

# Лекции по аналитической механике. Осенний семестр.

Муницына Мария Александровна

9 февраля 2018 г.

*Набор и рисунки: Александр Валентинов.*

*За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю и Никите Свешникову.*

*Исходный код: <https://github.com/valentiay/analmech>*

Конспект не проходил профессиональную редактуру и может содержать смысловые ошибки
---

# Содержание

<b>1 Кинематика точки</b>	<b>3</b>
1.1 Векторное описание движения . . . . .	3
1.2 Декартовы координаты . . . . .	3
1.3 Движение по окружности . . . . .	3
1.4 Естественное описание движения . . . . .	4
1.5 Ортогональные криволинейные координаты . . . . .	5
<b>2 Кинематика твердого тела</b>	<b>6</b>
2.1 Формулы Пуассона . . . . .	7
2.2 Формула распределения скоростей точек твердого тела (Формула Эйлера) . . . . .	8
<b>3 Классификация движения твердого тела</b>	<b>9</b>
3.1 Поступательное движение . . . . .	9
3.2 Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси) . . . . .	9
3.3 Плоскопараллельное движение . . . . .	10
3.4 Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки) . . . . .	11
3.5 Винтовое движение . . . . .	11
3.6 Общий случай . . . . .	12
<b>4 Кинематика сложного движения</b>	<b>13</b>
4.1 Сложное движение материальной точки . . . . .	13
4.2 Сложное движение твердого тела . . . . .	14
4.3 Кинематические формулы Эйлера . . . . .	15
<b>5 Алгебра кватернионов</b>	<b>15</b>
<b>6 Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов</b>	<b>17</b>
<b>7 Кинематика твердого тела в кватернионном описании</b>	<b>20</b>
7.1 Интегрирование уравнения Пуассона . . . . .	21
<b>8 Динамика</b>	<b>22</b>
8.1 Стационарные силы . . . . .	23
8.2 Позиционные силы . . . . .	24
8.3 Свойства внутренних сил . . . . .	25
<b>9 Основные теоремы динамики</b>	<b>26</b>
9.1 Основные динамические величины . . . . .	26
9.2 Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета . . . . .	29
<b>10 Движение в центральном поле</b>	<b>29</b>
10.1 Законы сохранения . . . . .	29
10.2 Формулы Бине . . . . .	30
10.3 Движение точки в центральном гравитационном поле . . . . .	30
10.4 Задача двух тел . . . . .	32
<b>11 Динамика твердого тела</b>	<b>32</b>
11.1 Твердое тело с неподвижной точкой ( $\bar{v}_O = 0$ ) . . . . .	34
11.2 Произвольное движение тела . . . . .	34
<b>12 Динамика твердого тела с неподвижной точкой</b>	<b>35</b>
12.1 Случай Эйлера . . . . .	35
12.2 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного волчка . . . . .	37
12.3 Случай Лагранжа . . . . .	38
<b>13 Уравнения Лагранжа</b>	<b>42</b>
13.1 Классификация связей . . . . .	42
13.2 Действительные и виртуальные перемещения . . . . .	43
13.3 Идеальные связи и общие уравнения динамики. Принцип освобожденности связи. (Уравнения Лагранжа первого рода) . . . . .	44
13.4 Обобщенные силы . . . . .	46

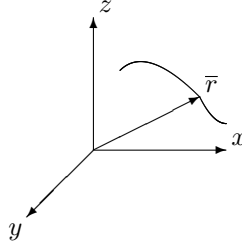
13.5 Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	47
13.6 Свойства уравнений Лагранжа . . . . .	48
13.7 Первые интегралы Лагранжевой системы координат . . . . .	50

## Лекция 1 от 06.09.2017

### 1 Кинематика точки

**Определение.** Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



#### 1.1 Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \in C^2$$

**Определение.**  $\gamma = \{\bar{r}(t), t \in (0, +\infty)\}$  - траектория

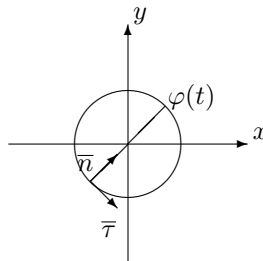
$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{d\bar{r}}{dt} \\ \bar{w} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

#### 1.2 Декартовы координаты

$$\begin{aligned}\bar{r}(t) &= x(t)\bar{e}_x + y(t)\bar{e}_y + z(t)\bar{e}_z \\ \bar{v}(t) &= \dot{x}(t)\bar{e}_x + \dot{y}(t)\bar{e}_y + \dot{z}(t)\bar{e}_z \\ \bar{w}(t) &= \ddot{x}(t)\bar{e}_x + \ddot{y}(t)\bar{e}_y + \ddot{z}(t)\bar{e}_z\end{aligned}$$

#### 1.3 Движение по окружности

$$\begin{aligned}\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{v} &= R\dot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\dot{\varphi}\bar{\tau} \\ \bar{w} &= R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \cdot \bar{e}_x + \cos \varphi \cdot \bar{e}_y) + R\dot{\varphi}^2(-\cos \varphi \cdot \bar{e}_x - \sin \varphi \cdot \bar{e}_y) = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n} \\ \bar{v} &= R\dot{\varphi}\bar{\tau} = v\bar{\tau} \\ \bar{w} &= R\ddot{\varphi}\bar{\tau} + R\dot{\varphi}^2\bar{n} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n}\end{aligned}$$

## 1.4 Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром  $s$ .  $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

**Определение.**

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{r}' - \text{касательный вектор} \quad (1)$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{\tau}'}{|\overline{\tau}'|} - \text{вектор главной нормали} \quad (2)$$

$$\overline{b} = [\overline{\tau}; \overline{n}] - \text{вектор бинормали} \quad (3)$$

**Утверждение 1.**  $\{\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\}$  - тройка ортогональных единичных векторов.

*Доказательство.*

$$|\overline{\tau}| = \frac{|d\overline{r}|}{ds} = 1$$

$$|\overline{n}| = \frac{|\overline{\tau}'|}{|\overline{\tau}'|} = 1$$

$$|\overline{\tau}| = 1 \Rightarrow (\overline{\tau}, \overline{\tau}) = 1$$

$$(\overline{\tau}', \overline{\tau}) + (\overline{\tau}, \overline{\tau}') = 0$$

$$2(\overline{\tau}', \overline{\tau}) = 0 \Rightarrow \overline{\tau}' \perp \overline{\tau} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{\tau}$$

■

Этот трехгранник называют репер Френе. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

**Теорема 1.**  $\overline{v} = v\overline{\tau}$ ,  $\overline{w} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$ , где  $v = \dot{s}$ .

*Доказательство.*

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\overline{\tau}$$

$$\dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \overline{n}kv, \text{ по формуле (2)}$$

$$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}\overline{\tau} + v\dot{\overline{\tau}} = \dot{v}\overline{\tau} + v^2k\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$$

$\dot{v}\overline{\tau}$  - касательное ускорение

$\frac{v^2}{\rho}\overline{n}$  - нормальное ускорение

$\rho = \frac{1}{|\overline{\tau}''|}$  - радиус кривизны

$k = |\overline{\tau}''|$  - кривизна

$\overline{\tau}''$  - вектор кривизны

■

**Формулы Френе:**

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

где  $\varkappa$  - коэффициент кручения.

*Доказательство.*

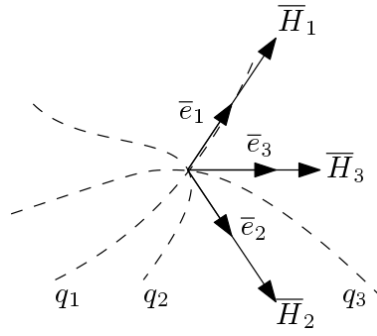
$$|\overline{n}| = 1 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}') = 0$$

$$\overline{n} \perp \overline{\tau} \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + (\overline{n}, \overline{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + k = 0$$

$$\overline{b}' = [\overline{\tau}', \overline{n}] + [\overline{\tau}, \overline{n}'] = [k\overline{n}, \overline{n}] + [\overline{\tau}, -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}] = 0 + \varkappa[\overline{\tau}, \overline{b}] = -\varkappa\overline{n}$$

■

## 1.5 Ортогональные криволинейные координаты



$$\bar{r} = \bar{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\bar{H}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = H_i \bar{e}_i, \text{ где } H_i - \text{коэффициенты Ламе.}$$

### Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

$s_i$  - длина дуги  $i$ -й координатной линии.

$$H_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \bar{e}_i, \quad v^2 = (\bar{v}, \bar{v}) = \sum_{i=1}^3 H_i^2 \dot{q}_i^2$$

**Теорема 2.** Компоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right)$$

*Доказательство.*

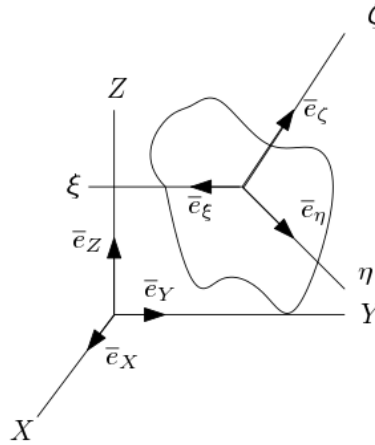
$$\begin{aligned} (\bar{w}, \bar{H}_i) &= \left( \frac{d\bar{v}}{dt}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \bar{v}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \left( \bar{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq \\ &1) \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} - \text{из определения скорости} \\ &2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \\ &\triangleq \frac{d}{dt} \left( \bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \bar{v}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\bar{v}, \bar{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\bar{v}, \bar{v}) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) \\ &w_i = (\bar{w}, \bar{e}_i) = \frac{1}{H_i} (\bar{w}, \bar{H}_i) \end{aligned}$$

■

**Лекция 2 от 13.09.2017****2 Кинематика твердого тела**

**Определение.** Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.

$$\{\bar{r}_i, i = 1 \dots n : |\bar{r}_i - \bar{r}_j| = C_{ij} = \text{const}, n \geq 3\}$$



$OXYZ$  - неподвижная система отсчета.

