

# Лекции по аналитической механике. Весенний семестр.

Муниципына Мария Александровна

29 июня 2018 г.

*Набор и рисунки: Александр Валентинов.*

*За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю и Алексею Петрову.*

*Источник: <https://github.com/valentiay/analmech>*

*Сообщить о ошибках можно здесь <https://github.com/valentiay/analmech/issues>*

*или здесь <https://vk.com/valentiay>. Pull-реквесты приветствуются.*

## Содержание

<b>1</b>	<b>Равновесие динамических сил</b>	<b>2</b>
1.1	Общая теория статики . . . . .	2
1.2	Равновесие голономных систем . . . . .	2
1.3	Элементы теории устойчивости . . . . .	4
1.4	Прямой метод Ляпунова . . . . .	5
1.5	И-й метод Ляпунова . . . . .	8
1.6	Равновесие натуральных систем . . . . .	10
1.7	Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия . . . . .	12
1.8	Элементы теории бифуркации . . . . .	13
1.9	Малые Колебания . . . . .	16
1.10	Вынужденные колебания в линейных системах . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Гамильтонова механика</b>	<b>21</b>
2.1	Преобразования Лежандра . . . . .	21
2.2	Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона . . . . .	22
2.3	Скобки Пуассона . . . . .	24
2.4	Принцип Гамильтона . . . . .	26
2.5	Преобразование лагранжева при замене координат и времени . . . . .	27
2.6	Интегральный инвариант . . . . .	29
2.7	Теорема Лиувилля . . . . .	31
2.8	Обратные теоремы теории интегральных инвариантов . . . . .	32
2.9	Канонические преобразования . . . . .	33
2.10	Свободные канонические преобразования . . . . .	37
2.11	Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби . . . . .	38
2.12	Метод разделения переменных . . . . .	40

**Лекция 1 от 07.02.2018****1 Равновесие динамических сил**

$$\bar{r}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \bar{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots)^T$$

**Определение.**  $r_0$  — положение равновесия, если

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0, \quad \dot{\bar{r}}(t_0) = 0 \Rightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}_0$$

**Замечание.** Положение равновесия зависит от системы отсчета.

**1.1 Общая теория статики**

$$\bar{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots)^T$$

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(\bar{r}, t) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, k \Leftrightarrow \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}} \dot{\bar{r}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \\ f_\beta(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0, \quad \beta = k+1, \dots, n \quad f_\beta = B(\bar{r}, t)\dot{\bar{r}} + \bar{\gamma} = 0 \end{aligned} \right\} \Phi \dot{\bar{r}} + \bar{\psi} = 0$$

$\delta \bar{r}$  — виртуальное перемещение,  $\Phi \delta \bar{r} = 0$

$$\bar{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots)^T,$$

$$(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0 \text{ — условие идеальности связей} \quad (1)$$

**Принцип Даламбера.** Если наложенные на систему связи идеальны, то некоторые ее положения являются положениями равновесия, тогда, и только тогда, когда работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящем систему из этого положения, равна нулю.

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия} \Leftrightarrow (\bar{F}, \delta \bar{r}) = 0 \quad (\text{связи идеальны.})$$

*Доказательство.*

1. Принцип виртуальных перемещений:  $\bar{r}(t)$  — движение системы  $\Leftrightarrow (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) = 0$ .
2. Принцип детерминированности.

■

**1.2 Равновесие голономных систем**

Голономная система:

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \text{ — обобщенные координаты.}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{r}_0 \text{ — положение равновесия, } \bar{r}_0 = \bar{r}(\bar{q}_0, t)$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$(\bar{F}, \delta \bar{r}) = (\bar{Q}, \delta \bar{q}), \quad \delta q_1, \dots, \delta q_n \text{ — независимы.}$$

$$(1) \Leftrightarrow \bar{Q}(\bar{q}_0, 0, t) \equiv 0$$

Система голономна, силы потенциальны:

$$\exists \Pi(\bar{q}, t) : \bar{Q} = -\text{grad } \Pi(\bar{q}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$$

$$\bar{q}_0 \text{ — критическая точка } \Pi(\bar{q}, t)$$

Натуральная Лагранжева система (связи идеальны, голономны, стационарны, силы потенциальны и  $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ ):

$$T = T_2 = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi = \Pi(\bar{q})$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + \Pi = const \right)$$

**Определение.**  $\bar{q}_0$  — положение равновесия, если  $\bar{q}(t) \equiv \bar{q}_0$  — решение уравнений Лагранжа.

**Утверждение.**  $\bar{q}_0$  — положение равновесия натуральной системы, тогда, и только тогда, когда  $\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} \equiv 0$ .

*Доказательство.*

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} \right) \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 - \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial \bar{q}} \Big|_{\dot{\bar{q}}=0}}_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0$$

■

**Пример** (Математический маятник).

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi$$

1) Положение равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

2) Уравнение движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

3) Интеграл энергии:

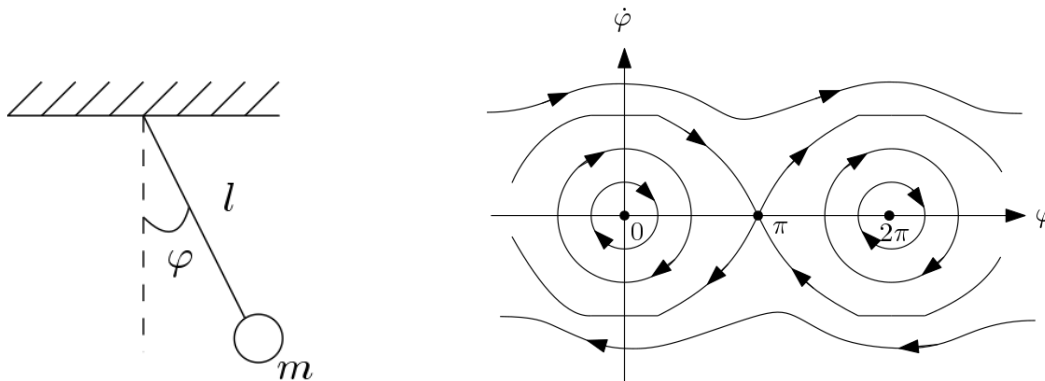
$$T + \Pi = h = const$$

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = h$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}(h - \Pi(\varphi))$$

$$\dot{\varphi} = \pm \alpha \sqrt{h - \Pi(\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} = const$$

$(\varphi, \dot{\varphi})$  — фазовая плоскость.



1)  $h < -mgl$  ∅

- 2)  $h = -mgl$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi$  — равновесие  
 3)  $-mgl < h < mgl$  — колебания  
 4)  $h = mgl$  — либо равновесие  $\varphi = \pi$ , либо движение к  $\varphi = \pi$   
 5)  $h > mgl$  — вращение

**Пример** (Маятник во вращающейся плоскости).

$$n = 1, q = \varphi$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{v}^2 = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi)$$

$$\Pi = -mgr \cos \varphi$$

$$L = T - \Pi, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 \underbrace{-T_0 + \Pi}_{\Pi^*} = \text{const}$$

$$\Pi^* = -mgr \cos \varphi - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi - \frac{1}{2} mr^2 \omega^2 \sin 2\varphi = mr \sin \varphi (g - r\omega^2 \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow$$

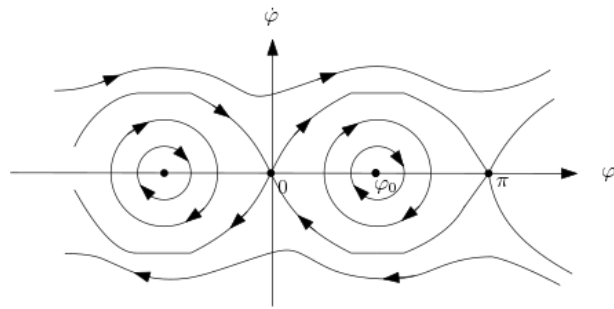
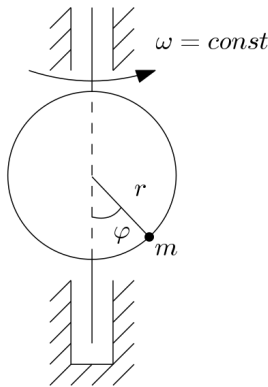
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm \arccos \frac{g}{r\omega^2} = \varphi_0, \omega^2 > \frac{g}{r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} = mgr \cos \varphi - mr^2 \omega^2 \cos 2\varphi$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mr(g - r\omega^2) \geq 0 \quad \omega^2 \leq \frac{g}{r}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -mr(g + r\omega^2) < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = mgr \frac{g}{r\omega^2} - mr^2 \omega^2 \left( 2 \frac{g^2}{r^2 \omega^4} - 1 \right) = mr\omega^2 \left( r - \frac{g^2}{2\omega^4} \right) < 0$$



## Лекция 2 от 14.02.2018

### 1.3 Элементы теории устойчивости

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{f} \in C^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t, \bar{x}(0)) \text{ — начальные условия.} \quad (2)$$

**Определение.**  $\bar{x} = \bar{x}_0$  — положение равновесия (2), если  $\bar{f}(\bar{x}_0) = 0$  ( $\bar{x}(t, \bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0$ ),  $\bar{x}_0 = 0$  без ограничения общности.

**Определение.** Равновесие (2) устойчиво по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что любое решение с начальными условиями в  $\delta$ -окрестности равновесия существует при всех  $t > 0$  и находится в  $\varepsilon$ -окрестности.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |\bar{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\bar{x}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

**Определение.**  $\bar{x} = 0$  — неустойчивое, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \bar{x}(0), t_1 > 0 : |\bar{x}_0| < \delta \quad |\bar{x}(t_1, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

**Определение.**  $\bar{x} = 0$  — устойчиво асимптотически, если

1.  $\bar{x} = 0$  — устойчиво,

2.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t, \bar{x}(0)) = 0$ .

## 1.4 Прямой метод Ляпунова

$V(x)$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \dot{\bar{x}} = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} f$$

**Определение.**  $\dot{V}$  — производная функции  $V$  по времени вдоль решения (2).

**Теорема** (Ляпунова об устойчивости). Если существует гладкая функция  $V(x)$  определенная в  $\varepsilon$ -окрестности равновесия  $x = 0$  системы (2), удовлетворяющая следующим условиям:

1.

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

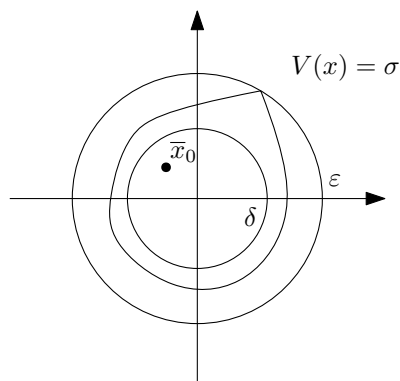
то  $x = 0$  — устойчиво по Ляпунову.

*Доказательство.*

1)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \min V(\bar{x}), |\bar{x}| = \varepsilon$

2)  $V \in C^1 \Rightarrow \exists \delta : V(\bar{x}) < \sigma \quad \forall \bar{x} : |\bar{x}| < \delta$

3)  $\forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta \quad V(\bar{x}(t)) < \sigma \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon \quad (\bar{x}_0(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_0))$



■

**Замечание.**

1)  $V(0) = 0, V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V$  — положительно определенная функция в 0.

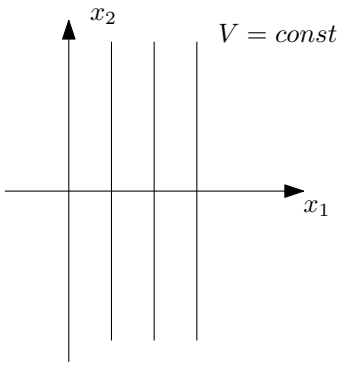
2)  $V(0) = 0, V(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V$  — отрицательно определенная функция в 0.

3)  $V(0) = 0, V(\bar{x}) \geq (\leq) 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow V$  — знакопостоянная функция в 0.

**Пример.**

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  — положительно определена в  $x_1 = x_2 = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2$  — не является положительно определенной в  $x_1 = x_2 = 0$



**Замечание.** Если в условии теоремы Ляпунова в условии 2) поставить строгое неравенство, устойчивость станет асимптотической.

**Теорема (Барбашина-Красовского).** Если  $\exists V(x) \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ , то из того, что

1.

$$V(0) = 0, V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$

2.

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon,$$

3. множество  $\{\bar{x} : \dot{V}(\bar{x}) = 0\}$  не содержит целиком решения системы (2), кроме равновесия  $\bar{x} = 0$ , следует, что  $\bar{x} = 0$  — устойчиво асимптотически.

