_i^2 - C) = 0$$

$$2)(k - k_i E)(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots)^T$$

$$(U^T C - k_i U^T A) \underbrace{U(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T}_{\bar{e}_i} \quad C\bar{q} = \sum \bar{e}_i \xi_i$$

$$U^T (C - \omega_i^2 A) \bar{e}_i = 0 \Leftrightarrow (A\omega_i - C) \bar{e}_i = 0$$

■

Определение. $\det(A\omega^2 - C) = 0$ — вековое уравнение (уравнение частот). ω_i — частоты малых колебаний (собственные частоты).

Следствие. Частоты малых колебаний не зависят от выбора обобщенных координат.

Определение. Если $(A\omega_i^2 - C)\bar{U}_i = 0$, то \bar{U}_i — амплитудный вектор, соответствующий частоте ω_i .

Замечание. $\bar{U}_i = \beta_i \bar{e}_i$, $\beta_i = \text{const}$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \bar{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Следствие. 1. Ортогональность

$$(A\bar{U}_i, \bar{U}_j) = 0, i \neq j$$

2. Линейная независимость

$$\begin{aligned} C_1 U_1 + \dots + C_n U_n &= 0 \\ 0 + \dots + (A\bar{U}_i, C_i \bar{U}_i) + \dots + 0 &= 0 \Leftrightarrow C : (A\bar{U}_i, \bar{U}_i) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0 \\ (A\bar{U}, \bar{U}) &= 0 \Leftrightarrow \bar{U} = 0 \end{aligned}$$

Замечание. $\tilde{\alpha}, \varphi$ — определяются начальными условиями.

$$I. \tilde{\alpha}_i = 0, \quad \forall i \neq m : \bar{q} = \tilde{\alpha}_m \bar{U}_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$$

главные (нормальные) колебания

Ia. Кратные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$k = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots)$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$(A\omega^2 - C)\bar{U} = 0$$

$$U = C_1 \bar{U}_1 + C_2 \bar{U}_2$$

II. $\exists k_m = 0$

$$\ddot{\xi}_m = 0, \quad \xi_m = C_1 t + C_2$$

III. $\exists k_m < 0, \bar{q} = 0 (\xi = 0)$ — неустойчиво.

$$\ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$$

$$\lambda^2 = -k_m > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-k_m}$$

Теорема 10. Если $\Pi_{(0)}^{(2)}$ не имеет даже нестрогий минимум, то $\bar{q} = 0$ неустойчиво.

Доказательство.

$n = 1$ уже доказано

$n > 1 \quad \bar{q} \rightarrow \bar{\xi}$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

$$\exists k_m < 0 : \ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0 \text{ —}$$

■

2.2 Вынужденные колебания в линейных системах

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

$$x = x_{\text{одн}} + x_r$$

$$x_{\text{одн}} = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

$$\begin{aligned}
1) \quad \omega \neq \omega_0 : x_r &= \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad / \quad \omega_0^2 \\
\dot{x}_r &= \alpha \omega \cos \omega t - \beta \omega \sin \omega t \quad / \quad 0 \\
\ddot{x}_r &= -\alpha \omega^2 \sin \omega t - \beta \omega^2 \cos \omega t \quad / \quad 1 \\
\begin{cases} \alpha \omega_0^2 - \alpha \omega^2 = 0 \\ \beta \omega_0^2 - \beta \omega^2 = f \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} \\
x &= C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t
\end{aligned}$$

РИСУНОК биений

$$\begin{aligned}
2) \quad \omega = \omega_0 \quad x_r &= \alpha t \sin \omega_0 t \\
\dot{x}_r &= \alpha \sin \omega_0 t + \alpha \omega_0 t \cos \omega_0 t \\
\ddot{x}_r &= \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t - \alpha \omega_0 t \sin \omega_0 t \Rightarrow 2\alpha \omega_0 = f \Rightarrow \alpha = \frac{f}{2\omega_0} \\
x &= C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t
\end{aligned}$$