$Sξηζ$  - связаны с телом (движутся).

$$X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\eta, \bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_x) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_y) & (\bar{e}_\zeta, \bar{e}_z) \end{pmatrix} - \text{матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$$

$$\overline{AB} = \xi\bar{e}_\xi + \eta\bar{e}_\eta + \zeta\bar{e}_\zeta$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\eta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \\ (\bar{e}_\zeta, x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\eta, \overline{AB}) \\ (\bar{e}_\zeta, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = X\bar{r}$$

**Утверждение 2.**  $X$  - ортогональная матрица.

Доказательство.

$$XX^T = X^T X = \begin{pmatrix} (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta) & (\bar{e}_\xi, \bar{e}_\zeta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = E$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}_\xi \\ \dot{\bar{e}}_\eta \\ \dot{\bar{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \\ \bar{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X} X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \bar{e}_\xi \\ \bar{e}_\eta \\ \bar{e}_\zeta \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X} X^T$$

**Утверждение 3.**  $\Omega$  - кососимметрична.

Доказательство.

$$\Omega - \Omega^T = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)^T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

Следствие.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$$

**Определение.**  $\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta$  - угловая скорость подвижного репера.

## 2.1 Формулы Пуассона

**Утверждение 4.**

$$\dot{\bar{e}}_i = [\bar{\omega}, \bar{e}_i], \quad i = \overline{1 \dots 3}$$

Доказательство.

$$\dot{\bar{e}}_\xi = \omega_\zeta \bar{e}_\eta - \omega_\eta \bar{e}_\zeta = \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]$$

**Утверждение 5.**  $\bar{\omega} = \bar{e}_\xi(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) + \bar{e}_\eta(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) + \bar{e}_\zeta(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta)$

Доказательство.

$$(\dot{\bar{e}}_\xi, \bar{e}_\eta) = \omega_\zeta$$

$$(\dot{\bar{e}}_\eta, \bar{e}_\zeta) = \omega_\xi$$

$$(\dot{\bar{e}}_\zeta, \bar{e}_\xi) = \omega_\eta$$

**Утверждение 6.**  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta])$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, \dot{\bar{e}}_\xi] + [\bar{e}_\eta, \dot{\bar{e}}_\eta] + [\bar{e}_\zeta, \dot{\bar{e}}_\zeta]) = \frac{1}{2}([\bar{e}_\xi, [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi]] + [\bar{e}_\eta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta]] + [\bar{e}_\zeta, [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta]]) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\omega}(\bar{e}_\xi, \bar{e}_\xi) - \bar{e}_\xi(\bar{\omega}, \bar{e}_\xi) + \bar{\omega}(\bar{e}_\eta, \bar{e}_\eta) - \bar{e}_\eta(\bar{\omega}, \bar{e}_\eta) + \bar{\omega}(\bar{e}_\zeta, \bar{e}_\zeta) - \bar{e}_\zeta(\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta)) = \\ &= \frac{1}{2}(3\bar{\omega} - \bar{\omega}) = \bar{\omega} \end{aligned}$$

**Пример.** Угловая скорость репера Френе.

$$\begin{cases} \bar{\tau}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b} \\ \bar{b}' = -\varkappa\bar{n} \end{cases}$$

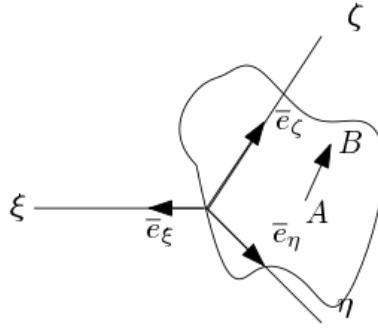
$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{n}} = \frac{d\bar{n}}{ds} \dot{s} \\ \dot{\bar{b}} = \frac{d\bar{b}}{ds} \dot{s} \end{cases}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\tau}(\dot{s}(-k\bar{\tau} + \varkappa\bar{b}), \bar{b}) + \bar{n}(\dot{s}(-\varkappa\bar{n}, \bar{\tau}) + \bar{b}(\dot{s}(k\bar{n}), \bar{n})) = \dot{s}(\varkappa\bar{\tau} + k\bar{b})$$

**Определение.** Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связанного.



## 2.2 Формула распределения скоростей точек твердого тела (Формула Эйлера)



$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \xi \overline{e_\xi} + \eta \overline{e_\eta} + \zeta \overline{e_\zeta} \\ \dot{\overline{AB}} &= \xi \dot{\overline{e_\xi}} + \eta \dot{\overline{e_\eta}} + \zeta \dot{\overline{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 \\ (\overline{r_B} - \overline{r_A}) &= \xi [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}] + \eta [\overline{\omega}, \overline{e_\eta}] + \zeta [\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}] \\ \dot{\overline{r_B}} - \dot{\overline{r_A}} &= [\overline{\omega}, \xi \overline{e_\xi} + \eta \overline{e_\eta} + \zeta \overline{e_\zeta}] \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \end{aligned}$$

**Следствие.**  $S\xi\eta\zeta \rightarrow \overline{\omega}$ ,  $S'\xi'\eta'\zeta' \rightarrow \overline{\omega}'$

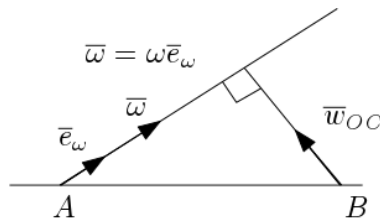
$$\begin{aligned} \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}', \overline{AB}] \quad \left| \quad [\overline{\omega} - \overline{\omega}', \overline{AB}] = 0; \quad \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow \right. \\ &\Rightarrow \overline{\omega} - \overline{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega}'} \end{aligned}$$

**Утверждение 7.** (Формула Ривальса)  $\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$ .

Доказательство.

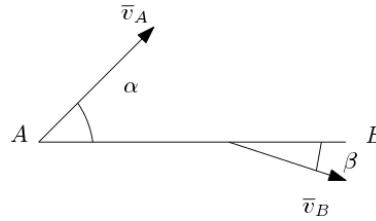
$$\begin{aligned} \overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \dot{\overline{v_B}} &= \dot{\overline{v_A}} + [\dot{\overline{\omega}}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, \overline{r_B} - \overline{r_A}] \\ \overline{w_B} &= \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] \\ [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] &- \text{ вращательное ускорение, } [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] - \text{ осеостремительное ускорение} \end{aligned}$$

**Геометрический смысл  $\overline{w_{OC}}$**



$$\begin{aligned} \overline{w} &= [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB}) \\ |\overline{w_{oc}}| &= \omega^2 \rho(B, l) \end{aligned}$$

**Утверждение 8.** *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*



*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\overline{v_B} &= \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ (\overline{v_B}, \overline{AB}) &= (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB}) \\ v_B \cos \beta &= v_A \cos \alpha\end{aligned}$$

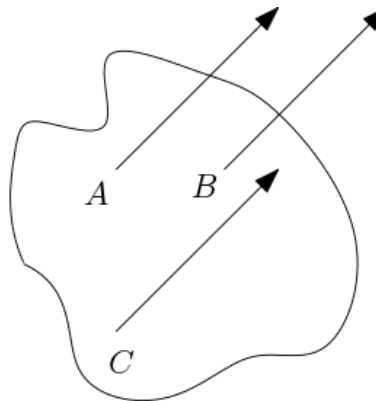
■

**Замечание.** *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

### 3 Классификация движения твердого тела

#### 3.1 Поступательное движение

**Определение.** *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*



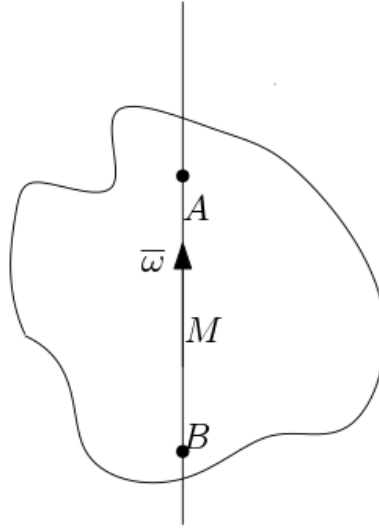
$$\overline{v_B} \equiv \overline{v_A}$$

$$\overline{w_B} \equiv \overline{w_A}$$

**Мгновенное поступательное движение:**  $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

#### 3.2 Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$$\exists A, B : \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\bar{\omega}, \overline{AB}], \vec{v}_A = \vec{v}_B = 0 \Rightarrow [\bar{\omega}, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \bar{\omega} \parallel \overline{AB}$$

$\forall M \in l : \vec{v}_M = 0, l$  - ось вращения

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi} \vec{e}_z, \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(\xi \vec{e}_\eta - \eta \vec{e}_\xi)$$

$$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}|$$

$$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2 \overline{p'p}$$

### Лекция 3 от 20.09.2017

#### 3.3 Плоскопараллельное движение

**Определение.** Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:

$$\vec{v}_{p_i} \parallel \pi, \quad \forall p_i \in ATT$$

$$\vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j} + [\bar{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\bar{\omega}, \overline{p_i p_j} - \vec{v}_{p_j}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\omega} = 0 \\ \vec{v}_{p_i} = \vec{v}_{p_j}, \quad \forall p_i, p_j \in ATT \\ \bar{\omega} \perp \vec{v}_{p_i} - \vec{v}_{p_j} \parallel \pi \end{cases}$$

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} + [\bar{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \vec{v}_{M_j} \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j}$$

Качение:

$$\vec{r}_S = x_S \vec{e}_x + y_S \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \dot{\vec{e}}_\eta = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$$

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z \parallel \bar{\omega}$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_S + [\bar{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\vec{w}_M = \vec{w}_S + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SM}]] = \vec{w}_s + [\vec{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2 \overline{SM}$$

**Теорема 3.** Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.

Доказательство.

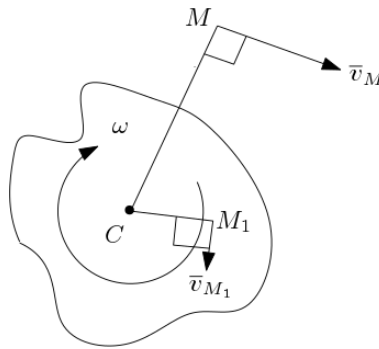
$$\begin{cases} \bar{v}_c = \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow [\bar{\omega}, \bar{v}_s] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_s] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_s]}{\omega^2}$$

**Следствие.** Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным

Доказательство.  $\bar{\omega} = 0$  - мгновенно-поступательное.  $\bar{\omega}(t) \neq 0$  - вращение вокруг  $l$ .