**Замечание.** Если  $\dot{V} < 0$ , то  $\{x : \dot{V} = 0\} = \{0\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{x} = 0$  установившееся, но не асимптотическое, т.е.

I)  $\exists \bar{x}_0(t) \quad |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon, \quad \bar{x}_0 \not\rightarrow 0$ , т.е.

$\exists \delta, \{t_k\}, \quad t_{k+1} > t_k \quad \delta < |\bar{x}_0(t_k)| < \varepsilon$

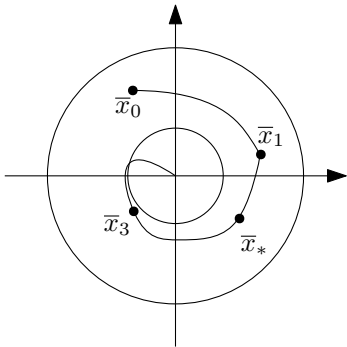
II)  $\exists \{k_s\} \quad \bar{x}_s = \bar{x}_0(t_{k_s}) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \bar{x}_*$

$$|\bar{x}_s| > \delta \Rightarrow |\bar{x}_*| > \frac{\delta}{2}$$

III)  $V(\bar{x}_0(t))$

$$1), 2) \Rightarrow \exists V = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_0(t))$$

$$V \in C^1 \Rightarrow V = V(\bar{x}_*)$$



$$\boxed{\forall t \quad V(\bar{x}_0(t)) \geq v} \tag{3}$$

(4)

IV) Рассмотрим  $\bar{x}_s(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_s) = \bar{x}_0(t + t_{k_s}, \bar{x}_0)$

V)  $\bar{x}_*(t) = \bar{x}(t, \bar{x}_*)$

$$V(\bar{x}_*) = v, \quad 2), 3) \Rightarrow \exists t^* : \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{v_*} < v$$

VI)  $V$  — непрерывная б.т.  $\bar{x}_*(t_*)$

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_1 \Rightarrow |V(\bar{x}) - V(x_*(t_*))| < \varepsilon_1$$

Решения (2) непрерывно и зависит от начальных условий ( $t < \infty$ )

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x |\bar{x} - \bar{x}_*(t_*)| < \delta_2 \Rightarrow |\bar{x}(t_*) - x_*(t_*)| < \varepsilon_2$$

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \exists s : |\bar{x}_s - x_*| < \varepsilon_3 \forall s > S$$

$$\varepsilon_1 = v - v_* > 0 \rightarrow S : \left| V(\bar{x}_s(t_*)) - \underbrace{V(\bar{x}_*(t_*))}_{v_*} \right| < v - v_*$$

$V(\bar{x}_s(t_*)) - v_* < v - v_*$  — противоречие с (3)

**Теорема (Красовского).** Если  $\exists V \in C^1 : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  и область  $\Omega$ , а также

$$1. V(0) = 0, V(\bar{x}) > 0 \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$$

$$\bar{x} = 0 \in \partial\Omega, V(\bar{x}) = 0 \forall \bar{x} \in \partial\Omega,$$

$$2. \dot{V} \geq 0 \forall \bar{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega,$$

$$3. \text{ множество } \{\bar{x} : \dot{V}(\bar{x}) = 0\} \text{ не содержит целиком решения системы (2), кроме равновесия } \bar{x} = 0,$$

то  $\bar{x} = 0$  — неустойчивое.

*Доказательство.*

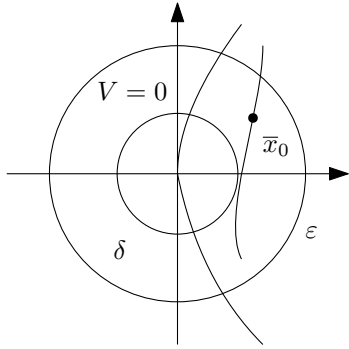
$\exists \bar{x} = 0$  — устойчивое, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\bar{x}_0| < \delta \Rightarrow |\bar{x}_0(t)| < \varepsilon$$

$$1), 2) \Rightarrow \exists \delta : |\bar{x}_0(t)| > 0 \Rightarrow \exists \{x_s\} \rightarrow \bar{x}_*,$$

$$V(\bar{x}_s(t)) \leq V(\bar{x}_*) = v$$

$$\bar{x}_*(t), 3) \Rightarrow \exists t_* > 0 : (\bar{x}_*(t_*)) > v \text{ — противоречие как в предыдущей теореме}$$



**Замечание.**  $\dot{V} > 0$  — теорема Четаева.

**Пример (Волчок Эйлера).**

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = \omega \\ q = r = 0 \\ p' = p - \omega \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A\dot{p}' = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases}$$

$$2T = A(p' + \omega)^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap'^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Ap'\omega + A\omega^2 \quad | \cdot A$$

$$k^2 = A^2p'^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2A^2p'\omega + A^2\omega^2$$

$$2TA - k^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 0 \cdot p^2$$

$$V = (2TA - k^2) + (2T - A\omega^2)^2 = B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 + 4A^2\omega^2(p')^2 + O_4(p', q, r)$$

$$A > B, A > C$$

Т.к. все слагаемые больше 0,  $O_4$  мало в окрестности 0.

$$\exists u_\varepsilon : V > 0, \forall (p', q, r) \in U_\varepsilon, V \geq 0|_{p'=r=q=0}, \dot{V} = 0 \Rightarrow \text{равновесие устойчиво.}$$



**Лекция 3 от 21.02.2018****1.5 I-й метод Ляпунова**

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \quad A = \text{const} \quad \det(A - \lambda E) = 0 \quad (5)$$

**Утверждение.** Если все корни характеристического многочлена линейной системы (5) имеет отрицательные вещественные части, то равновесие  $\bar{x} = 0$  этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — асимптотически устойчиво.}$$

*Доказательство.*

$$1) \lambda_i \in \mathbb{R}. \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n C_i \bar{u}_i e^{\lambda_i t}, \quad c_i = \text{const}, \quad \bar{u}_i = \text{const}$$

$\bar{x} = 0$  — устойчиво асимптотически (по определению).

$$1) \lambda_1 = \lambda_2, \quad \bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \text{ — устойчивость.}$$

$$2) \lambda_0 \text{ — корень кратности } s :$$

$$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 + \dots + C_s \bar{u}_s t^{s-1}) e^{-\lambda_0 t} \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — устойчиво асимптотически (по определению).}$$

$$3) \lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k \text{ — кратность } 1$$

$$\bar{x} = + \dots + (C_1 \bar{u}_1 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} + C_2 \bar{u}_2 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}) = + \dots + e^{\alpha_k t} (C'_1 \bar{u} \sin \beta_k t + C'_2 \bar{u} \cos \beta_k t) \Rightarrow \text{устойчивость.}$$

**Утверждение.** Если существует хотя бы 1 корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью, то равновесие  $\bar{x} = 0$  неустойчиво:

$$\exists \lambda_k > 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ — неустойчиво.}$$

*Доказательство.* Аналогично.

$$(*) \quad \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) \quad \bar{f}(0) = 0$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + O(\|\bar{x}\|^2) \quad A = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = \text{const}$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \text{ — линеаризованная система}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

**Теорема** (Ляпунова об устойчивости по первому приближению). Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то равновесие  $\bar{x} = 0$  нелинейной системы асимптотически устойчиво, если же существует корень с положительной вещественной частью, то равновесие неустойчиво.

**Замечание** (Критический случай). Если нет  $\lambda_k > 0$   $\lambda_k = 0^1$ , то про систему ничего нельзя сказать

**Пример.**

$$C > A > B$$

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases} \quad \text{Линеаризованная:} \quad \begin{cases} A\dot{p} = 0 \\ B\dot{q} = (C - A)r\omega \\ C\dot{r} = (A - B)q\omega \end{cases}$$

$$\bar{x} = (p', q, r)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-B}{C}\omega & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Нечетко записано

$$\det(\mathbb{A} - \lambda E) = \lambda \left( \lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{BC} \omega^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm \sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}} \omega \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0 - \text{неустойчиво, т.к. } \exists \lambda > 0$$

(Из прошлой лекции (не успели)  $V = BCqr$ )

**Пример.**

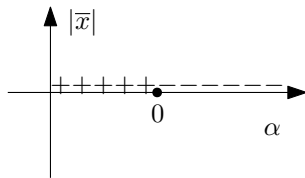
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (**)$$

$$\text{Линеаризованная система: } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \lambda = \pm i \begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ y = C_1 \cos t - C_2 \sin t \end{cases}$$

$$V = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \dot{V} = (\dot{x}x + \dot{y}y)|_{(**)} = \alpha x^4$$

$$\underline{\alpha} < 0 : V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq 0 \quad \dot{V} \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\varepsilon$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (**) |_{x \equiv 0} \quad \begin{cases} 0 = y + 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 - \text{устойчиво асимптотически.}$$



Бифуркационная диаграмма

$$\underline{\alpha} > 0 : \Omega = U_\varepsilon \setminus \{0\}$$

$$V(\bar{x}) > 0, \quad \dot{V}(\bar{x}) > 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega$$

$$V(0) = 0, \quad \dot{V}(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \partial\Omega(x=0)$$

$$\Rightarrow \text{неустойчивость, т.к. } \dot{V} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (6)$$

**Пример.**

$$n = 2 : a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0$$

$$a_1^2 \geq 4a_0 a_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$a_1^2 < 4a_0 a_2 : \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} < 0 \Rightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_i > 0, \quad i = 1, 2$$

**Утверждение** (Необходимое условие устойчивости). Если все корни (6) при  $n > 2$  имеют отрицательные вещественные части, то коэффициенты этого уравнения положительны:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Rightarrow a_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$$

*Доказательство.*

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — действительные корни,  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, k$

$\lambda = \alpha_i \pm \beta_i i$   $j = 1, \dots, m$

$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \alpha_1 - \beta_1 i) \cdot \dots \cdot (\lambda - \alpha_1 + \beta_1 i) \cdot \dots$

$= a_0(\lambda + |\lambda_1|) \cdot \dots \cdot (\lambda + |\lambda_k|)((\lambda + |\alpha_1|)^2 + \beta_1^2) \cdot \dots = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$   $a_i > 0$   $i = 1, \dots, n$

■

**Пример.**

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

**Теорема** (Критерий Рауса-Гурвица).  $[b/\partial] \forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \Leftrightarrow$  все главные диагональные миноры определены положительно

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \Delta_i > 0$$

**Замечание.**

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

## 1.6 Равновесие натуральных систем

Натуральная система:

$$L = \frac{1}{2}(A(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(\bar{q})$$

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_0 - \text{равновесие}, \quad \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \Big|_{\bar{q}=\bar{q}_0} = 0 \right)$$

**Определение.**  $\bar{q} = \bar{q}_0$  — установившееся положение равновесия натуральной системы, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \parallel \bar{q}(0) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(0) \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \bar{q}(t) - \bar{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\bar{q}}(t) \parallel < \varepsilon \forall t > 0.$$

**Теорема** (Лагранжа-Дирихле). Точка строго локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия этой системы:

*Доказательство.*

$$V = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0)$$

$$1) V|_{\bar{q}=\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}=0} = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + \Pi(\bar{q}) - \Pi(\bar{q}_0) > 0 \quad (A - \text{положительно определенная})$$

$$\forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} : \delta > \parallel \dot{\bar{q}} \parallel + \parallel \bar{q} - \bar{q}_0 \parallel > 0$$

$$2) \dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{q}} = 0, \bar{q} = \bar{q}_0 - \text{устойчиво.}$$

■

**Пример.**

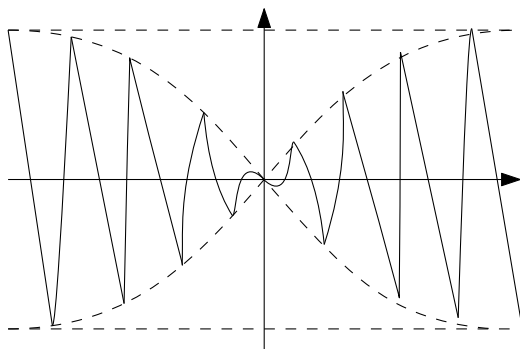
$$\Pi = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ e^{-\frac{1}{|q|}} \cdot \cos \frac{1}{|q|}, & q \neq 0 \end{cases}$$

1)  $q = 0$  — положение равновесия

2)  $q = 0 \neq \min \Pi$

3)  $T + \Pi = h = \text{const}$

$\Pi \leq h, x = 0$  — устойчиво по Ляпунову (по опр.)



$$\Pi(\bar{q}) = \Pi(\bar{q}_0) + \Pi^{(1)}(\bar{q}) + \Pi^{(2)}(\bar{q}) + \dots + \Pi^{(m)}(\bar{q})$$

$$\Pi^{(1)} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}_0} (\bar{q} - \bar{q}_0) = 0$$

$\Pi^{(m)}$  — первая нетривиальная форма  $\Pi$

### Лекция 4 от 28.02.2018

$\bar{q} = 0$  — положение равновесия

$$T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) \quad \Pi = \Pi(0) + \left( \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \dots = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \dots$$

$$\Pi^{(0)} = \Pi(0) = 0, \quad \Pi^{(1)} = \left( \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) = 0$$

$\Pi^{(m)}$  — первая нетривиальная форма  $\Pi$

**Пример.** 1.  $\Pi(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{2}$ ,  $x = y = 0$  — устойчивое положение равновесия.