РИСУНОК резонанса

$$\begin{aligned}
A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} &= \bar{Q}, \quad \bar{Q} = \bar{F} \cos \omega t \\
\bar{q} &= U\bar{\xi}, \quad A \rightarrow E, \quad C \rightarrow K \\
(\bar{Q}, \delta\bar{q}) &= (\bar{Q}, U\delta\bar{\xi}) = (U^T \bar{Q}, \delta\bar{\xi}) = (\bar{Q}\delta\bar{\xi}) \\
\tilde{Q} &= U^T \bar{Q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} &= \bar{Q} = \ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, n \\
1) \quad \bar{Q} &= \bar{F} \cos \omega t, \quad Q_i = \mu_i \cos \omega t \quad \tilde{Q} = U^T \bar{F} \\
\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i &= \mu_i \cos \omega t \\
\begin{cases} \omega \neq \omega_i, \quad \forall i = 1, \dots, n & \xi_i = \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i) + \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ \omega = \omega_k, \quad \mu_k = 0, & \xi_k = \alpha_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + \frac{\mu_k}{2\omega} \sin \omega t \end{cases} \\
2) \quad \bar{Q} &\text{ периодически по } t: (\bar{Q}(t+T) = \bar{Q}(t), \forall t \in (0; +\infty)) \\
\bar{Q}(t) &= \bar{F} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} + Q_k \right) \right) \\
\bar{q} &= \bar{q}_{\text{одн}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{q}_r^{(k)} \\
\omega_i &= \frac{2\pi k}{T}
\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x &= f \sin \omega t, \quad k > 0 \\
x = 0 &\text{ — равновесие (установившееся асимптотически) свободной системы} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{\text{одн}} &= 0 \\
x_r &= R \sin(\omega t + \varphi) \\
\dot{x}_r &= R\omega \cos(\omega t + \varphi) \\
\ddot{x}_r &= -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\
R(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + KR\omega \cos(\omega t + \varphi) &= f \sin \omega t \\
R &= \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2 \omega^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\
((\omega_0^2 - \omega^2) + k^2 \omega^2)'_{\omega} &= -2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 2k^2 \omega = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k^2}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

РИСУНКИ чего-то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \bar{Q}^* + \bar{Q}(t)$$

$$\bar{Q}^* = B\dot{\bar{q}}, \quad B = \text{const}$$

$\bar{q} = 0$ — устойчиво асимптотически

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{F} \sin \omega t \Rightarrow \bar{Q}(t) = \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\bar{q} = \bar{q}_r = \bar{h} e^{i\omega t} \quad \dot{\bar{q}} = \bar{h} i\omega e^{i\omega t} \quad \ddot{\bar{q}} = \bar{h} (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

$$D(i\omega)\bar{h} = \bar{F} \quad \det D(i\omega) \neq 0$$

$$\bar{h} = [D(i\omega)]^{-1} \bar{F} = W(i\omega) \bar{F}, \quad W(i\omega) = (w_{kj}), \quad k, j = 1, \dots, n$$

$$w_{kj} = |w_{kj}| e^{i \arg \omega_{kj}} = R_{kj} e^{i \varphi_{kj}}$$

$$R_{kj} = |w_{kj}| \quad \bar{q} = W(i\omega) \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\varphi_{kj} = \arg \omega_{kj} \quad \sum_{j=1}^n w_{kj} F_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj} F_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}$$

РИСУНОК чего-то

3 Гамильтонова механика

3.1 Преобразования Лежандра

Рассмотрим $X(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $X(\bar{x}) \in C$.

$$\det \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \neq 0$$

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) = \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}(\bar{y})$$

$$Y(\bar{y}) = ((\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x}))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y})}$$

Определение. $Y(\bar{y})$ — преобразование Лежандра функции $X(\bar{x})$ по переменной \bar{x} .

Свойства преобразований Лежандра²:

1. Инволютивность.

$$X, \bar{x} \rightarrow Y, \bar{y} \rightarrow X, \bar{x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = x_i + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i}, \bar{y} \right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) =$$

$$x_i + \left(\underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_0, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) = x_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}$$

2.

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \right)^{-1}$$

²Возможно, тут чего-то не хватает

$$\det \frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{y}^2} = \left(\det \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \neq 0 \right)$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{x}, X &\rightarrow \bar{y}, Y = [(\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x})]|_{\bar{x}=f'(\bar{y})} \rightarrow \bar{z}, Z \\ \bar{y} &= \bar{f}_2(\bar{z}), \bar{z} = \bar{x}, \bar{y} = f_2^{-1}(\bar{x}), f'(f_2^{-1}) = \bar{x} \\ Y(\bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} &= (\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} - X(\bar{x}) \\ X(\bar{x}) &= [(\bar{x}, \bar{y}) - Y(\bar{y})]|_{\bar{y}=\bar{y}(\bar{x})} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X &= X(\bar{x}, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \\ Y &= Y(\bar{y}, \alpha) \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ Y(\bar{y}, \alpha) &= ((\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}, \alpha)) - X(\bar{x}, \alpha))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y}, \alpha)} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \bar{y} \right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = \\ &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_0 \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Повторим это с лагранжианом.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Определение. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ — обобщенный импульс.