**Определение.**  $C$  - мгновенный центр скоростей

**Замечание.** Положение  $C$  меняется со временем.

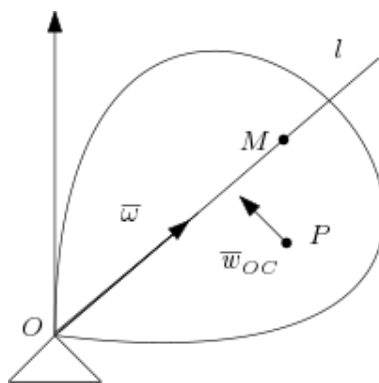
**Пример.** Качение без проскальзывания

### 3.4 Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists O : \bar{v}_O \equiv 0$$

$$l \parallel \bar{\omega}, O \in l$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + [\bar{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \forall M \in l$$



**Определение.**  $l$  - мгновенная ось вращения

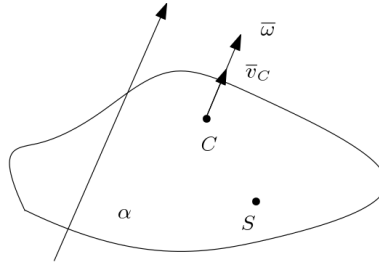
$$\bar{v}_p = [\bar{\omega}, \overline{OP}], \quad \bar{w}_p = [\bar{\omega}, \overline{OP}] + \underbrace{[\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{OP}]]}_{\bar{v}_{Oc}}$$

### 3.5 Винтовое движение

**Определение.** Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащих на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправлены с осью.

### 3.6 Общий случай

**Теорема 4.**  $\bar{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l : \bar{\omega} \parallel l, \bar{v}_{k_i} \parallel l, \forall k_i \in l$



*Доказательство.*

$$\bar{\alpha} \perp \bar{\omega}, S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{v}_C = \bar{v}_S + [\bar{\omega}, \overline{SC}] \\ \bar{v}_C = \lambda \bar{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\bar{\omega}, \bar{v}_S] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\bar{\omega}, \bar{v}_S] + \bar{\omega}(\bar{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_C]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \bar{\omega}$$

$$\bar{v}_{C_1} = \bar{v}_C + [\bar{\omega}, \overline{CC_1}] = \bar{v}_C, \forall C_1 \in l$$

■

$$\bar{v}_C = \bar{v}_S + \left[ \bar{\omega}, \frac{[\bar{\omega}, \bar{v}_C]}{\omega^2} \right] = \bar{v}_S + \frac{1}{\omega^2} (\bar{\omega}(\bar{\omega}, \bar{v}_S) - \omega^2 \bar{v}_S) = \underbrace{\frac{(\bar{\omega}, \bar{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda} \bar{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\bar{\omega}, \bar{v}_S)}{\omega^2} - \text{параметр (шаг винта)}.$$

**Следствие.** Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ( $\omega = 0, \lambda \rightarrow +\infty$ ), либо мгновенно-вращательным ( $\omega \neq 0, \lambda = 0$ ), либо мгновенно-винтовым ( $\omega \neq 0, \lambda \neq 0$ ).

**Определение.**  $\{l, \bar{\omega}, \bar{v}\}$  - кинематический винт.

$$\bar{v}_S = v_x \bar{e}_x + v_y \bar{e}_y + v_z \bar{e}_z$$

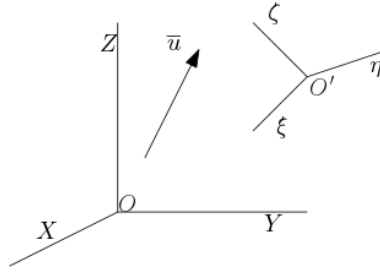
$$\bar{r}_S = x_S \bar{e}_x + y_S \bar{e}_y + z_S \bar{e}_z$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z$$

$$\bar{r}_C = x \bar{e}_x + y \bar{e}_y + z \bar{e}_z$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_S + [\bar{\omega}, \overline{SC}] = \lambda \bar{\omega} &\Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} = \\ &= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z} \end{aligned}$$

## 4 Кинематика сложного движения



$OXYZ$  - неподвижная система отсчета ( $\bar{r}$ ),  $O_1\xi\eta\zeta$  - подвижная система отсчета ( $\bar{\rho}$ ).

$$\bar{u} = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z$$

$$\bar{u} = u_\xi \bar{e}_\xi + u_\eta \bar{e}_\eta + u_\zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{u}_x \bar{e}_x + \dot{u}_y \bar{e}_y + \dot{u}_z \bar{e}_z - \text{абсолютная производная}$$

$$\dot{\bar{u}} = \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta - \text{относительная производная}$$

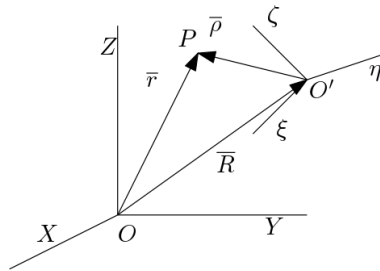
**Теорема 5.** (Связь абсолютной и относительной производной)  $\frac{d\bar{u}}{dt} = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}]$ , где  $\bar{\omega}$  - угловая скорость  $O_1\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \dot{u}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{u}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \bar{e}_\zeta + u_\xi \frac{d\bar{e}_\xi}{dt} + u_\eta \frac{d\bar{e}_\eta}{dt} + u_\zeta \frac{d\bar{e}_\zeta}{dt} = \\ &= \dot{\bar{u}} + u_\xi [\bar{\omega}, \bar{e}_\xi] + u_\eta [\bar{\omega}, \bar{e}_\eta] + u_\zeta [\bar{\omega}, \bar{e}_\zeta] = \dot{\bar{u}} + [\bar{\omega}, \bar{u}] \\ &\left( \frac{d\bar{e}_i}{dt} = [\bar{\omega}, \bar{e}_i] - \text{формула Пуассона, } \dot{\bar{e}}_i = 0 \right) \end{aligned}$$

■

### 4.1 Сложное движение материальной точки



**Определение.** Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.  $\bar{v}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{r}$

**Определение.** Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.  $\bar{v}_{отн} = \dot{\bar{\rho}}$

**Определение.** Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движущаяся точка в данный момент времени.

**Теорема 6** (Формула сложения скоростей).  $\bar{v}_{abc} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{v}_{abc} &= \frac{d}{dt} (\bar{R} + \bar{\rho}) = \frac{d\bar{R}}{dt} + \dot{\bar{\rho}} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \\ &= \bar{v}_{O_1} + \bar{v}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}] = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер} \end{aligned}$$

■

**Определение.** Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.  $\bar{w}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{v}_{abc}$

**Определение.** Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.  $\bar{w}_{отн} = \dot{\bar{v}}_{отн}$

**Определение.**  $\bar{w}_{пер} = \bar{w}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]]$

**Определение.**  $\bar{w}_{кор} = 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}]$

**Теорема 7** (Формула сложения ускорений).  $\bar{w}_{abc} = \bar{w}_{отн} + \bar{w}_{пер} + \bar{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{w}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}) = \frac{d}{dt}(\bar{v}_{отн} + \bar{v}_{O_1} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]) = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + [\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + \frac{d}{dt} \bar{v}_{O_1} + \left[ \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{\rho} \right] + [\bar{\omega}, \bar{\rho} + [\bar{\omega}, \bar{\rho}]] = \\ &= \dot{\bar{v}}_{отн} + \dot{\bar{v}}_{O_1} + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + 2[\bar{\omega}, \bar{v}_{отн}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]] \end{aligned}$$

■

## Лекция 4 от 27.09.2017

### 4.2 Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета  $OXYZ$ , подвижную  $O_1xyz$ , и систему, связанную с телом  $S\xi\eta\zeta$ .

**Определение.** Абсолютная угловая скорость - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

**Определение.** Относительная угловая скорость - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $O_1xyz$

**Определение.** Переносная угловая скорость - угловая скорость  $Oxyz$  относительно  $OXYZ$

**Теорема 8** (О сложении угловых скоростей).  $\bar{\omega}_{abc} = \bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{v}_A^{abc} &= \bar{v}_A^{отн} + \bar{v}_A^{пер} \\ \bar{v}_B^{abc} &= \bar{v}_B^{отн} + \bar{v}_B^{пер} \\ \bar{v}_B^{abc} &= \bar{v}_A^{abc} + [\bar{\omega}_{abc}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B^{отн} &= \bar{v}_A^{отн} + [\bar{\omega}_{отн}, \overline{AB}] \\ \bar{v}_B^{пер} &= \bar{v}_A^{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \overline{AB}] \\ \Rightarrow 0 &= 0 + [\bar{\omega}_{abc} - \bar{\omega}_{отн} - \bar{\omega}_{пер}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \bar{\omega}_{abc} = \bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер} \end{aligned}$$

■

**Замечание.**  $\frac{d\bar{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}_{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{пер}] = \dot{\bar{\omega}}_{пер}$

**Теорема 9** (О сложении угловых ускорений).  $\bar{\varepsilon}_{abc} = \bar{\varepsilon}_{отн} + \bar{\varepsilon}_{пер} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}]$ , где  $\bar{\varepsilon}_{abc} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{abc}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{отн} = \dot{\bar{\omega}}_{отн}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{пер} = \dot{\bar{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{abc} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{пер}) = \\ &= \dot{\bar{\omega}}_{отн} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}] + \frac{d}{dt} \bar{\omega}_{пер} = \bar{\varepsilon}_{отн} + [\bar{\omega}_{пер}, \bar{\omega}_{отн}] + \bar{\varepsilon}_{пер} \end{aligned}$$

■

#### 4.2.1 Несколько подвижных систем отсчета

$OXYZ$  - неподвижная СО

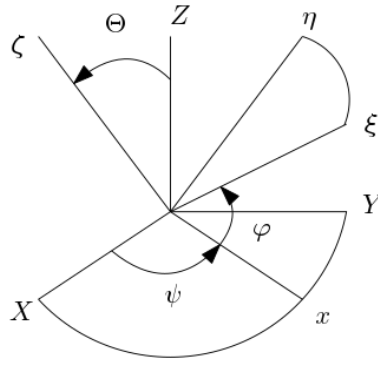
$Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2, \dots, Ox_ny_nz_n$  - подвижные СО

$S\xi\eta\zeta$  - связана с телом

$\bar{\omega}$  - угловая скорость  $S\xi\eta\zeta$  относительно  $OXYZ$

Тогда:  $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i$

### 4.3 Кинематические формулы Эйлера



**Определение.**  $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$  - линия узлов

**Определение.**  $\psi = \angle(Ox, OX)$  - угол прецессии

**Определение.**  $\Theta = \angle(O\xi, OZ)$  - угол нутации

**Определение.**  $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$  - угол собственного вращения

**Определение.**  $\{\psi, \Theta, \varphi\}$  - углы Эйлера

Повороты:  $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} Oxyz \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\xi \xrightarrow{\varphi, O\xi} O\xi\eta\xi$

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{e}_Z + \dot{\Theta}\bar{e}_x + \dot{\varphi}\bar{e}_\xi$$

$$\bar{e}_x = \cos \varphi \bar{e}_\xi - \sin \varphi \bar{e}_\eta$$

$$\bar{e}_z = \cos \Theta \bar{e}_\xi + \sin \Theta (\sin \varphi \bar{e}_\xi + \cos \varphi \bar{e}_\eta)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \dot{\psi}(\sin \Theta \sin \varphi \bar{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \bar{e}_\eta + \cos \Theta \bar{e}_\zeta) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos \varphi \bar{e}_\xi - \sin \varphi \bar{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{\omega}_\xi = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ \bar{\omega}_\eta = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{\Theta} \sin \varphi \\ \bar{\omega}_\zeta = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

**Определение.** Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.  $\dot{\Theta} = 0$ . Если  $\dot{\psi} = \text{const}$ ,  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , то прецессия называется регулярной.