2.

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \Pi^{(2)} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \ddot{y} = 0 \quad y = ct + c_1$$

$x = y = 0$  — неустойчивое положение равновесия.

**Теорема.** Если  $\Pi$  не имеет даже нестрогого минимума в окрестности некоторого положения равновесия натуральной системы, то равновесие неустойчиво.

**Теорема.**

$$m = 2, n = 1 : T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad a(q) > 0$$

$$b = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0} < 0$$

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2 + O_3(q)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + a'_q \dot{q}^2 - \frac{1}{2}a'_q \cdot \dot{q}^2 + bq + O_2(q) =$$

$$= a(q) \cdot \ddot{q} + bq + O_2(q, \dot{q})$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q = \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \dot{q} = -\frac{bq - O_2(q, \dot{q})}{a(0) + O_1(q)} = -\frac{bq}{a(0)} + O_2(q, \dot{q}) \end{cases}$$

$$\bar{x} = (q, \dot{q})^T, \dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a(0)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{b}{a(0)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{b}{a(0)} > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{b}{a(0)}}$$

$\operatorname{Re} \lambda_{\pm} > 0 \Rightarrow q = 0$  — неустойчивое положение равновесия.

**Замечание.**

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}a(t)q^2 - \frac{1}{2}bq^2}_{L^*} + O_3(q, \dot{q})$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=0}$$

$C$  — положительно определена  $\Rightarrow q = 0$  — устойчиво

$\det C = 0$  — ?

$\exists \Delta_i < 0$

## 1.7 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*$$

$$L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - \Pi(q)$$

$$\dot{E} = (\dot{\bar{Q}}^*, \dot{\bar{q}}) \quad E = T + \Pi$$

- Если  $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) = 0$ , то  $\bar{Q}^*$  — гироскопическая.
- Если  $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \leq 0$ , то  $\bar{Q}^*$  — диссипативная.
- Если  $(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) < 0$ , то  $\bar{Q}^*$  обладает полной диссипацией.

**Теорема (Кельвина-Четаева 1).** Если  $q = 0$  — точка строгого локального минимума  $\Pi$  натуральной системы, то даже при добавлении в систему гироскопических и (или) диссипативных сил, она является устойчивым положением равновесия  $A$ . Если при этом диссипативные силы обладают полной диссипацией, то это равновесие устойчиво асимптотически.

*Доказательство.*

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(q)$$

$q = 0$  — строгий локальный минимум  $\Pi(q) \Rightarrow V(0, 0) = 0, V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) > 0 \quad \forall \bar{q}, \dot{\bar{q}} \quad 0 < \|q\|^2 + \|\dot{q}\|^2 < \varepsilon$

a)  $\dot{V} = (\dot{\bar{Q}}^*, \dot{\bar{q}}) \leq 0 \Rightarrow q = 0$  — устойчиво по теореме Ляпунова

b)  $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\bar{q}} = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Rightarrow q = 0$  — устойчиво асимптотически по т. Барабашина-Красовского

■

**Теорема (Кельвина-Четаева 2).** Если в изолированном положении равновесия  $\Pi$  не имеет даже нестрогого минимума, а силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от направления гироскопических сил).

*Доказательство.*

$$V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T + \Pi(\bar{q}) - \Pi(0)$$

$$q = 0 \rightarrow \dots \Rightarrow \Omega : \Pi(\bar{q}) < \Pi(0) \quad \forall q \in \Omega$$

$$\Pi(q) = \Pi(0) \quad \forall q \in \partial\Omega, \quad q = 0 \in \partial Q$$

$$V < 0, \dot{V} < 0 \quad \forall \{\bar{q}, \dot{\bar{q}}\} \in \Omega' = \{\bar{q}, \dot{\bar{q}} : q \in \Omega, \dot{\bar{q}} = 0\}$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \bar{q} = 0$$

$\Rightarrow q = 0$  — неустойчиво по теореме Красовского.

■

**Пример.**

$\ddot{x} = 0, x = 0$  — неустойчиво.

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad k > 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$\ddot{x} = 0, x = 0$  — неустойчиво.

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad k > 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -k < 0 \end{cases}$$

$x = 0$  — устойчиво.

**Пример** (Гироскопическая стабильность).

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi = -\frac{x^2 + y^2}{2} \quad \bar{Q}^* = 2\dot{y}\bar{e}_x - 2\dot{x}\bar{e}_y$$

$$(\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) = 2\dot{y}\dot{x} - 2\dot{x}\dot{y} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = 2\dot{y} \\ \ddot{y} - y = -2\dot{x} \end{cases} \quad (\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \det(A - \lambda E) = 0)$$

$$A\ddot{\bar{x}} + B\dot{\bar{x}} + C\bar{x} = 0$$

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 + 2^2\lambda^2$$

$$\begin{cases} \lambda^2 = -2 & \lambda = \pm\sqrt{2}i \\ \lambda^2 = -\frac{1}{2} & \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

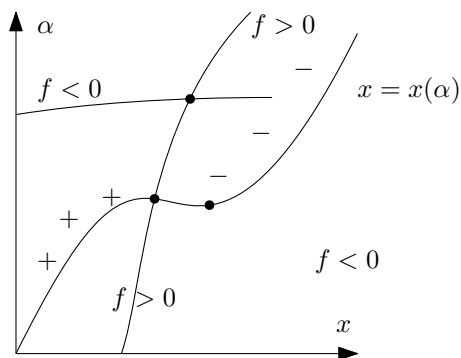
$x = y = 0$  — устойчивое.

## 1.8 Элементы теории бифуркации

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \alpha), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Кривые равновесий  $\bar{x} = \bar{x}(\alpha) : \bar{f}(\bar{x}(\alpha), \alpha) = 0$

Точка бифуркации  $(\bar{x}_*, \alpha_*) : \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_*(\alpha_*), \alpha=\alpha_*} = 0$



$$\underline{n=1} \quad \dot{x} = f(x, \alpha)$$

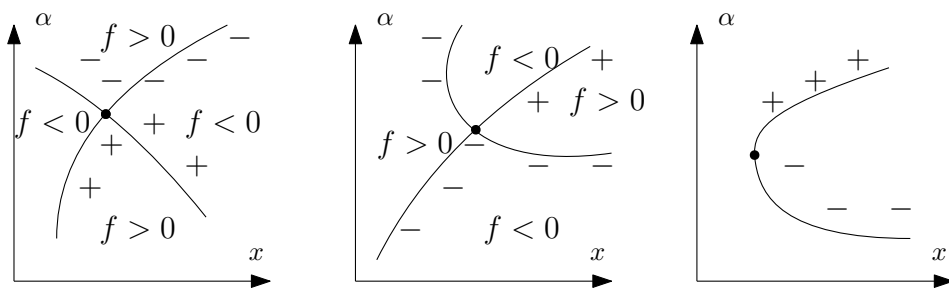
$$\dot{x} = f'_x(x - x(\alpha)) + O_2(x - x(\alpha))$$

$$\lambda = f'_x > 0 \Rightarrow x = x(\alpha) - \text{неустойчиво.}$$

$$\lambda = f'_x < 0 \Rightarrow x = x(\alpha) - \text{устойчиво.}$$

$$\lambda = f'_x = 0 \Rightarrow \text{бифуркация.}$$

### Основные типы бифуркаций.



1) Смена устойчивости, 2) вилка, 3) складка.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0 \quad L = \frac{1}{2} (A(q) \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \Pi(\bar{q}, \alpha)$$

$$\text{Кривая равновесия} \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \right|_{\bar{q}=\bar{q}(\alpha)} = 0$$

$$\text{Точка бифуркации} \quad \det \left( \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \right|_{\bar{q}_*=\bar{q}(\alpha_*), \alpha=\alpha_*} \right) = 0$$

$$\underline{n=1} \quad a\ddot{q} + bq = 0, \quad b = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial q^2}$$

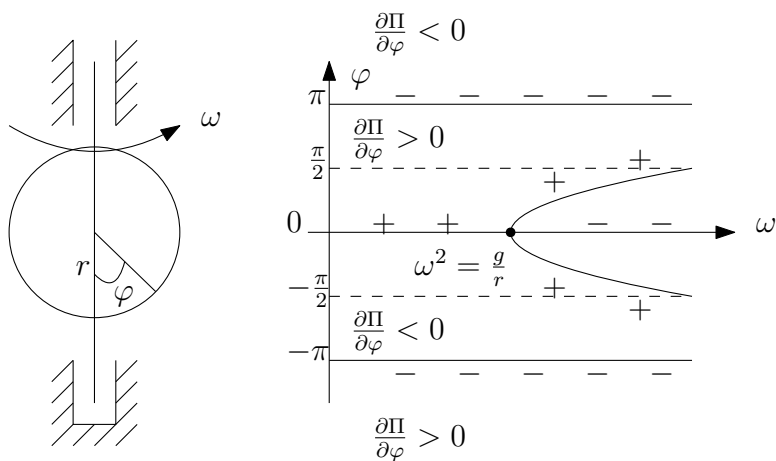
$$a\lambda^2 + b = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{b}{a}$$

$$1) b > 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} i - \text{устойчиво.}$$

$$2) b < 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}} - \text{неустойчиво.}$$

$$\text{Равновесия:} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 r} \end{cases}$$



### Лекция 5 от 07.03.2018

**Пример** (Бифуркация Андронова-Копфа).

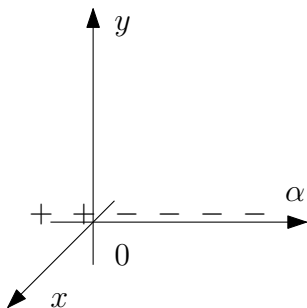
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$  равновесие. Откинем квадратичную часть.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x = y = 0$  — устойчиво.

$\alpha > 0 \Rightarrow x = y = 0$  — неустойчиво.



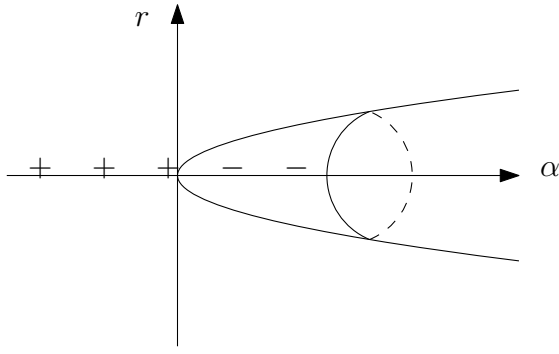
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = \alpha r \cos \varphi - r \sin \varphi - r \cos \varphi \cdot r^2 & | \cdot \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + \alpha r \sin \varphi - r \sin \varphi \cdot r^2 & | \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r - r^3 & (1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

$r = 0, r = \pm\sqrt{\alpha}$  — равносильные уравнению (1).



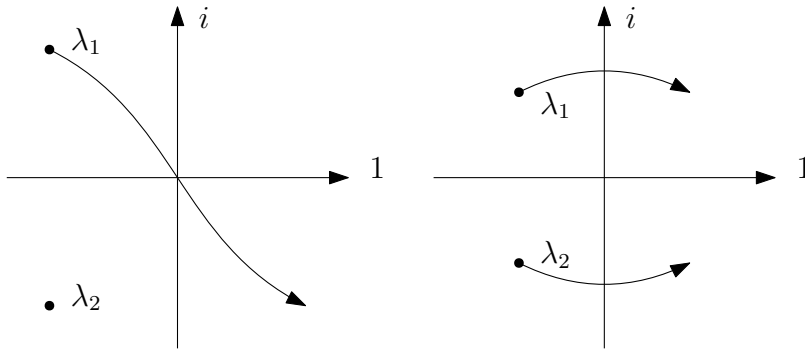


$$\delta r = r - \sqrt{\alpha}$$

$$\delta \dot{r} = \dot{r}, \quad r = \delta r + \sqrt{\alpha}$$

$$(1) \Leftrightarrow \delta \dot{r} - (\delta r + \sqrt{\alpha})(-\delta r)(\delta r + 2\sqrt{\alpha}) = -2\alpha\delta r + O_2(\delta r)$$

$$\delta r = o(r \pm \sqrt{\alpha}) - \text{устойчивое.}$$



1) Дивергенция. 2) Флаттер.