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

$$H(q, p, t) = [(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)}$$

Определение. H — гамильтониан (функция Гамильтона).**Определение.** (q, p, t) — канонические переменные (параметры Гамильтона).**Теорема 11.** В канонических переменных уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Инвариантность} &\Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{L}{q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

■

Определение. $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, t) \bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ — гамильтонова система, если

$$\bar{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T \quad \exists H = H(q, p) :$$

$$\bar{F} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T$$

ПРИМЕР

3.2 Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона

Определение. q_k — циклическая переменная, если $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ ($\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$).

Утверждение. Если q_k — циклическая координата, то $p_n = \text{const}$.

Доказательство.

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const}.$$

■

Утверждение. Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = \text{const}$.

Доказательство.

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

■

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const} = \beta$$

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \beta, t)$$

$$\tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T$$

$$H = H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$$

Утверждение. При $\beta = \text{const}$ (заданном значении циклического интеграла β) уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \right) \Big|_{\beta=\text{const}}$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \end{cases} \quad (*)$$

$$p_n = \beta = \text{const}$$

$$\dot{q}_n = \left(\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, t, \beta)}{\partial p_n} \right) \Big|_{(*)} = f(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = f \Rightarrow q_n = \int_0^t f(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) d\tau + c_{2n-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q, p) = \text{const} = h$$

$$\text{Пусть } \frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow p_n = p_n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{n-1}, h) = -K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h),$$

$$\text{где } \tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T, \quad \tau = q_n$$

Определение. $K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h)$ — функция Уиттекера.

Утверждение. Уравнения Гамильтона на фиксированном уровне интеграла энергии локально эквивалентны уравнениям Уиттекера

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \\ \tilde{p}' = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \end{cases}, \quad \tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tau}, \quad \tilde{p}' = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}.$$

Доказательство.

$$H(\tilde{q}, \tau, \tilde{p}, -K) \equiv h$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_n \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{dH}{dq_i} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{p}_i - \dot{q}_n \frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_n} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$p_n = -K(\tilde{q}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), \tilde{p}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), q_n, h) = p_n(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\int_0^t \frac{dq_n}{f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}$$

■

3.3 Скобки Пуассона

Определение. Скобкой Пуассона двух функций $F(q, p)$ и $G(q, p)$ называется

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

1. Линейность

$$\{F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\} = \alpha_1 \{F, G_1\} + \alpha_2 \{F, G_2\}$$

$$\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$$

2. Антикоммутативность

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

3. Тождество Якоби-Пуассона³

$$\{F, \{G, W\}\} + \{G, \{W, F\}\} + \{W, \{F, G\}\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{F, \{G, W\}\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) - \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) = \dots \end{aligned}$$

4. Правило Лейбница

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\}$$

³Доказательство не доведено до конца

$$5. \{\varphi(F_1, \dots, F_k), G\} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial F_i} \{F_i, G\}$$

6.

$$F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\}$$

Пример.

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

Утверждение. Функция $F(q, p, t)$ — первый интеграл системы с гамильтонианом $H(q, p, t)$ тогда, и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0.$$

Доказательство.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

■

Замечание.

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$$

Теорема 12 (Якоби-Пуассона). Скобка Пуассона двух первых интегралов в уравнении Гамильтона также является первым интегралом этих уравнений.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — первые интегралы системы с гамильтонианом H .

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1, H\} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\{F_1, F_2\}) + \{\{F_1, F_2\}, H\} = \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} - \{H, \{F_1, F_2\}\} =$$

$$= \{F_2, \{F_1, H\}\} + \{F_1, \{H, F_2\}\} + \{H, \{F_1, F_2\}\} = 0 \Leftrightarrow \{F_1, F_2\} — \text{первый интеграл.}$$

■

$$L = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) + (B, \dot{q}) - \Pi(q, t)$$

$$H = \frac{1}{2}(A^{-1}(p - B), (p - B)) + \Pi(1, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}p, p)}_{H_2} - \underbrace{(A^{-1}p, B)}_{H_1} + \underbrace{\Pi(q, t) + \frac{1}{2}(A^{-1}B, B)}_{H_0}$$

Утверждение. $H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, f(q_n, p_n), t) \Rightarrow f(q_n, p_n) = \text{const} = \alpha$

Определение. q_n, p_n — отделяющиеся переменные

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 + \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

■