## 5 Алгебра кватернионов

**Определение.** Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.

**Пример.**

$n = 2$  (Комплексные числа).  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$n = 4$  (Алгебра кватернионов)

$$\Lambda = \lambda_0 \bar{i}_0 + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3 \in \mathbb{H}$$

$\{\bar{i}_0, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}$  - базис

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$i_0 \circ i_k = i_k \quad k = \bar{1}, \bar{3}, \quad i_0 \circ i_0 = 1$$

$$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m] \quad k, m \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{В частности, } i_k \circ i_k = -1$$

$$\bar{\lambda} \circ \bar{\mu} = (\lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3) \circ (\mu_1 \bar{i}_1 + \mu_2 \bar{i}_2 + \mu_3 \bar{i}_3) = -(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$$

$$\Lambda \circ M = (\lambda + \bar{\lambda}) \circ (\mu + \bar{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \bar{\mu} + \bar{\lambda} \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) + [\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$$



**Свойства:**

1.  $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2.  $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3.  $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

**Лекция 5 от 04.10.2017****Определение.**

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$$

**Утверждение 9.**

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda \circ M} &= \lambda_0 \mu_0 - (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) - \lambda_0 \bar{\mu} - \mu_0 \bar{\lambda} - [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] = \\ &= (\mu_0 - \bar{\mu}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \bar{M} \circ \bar{\Lambda} \end{aligned}$$

**Определение.**

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) = \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 - \text{норма } \Lambda$$

**Утверждение 10.**

$$\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\|$$

*Доказательство.*

$$\|\Lambda \circ M\| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \bar{M}}_{\|M\|} \circ \bar{\Lambda} = \|M\| \cdot \|\Lambda\|$$

**Определение.**

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}, \quad \|\Lambda\| \neq 0$$

**Замечание.**

$$\Lambda \circ \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|} \circ \Lambda = \frac{\|\Lambda\|}{\|\Lambda\|} = 1$$

**Формула Муавра**

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda} = |\Lambda| \left( \frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\bar{\lambda}}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}|}, \quad \cos \nu = \frac{\lambda_0}{|\Lambda|}, \quad \sin \nu = \frac{|\bar{\lambda}|}{|\Lambda|}$$

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1| (\cos \nu_1 + \bar{e} \sin \nu_1)$$

$$\Lambda_2 = |\Lambda_2| (\cos \nu_2 + \bar{e} \sin \nu_2)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &= |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2| (\cos \nu_1 \cos \nu_2 - \sin \nu_1 \sin \nu_2 (\bar{e}, \bar{e}) + \cos \nu_1 \sin \nu_2 \bar{e} + \\ &+ \cos \nu_2 \sin \nu_1 \bar{e} + \sin \nu_2 \sin \nu_1 [\bar{e}, \bar{e}]) = |\Lambda_1| |\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \bar{e} \sin(\nu_1 + \nu_2)) \end{aligned}$$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \bar{e} \sin k\nu) - \text{формула Муавра}$$

## 6 Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  — неподвижный базис

$E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$  — связанный с телом

**Теорема 10.** Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответствует нормированный кватернион, удовлетворяющий равенству:

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda}, \quad i = 1 \dots 3$$

**Замечание.**  $\Lambda$  — нормирован, если  $\|\Lambda\| = 1$

*Доказательство.*

1. Нормированность

$$\|\bar{e}'_i\| = \|\Lambda\| \cdot \|\bar{e}_i\| \cdot \|\bar{\Lambda}\| \Rightarrow 1 = \|\Lambda\| \cdot 1 \cdot \|\Lambda\| \Rightarrow \|\Lambda\| = 1$$

2. Существование решения.  $\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \bar{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ \bar{e}'_i \circ (\lambda_0 + \bar{\lambda}) = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 \bar{e}'_i - (\bar{e}'_i, \bar{\lambda}) + [\bar{e}'_i, \bar{\lambda}] = \lambda_0 \bar{e}_i - (\lambda, \bar{e}'_i) + [\bar{\lambda}, \bar{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 \\ (\bar{\lambda}, \bar{r}_i) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_i - [\bar{\lambda}, \bar{s}_i] = 0 \end{cases} \quad \bar{r}_i = \bar{e}'_i - \bar{e}_i, \quad \bar{s}_i = \bar{e}'_i + \bar{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_k, \bar{s}_k) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_k) - (\bar{e}_k, \bar{e}_k) = 0 \\ (\bar{r}_k, \bar{s}_l) &= (\bar{e}'_k - \bar{e}_k, \bar{e}'_l + \bar{e}_l) = (\bar{e}'_k, \bar{e}'_l) + (\bar{e}'_k, \bar{e}_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}'_l) - (\bar{e}_k, \bar{e}_l) = \\ &= -(\bar{e}'_l - \bar{e}_l, \bar{e}'_k + \bar{e}_k) = -(\bar{s}_k, \bar{r}_l), \quad k \neq l \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) &= (\bar{e}'_1 - \bar{e}_1, \bar{e}'_2 - \bar{e}_2, \bar{e}'_3 - \bar{e}_3) = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3) - (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) - \\ &- (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}_3) + (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}'_3) = 1 - 1 - \underbrace{([\bar{e}'_1, \bar{e}'_2], \bar{e}_3)}_{\bar{e}'_3} + \underbrace{([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}'_3)}_{\bar{e}_3} = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\bar{r}_1(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + \bar{r}_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) + \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2)$$

$$(2b) \Rightarrow c_1 \bar{r}_1 + c_2 \bar{r}_2 + c_3 \bar{r}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 0 + c_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) - c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ -c_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) + 0 + c_3(\bar{s}_2, \bar{r}_3) = 0 \\ c_1(\bar{s}_3, \bar{r}_1) - c_2(\bar{s}_2, \bar{r}_3) + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = (\bar{s}_2, \bar{r}_3) \\ c_2 = (\bar{s}_3, \bar{r}_1) \\ c_3 = (\bar{s}_1, \bar{r}_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1 & (1) \\ (\bar{r}_k, \bar{\lambda}) = 0 & (2) \\ \lambda_0 \bar{r}_k + [\bar{s}_k, \bar{\lambda}] = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(3) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + [\bar{s}_1, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + [\bar{s}_2, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + [\bar{s}_3, \alpha[\bar{r}_1, \bar{r}_2]] = 0 \end{cases} \\
&\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_1) - 0 = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + 0 - \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_2, \bar{r}_1) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha r_1(\bar{s}_3, \bar{r}_2) - \alpha r_2(\bar{s}_3, \bar{r}_1) = 0 \end{cases} \\
&\begin{cases} \lambda_0 \bar{r}_1 + \alpha \bar{r}_1(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_2 + \alpha \bar{r}_2(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \\ \lambda_0 \bar{r}_3 + \alpha \bar{r}_3(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = 0 \end{cases} \quad \lambda_0 = -\alpha(\bar{s}_1, \bar{r}_2) = \alpha(\bar{s}_2, \bar{r}_1) \\
(1) &\Rightarrow \alpha^2((\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{e}_2]^2)^2 = 1 \Rightarrow \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}
\end{aligned}$$

$$\Lambda = \pm \frac{(\bar{s}_2, \bar{r}_1) + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\sqrt{(\bar{s}_2, \bar{r}_1)^2 + [\bar{r}_1, \bar{r}_2]^2}}$$

**Определение.**

$$f(M) = \Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}; \quad M \rightarrow f(M), \quad \|\Lambda\| = 1 - \text{присоединенное преобразование}$$

**Утверждение 11.** Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части

*Доказательство.*

1.  $f(M) = \Lambda \circ (\mu_0 + \bar{\mu}) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \mu_0 \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \bar{\mu} \circ \Lambda = \mu_0 \|\Lambda\| + f(\bar{\mu}) = \mu_0 + \bar{\mu}'$
2.  $\mu_0^2 + \bar{\mu}^2 = \|M\| = \|\Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}\| = \|f(M)\| = \mu_0'^2 + \bar{\mu}'^2 \Rightarrow \mu^2 = \bar{\mu}'^2$

**Следствие.** Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.

*Доказательство.*

$$\bar{e}'_i = \Lambda \circ \bar{e}_i \circ \bar{\Lambda} = f(\bar{e}_i) \quad (4)$$

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k, \quad f(r) = \Lambda \circ \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda} = \sum_{k=1}^3 r_k f(\bar{e}_k) = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}'_k = \bar{r}' \quad (5)$$

$$(6)$$

$$\boxed{\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}} \quad (7)$$

**Следствие.** При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где  $\bar{r}$  – начальное положение точки,  $\bar{r}'$  – ее положение после поворота, а  $\Lambda$  – кватернион соответствующего преобразования.

## Лекция 6 от 11.10.2017

**Теорема 11.** Преобразование, заданное кватернионом  $\Lambda = \cos \nu + \bar{e} \sin \nu$  соответствует повороту пространства вокруг вектора  $\bar{e}$  на угол  $2\nu$

*Доказательство.*

1.