## 1.9 Малые Колебания

$$T = \frac{1}{2}(\Phi(\bar{q})\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad \Pi(\bar{q}), \quad \bar{q} = 0 \text{ — положение равновесия}$$

$$\Pi(\bar{q}) = \underbrace{\Pi(0)}_0 + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}=0}, \bar{q} \right) + O_3(\bar{q})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{q}^2} \Big|_{\bar{q}=0} = c = \text{const}, \quad C = C^T$$

$$T = \frac{1}{2}((\Phi(0) + O(\|\bar{q}\|))\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

$$A = \Phi(0) = \text{const}, \quad A = A^T$$

$$L = \tilde{L} + O_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) - \frac{1}{2}(C\bar{q}, \bar{q})$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} = \frac{1}{2}(\underbrace{A\dot{\bar{q}} + A^T\dot{\bar{q}}}_{\text{Из 3 семестра}}) = A\dot{\bar{q}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = -C\bar{q} \text{ — аналогично}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = 0}$$

$$A \text{ положительно определена} \xrightarrow{\text{Из линейной алгебры}} \exists \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n : A \rightarrow E, C \rightarrow k$$

$$\bar{q} = \sum \xi_i \bar{e}_i = u\bar{\xi}, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2}(E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(k\bar{\xi}, \bar{\xi}),$$

$$k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\xi} + k\bar{\xi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1\xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n\xi_n = 0 \end{cases}$$

Пусть  $k_i = \omega_i^2 > 0$

$k$  и  $C$  — положительно определены,  $\bar{q} = 0(\bar{\xi} = 0)$  — устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле

$$\ddot{\xi}_i + k_i\xi_i = 0 \quad \lambda^2 + k_i, \quad \lambda^2 + \omega_i^2 = 0 \quad \lambda = \pm\omega_i i$$

$$\xi_i = C_{1i} \sin \omega_i t + C_{2i} \cos \omega_i t = \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

**Утверждение.**

$$\det(A\omega^2 - C) = 0$$

$$\begin{cases} A(\omega_i^2 - C)e_i = 0 \\ (A\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1 \end{cases}, i = 1, \dots, n$$

*Доказательство.*

$$2\tilde{\Pi} = (C\bar{q}, \bar{q}) = (CU\bar{\xi}, U\bar{\xi}) = (U^T CU\bar{\xi}, \bar{\xi}) = (k\bar{\xi}, \bar{\xi}) \Leftrightarrow k = U^T CU$$

$$2\tilde{T} = (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = (U^T AU\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) = (E\dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\xi}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = U^T AU (\Leftrightarrow (A\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij})$$

$$k - k_i E = \text{diag}(k_1 - k_i, \dots, k_{i-1} - k_i, 0, \dots)$$

$$\det(k - k_i E) = 0 \Leftrightarrow \det(U^T CU - k_i U^T AU) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det U^T \det(C - Ak_i) \det U = 0 \xleftarrow{\det U \neq 0} \det(Ak_i - C) = 0, \det(A\omega_i^2 - C) = 0$$

$$2)(k - k_i E)(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots)^T$$

$$(U^T C - k_i U^T A) \underbrace{U(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T}_{\bar{e}_i} \quad C\bar{q} = \sum \bar{e}_i \xi_i$$

$$U^T (C - \omega_i^2 A) \bar{e}_i = 0 \Leftrightarrow (A\omega_i - C) \bar{e}_i = 0$$

■

**Определение.**  $\det(A\omega^2 - C) = 0$  — вековое уравнение (уравнение частот).  $\omega_i$  — частоты малых колебаний (собственные частоты).

**Следствие.** Частоты малых колебаний не зависят от выбора обобщенных координат.

**Определение.** Если  $(A\omega_i^2 - C)\bar{U}_i = 0$ , то  $\bar{U}_i$  — амплитудный вектор, соответствующий частоте  $\omega_i$ .

**Замечание.**  $\bar{U}_i = \beta_i \bar{e}_i$ ,  $\beta_i = \text{const}$

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \bar{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

**Следствие.** 1. Ортогональность

$$(A\bar{U}_i, \bar{U}_j) = 0, i \neq j$$

2. Линейная независимость

$$C_1 U_1 + \dots + C_n U_n = 0$$

$$0 + \dots + (A\bar{U}_i, C_i \bar{U}_i) + \dots + 0 = 0 \Leftrightarrow C : (A\bar{U}_i, \bar{U}_i) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0$$

$$(A\bar{U}, \bar{U}) = 0 \Leftrightarrow \bar{U} = 0$$

**Замечание.**  $\tilde{\alpha}, \varphi$  — определяются начальными условиями.

$$I. \tilde{\alpha}_i = 0, \quad \forall i \neq m : \bar{q} = \tilde{\alpha}_m \bar{U}_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$$

главные (нормальные) колебания

Ia. Кратные частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$k = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots)$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$$(A\omega^2 - C)\bar{U} = 0$$

$$U = C_1 \bar{U}_1 + C_2 \bar{U}_2$$

II.  $\exists k_m = 0$

$$\ddot{\xi}_m = 0, \quad \xi_m = C_1 t + C_2$$

III.  $\exists k_m < 0, \bar{q} = 0 (\xi = 0)$  — неустойчиво.

$$\ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$$

$$\lambda^2 = -k_m > 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-k_m}$$

**Теорема.** Если  $\Pi_{(0)}^{(2)}$  не имеет даже нестрогого минимума, то  $\bar{q} = 0$  неустойчиво.

*Доказательство.*

$n = 1$  уже доказано

$n > 1 \quad \bar{q} \rightarrow \bar{\xi}$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

$$\exists k_m < 0 : \ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0 \quad ||-$$

■

## 1.10 Вынужденные колебания в линейных системах

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

$$x = x_{\text{одн}} + x_{\text{ч}}$$

$$x_{\text{одн}} = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

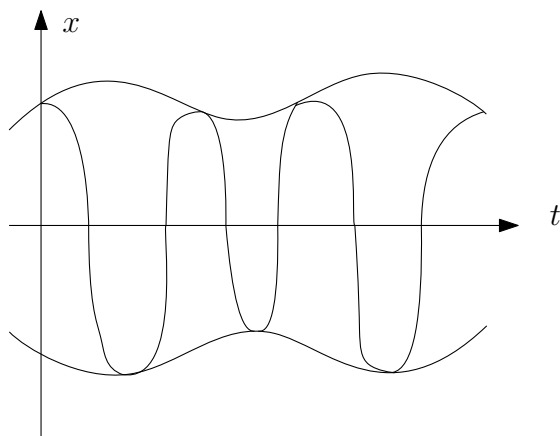
$$1) \omega \neq \omega_0 : x_{\text{ч}} = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad / \omega_0^2$$

$$\dot{x}_{\text{ч}} = \alpha \omega \cos \omega t - \beta \omega \sin \omega t \quad / 0$$

$$\ddot{x}_{\text{ч}} = -\alpha \omega^2 \sin \omega t - \beta \omega^2 \cos \omega t \quad / 1$$

$$\begin{cases} \alpha \omega_0^2 - \alpha \omega^2 = 0 \\ \beta \omega_0^2 - \beta \omega^2 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$



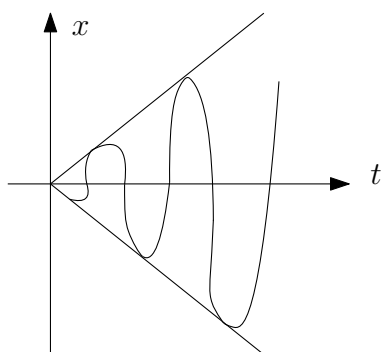
Биеция.

$$2) \omega = \omega_0 \quad x_{\text{ч}} = \alpha t \sin \omega_0 t$$

$$\dot{x}_{\text{ч}} = \alpha \sin \omega_0 t + \alpha \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{x}_{\text{ч}} = \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t - \alpha \omega_0 t \sin \omega_0 t \Rightarrow 2\alpha \omega_0 = f \Rightarrow \alpha = \frac{f}{2\omega_0}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



Резонанс.

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{Q}, \quad \bar{Q} = \bar{F} \cos \omega t$$

$$\bar{q} = U\bar{\xi}, \quad A \rightarrow E, \quad C \rightarrow K$$

$$(\bar{Q}, \delta\bar{q}) = (\bar{Q}, U\delta\bar{\xi}) = (U^T \bar{Q}, \delta\bar{\xi}) = (\bar{Q}\delta\bar{\xi})$$

$$\tilde{Q} = U^T \bar{Q}$$

### Лекция 6 от 14.03.2018

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{Q} = \ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$1) \bar{Q} = \bar{F} \cos \omega t, \quad Q_i = \mu_i \cos \omega t \quad \tilde{Q} = U^T \bar{F}$$

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \mu_i \cos \omega t$$

$$\begin{cases} \omega \neq \omega_i, \forall i = 1, \dots, n & \xi_i = \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i) + \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ \omega = \omega_k, \mu_k = 0, & \xi_k = \alpha_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + \frac{\mu_k}{2\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

$$2) \bar{Q} \text{ периодически по } t: (\bar{Q}(t+T) = \bar{Q}(t), \forall t \in (0; +\infty))$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{F} \left( a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} + Q_k \right) \right)$$

$$\bar{q} = \bar{q}_{\text{одн}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{q}_{\text{ч}}^{(k)}$$

$$\omega_i = \frac{2\pi k}{T}$$

**Пример.**

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = f \sin \omega t, \quad k > 0$$

$x = 0$  — равновесие (установившееся асимптотически) свободной системы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{\text{одн}} = 0$$

$$x_{\text{ч}} = R \sin(\omega t + \varphi)$$

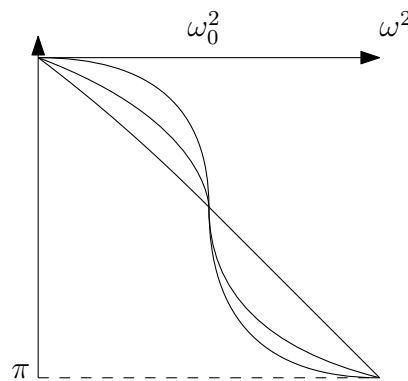
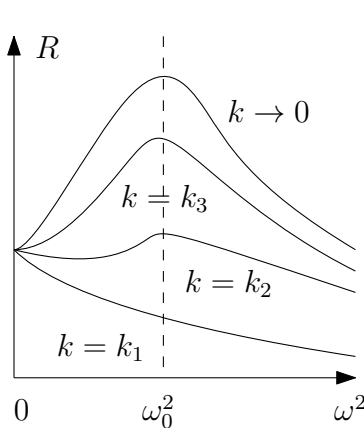
$$\dot{x}_{\text{ч}} = R\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}_{\text{ч}} = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$R(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + KR\omega \cos(\omega t + \varphi) = f \sin \omega t$$

$$R = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$((\omega_0^2 - \omega^2) + k^2 \omega^2)'_{\omega} = -2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 2k^2 \omega = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k^2}{2} \end{cases}$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \bar{Q}^* + \bar{Q}(t)$$

$$\bar{Q}^* = B\dot{\bar{q}}, \quad B = \text{const}$$

$\bar{q} = 0$  — устойчиво асимптотически

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \Leftrightarrow \text{Re } \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{F} \sin \omega t \Rightarrow \bar{Q}(t) = \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\bar{q} = \bar{q}_{\text{ч}} = \bar{h} e^{i\omega t} \quad \dot{\bar{q}} = \bar{h} i \omega e^{i\omega t} \quad \ddot{\bar{q}} = \bar{h} (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

$$D(i\omega) \bar{h} = \bar{F} \quad \det D(i\omega) \neq 0$$

$$\bar{h} = [D(i\omega)]^{-1} \bar{F} = W(i\omega) \bar{F}, \quad W(i\omega) = (w_{kj}), \quad k, j = 1, \dots, n$$

$$w_{kj} = |w_{kj}| e^{i \arg w_{kj}} = R_{kj} e^{i \varphi_{kj}}$$

$$R_{kj} = |w_{kj}| \quad \bar{q} = W(i\omega) \bar{F} e^{i\omega t}$$

$$\varphi_{kj} = \arg w_{kj} \quad \sum_{j=1}^n w_{kj} F_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj} F_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}$$

## 2 Гамильтонова механика

### 2.1 Преобразования Лежандра

Рассмотрим  $X(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X(\bar{x}) \in C$ .