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$$

$$\bar{\lambda}' = f(\bar{\lambda}) = \Lambda \circ \bar{\lambda} \circ \bar{\Lambda} = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ \bar{\lambda} \circ (\lambda_0 - \bar{\lambda}) =$$

$$(\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0 \bar{\lambda}) = -\lambda_0 \bar{\lambda}^2 - \lambda_0 \bar{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_0^2 \bar{\lambda} =$$

$$= \bar{\lambda}(\lambda_0^2 + \bar{\lambda}^2) \Rightarrow \bar{\lambda} - \text{неподвижная ось} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{e} = \frac{\bar{\lambda}}{\sin \nu} - \text{ось поворота}$$

$$\bar{a} \in \pi \perp \bar{e}$$

$$\bar{a}' = f(\bar{a}) = (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ \bar{a} \circ (\cos \nu - \bar{e} \sin \nu) =$$

$$= (\cos \nu + \bar{e} \sin \nu) \circ ([\bar{a}, \bar{e}] \cdot \sin \nu + \cos \nu \bar{a} - \sin \nu [\bar{a}, \bar{e}]) =$$

$$\cos^2 \nu \bar{a} + \cos \nu \sin \nu (\bar{a}, \bar{e}) + \cos \nu \sin \nu = \dots$$

2.

$$\bar{a}' = ((\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) \circ \bar{a}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) =$$

$$= (\bar{a} \cos \frac{\varphi}{2} + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} - \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) =$$

$$= \bar{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \bar{a}] \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \bar{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$= \bar{a} \cos \varphi + [\bar{e}, \bar{a}] \sin \varphi$$

$$|\bar{a}'| = |\bar{a}|$$

**Следствие.**

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{e}'_1 + \lambda_2 \bar{e}'_2 + \lambda_3 \bar{e}'_3$$

**Определение.**

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - \text{Параметры Родрига-Гамильтона}$$

**Следствие** (Теорема Эйлера о конечном повороте). Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол

*Доказательство.*

1.

$$\forall E, E' \exists \Lambda : E \rightarrow E'$$

2.

$$\forall \Lambda \bar{r} \rightarrow \bar{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

$$E \xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'', E \xrightarrow{\Lambda}$$

$$\bar{r}' = \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \bar{r}' \circ \bar{\Lambda}$$

$$\bar{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \bar{r} \circ \bar{\Lambda}, \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} - \text{формула сложения поворотов}$$

$$\Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k'$$

$$\Lambda_2^* = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k - \text{собственный к } \Lambda_2 \text{ кватернион}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_k' &= \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}_1 = \\ &= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{(2)} \bar{e}_k) \circ \bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \bar{\Lambda}_1 \end{aligned}$$

$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\bar{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1$$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

## 7 Кинематика твердого тела в кватернионном описании

**Теорема 12.** Угловая скорость твердого тела определяется равенством:

$$\bar{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

где  $\Lambda$  - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

*Доказательство.*

1.

$$\begin{aligned} B &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \\ B + \bar{B} &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \overline{(\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda})} = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\ &= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = 0 \Rightarrow B = -\bar{B} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_k' &= [\bar{\omega}, \bar{e}_k] \\ \bar{e}_k' &= \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{e}_k = \bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda \\ \dot{\bar{e}}_k' &= \dot{\Lambda} \circ \bar{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \bar{e}_k \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\ \dot{\Lambda} \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda) \circ \bar{\Lambda} &+ \Lambda \circ (\bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' \circ \Lambda) \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\ &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{e}_k' + \bar{e}_k' \circ \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = B \circ \bar{e}_k' + \bar{e}_k' \circ \bar{B} = \\ [2\bar{B}, \bar{e}_k] &\Rightarrow 2\bar{B} = \bar{\omega} \end{aligned}$$

■

**Пример.**

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 2(-\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\frac{\varphi}{2}} + \dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\frac{\varphi}{2}}) \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}) = \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \bar{e} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + \\ &+ \bar{e} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi} + 2\dot{\bar{e}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \bar{e} \dot{\varphi} + \dot{\bar{e}} \sin \varphi + 2[\bar{e}, \dot{\bar{e}}] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

**Замечание.**

1.

$$\bar{\omega} = \bar{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dot{\bar{e}} = 0 \end{cases}$$

2.

$$\varphi \ll 1. \quad \bar{\omega} \approx \bar{e}\varphi + \dot{\bar{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\bar{e}\varphi)$$

3.

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{e} \Delta \varphi}{\Delta t}, \quad E(t) \xrightarrow{\Delta \Lambda} E(t + \delta t), \quad \Delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \Delta \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}$$

**Уравнение Пуассона**

$$\omega = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\Lambda} \text{ — кинематическое уравнение Пуассона} \quad (8)$$

$$\omega = p\bar{e}'_1 + q\bar{e}'_2 + r\bar{e}'_3, \quad \bar{\omega}^* = p\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 + r\bar{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \bar{\omega}^* \quad (9)$$

## 7.1 Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (10)$$

**Определение.** Функция  $\Phi(\bar{x}, t)$  называется первым интегралом системы (10), если

$$\Phi(\bar{x}(t), t) = \text{const}$$

где  $\bar{x}(t)$  — решение системы (10)

**Утверждение 12.** Система (8) имеет первый интеграл вида

$$\|\Lambda\| = \text{const}$$

*Доказательство.*

$$\frac{d}{dt}(\|\Lambda\|) = \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \bar{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda \circ \bar{\Lambda} \dots$$

■

**Утверждение 13.** Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \cdot C$$

где  $\Lambda'$  — частное решение,  $C = \text{const}$ .

*Доказательство.*  $\Lambda, \Lambda'$  — Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1} \circ \Lambda, \quad \Lambda = \Lambda' \circ M$$

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Lambda}' \circ M + \Lambda' \circ \dot{M} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \circ M \\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Lambda' \circ \dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = \text{const}$$

■

**Следствие.**

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \quad (11)$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси  $\bar{\omega} = \bar{e}\omega$ ,  $\bar{e} = const$ :

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \\ \Lambda_z &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \psi = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau \\ \Lambda_\zeta &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_\zeta \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

1 способ:

$O\zeta$  — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$  — неподвижный базис,  $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$$\Lambda_2^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{e}_\zeta(0) \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} + (\sin \Theta \bar{e}_x + \cos \Theta \bar{e}_z) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\Lambda = (\cos \frac{\psi}{2} + \bar{e}_z \sin \frac{\psi}{2}) \circ \Lambda_2 = \dots$$

2 способ:

$O\zeta$  — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$

## Лекция 7 от 18.10.2017

## 8 Динамика

**Принцип детерминированности Ньютона**

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(t) &= \varphi_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t_0, t) \quad \forall t_0 \\ \ddot{\bar{r}}_i(t) &= \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = f_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t_0, t) \\ \bar{r}_i(t_0) &= f_i(\dots, t) \quad \forall t_0 \\ \ddot{\bar{r}}_i(t_0) &= f_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t_0) \quad \forall t_0 \end{aligned} \tag{12}$$

**Пример.**  $f = 0 \Rightarrow \ddot{\bar{r}} = 0$ ,  $\bar{r} = \bar{r}_0 + \dot{\bar{r}}_0(t - t_0)$

(Закон инерции Галилео-Ньютона); если  $m_i$  — масса точки  $\bar{r}_i$

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i; \quad \bar{F}_i = m_i \bar{f}_i \text{ — сила}$$

**Преобразование Галилея**

$$\bar{r} \rightarrow r^* = \underbrace{A\bar{r}}_{\text{Ортог. пр.}} + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0, \quad t^* = t + t_0$$

$$A = const, \quad \bar{v}_0 = const, \quad \bar{r}_0 = const$$

**Принцип относительности Галилея**

$$\begin{aligned}
m_i \ddot{\bar{r}}_i &= \bar{F}_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t) \\
m_i \ddot{\bar{r}}_i^* &= \bar{F}_i(\bar{r}_1^*, \dots, \bar{r}_N^*, \dot{\bar{r}}_1^*, \dots, \dot{\bar{r}}_N^*, t^*) \\
\frac{d\bar{r}_i^*}{dt^*} &= \frac{d\bar{r}_i}{dt} \cdot 1 \\
\ddot{\bar{r}}_i^* &= A\ddot{\bar{r}} \Rightarrow \bar{F}_i^* = A\bar{F}_i
\end{aligned}$$

Принцип относительности:

$$\bar{F}_i^*(\bar{r}_1^*, \dots, \bar{r}_N^*, \dot{\bar{r}}_1^*, \dots, \dot{\bar{r}}_N^*, t^*) = \bar{F}_i(\bar{r}_1^*, \dots, \bar{r}_N^*, \dot{\bar{r}}_1^*, \dots, \dot{\bar{r}}_N^*, t^*)$$

**Пример.**  $n = 1$ :

$$\bar{F} = A\bar{F}, \quad \forall A \Leftrightarrow \bar{F} = 0$$

**Пример.**  $r^* = \bar{r}, \quad t^* = t - t_0, \quad t = t_0 \Rightarrow \bar{F}_i(\dots, t) = \bar{F}_i(\dots, 0)$

**Закон равенства действия и противодействия**

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}, \quad \bar{F}_{ij} \parallel \bar{r}_j - \bar{r}_i$$

**Принцип суперпозиции**

$$\bar{F}_i = \sum_{i \neq j} \bar{F}_{ij} \quad (\text{Для замкнутых систем})$$

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)}$$

$$\bar{F}_i^{(e)} \text{ — внешняя сила}$$

$$\bar{F}_i^{(i)} \text{ — внутренняя сила}$$

Система неинерциальная

$$\bar{w}_i^{\text{абс}} = \bar{w}_i^{\text{отн}} + \bar{w}_i^{\text{пер}} + \bar{w}_i^{\text{кор}}$$

$$m_i \ddot{\bar{\rho}}_i = \bar{F}_i + \bar{F}_i^{\text{отн}} + \bar{F}_i^{\text{пер}}$$

$$\bar{w}_i^{\text{отн}} = \ddot{\bar{\rho}}_i; \quad \bar{F}_i^{\text{отн}} = -m_i \bar{w}_i^{\text{отн}}; \quad \bar{F}_i^{\text{пер}} = -m_i(\bar{w}_0 + [\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \bar{\rho}]])$$

**Определение.**  $\bar{M}_O = [\bar{r}, \bar{F}]$  — момент силы  $\bar{F}$  относительно  $O$

**Определение.**  $M_l = (\bar{M}_O, \bar{l})$  — момент силы  $\bar{F}$  относительно оси  $\bar{l}$

**Утверждение 14.**  $M_l$  не зависит от выбора точки  $O$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
M_l &= (\bar{M}_O, \bar{l}) = ([\bar{r}, \bar{F}], \bar{l}) = ([\bar{r}' + \overline{O'O}, \bar{F}], \bar{l}) = \\
&= ([\bar{r}', \bar{F}], \bar{l}) + \underbrace{([\lambda \bar{l}, \bar{F}], \bar{l})}_0 \Rightarrow M_l = (\bar{M}_O, \bar{l})
\end{aligned}$$

■

**Определение.**  $(\bar{F}, d\bar{r})$  — элементарная работа ( $dA, d'A, \delta A, A_{эл}$ )

**8.1 Стационарные силы**

$F = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}$  — стационарная сила

$W = (\bar{F}, \bar{v}) \leq 0, \quad \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}})$  — диссипативная сила

**Пример.**



- $\bar{F} = -kN \frac{\dot{\bar{r}}}{|\bar{r}|}$  — сухое трение
- $\bar{F} = -\beta \dot{\bar{r}}$  — вязкое трение

$W = (\bar{F}, \bar{v}) \equiv 0$ ,  $\bar{F}$  — гироскопическая сила

**Пример.**  $\bar{F}^{\text{кор}} = -m\bar{\omega}^{\text{кор}} = -2m[\bar{\omega}, \bar{v}]$   
 $(\bar{F}^{\text{кор}}, \bar{v}) = -2m([\bar{\omega}, \bar{v}], \bar{v}) = 0$

## 8.2 Позиционные силы

$\bar{F} = \bar{F}(r, t)$  — позиционная сила (силовое поле)

**Определение.**  $\bar{F}(\bar{r}, t)$  — потенциальная сила.

$$\exists u(\bar{r}, t) : \bar{F} = \text{grad}_{\bar{r}} u$$

$u$  — силовая функция,  $\Pi = -u$  — потенциальная энергия.