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} &\neq 0 \\ \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) &= \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} \\ \Rightarrow \bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y}) &= \bar{x}(\bar{y}) \\ Y(\bar{y}) &= ((\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x}))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y})} \end{aligned}$$

**Определение.**  $Y(\bar{y})$  — преобразование Лежандра функции  $X(\bar{x})$  по переменной  $\bar{x}$ .

Свойства преобразований Лежандра<sup>2</sup>:

1. Инволютивность.

$$\begin{aligned} X, \bar{x} &\rightarrow Y, \bar{y} \rightarrow X, \bar{x} \\ \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= x_i + \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i}, \bar{y} \right) - \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) = \\ x_i + \left( \underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_{=0}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i} \right) &= x_i, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{x} &= \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} = \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \right)^{-1} \\ \det \frac{\partial^2 Y}{\partial \bar{y}^2} &= \left( \det \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{x}, X &\rightarrow \bar{y}, Y = [(\bar{x}, \bar{y}) - X(\bar{x})]|_{\bar{x}=f'(\bar{y})} \rightarrow \bar{z}, Z \\ \bar{y} = \bar{f}_2(\bar{z}), \quad \bar{z} = \bar{x}, \quad \bar{y} &= f_2^{-1}(\bar{x}), \quad f'(f_2^{-1}) = \bar{x} \\ Y(\bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} &= (\bar{x}, \bar{y})|_{\bar{y}=f_2^{-1}(\bar{x})} - X(\bar{x}) \\ X(\bar{x}) &= [(\bar{x}, \bar{y}) - Y(\bar{y})]|_{\bar{y}=\bar{y}(\bar{x})} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X &= X(\bar{x}, \alpha), \alpha \in \mathbb{R} \\ Y &= Y(\bar{y}, \alpha) \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ Y(\bar{y}, \alpha) &= ((\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}, \alpha)) - X(\bar{x}, \alpha))|_{\bar{x}=\bar{x}(\bar{y}, \alpha)} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \bar{y} \right) - \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = \\ &= \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}, \underbrace{\bar{y} - \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}_{=0} \right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Возможно, тут чего-то не хватает

Повторим это с лагранжианом.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

**Определение.**  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  — обобщенный импульс.

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

$$H(q, p, t) = [(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=\dot{q}(q, p, t)}$$

**Определение.**  $H$  — гамильтониан (функция Гамильтона).

**Определение.**  $(q, p, t)$  — канонические переменные (параметры Гамильтона).

**Теорема.** В канонических переменных уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Инвариантность} &\Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{L}{q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

■

**Определение.**

$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, t)\bar{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  — гамильтонова система, если

$$\bar{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T \quad \exists H = H(q, p) :$$

$$\bar{F} = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T$$

ПРИМЕР

## Лекция 7 от 21.03.2018

### 2.2 Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона

**Определение.**  $q_k$  — циклическая переменная, если  $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$   $\left( \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$ .

**Утверждение.** Если  $q_k$  — циклическая координата, то  $p_n = \text{const}$ .

Доказательство.

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const}.$$

■

**Утверждение.** Если  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , то  $H = \text{const}$ .

Доказательство.

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \left( \frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

■

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const} = \beta$$

$$H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \beta, t)$$

$$\tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T$$

$$H = H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases}$$

**Утверждение.** При  $\beta = \text{const}$  (заданном значении циклического интеграла  $\beta$ ) уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, \beta, t)}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \right) \Big|_{\beta=\text{const}}$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) \end{cases} \quad (*)$$

$$p_n = \beta = \text{const}$$

$$\dot{q}_n = \left( \frac{\partial H(\tilde{q}, \tilde{p}, t, \beta)}{\partial p_n} \right) \Big|_{(*)} = f(t, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = f \Rightarrow q_n = \int_0^t f(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2}, \beta) d\tau + c_{2n-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q, p) = \text{const} = h$$

$$\text{Пусть } \frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow p_n = p_n(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{n-1}, h) = -K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h),$$

$$\text{где } \tilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})^T, \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})^T, \quad \tau = q_n$$

**Определение.**  $K(\tilde{q}, \tilde{p}, \tau, h)$  — функция Уиттекера.

**Утверждение.** Уравнения Гамильтона на фиксированном уровне интеграла энергии локально эквивалентны уравнениям Уиттекера

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \\ \tilde{p}' = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \end{cases}, \quad \tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tau}, \quad \tilde{p}' = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}.$$

*Доказательство.*

$$H(\tilde{q}, \tau, \tilde{p}, -K) \equiv h$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_n \cdot \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{dH}{dq_i} = 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{p}_i - \dot{q}_n \frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_n} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tau, c_1, \dots, c_{2n-2})$$

$$p_n = -K(\tilde{q}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), \tilde{p}(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}), q_n, h) = p_n(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)$$

$$\int_0^t \frac{dq_n}{f(q_n, c_1, \dots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}$$

■



## 2.3 Скобки Пуассона

**Определение.** Скобкой Пуассона двух функций  $F(q, p)$  и  $G(q, p)$  называется

$$\{F, G\} = \left( \frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

1. Линейность

$$\{F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\} = \alpha_1 \{F, G_1\} + \alpha_2 \{F, G_2\}$$

$$\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}$$

2. Антикоммутативность

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

3. Тождество Якоби-Пуассона<sup>3</sup>

$$\{F, \{G, W\}\} + \{G, \{W, F\}\} + \{W, \{F, G\}\} = 0$$

$$\{F, \{G, W\}\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) \right) = \dots$$

4. Правило Лейбница

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\}$$

$$5. \{\varphi(F_1, \dots, F_k), G\} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial F_i} \{F_i, G\}$$

6.

$$F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial q_i} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\{F, G\}) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_i}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial p_i} \right\}$$

**Пример.**

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

**Утверждение.** Функция  $F(q, p, t)$  — первый интеграл системы с гамильтонианом  $H(q, p, t)$  тогда, и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0.$$

<sup>3</sup>Доказательство не доведено до конца

*Доказательство.*

$$\frac{dF}{dt} = \left( \frac{\partial F}{\partial q}, \dot{q} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial p}, \dot{p} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

**Замечание.**

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0$$

**Теорема (Якоби-Пуассона).** Скобка Пуассона двух первых интегралов в уравнении Гамильтона также является первым интегралом этих уравнений.

*Доказательство.* Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — первые интегралы системы с гамильтонианом  $H$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1, H\} &= 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\{F_1, F_2\}) + \{\{F_1, F_2\}, H\} &= \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} - \{H, \{F_1, F_2\}\} = \\ &= \{F_2, \{F_1, H\}\} + \{F_1, \{H, F_2\}\} + \{H, \{F_1, F_2\}\} = 0 \Leftrightarrow \{F_1, F_2\} \text{ — первый интеграл.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) + (b, \dot{q}) - \Pi(q, t) \\ H &= \frac{1}{2}(A^{-1}(p-b), (p-b)) + \Pi(1, t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}p, p)}_{H_2} - \underbrace{(A^{-1}p, b)}_{H_1} + \underbrace{\Pi(q, t) + \frac{1}{2}(A^{-1}b, b)}_{H_0} \end{aligned}$$

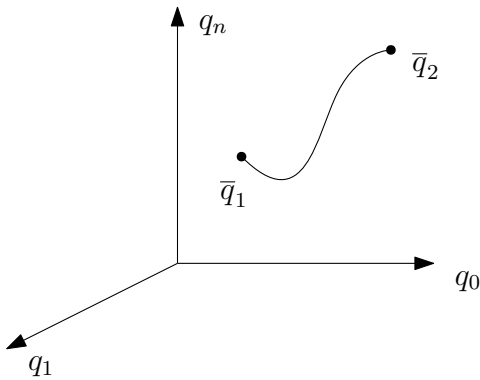
**Утверждение.**  $H = H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, f(q_n, p_n), t) \Rightarrow f(q_n, p_n) = \text{const} = \alpha$

**Определение.**  $q_n, p_n$  — отделяющиеся переменные

*Доказательство.*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 + \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

## Лекция 8 от 28.03.2018



$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$\gamma = \{q(t), t \in [t_1, t_2] \mid q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2\}$  — какая-то траектория

$$\Omega = \{q(t) \in C^2, t \in [t_1, t_2] \mid q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2\}$$

$$\gamma \in \Omega$$

**Определение.** Кривая, соответствующая решению уравнения Лагранжа системы с лагранжианом  $L$  называется прямым путем системы. Остальные пути называются окольными.

**Замечание.** Прямой путь не единственный.

**Определение.**  $S$  — функционал действия по Гамильтону

$$S = S(q(t))_{q(t) \in \Omega} = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

**Определение.** Семейство кривых  $q^\varepsilon(t) = q(t, \varepsilon)_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]}$ ,  $q^\varepsilon(t) \in \Omega$  — вариация кривой  $q(t)$ , если

1.  $q(t, 0) = q(t) \forall t \in [t_1, t_2]$ ,
2.  $q(\varepsilon, t_1) = q_1, q(\varepsilon, t_2) = q_2, \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ .

**Определение.**  $\delta S = \left( \frac{d}{d\varepsilon} S(q^\varepsilon(t)) \right)_{\varepsilon=0} d\varepsilon$  — вариация функционала  $S$ , соответствующая  $q(t)$  при вариации  $q^\varepsilon(t)$ .

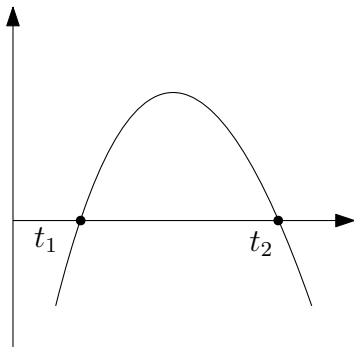
## 2.4 Принцип Гамильтона

**Утверждение.** Вариация функционала действия на некотором пути равна нулю тогда, и только тогда, когда путь прямой.

$$\delta S = 0 \forall q^\varepsilon(t) \Leftrightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \Big|_{q=q^\varepsilon(t,0)}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S(q^\varepsilon(t)) &= \int_{t_1}^{t_2} L(q^\varepsilon(t), \dot{q}^\varepsilon(t), t) dt \\ \frac{d}{d\varepsilon} S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt \\ \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= g(t), g(t_1) = g(t_2) = 0 \end{aligned}$$



$$\boxed{\Leftarrow} \quad q(t) \text{ — прямой путь} \Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \Big|_{q=q(t)} = 0 \Rightarrow \delta S = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} S d\varepsilon = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \delta S = 0 \text{ при } \forall q^\varepsilon(t), \text{ пусть } \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \Big|_{q(t,0)} = u(t) \neq 0$$

$$f(t) = (t - t_1)(t - t_2)$$

$$q^\varepsilon(t) = u(t)f(t)\varepsilon + q(t, 0)$$

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{u(t)f(t)}_{\left. \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}} u(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} (u(t), u(t)) f(t) dt = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0. \text{ Противоречие.}$$

■

## 2.5 Преобразование лагранжевиана при замене координат и времени

$$(q, t) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{t}) \quad \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, t) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q, t) \end{cases} \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{t})}{\partial(q_1, \dots, q_n, t)} \neq 0$$

$$\begin{cases} q = q(\tilde{q}, \tilde{t}) \\ t = t(\tilde{q}, \tilde{t}) \end{cases} \quad (1)$$

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$$\tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} = \frac{\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} dq + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} dt}{\frac{\partial \tilde{t}}{\partial q} dq + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} dt}$$

$$\dot{q} = \frac{d}{dt} = \frac{\frac{\partial q}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t}}{\frac{\partial t}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t}} \quad (2)$$

$$L(q, \dot{q}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (*)$$

**Утверждение.** Если в уравнениях (\*) произвести замену (1), (2), то полученные уравнения будут иметь вид уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(q, \dot{q}, t)|_{(1),(2)} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

*Доказательство.*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)|_{(1),(2)} \frac{dt}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{L}(\tilde{q}(t), \tilde{q}'(t), \tilde{t}) d\tilde{t}$$

■

**Пример.**

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2}, \quad \tilde{q} = qe^{n\alpha}, \quad \tilde{t} = te^{k\alpha}, \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha - \text{параметр.}$$

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = \frac{(\tilde{q}' e^{(n-k)\alpha})^2}{2} \cdot e^{-k\alpha} \quad \square$$

$$\tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} = \frac{dq e^{n\alpha}}{dt e^{k\alpha}} = \dot{q} e^{(n-k)\alpha}, \quad \dot{q} = \tilde{q}' e^{(k-n)\alpha}$$

$$\square \frac{(\tilde{q}')^2}{2} e^{(2k-2n-k)\alpha} = \frac{(\tilde{q}')^2}{2} e^{(k-2n)\alpha} = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) e^{(k-2n)\alpha}$$

Если  $k = 2n$ , то  $\tilde{L} = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$ .

**Определение.** Однопараметрическое семейство преобразования координат

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha) \end{cases} \quad (3)$$

называется группой вариационных симметрий системы с лагранжианом  $L$ , если

1.  $\det \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{t})}{\partial(q_1, \dots, q_n, t)} \neq 0$ ;
2.  $\tilde{q}(q, t, 0) = q, \quad \tilde{t}(q, t, 0) = t$ ;
3.  $\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$ .

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) = L(q, \dot{q}, t), \quad \eta = \left. \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad \zeta = \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

**Теорема (Эмми Нетер).** Если (3) - группа вариационных симметрий системы, то функция  $f = p\eta - \zeta H$  является первым интегралом системы.

**Пример.**

При  $k = 2n$ :  $\tilde{q} = qe^{n\alpha}, \quad \tilde{t} = te^{k\alpha}$  - группа вариационных симметрий.

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad \eta = \left. \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = qe^{n\alpha}n|_{\alpha=0} = nq$$

$$H = p\dot{q} - L = \dot{q}^2 - \frac{\dot{q}^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2}$$

$$\zeta = \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = te^{2n\alpha} \cdot 2n|_{\alpha=0} = 2nt$$

$$f = p\eta - \zeta H = \dot{q}nq - 2nt \cdot \frac{\dot{q}^2}{2} = n\dot{q}(q - \dot{q}t) = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \ddot{q} = 0 \Rightarrow q = C_1 t + C_2 \Rightarrow f = nC_1(C_2) = \text{const}$$

**Пример.**

$$L = L(q, \dot{q})$$

$$\begin{cases} \tilde{q} = q \\ \tilde{t} = t + \alpha \end{cases} \quad - \text{группа вариационных симметрий}$$

### Лекция 9 от 04.04.2018

$$(1) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha) \end{cases} \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, \tilde{t})}{\partial(q_1, \dots, q_n, t)} \neq 0$$

$$\tilde{q}(q, t, 0) = q, \quad \tilde{t}(q, t, 0) = t, \quad \tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t})$$

$$f = (\eta \cdot p) - \zeta H = \text{const}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad \eta = \left. \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad H = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) = L, \quad \zeta = \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

*Доказательство.*

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{q} = q + \alpha\eta + O_2(\alpha) \\ \tilde{t} = t + \alpha\zeta + O_2(\alpha) \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} q = \tilde{q} - \alpha\eta + O_2(\alpha) \\ t = \tilde{t} - \alpha\zeta + O_2(\alpha) \end{cases}$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{q} - \alpha\eta + O_2(\alpha)) = \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} - \alpha\dot{\eta} + O_2(\alpha) = q'(1 + \alpha\dot{\zeta}) - \alpha\dot{\eta} + O_2(\alpha)$$

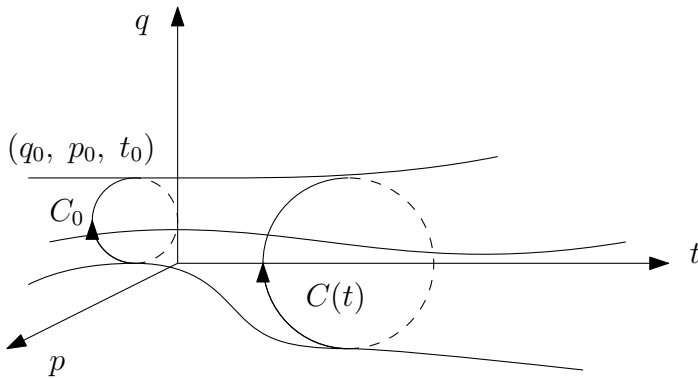
$$\dot{q} = \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\tilde{q}' - \dot{\eta}) + O_2(\alpha) = \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\dot{q} - \dot{\eta}) + O_2(\alpha) \quad (2)$$

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) = L(q, \dot{q}, t)|_{(1'), (2)} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}} = L(\tilde{q} - \alpha\eta + O_2, \tilde{q}' + \alpha(\dot{\zeta}\dot{q} - \dot{\eta}) + O_2, \tilde{t} - \alpha\zeta + O_2) \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q}, -\eta \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \zeta \dot{q} - \dot{\eta} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}(-\zeta) \right] + O_2 \right) (1 - \alpha \dot{\zeta} + O_2) = \\
&= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[ - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \eta \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{\eta} \right) + \dot{\zeta} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \dot{\zeta} L - \frac{\partial L}{\partial t} \zeta \right] + O_2 = \\
&= L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) + \alpha \left[ -(\dot{p}, \eta) - (p, \dot{\eta}) + \dot{\zeta} H + \frac{\partial H}{\partial t} \zeta \right] + O_2 = \\
&L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) - \alpha \frac{d}{dt} f + O_2(\alpha) = L(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{t}) \\
&\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow f = const
\end{aligned}$$

■

## 2.6 Интегральный инвариант



$$H = H(q, p, t)$$

$$(*) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$\{q, p, t\}$  — расширенное фазовое пространство.

$$\begin{cases} q = q(t, q_0, p_0) \\ p = p(t, q_0, p_0) \end{cases} \quad \text{— прямой путь.}$$

$$C_0 \rightarrow C(t)$$

$$I_n = \oint_{C: t=const} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint (p, \delta q) \text{ — универсальный интегральный инвариант Пуанкаре.}$$

**Утверждение.** Величина  $I_n$  сохраняется на всех контурах (изохронах), охватывающих одну и ту же трубку прямых путей системы (\*).

*Доказательство.*

$$C(t) : \begin{cases} q = q(\alpha), & \alpha \in [0; 1] \\ p = p(\alpha), & q(0) = q(1) \\ t = const, & p(0) = p(1) \end{cases}$$

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$$\frac{d}{dt} I_n = \oint_C (\dot{p}, \delta q) + (p, (\dot{\delta} q)) \quad (\equiv)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d}{dt} q \right) \delta \alpha = \delta \dot{q}$$

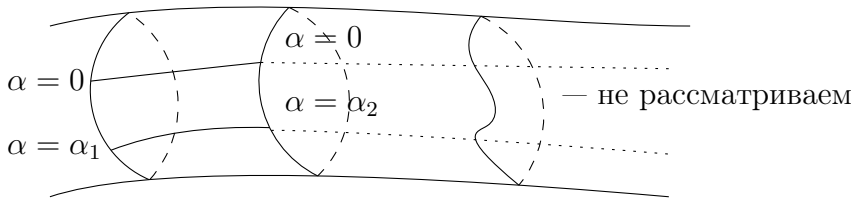
$$\begin{aligned}
& \left( \equiv \oint_C (\dot{q}, \delta q) + (p, \delta \dot{q}) = \oint_C \delta(p, \dot{q}) - \oint_C (\delta p, \dot{q}) + \oint_C (\dot{p}, \delta q) \right) \stackrel{(*)}{=} \\
& \stackrel{(*)}{=} - \oint_C \left( \frac{\partial H}{\partial p}, \delta p \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial q}, \delta q \right) = - \oint_C \delta H = 0 \Rightarrow I_{\Pi} = \text{const}
\end{aligned}$$

**Определение.**

$$I = \oint [(A(q, p, t), \delta q) + (B(q, p, t), \delta p) + \gamma(q, p, t) \delta t]$$

$I$  — относительный интегральный инвариант первого порядка системы  $(*)$ , если  $I$  сохраняет свое значение на всех согласованных контурах, охватывающих одну и ту же трубку прямых путей.

**Определение.** Контур согласован, если существует такая из параметризация, что каждому значению параметра разных контуров соответствуют точки одного и того же пути.



**Теорема** (Теорема Ли Хуа-Чжуна).

$$I = \oint_{C:t=\text{const}} (A(q, p, t), \delta q) + (B(q, p, t), \delta p)$$

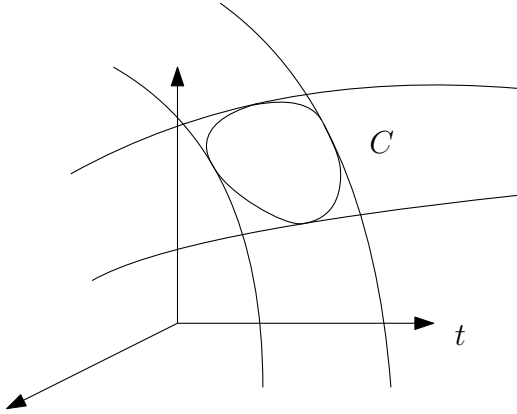
— универсальный (не зависит от гамильтониана) интегральный инвариант системы  $(*)$  тогда, и только тогда, когда  $I = cI_n$ ,  $c = \text{const}$

**Доказательство.** Для простоты  $n = 1$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I &= \frac{d}{dt} \oint_{C:t=\text{const}} A \delta q + B \delta p = \oint_C \dot{A} \delta q + \dot{B} \delta p + A \delta \dot{q} + B \delta \dot{p} = \oint_C \delta(A \dot{q} + B \dot{p}) - \delta A \dot{q} - \delta B \dot{p} + \dot{A} \delta q + \dot{B} \delta p = \\
&= \oint_C \left( \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \cancel{\frac{\partial A}{\partial q} \dot{q}} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta q - \left( \frac{\partial A}{\partial p} \delta p + \cancel{\frac{\partial A}{\partial q} \delta q} \right) \dot{q} + \left( \cancel{\frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}} + \frac{\partial B}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \delta p - \left( \cancel{\frac{\partial B}{\partial p} \delta p} + \frac{\partial B}{\partial q} \delta q \right) \dot{p} = \\
&= \oint_C - \left( \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \right) \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \left( \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} \right) \left( - \frac{\partial A}{\partial q} \right) \delta q + \frac{\partial A}{\partial t} \delta q + \frac{\partial B}{\partial t} \delta p = \\
&= \oint_C \underbrace{\alpha \delta p + \beta \delta q}_{\delta f} = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial q} \\
\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial q} = -z \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}, & z = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} = -z \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \Leftrightarrow - \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \cancel{z \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}} + \frac{\partial^2 A}{\partial p \partial t} = - \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \cancel{z \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}} + \frac{\partial^2 B}{\partial q \partial t} \\
- \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad \forall H \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow z = c = \text{const} \\
\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = c \\
\frac{\partial}{\partial p} (A - cp) = \frac{\partial B}{\partial q} \Leftrightarrow (A - cp) \delta q + B \delta p = 0 \\
A \delta p + B \delta p = cp \delta q \Rightarrow I = cI_{\Pi}
\end{aligned}$$

**Определение.**  $I_{пк} = \oint (p, dq) - H dt$  — интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

**Утверждение.**  $I_{пк} = const.$



*Доказательство.*

$$C : \tau(q, p, t) = const$$

$$q_{n+1} = t$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$q' = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dH}{dp} \eta$$

$$\eta(q, p, q_{n+1}) = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$p' = \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} \eta$$

$$p_{n+1} = -H(q, p, t) \quad q'_{n+1} = \frac{dt}{d\tau} = \eta$$

$$\tilde{H} = \eta(H + p_{n+1}) \quad p'_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} \eta = -\frac{\partial H}{\partial t} \eta$$

Докажем, что  $\tilde{H}$  — новый гамильтониан.

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial p} = \eta \frac{\partial H}{\partial p} = q'$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} = \frac{\partial \eta}{\partial q} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial q} = \eta \frac{\partial H}{\partial q} = -p'$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{n+1}} = \eta = q'_{n+1}, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_{n+1}} = \frac{\partial \eta}{\partial q_{n+1}} (H + p_{n+1}) + \eta \frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial H}{\partial t} = -p'_{n+1}$$

$$I = \oint_C (\tilde{p}, \delta \tilde{q}) - \text{инвариант} \Rightarrow I_{пк} = \oint (p, dq) - H dt$$

■

$$I = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = V$$

## Лекция 10 от 11.04.2018

### 2.7 Теорема Лиувилля

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (1)$$



**Определение.**

$$V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

— фазовый объем.

**Определение.**  $\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x} = \bar{x}(t, \bar{x}_0)$  — фазовый поток системы (1).