**Пример.**  $F = F(x, t)\bar{e}_x = \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{e}_y$   
 $U = \int F(x, t)dx$

**Определение.** Потенциальная сила  $\bar{F}(\bar{r})$  — консервативная.

**Пример.**  $F = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}$  — консервативная, т.к.

$$U = \int (\bar{F}, d\bar{r}) = - \int \frac{\gamma m}{r^3} (\bar{r}, d\bar{r}) = - \int \frac{\gamma m}{r^3} d\left(\frac{(\bar{r}, \bar{r})}{2}\right) =$$

$$= - \int \frac{\gamma m}{r^3} d\frac{r^2}{2} = - \int \frac{\gamma m}{r^2} dr = \frac{\gamma m}{r}; \quad n = -\frac{\gamma m}{r}$$

$$U = \int (\bar{F}, d\bar{r})$$

### 8.2.1 Критерий потенциальности

**Утверждение 15.**

$$\bar{F}(\bar{r}) = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y + F_z \bar{e}_z \text{ — потенциальная} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$

$$u \in C^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\Leftarrow$

$$u = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(\xi, y, z) d\xi + \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(x_0, \eta, z) d\eta + \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} F_x(x_0, y_0, \zeta) d\zeta$$

**Следствие.**  $F(\bar{r})$  — потенциальная сила  $\Leftrightarrow \oint_C (\bar{F}, d\bar{r}) = 0, \quad \forall C$

*Доказательство.*

$$\oint_{C=\delta W} (\bar{F}, d\bar{r}) = - \int_W \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) dx dy + \dots = 0$$

Система точек  $\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)}$ .

$$F_i^{(i)} = \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij}; \quad \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} = F_{ij}(|\bar{r}_i - \bar{r}_j|) \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|}$$

### 8.3 Свойства внутренних сил

1.

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(i)} = 0$$

*Доказательство.*

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \bar{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j > i} \bar{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_{ij} - \bar{F}_{ji}) = 0$$

■

2.

$$\sum_{i=1}^N [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(i)}] = 0$$

*Доказательство.*

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_j, \bar{F}_{ij}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} [\bar{r}_i - \bar{r}_j, \bar{F}_{ij}] = 0$$

■

3. Внутренние силы потенциальны, т.е.

$$\exists u(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) : \bar{F}_i^{(i)} = \text{grad}_{\bar{r}_i} u$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} u_{ij}(|\bar{r}|) &= \int_0^{|\bar{r}|} F_{ij}(\bar{\rho}) d\rho \\ u &= \sum_{i,i < j} u_{ij} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{r}_i} = \sum_{i,i < j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \bar{r}_i} = \sum \frac{\partial u_{ij}}{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \cdot \frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial \bar{r}_i} \\ |\bar{r}_i - \bar{r}_j| &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \\ \frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial x_i} &= \frac{(x_i - x_j)}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \quad \text{Аналогично для } y_i \text{ и } z_i \\ \frac{\partial |\bar{r}_i - \bar{r}_j|}{\partial r_i} &= \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{r}_i} &= \sum_{i,j, i < j} F_{ij}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \cdot \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|} = \bar{F}_i^{(i)} \end{aligned}$$

■

4. Работа внутренних сил в твердом теле равна нулю.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum (\bar{F}_i^{(i)}, v_i) &= \sum (\bar{F}_i^{(i)}, \bar{v}_s + [\bar{\omega}, \bar{\rho}_i]) = \\ &= \left( \underbrace{\sum \bar{F}_i^{(i)}}_0, \bar{v}_s \right) + \left( \bar{\omega}, \underbrace{\sum [\bar{\rho}_i, \bar{F}_i^{(i)}]}_0 \right) = 0\end{aligned}$$

■

## Лекция 8 от 25.10.2017

### 9 Основные теоремы динамики

#### 9.1 Основные динамические величины

**Определение.**  $\bar{P} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i$  — импульс.  $\bar{K}_O = \sum_{i=1}^N [\bar{r}_i, m_i \bar{v}_i]$  — кинематический момент относительно точки  $O$ .  $K_l = (\bar{K}_O, \bar{e}_l)$  — кинематический момент относительно оси  $l$ .

**Замечание.**  $O \in l$ ,  $\bar{e}_l \parallel \bar{l}$ ;  $K_l$  не зависит от точки  $O$ .

**Определение.**  $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i, \bar{v}_i)$  — кинетическая энергия.

**Определение.**  $S$  — центр масс системы:

$$\bar{r}_S = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{m}$$

$$\bar{P} = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left( \sum m_i \bar{r}_i \right) = \frac{d}{dt} (m \bar{r}_S) = m \bar{v}_S$$

$$\boxed{\bar{P} = m \bar{v}_S}$$

**Определение.** Осями Кенига называется система отсчета с началом в центра масс системы и осями, параллельными неподвижным. (Двигается поступательно вместе с центром масс)

$$\bar{r}_i = \bar{R} + \bar{\rho}_i$$

**Определение.**

$$\bar{K}_{\text{кен}} = \sum [\bar{\rho}_i, m \dot{\bar{\rho}}_i]$$

$$T_{\text{кен}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2$$

**Теорема 13** (Формулы Кенига).

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + \bar{K}_{\text{кен}}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кен}}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\bar{K}_O &= \sum [\bar{R} + \bar{\rho}, m_i \dot{\bar{R}} + m_i \dot{\bar{\rho}}_i] = [\bar{R}, \left( \sum m_i \right) \dot{\bar{R}}] + [\bar{R}, \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i] + \\ &+ \left[ \sum m_i \bar{\rho}_i, \dot{\bar{\rho}}_i \bar{R} \right] + \sum [\bar{\rho}_i m_i \dot{\bar{\rho}}_i] = [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + \bar{K}_{\text{кен}} \\ T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\bar{R}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i, \dot{\bar{R}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i) = \frac{1}{2} \left( \sum m_i \right) \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2 + \\ &+ \underbrace{\sum m_i (\bar{R}, \dot{\bar{\rho}})}_0 = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кен}}\end{aligned}$$

■

**Теорема 14** (Об изменении импульса).

$$\dot{\bar{P}} = \sum \bar{F}_i^{(e)} = \bar{F}$$

*Доказательство.*

$$\dot{\bar{P}}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{v}_i = \sum m_i \bar{w}_i = \sum \bar{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum \bar{F}_i^{(i)}}_0 = \bar{F}$$

**Теорема 15** (Формула движения центра масс).

$$m \bar{w}_S = \bar{F}$$

**Следствие.**

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{w}_S = 0 \Rightarrow \bar{v}_S = \bar{v}_0 = const \Rightarrow \bar{r}_S = \bar{v}_0(t - t_0) + \bar{r}_0$$

**Следствие.**

$$(\bar{F}, \bar{e}_x) = 0 \Rightarrow (\dot{\bar{P}}, \bar{e}_x) = 0 \Rightarrow \bar{v}_x = const$$

**Теорема 16** (Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного полюса).

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(e)}] = \bar{M}_O$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{K}_O &= \frac{d}{dt} \left( \sum [\bar{r}_i, m_i \bar{v}_i] \right) = \sum \left[ \frac{d\bar{r}_i}{dt}, m_i \bar{v}_i \right] + \sum [\bar{r}_i, m_i \dot{\bar{v}}_i] = \\ &= \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(e)}] + \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(i)}] = \bar{M}_O \end{aligned}$$

**Следствие.**

$$\bar{M}_O = 0 \Rightarrow \dot{\bar{K}}_O = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = const$$

**Следствие.**

$$M_l = (\bar{M}_O, \bar{e}_l) = 0, \quad \bar{e}_l = const \Rightarrow K_l = const$$

*Доказательство.*

$$\frac{d}{dt} K_l = \frac{d}{dt} (\bar{K}_O, \bar{e}_l) = \left( \frac{d\bar{K}_O}{dt}, \bar{e}_l \right) + 0 = (\bar{M}_O, \bar{e}_l) = M_l$$

**Следствие.**

$$\dot{K}_l = M_l$$

**Формула преобразования кинетического момента при смене полюса**

$$\bar{K}_B = \bar{K}_A + [\bar{P}, \bar{AB}]$$

*Доказательство.*

$$\bar{K}_B = \sum [\bar{BA} + \bar{r}_i, m_i \bar{v}_i] = [\bar{BA}, m_i \bar{v}_i] + \bar{K}_A = \bar{K}_A + [\bar{P}, \bar{AB}]$$

**Формула преобразования момента сил при смене полюса**

$$\overline{M}_B = \overline{M}_A + [\overline{F}, \overline{AB}]$$

*Доказательство.* Аналогично. ■

**Теорема 17.**

$$\dot{\overline{K}}_A = \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$$

*Доказательство.*

$$\overline{K}_A = \overline{K}_O + [\overline{P}, \overline{r}_A], \quad (\overline{v}_O \equiv 0)$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{K}}_A &= \dot{\overline{K}}_O + [\dot{\overline{P}}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \dot{\overline{r}}_A] = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \overline{v}_A] = \\ &= \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A] \end{aligned}$$

**Следствие** (Первая теорема Кенига).

$$\dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S$$

*Доказательство.*

$$\overline{K}_{\text{кен}} = \overline{K}_S; \quad \dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S + [\overline{P}, \overline{v}_S] = \overline{M}_S + [m\overline{v}_S, \overline{v}_S] = \overline{M}_S$$

**Теорема 18** (Об изменении кинетической энергии).

$$\dot{T} = \sum (\overline{F}_u(e), \overline{v}_i) + \sum (\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_i)$$

*Доказательство.*

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\overline{v}_i, \overline{v}_i)$$

$$\dot{T} = \sum (\overline{v}_i, m\dot{\overline{v}}_i) = \sum (\overline{v}_i, m\overline{w}_i) = \sum (\overline{v}_i, \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)})$$

$$dT = \sum (\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) + \sum (\overline{F}_i^{(i)}, d\overline{r}_i)$$

**Утверждение 16** (Вторая теорема Кенига).

$$\dot{\overline{T}}_{\text{кен}} = \sum (\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

*Доказательство.*

$$\dot{T}_{\text{кен}} = \dot{T} - (m\dot{\overline{v}}_S, \overline{v}_S) = \sum (\overline{F}_i, \overline{v}_i) - \sum (\overline{F}_i, \overline{v}_S)$$

$$\dot{\overline{\rho}}_i = \overline{v}_i^{\text{отн}} = \overline{v}_i^{\text{абс}} - \overline{v}_i^{\text{пер}} = \overline{v}_i - \overline{v}_S$$

$$\dot{T}_{\text{кен}} = (\overline{F}_i, \overline{v}_i - \overline{v}_S) = \sum (\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

Пусть  $\overline{r}_i^{(e)} = -\text{grad}_{\overline{r}_i} \Pi(\overline{r}_i, \dots, \overline{r}_N)$  (внешние силы консервативны).

$$\sum (\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) = - \sum \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{r}_i}, d\overline{r}_i \right) = -d\Pi$$

$$dT = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$$

**Теорема 19** (Закон сохранения полной механической энергии). Если все внешние силы, действующие на систему консервативны, то полная энергия системы сохраняется.

## 9.2 Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета

$$\begin{aligned}
m_i \bar{w}_i &= \bar{F}_i^{(e)} + \bar{F}_i^{(i)} + \bar{F}_i^{(\text{пер})} + \bar{F}_i^{(\text{кор})} \\
\dot{\bar{P}} &= \bar{F} + \bar{F}^{\text{пер}} + \bar{F}^{\text{кор}} \\
\bar{F}^{\text{пер}} &= \sum \bar{F}^{\text{пер}} = - \sum m_i \bar{w}_i^{\text{пер}}; \quad \bar{F}^{\text{кор}} = \sum \bar{F}_i^{\text{кор}} = - \sum m_i \cdot 2 \cdot [\bar{w}_{\text{кор}}, \bar{v}_i] \\
\dot{\bar{K}}_0 &= \bar{M}_O + \bar{M}_O^{\text{пер}} + \bar{M}_O^{\text{кор}} \\
\bar{M}_O^{\text{кор}} &= \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{\text{пер}}]; \quad \bar{M}_O^{\text{кор}} = \sum [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{\text{кор}}] \\
\dot{T} &= \sum (F_i, \bar{v}_i) + \sum (\bar{F}_i^{\text{пер}}, \bar{v}_i) + 0 \\
\sum (\bar{F}_i^{\text{кор}}, \bar{v}_i) &= \sum (-2m_i [\bar{w}_{\text{пер}}, v_i], \bar{v}_i) = 0
\end{aligned}$$

**Пример** (Система отсчета Кенига).

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{K}}_S &= \dot{\bar{K}}_{\text{кен}} = \bar{M}_S; \\
\dot{T}_S &= \sum (\bar{F}_i, \bar{v}_i); \quad \dot{\bar{P}} = \bar{F} - \sum m_i \bar{w}_S = \bar{F} - m \bar{w}_S
\end{aligned}$$

## Лекция 9 от 01.11.2017

## 10 Движение в центральном поле

### 10.1 Законы сохранения

В центральном поле

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \quad \bar{F} = F(r) \frac{\bar{r}}{r}$$

**Закон сохранения энергии:**

$$\Pi = - \int F(r) dr, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow T + \Pi = h = \text{const}$$

**Закон сохранения кинетического момента:**

$$\bar{M}_O = \left[ \bar{r}, F(r) \frac{\bar{r}}{r} \right] = 0 \Rightarrow \dot{\bar{k}}_O = 0 \Rightarrow \bar{k}_O = [\bar{r}, m \bar{v}] = \bar{k} = \text{const}$$

**Следствие.** Траектория точки в центральном поле всегда является плоской кривой.

*Доказательство.*

$$[\bar{r}, m \bar{v}] = \bar{k} \perp \alpha \Rightarrow \bar{r} \in \alpha \quad \forall t, \alpha = \text{const}$$

**Следствие.**

$$r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}$$

*Доказательство.*

$$|\bar{k}| = |[\bar{r}, m \bar{v}]| = |[r \bar{e}_r, m(\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi)]| = m r^2 |\dot{\varphi}| |\bar{e}_z| = \text{const} \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

**Геометрический смысл**

$$S = \iint dS = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$$

$$\dot{S} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r^2}{2} \varphi = \frac{c}{2} = \text{const}$$

$$\sigma = \dot{s} = \frac{c}{2} \text{ — секториальная скорость}$$

## 10.2 Формулы Бине

**Теорема 20** (Формулы Бине). При движении точки в центральном поле справедливы следующие равенства:

$$v^2 = c^2 \left( \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right)$$

Доказательство.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\bar{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{e}^r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi$$

$$m\bar{w} = F\bar{e}_r \quad \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \quad \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$v^2 = c^2 \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + r^2 \frac{c^2}{r^4} = c^2 \left( \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right)$$

■

Определим траекторию.

$$T + \Pi = h, \quad T = \frac{m}{2} v^2$$

$$\frac{mc^2}{2} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \underbrace{\frac{mc^2}{2r^2} + \Pi(r)}_{\Pi_c(r)} = h$$

$$\pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = \sqrt{h - \Pi_c(r)}$$

$$\text{Замена: } \frac{1}{r} = u \quad \pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{h - \Pi_c(u)}} = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow r(\varphi)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2(\varphi)} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi) d\varphi = \int_{t_0}^t c dt = c(t - t_0)$$

## 10.3 Движение точки в центральном гравитационном поле

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad \Pi(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$$

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int \frac{du}{\sqrt{h - m \frac{c^2}{2u^2} + \gamma m M u}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} - u^2 + \frac{2\gamma M}{c^2} u}} =$$

$$= \pm \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4} - \left( u - \frac{\gamma M}{c^2} \right)^2}} = \pm \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{c^2}}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4}}} + \varphi_0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{c^2} + \sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2 M^2}{c^4}} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\frac{c^2}{\gamma m} = p, \quad \sqrt{\frac{2h}{mc^2}p^2 + 1} = e \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

То есть  $\varphi_0$  зависит от  $c$  и  $h$ .

**Замечание.**  $\varphi_0 = 0$  ( $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ )

**Утверждение 17.** Траектория точки в центральном гравитационном поле является коническим сечением.

- $e = 0$ : ( $h^* := h = -\frac{mc^2}{2p^2} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2}$ ) — окружность.
- $0 < e < 1$ : ( $h^* < h < 0$ ) — эллипс.
- $e = 1$ : ( $h = 0$ ) — парабола.
- $e > 1$ : ( $h > 0$ ) — гипербола.

**Пример** (Первая космическая скорость).

$$v_1 = ?$$

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2R^2 v_1^2}$$

$$c = R^2 \dot{\varphi} = Rv_1 \text{ (окружность)}$$

$$v_1^2 - \frac{2\gamma M}{R} + \frac{\gamma^2 M^2}{R^2 v_1^2} = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{\gamma M}{Rv_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

**Пример** (Вторая космическая скорость).

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = 0 \Rightarrow v_2^2 = \frac{2\gamma M}{R}$$

**Теорема 21** (Законы Кеплера).

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце.
2. Радиус-вектор планеты заметает равные площади за равные промежутки времени.
3.  $\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$  (где  $a$  — большая полуось эллипса) для планет из одной системы.

Доказательство.

$$\dot{s} = \frac{c}{2}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{c}$$

$$a = ?$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad b^2 = (1 - e^2)a^2$$

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{pa^2}{b^2} \Rightarrow b^2 = pa$$

$$\text{Тогда } T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^2 pa}{c^2} = \frac{4\pi^2 a^3 c^2}{c^2 \gamma M} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M} \Rightarrow$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const}$$

■



## 10.4 Задача двух тел

$$\bar{F}_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\bar{F}_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

Теорема о движении центра масс:  $(m_1 + m_2)\ddot{\bar{r}}_S = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Система Кенига — инерциальная система отсчета ( $\bar{F}^{(e)} = 0$ )

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_S = \bar{r}_1 - \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$\bar{\rho}_2 = \frac{m_1}{m}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$$

Тогда второй закон Ньютона в системе Кенига имеет вид:

$$m_1 \ddot{\bar{\rho}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{m^3 \rho_1^3} \frac{m \bar{\rho}_1}{m_2} = -\frac{\gamma m_1 m_2^3}{m^2 \rho_1^3} \bar{\rho}_1 = -\gamma_1 \frac{m_1 m}{\rho_1^3} \bar{\rho}_1, \text{ где } \gamma_1 = \frac{\gamma m_2^3}{m^3}$$

$$m_2 \ddot{\bar{\rho}}_2 = -\gamma_2 \frac{m_2 m}{\rho_2^3} \bar{\rho}_2, \text{ где } \gamma_2 = \frac{\gamma m_1^3}{m^3}$$

### Уточнение законов Кеплера

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится центр масс системы.
2. Сохраняется.
3.  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{\gamma_{1,2} m}$  — зависит от  $m_1$  ( $m_2$ ). Т.е.  $\frac{T_1^2}{a_1^3} \neq \frac{T_2^2}{a_2^3}$  при  $m_1 \neq m_2$ , но если  $m_1 \gg m_2$ , тогда  $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ll 1 \Rightarrow |\bar{\rho}_1| \ll 1$ , значит  $\gamma_1 \ll \gamma$ ,  $\gamma_2 \approx \gamma$

## Лекция 10 от 08.11.2017

## 11 Динамика твердого тела

**Определение.** Моментом инерции твердого тела относительно оси называется сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояния до этой оси:

$$J_l = \sum m_i d_i^2, \quad d_i = \text{dist}(\bar{r}_i, l); \quad \left( J_l = \int_W d^2 dm \right) \quad (13)$$

$$J_l \sum m_i ([\bar{r}_i, \bar{l}])^2 = \sum m_i (\bar{r}_i - (\bar{r}_i, \bar{l})\bar{l})^2 \quad (14)$$

**Теорема 22** (Гюйгенса-Штейнера).

$$J_l = J_{l'} + m d^2, \quad d = \text{dist}(l, l')$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} J_l &= \sum m_i ([\bar{r}_S + \bar{\rho}_i, \bar{l}])^2 = \sum m_i ([\bar{r}_S, \bar{l}])^2 + \sum m_i [\bar{\rho}_i, \bar{l}]^2 + 2 \sum m_i ((\bar{r}_S, \bar{l}) \cdot (\bar{\rho}_i, \bar{l})) = \\ &= m \cdot d^2 + J_{l'} + 2(\bar{r}_S, \bar{\rho}) \cdot \left( \sum m_i \bar{\rho}_i, \bar{l} \right) = J_{l'} + d^2 m \end{aligned}$$

■

$$\bar{r}_i = x_i \bar{e}_x + y_i \bar{e}_y + z_i \bar{e}_z$$

**Определение.**

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ J_y &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \quad \text{— осевые моменты инерции}$$

**Свойство 1**

$$J_x + J_y \geq J_z$$

Доказательство.