**Теорема.** Если  $\operatorname{div} f = 0$ , то  $V = \text{const}$ .

*Доказательство.*

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t\bar{f}(\bar{x}_0) + O_2(t)$$

$$V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int \left| \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} \right| dx_{10} \dots dx_{n0}$$

$$\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0} = \det \left( E + t \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} + O_2 \right) = 1 + t \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} \right) + O_2$$

$$\dot{V}|_{t=0} = \int \dots \int \left( 0 + \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} \right) + O_2 \right) dx_{10} \dots dx_{n0} \quad \begin{vmatrix} 1 + t \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} & \overbrace{t \cdot (*)}^{O_2} \\ t \cdot (-*) & 1 + t \frac{\partial f_2}{\partial x_{20}} \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=0} = 0$$

$$\operatorname{div} \bar{f} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{V}|_{t=t_*} = 0, \forall t_* \Rightarrow V = \text{const}$$

■

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} & \bar{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} & \bar{f}_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \bar{f}_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \Rightarrow V_h = \text{const}$$

**Замечание.** Такие преобразования фазов. пот. сохраняют  $V$ .

## 2.8 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

**Теорема.** Если на любой трубке траектории системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{q} = Q(q, p, t) \\ \dot{p} = P(q, p, t) \end{cases} \quad (*)$$

$I_n = \oint_{C:t=\text{const}} (p, \delta q)$  сохраняется, то данная система гамильтонова.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_n &= \oint_{C:t=\text{const}} (\dot{p}, \delta q) + (p, \delta \dot{q}) = \oint_{C:t=\text{const}} \delta(p, \dot{q}) - (\delta p, \dot{q}) + (\dot{p}, \delta q) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \oint_C (P, \delta q) - (Q, \delta p) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow \exists H : (P, \delta q) - (Q, \delta p) = -\delta H = -\left( \frac{\partial H}{\partial p}, \delta p \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial q}, \delta q \right) \\ Q &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

■

**Теорема.** Если на любой трубке прямых путей системы (\*)  $I_{n\kappa} = \oint_C (p, dq) - H dt$ , то система гамильтонова с гамильтонианом  $H$ .

*Доказательство.* Возьмем  $C_1$ , на котором  $dt = 0$  (изохроны).

$$\oint_C (p, dq) - H dt = \oint_{C_1} (p, dt) - \text{инвариант} \Rightarrow \text{по предыдущей теореме } \exists H(q, p, t) : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\text{пк}}^* = \oint_C (p, dq) - H^* dt = \oint_{C_1} (p, dq)$$

$$I_{\text{пк}} - I_{\text{пк}}^* = \oint_C (H^* - H) dt = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (H^* - H) dt = dF = \left( \frac{\partial F}{\partial q}, dq \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial p}, dp \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H^* - H$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H^*}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H^*}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \text{система (*) гамильтонова с гамильтонианом } H.$$

■

## 2.9 Канонические преобразования

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ p = p(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \end{cases}$$

$$H = H(q, p, t) \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0$$

$$\dot{q}|_{(1)} = \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \right) \Big|_{(1)} = Q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \stackrel{?}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}$$

$$\dot{p}|_{(1)} = \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) \Big|_{(1)} = P(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \stackrel{?}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}$$

**Пример.**

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2}, \quad \begin{cases} \tilde{q} = p^2 \\ \tilde{p} = q \end{cases} \quad \begin{cases} q = \tilde{p} \\ p = \pm \sqrt{\tilde{q}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = 2p\dot{p} = -2pq = \mp 2\tilde{p}\sqrt{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} = \dot{q} = p = \pm \sqrt{\tilde{q}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \stackrel{?}{=} Q = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \stackrel{?}{=} P = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{matrix}$$

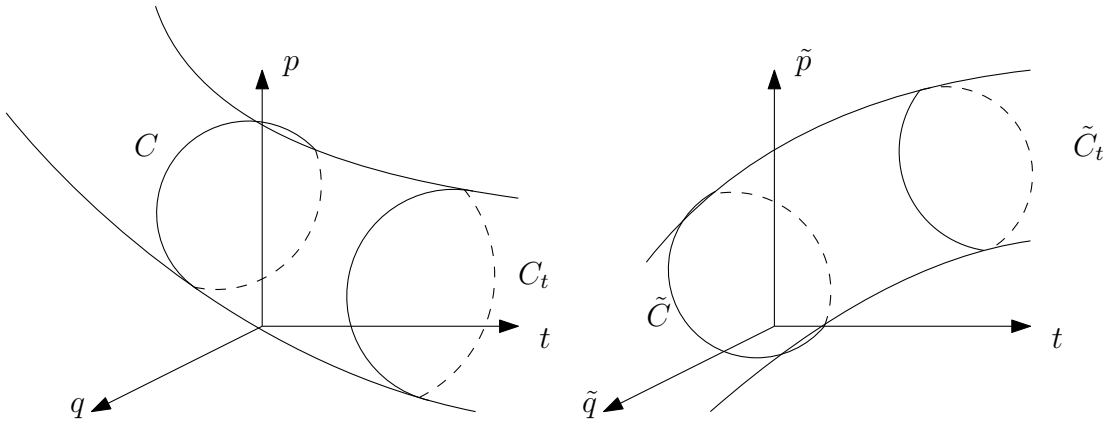
$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{q}} = \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}} \quad \mp \tilde{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{q}}} \neq 0 \Rightarrow \text{система не гамильтонова.}$$

**Определение.** Неособенное (т.е. обр.) преобразование вида (2) называется каноническим, если оно любую гамильтонову систему превращает в гамильтонову систему.

**Теорема** (Критерий канонического преобразования). Преобразование (2) каноническое  $\Leftrightarrow \exists c \neq 0, F(q, p, t):$

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = c(p, dq) - H dt - dF$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$



$$C \xrightarrow{(2)} \tilde{C}$$

$$\oint_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = \oint_{\tilde{C}_t: t=\text{const}} (\tilde{p}, \delta\tilde{q}), \quad \begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{p}(q, p, t) \\ \tilde{q} &= \tilde{q}(q, p, t) \end{aligned}$$

$$\oint_C (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = \oint_{C_t} \left( \tilde{p}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \delta p \right) = \oint_{C_t} (A, \delta q) - (B, \delta p) \quad \text{т. Ли-Хуанчжуна}$$

$$= c \oint_{C_t} (p, \delta q) = \left( \oint_C (p, dq) - H dt \right) c$$

$$\oint_C \left( (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt - c[(p, dq) - H dt] \right) = 0 \quad \forall C \Leftrightarrow (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = c((p, dq) - H dt) - dF$$

⇐ Проинтегрируем равенство

$$\oint_C (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = c \oint_C (p, dq) - H dt - \underbrace{\oint_C df}_0 = I$$

$$\oint_{\tilde{C}} (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt = \oint_C (p, dq) - H dt - \text{инвариант, т.к. } I - \text{инвариант.}$$

По второй обратной теореме система гамильтонова с гамильтонианом  $\tilde{H}$ .

**Определение.**  $c = \text{const} \neq 0$  – валентность преобразования,  $F(q, p, t)$  – производящая функция.

### Лекция 11 от 18.04.2018

$$(1) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases}$$

**Теорема.** (2) канонично тогда, и только тогда, когда  $\exists c \neq 0$ ,  $F(q, p, t)$ :

$$c((p, dq) - H dt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt + dF \quad (3)$$

**Определение.** Если  $c = 1$ , преобразование унивалентно.

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial q}, dq \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial p}, dp \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt = \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$dq = \delta q$$

$$d\tilde{q} = \delta\tilde{q} + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} dt$$

$$(3) \Rightarrow c(p, \delta q) - H dt = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} \right) dt - \tilde{H} dt + \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -cH = \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} \right) - \tilde{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \delta F \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{H} = cH + \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

**Следствие.** Преобразование (2) канонично тогда, и только тогда, когда  $\exists c \neq 0$ ,  $F$  :

$$c(p, \delta q) = (\tilde{p}, \delta\tilde{q}) + \delta F \quad (3')$$

**Следствие.**  $\tilde{H} = cH + \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$  — правило преобразований Гамильтона

Рассмотрим  $z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$

$$(1) \Leftrightarrow \dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

**Определение.**  $J$  — симплектическая единица.

$$J^T = J^{-1} = -J; \quad J^2 = -E_{2n}; \quad \det J = 1$$

Пусть  $\tilde{z} = \tilde{z}(z, q)$

$$M = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_n} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_1} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_n} & \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$\det M \neq 0$$

$$I.(3') \quad c(p, \delta q) = \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} \delta p \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial q}, \delta q \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial p}, \delta p \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} = c p_i - \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = - \left( \tilde{p}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_j} \right), \quad j = 1, \dots, n$$

Так как предполагаем, что  $F \in C^2$  :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow 0 - \left( \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_j}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q_i} \right) - \left( \tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial p_j \partial q_i} \right) = - \left( \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_j} \right) - \left( \tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial p_j} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_j} \right) - \left( \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_j}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_i} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_i}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_j}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} \Leftrightarrow c \delta_{ij} - \left( \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_j}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q_i} \right) - \left( \tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial p_j \partial q_i} \right) = - \left( \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_j} \right) - \left( \tilde{p}, \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial q_i \partial p_j} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p_j} \right) - \left( \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p_j}, \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q_i} \right) = c \delta_{ij} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
II. M^T J M &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} \\
(M^T J M)_{i,j} &= \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} \\
(M^T J M)_{i,n+j} &= \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p}\right) = \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} \\
(M^T J M)_{n+i,j} &= \{\tilde{p}_i, \tilde{q}_j\} \\
(M^T J M)_{n+i,n+j} &= \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}
\end{aligned}$$

**Утверждение.**  $M^T J M = cJ$ ,  $c \neq 0 \Leftrightarrow M J M^T = cJ$ ,  $c \neq 0$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
J &= c(M^T)^{-1} J M^{-1} = c(M J^{-1} M^T)^{-1} \\
J^{-1} &= \frac{1}{c} M J^{-1} M^T \Rightarrow M J M^T = cJ
\end{aligned}$$

■

**Теорема.** Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда  $\exists c \neq 0 : M J M^T = cJ$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
I. (3') &\Leftrightarrow (4), (5), (6) \\
II. (M J M^T)_{i,j} &= \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_j}\right) = 0 \Leftrightarrow (4) \\
(M J M^T)_{i,n+j} &= \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p_j}\right) - \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p_i}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q_j}\right) = c\delta_{ij} \Leftrightarrow (6) \\
(M J M^T)_{n+i,j} &= \dots = -c\delta_{ij} \\
(M J M^T)_{n+i,n+j} &= 0 \Leftrightarrow (5)
\end{aligned}$$

■

**Теорема.** Преобразование канонично тогда, и только тогда, когда  $\exists c \neq 0$ :

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = c\delta_{ij}$$

*Доказательство.*

$$M J M^T = cJ \Leftrightarrow M^T J M = cJ \Leftrightarrow \dots$$

■

**Определение.** Если  $M^T J M = J$ , то  $M$  — симплектическая. Если  $M^T J M = cJ$ ,  $c \neq 0$ , то  $M$  — обобщенно симплектическая.

**Замечание.**  $(\det M)^2 = \det(M^T J M) = \det(cJ) = c^{2n}$ ,  $\det M \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$ .

**Пример.**  $\tilde{q} = q$ ,  $\tilde{p} = p \Leftrightarrow M = E \Rightarrow$  преобразование канонично (унивалентно).

**Утверждение.** Если  $M$  — обобщенная симплектическая, то  $M^{-1}$  обобщенная симплектическая (обратное преобразование каноническое).

*Доказательство.*

$$(M^{-1})^T J M^{-1} = -(M J M^T)^{-1} = cJ \Leftrightarrow M J M^T = c'J, \quad c = \frac{1}{c'}$$

■

**Утверждение.** Композиция канонических преобразований канонична.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 z &\rightarrow z_1 = z_1(z, t), \quad M_1 = \frac{\partial z_1}{\partial z}, \quad M_1^T J M_1 = c_1 J \\
 z_1 &\rightarrow z_2 = z_2(z_1, t), \quad M_2 = \frac{\partial z_2}{\partial z_1}, \quad M_2^T J M_2 = c_2 J \\
 \tilde{z} &= z_2(z_1(z, t), t) \\
 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} &= \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} = M_2 M_1 \\
 (M_2 M_1)^T J (M_2 M_1) &= M_1^T \underbrace{M_2^T J M_2}_{c_2 J} M_1 = c_2 M_1^T J M_1 = c_1 c_2 J = c J, \quad c = c_1 c_2 \neq 0
 \end{aligned}$$

■

**Следствие.** Множество симплических матриц (множество канонических преобразований) образуют группу.

**Пример.**

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= J \frac{\partial H}{\partial z}, \quad z = z(z_0, t) \\
 M &= \frac{\partial z}{\partial z_0} \\
 \frac{d}{dt} M &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial z_0} \right) = \frac{\partial}{\partial z_0} \left( J \frac{\partial H}{\partial z} \right) = J \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial z_0} = J \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} H \\
 (\dot{M}^T) &= M^T \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} J^T \\
 (M^T \dot{J} M) &= 0 \Rightarrow M^T J M = \text{const} = 1, \quad \text{т.к.} \quad M|_{t=0} = \frac{\partial z_0}{\partial z_0} = 1
 \end{aligned}$$

**Следствие.** Определитель  $\det M = 1 \Rightarrow$  фазовый поток сохраняется ( $V = \text{const}$ ).

## Лекция 12 от 25.04.2018

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} & \quad (2) \quad \begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases} \quad (2.1) \quad \det \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \neq 0 \\
 (3) \quad c((p, dq) - H dt) &= (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt + dF(q, p, t)
 \end{aligned}$$

### 2.10 Свободные канонические преобразования

**Определение.** Преобразование вида (2) — свободное, если  $\det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0$ .

$$(2.1), \det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q, \tilde{q}, t)$$

$$(2.2), p = p(q, \tilde{q}, t) \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q, \tilde{q}, t)$$

$$F(q, p(q, \tilde{q}, t), t) = S(q, \tilde{q}, t)$$

$$(3) \Rightarrow c((p, dq) - H dt) = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H} dt + \left( \frac{\partial S}{\partial q}, dq \right) + \left( \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}, d\tilde{q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} \neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q} \partial q} \neq 0 \quad (4)$$

**Утверждение.** Свободное преобразование канонично тогда, и только тогда, когда  $\exists \Phi, S(q, \tilde{q}, t), c \neq 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} = -\tilde{p} \end{cases}.$$

Тогда, если преобразование канонично, гамильтонова система в новых переменных имеет вид:

$$\tilde{H} = \left( cH(q, p, t) + \frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial t} \right) \Big|_{\substack{q = q(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ p = p(\tilde{q}, \tilde{p}, t)}}$$

**Замечание.** Функция  $S(q, \tilde{q}, t)$ , удовлетворяющая условию (4), однозначно определена преобразованием заданной валентности.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial q} = cp, \det \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q} \partial q} \neq 0 &\Rightarrow \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = -\frac{\partial S(q, \tilde{q}, t)}{\partial \tilde{q}}, \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) &\Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\tilde{q} = q, \tilde{p} = p$$

$$\det \frac{\partial q^2}{\partial p} = 0 \text{ — не свободное.}$$

**Замечание.** Вместо  $(q, \tilde{q}, t)$  можно рассматривать  $(q, \tilde{p}, t)$ ,  $(\tilde{q}, p, t)$ ,  $(p, \tilde{p}, t)$ .

Рассмотрим, например,  $(q, \tilde{p}, t)$ :

$$(2) \text{ — полусвободное, если } \det \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t), \det \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \neq 0 \Rightarrow p = p(q, \tilde{p}, t), \tilde{q} = \tilde{q}(q, \tilde{p}, t)$$

$$c(p, dq) - cHdt = (\tilde{p}, d\tilde{q}) - \tilde{H}dt + dF$$

$$(\tilde{p}, d\tilde{q}) = d(\tilde{p}, \tilde{q}) - (\tilde{q}, d\tilde{p}), F(q, p, t) + (\tilde{p}, \tilde{q}) = S_1(q, \tilde{p}, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(p, dq) - cHdt = -(\tilde{q}, d\tilde{p}) - \tilde{H}dt + \left( \frac{\partial S}{\partial q}, dq \right) + \left( \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}, d\tilde{p} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial q} = cp \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q} \\ \tilde{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{cases}$$

**Пример.**

$$p = \tilde{p}, q = \tilde{q}, c = 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1(q, \tilde{p}, t)}{\partial q} = \tilde{p} \\ \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{p}} = q \end{cases} \quad S_1 = (q, \tilde{p})$$

## 2.11 Уравнение Гамильтона-Якоби. Метод Якоби

$$\tilde{H} = 0 \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} \\ \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} \end{cases} \quad \begin{aligned} \tilde{q} &= \alpha = const \\ \tilde{p} &= \beta = const \end{aligned}$$

Будем искать унивалентное свободное преобразование, переводящее гамильтониан в ноль.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (*)$$

Соответствует системе с гамильтонианом  $H(q, p, t)$ .

**Пример** (Математический маятник).

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

$$\text{Т.к. } L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - \Pi(q), \text{ то } H = \frac{1}{2}(A^{-1}(q)\dot{p}, \dot{p}) + \Pi(q)$$

$$H = \frac{p\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - mgl \cos \varphi = 0$$

**Определение.** Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется функция  $S(q, \alpha, t)$  такая, что

1. удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби,

2.  $\det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial q} \neq 0$ .

**Теорема** (Гамильтона-Якоби). Если известен полный интеграл Гамильтона-Якоби, то общее решение соответствующих уравнений Гамильтона определяется из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta \Rightarrow \begin{cases} q = q(\alpha, \beta, t) \\ p = p(\alpha, \beta, t) \end{cases}.$$

**Замечание.** Можно заменить  $\beta$  на  $-\beta$ .

**Пример** (Движение точки по прямой).

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \quad H = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad S = S(x, \alpha, t)$$

$$S = \frac{m(x+\alpha)^2}{2t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m(x+\alpha)^2}{2t^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial x} = \frac{m}{t} \neq 0$$

$S$  — полный интеграл уравнения (\*)

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \\ -\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{m(x+\alpha)}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} p_x = -\beta \\ x = -\frac{\beta}{m}t - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} p_x = mx_0^2 \\ x = \dot{x}_0 t + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x(0) = m\dot{x}_0 = -\beta \\ x(0) = x_0 = -\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -m\dot{x}_0 \\ \alpha = -x_0 \end{cases}$$

$$S = S_1(x, \alpha) + S_2(t, \alpha)$$

$$S = -\alpha t + S_1(x, \alpha) \rightarrow (*)$$

$$-\alpha + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} = \pm \sqrt{2m\alpha} \quad S_1 = \pm x \sqrt{2m\alpha}$$

$$\text{Тогда } S = -\alpha t \pm x \sqrt{2m\alpha}$$

«+» в области  $p_x \geq 0$ , «-» в области  $p_x < 0$



Рассмотрим натуральную систему с одной степенью свободы.

**Пример.**

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \Pi(q)$$

$$H = \frac{p^2}{2a(q)} + \Pi(q)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2a(q)} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \Pi(q) = 0$$

$$S = -h(\alpha)t + S_1(q, \alpha) :$$

$$-h(\alpha) + \frac{1}{2a(q)} \left( \frac{\partial S_1}{\partial q} \right)^2 + \Pi(q) = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = \pm \sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}$$

$$S = -h(\alpha)t \pm \int_{q_0(\alpha)}^q \sqrt{2a(\xi)(h(\alpha) - \Pi(\xi))} d\xi$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}$$

$$-\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\frac{dh}{d\alpha}t \pm \int_{q_0(\alpha)}^{q_0} \frac{d\xi \sqrt{a(\xi)}}{\sqrt{(h(\alpha) - \Pi(\xi))}} \mp \underbrace{\frac{dq_0}{d\alpha}}_0 \underbrace{\sqrt{2a(q)(h(\alpha) - \Pi(q))}}_0$$

## 2.12 Метод разделения переменных

**Теорема** (об отделении времени). Если  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , то  $S(q, \alpha, t)$  — полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \Leftrightarrow S = -h(\alpha)t + S_1(q, \alpha),$$

где  $S_1$  — полный интеграл уравнения  $H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha)$  (т.е.  $\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q, \partial \alpha} \neq 0$ ).

*Доказательство.*

$$S = S_0(t, \alpha) + S_1(q, \alpha)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_1}{\partial q}$$

$$-\frac{dS_0(t, \alpha)}{dt} \equiv H\left(q, \frac{\partial S_1(q, \alpha)}{\partial q}\right) \equiv h(\alpha)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial t} = -h(\alpha) \Leftrightarrow S_0 = -h(\alpha)t + C(\alpha), \quad C(\alpha) = \text{const} \\ H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{dS_0}{d\alpha} = -\frac{dh}{d\alpha}t + \frac{dC}{d\alpha} \neq 0, \quad \frac{dh}{d\alpha} \neq 0$$

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial \alpha} \neq 0 \Leftrightarrow \det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

■

$$H = H(q, p, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0, \alpha = \text{const.}$$

**Теорема** (Об отделении координаты). Если  $H = H(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t)$ , где  $\frac{\partial H}{\partial f} \neq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial p_q} \neq 0$ , то функция

$$S(q, \alpha) = S_1(q, \alpha_1) + S_2(q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

является полным интегралом соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби  $\Leftrightarrow$

$$1. S_1(q_1, \alpha_1) - \text{решение } f\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1;$$

$$2. S_2(q_1, \dots, t) - \text{полный интеграл уравнения}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + H\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t\right) = 0.$$

Доказательство.  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(f\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right)$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

$$S = S_1 + S_2 \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} + H\left(f\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right), q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_1 \partial \alpha} \cdot \det \left( \frac{\partial S_2}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0$$

$$(1) \frac{\partial H}{\partial f} = 0 \Rightarrow f\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = F(q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t)$$

$$S_1 = S_1(q_1, \alpha_1) \frac{\partial S_2}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow f\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = g(\alpha_1) = \tilde{\alpha}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0 \Rightarrow \frac{dS_1}{dq_1} = G(q_1, \tilde{\alpha}_1) \\ \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_1 \partial \alpha_1} \neq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \alpha_1 = \tilde{G}(q_1, \tilde{\alpha}_1), 0 = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial q_1} \Rightarrow \alpha_1 = \tilde{g}(\tilde{\alpha}_1) \Rightarrow 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1., (1) \Rightarrow \frac{\partial S_2}{\partial t} + H\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t\right) = 0 \\ \det \left( \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{i,j=2,\dots,n} \neq 0 \end{array} \right| \Rightarrow 2.$$

$\Leftarrow$

1., 2.  $\Rightarrow S = S_1 + S_2$  — решения уравнения Гамильтона-Якоби.

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \mu(q_1, \alpha_1) \quad f(q_1, \mu(q_1, \alpha_1)) = \alpha_1 \quad \Big| \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial \alpha_1} \neq 0$$

$$\det \left( \frac{\partial^2 S_2}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0$$

■

## Метод разделения переменных

1.

$$H = H(q, p) \left( \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \right) \Rightarrow S = -h(\alpha)t + S_1(q, \alpha) :$$

$$S_1(q, \alpha) - \text{полный интеграл уравнения } H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = h(\alpha)$$

2.

$$H = H(q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad \left( \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 \right) \Rightarrow$$

$$S = \alpha_1 q_1 + s_2(q_2, \dots, q_n, t), \text{ где } S_2(q_2, \dots, q_n, \alpha_2, t) = 0 \text{ — полный интеграл}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + H \left( q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t \right) = 0$$

*Доказательство.*

$$f(q_1, p_1) = p_1 \quad \left( \frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0 \right) \quad S = S_1 + S_2$$

$$f \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) = 0 \alpha_1 \quad \frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1 \Rightarrow S_1 = q_1 \alpha_1$$

■

3.

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow S = S_1(q_1, \alpha_1) + S_2(q_2, \dots, q_n, \alpha, t)$$

$$\begin{cases} f \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) = \alpha_1 \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} + H \left( \alpha, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_2}{\partial q_n}, t \right) = 0 \end{cases}$$

4.

$$H = H(f_2(f_1(q_1, p_1), q_2, p_2), q_3, \dots, q_n, p_3, \dots, p_n, t)$$

$$S = S_1(q_1, \alpha_1) + S_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) + S_3(q_3, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

$$\begin{cases} f_1 \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1 \\ f_2 \left( \alpha_2, q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2} \right) = \alpha_2 \\ \frac{\partial S_3}{\partial t} + H \left( \alpha_2, q_3, \dots, q_n, \frac{\partial S_3}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial S_3}{\partial q_n}, t \right) = 0 \end{cases}$$

**Пример.**

$$H = H(f_1(q_1, p_1), \dots, f_m(q_m, p_m), q_{m+1}, \dots, q_n, p_{m+1}, \dots, p_n)$$

$$S = S_1(q_1, \alpha_1) + S_2(q_2, \alpha) + \dots + S_m(q_m, \alpha_m) + \alpha_{m+1} q_{m+1} + \dots + \alpha_{n-1} q_{n-1} - ht + S_0(q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h(\alpha))$$

$$\begin{cases} f_1 \left( q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right) = \alpha_1 \\ \dots \\ f_m \left( q_m, \frac{dS_m}{dq_m} \right) = \alpha_m \\ -n + H \left( \alpha_1, \dots, \alpha_m, q_n, \alpha_{m+1} \dots \alpha_{n-1}, \frac{dS_n}{dq_n} \right) \end{cases}$$

$$\frac{dS_1}{dq_1} = F_1(q_1, \alpha_1) \Rightarrow S_1 = \int_{q_0}^{q_1} F_1(\xi, \alpha_1) d\xi$$

$$\frac{dS_m}{dq_m} = F_m$$

$$S_n = \int_{q_m}^{q_n} F_n(\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h) d\xi$$