$$J_x + J_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + 2 \sum m_i z_i \geq J_z$$

■

**Замечание.** Равенство достигается в случае плоского тела

$$J_x + J_y = J_z \Leftrightarrow z_i = 0 \quad \forall m$$

**Определение.**

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i x_i y_i \\ J_{yz} &= \sum m_i y_i z_i \\ J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i \end{aligned} \quad \text{— центробежные моменты инерции.}$$

**Определение.**

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \quad \text{— тензор инерции тела в точке } O$$

$$\bar{l} = \alpha \bar{e}_x + \beta \bar{e}_y + \gamma \bar{e}_z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\begin{aligned} J_l &= \sum m_i ((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2) = \\ &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \alpha^2 + \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) \beta^2 + \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \gamma^2 - \\ &- 2 \left( \sum m_i x_i y_i \right) \alpha \beta - 2 \left( \sum m_i y_i z_i \right) \beta \gamma - 2 \left( \sum m_i x_i z_i \right) \alpha \gamma = \\ &= J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{xz} \alpha \gamma = (J_O \bar{l}, \bar{l}) \end{aligned}$$

$$Ox'y'z'$$

$$\bar{l}' = \alpha' \bar{e}_{x'} + \beta' \bar{e}_{y'} + \gamma' \bar{e}_{z'}, \quad J'_0$$

$$\bar{l}' = A \bar{l}, \quad A^T = A^{-1}$$

$$\begin{aligned} J_l &= (J'_0 \bar{l}', \bar{l}') = (J'_0 \cdot A \bar{l}, A \bar{l}) = (A^T J'_0 A \bar{l}, \bar{l}) = (J_O \bar{l}, \bar{l}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow J_O = A^T J'_0 A \end{aligned}$$

**Определение.**

$$\Sigma \{ \bar{r}, (J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \} \quad \text{— эллипсоид инерции тела в точке } O$$

**Замечание.**

$$(J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{xz} xz = 1$$

**Замечание.**

$$(J_O \bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left( J_O \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}, \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \right)}_{J_{\bar{r}}}, \quad |\bar{r}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\bar{r}| = \sqrt{\frac{1}{J_{\bar{r}}}}$$

$$\exists O\xi\eta\zeta, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \equiv \Sigma$$

**Определение.**  $A, B, C$  — главные моменты инерции тела в точке  $O$

**Определение.**  $O\xi, O\eta, O\zeta$  — главные оси инерции в точке  $O$

**Определение.**  $S$  — центр масс, тогда  $S\xi, S\eta, S\zeta$  — главные центральные моменты

$$\det(J_O - \lambda E) = 0, \quad \lambda - A, B, C \rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \bar{e}_\xi \bar{e}_\eta \bar{e}_\zeta$$

$A = B(\lambda - \text{корень 2ой кратности, тогда } O\zeta - \text{ось динамической симметрии})$

**Замечание.** Если однородное твердое тело имеет ось геометрической симметрии, то она является главной в любой своей точке.

$Oz$  — ось симметрии,  $m_i = m'_i$ .

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i = \sum_{i=0}^{N/2} (m_i x_i z_i - m x_i z_i) = 0$$

$$J_{yz} = 0$$

$Oz$  — главная

**Замечание.** Если однородное твердое тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной в точке пересечения с плоскостью.

### 11.1 Твердое тело с неподвижной точкой ( $\bar{v}_O = 0$ )

**Теорема 23.**

$$T = \frac{1}{2}(J\bar{\omega}, \bar{\omega}), \quad \bar{K}_O = J_O \bar{\omega}$$

*Доказательство.*

$l : l \parallel \bar{\omega}, \quad O \in l (O - \text{мгновенная ось вращения})$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i ([\bar{\omega}, \bar{r}_i])^2 = \frac{1}{2} \sum m_i ([\bar{l}, \bar{r}_i])^2 \cdot \omega^2 =$$

$$\frac{1}{2} J_l \omega^2 = \frac{1}{2} (J_O, \bar{l}, \bar{l}) \omega^2 = \frac{1}{2} (J_O \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\bar{K}_O = \sum m_i [\bar{r}_i, [\bar{\omega}, \bar{r}_i]] = \sum m_i (\bar{r}_i^2 \cdot \bar{\omega} - \bar{r}_i (\bar{\omega}, \bar{r}_i))$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{e}_x + \omega_y \bar{e}_y + \omega_z \bar{e}_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_x) = \sum m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega_x - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] x_i =$$

$$= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{yx} \omega_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_y) = J_{xy} \omega_x - J_y \omega_y - J_{xz} \omega_z$$

$$(\bar{K}_O, \bar{e}_z) = J_{xz} \omega_x - J_{xz} \omega_y - J_z \omega_z$$

**Следствие.** Пусть  $O\xi, O\eta, O\zeta$  — главные оси инерции:

$$J_O = \text{diag}(A, B, C), \quad \bar{\omega} = p \bar{e}_\xi + q \bar{e}_\eta + r \bar{e}_\zeta$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \bar{K}_O = Ap \bar{e}_\xi + Bq \bar{e}_\eta + Cr \bar{e}_\zeta$$

### 11.2 Произвольное движение тела

**Теорема 24.**

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_S^2 + \frac{1}{2} (J_S \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m \bar{v}_S] + J_S \bar{\omega}$$

*Доказательство.*

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_S^2 + T^{\text{кен}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} (J_S \bar{\omega}, \bar{\omega})$$

**Следствие.**  $S_\xi, S_\eta, S_\zeta$  — главные центральные оси

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m\bar{v}_S] + Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta$$

**Следствие.**  $\bar{\omega} \parallel \bar{e}_z, \quad \bar{e}_z = \text{const}$ :

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(J_S \bar{e}_z, \bar{e}_z)}_{J_z} \omega^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}J_z \omega^2$$

$$\bar{K}_O = [\bar{r}_S, m\bar{v}_S] + \underbrace{J_S \bar{\omega}}_{J_z \bar{\omega} \Leftrightarrow J_{xy} = J_{yz} = 0} \parallel \bar{e}_z$$

## 12 Динамика твердого тела с неподвижной точкой

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O$$

$O\xi, O\eta, O\zeta$  — главные оси

$$\bar{K}_O = Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \dot{\bar{K}}_O + [\bar{\omega}, \bar{K}_O]$$

$$\Rightarrow Ap\dot{\bar{e}}_\xi = Bq\dot{\bar{e}}_\eta + Cr\dot{\bar{e}}_\zeta + \begin{vmatrix} \bar{e}_\xi & \bar{e}_\eta & \bar{e}_\zeta \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = M_\xi \bar{e}_\xi + M_\eta \bar{e}_\eta + M_\zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)qp = M_\zeta \end{cases}$$

### Лекция 11 от 15.11.2017

#### 12.1 Случай Эйлера

**Определение.** Случаем Эйлера называется задача о движении твердого тела с неподвижной точкой при отсутствии внешних сил (момента внешних сил) (по инерции).

$$\bar{M}_0 = 0$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)qp = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const}$$

$$\bar{k}_O = Ap\bar{e}_\xi + Bq\bar{e}_\eta + Cr\bar{e}_\zeta = \bar{k} = \text{const}$$

**Теорема 25.** Динамические уравнения Эйлера в случае Эйлера интегрируются в квадратурах.

*Доказательство.*

$$\begin{cases} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 2h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \end{cases}$$

$$1) A = B = C \quad (15) \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 = \text{const} \\ q = q_0 = \text{const} \\ r = r_0 = \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A \neq B \quad & \begin{cases} B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 = 2hA - k^2 \\ A(B-A)p^2 + C(B-C)r^2 = 2hB - k^2 \end{cases} \\
& \begin{cases} q = \pm f_1(r) \\ p = \pm f_2(r) \end{cases} \\
(15) \Rightarrow & C\dot{r} \pm (B-A)f_1(r)f_2(r) = 0 \\
\frac{dr}{dt} = & \pm \frac{(B-A)f_1(r)f_2(r)}{C} \\
\pm \int_0^r & \frac{d\rho}{f_1(\rho)f_2(\rho)} = \frac{B-A}{C}(t-t_0) \Rightarrow r = r(t) \Rightarrow \\
& \begin{cases} q = \pm f_1(r(t)) = q(t) \\ p = \pm f_2(r(t)) = p(t) \end{cases}
\end{aligned}$$

■

### Геометрическая интерпретация Мак-Куллока

$$\begin{aligned}
Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2h \\
A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k^2 \\
k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq, \quad k_\zeta = Cr \\
S = \eta\bar{k} : \quad k_\xi^2 + k_\eta^2 + k_\zeta^2 &= k^2 \\
\Phi = \left\{ \bar{k} : \frac{k_\xi^2}{A} + \frac{k_\eta^2}{B} + \frac{k_\zeta^2}{C} = 2h \right\} &- \text{эллипсоид Мак-Куллока}
\end{aligned}$$

При движении волчка Эйлера<sup>1</sup> эллипсоид Мак-Куллока обкатывает неподвижный конец вектора кинетического момента по линии пересечения со сферой соответствующего радиуса. При этом проекция угловой скорости эллипсоида на ось кинетического момента постоянна.

$$(\bar{k}, \bar{\omega}) = (J_0 \bar{\omega}, \bar{\omega}) = 2T = \text{const.}$$

$$\begin{aligned}
A \geq B \geq C &\Rightarrow \\
\Rightarrow A^2p^2 + ABq^2 + ACr^2 &\geq \\
\geq A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &\geq \\
\geq ACp^2 + BCq^2 + C^2r^2 & \\
2TA \geq k^2 \geq 2TC & \\
\sqrt{2TA} \geq K \geq \sqrt{2TC} & \\
k = \sqrt{2TA} & \\
k = \sqrt{2TC} & \\
k = \sqrt{2TB} & \\
k_\xi^2 \left(1 - \frac{B}{A}\right) + K_\eta^2 \left(1 - \frac{B}{C}\right) &= 0
\end{aligned}$$

### Геометрическая интерпретация Пуансо

При движении волчка Эйлера его эллипсоид инерции катится без скольжения по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента.

$P$  — точка пересечения эллипсоида инерции с мгновенной осью вращения.

$$(J_0 \bar{r}, \bar{r}) = 1 - \text{эллипсоид инерции}$$

<sup>1</sup>Твердое тело с неподвижной точкой, для которого выполняется случай Эйлера.

$$\overline{OP} = \bar{\rho} : \begin{cases} (J_0 \bar{\rho}, \bar{\rho}) = 1 \\ \bar{\rho} = \lambda \bar{\omega} \end{cases}$$

$$(J_0 \bar{\omega}, \bar{\omega}) \lambda^2 = L, \quad 2T \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$$

$$\bar{n} = \frac{\rho \operatorname{grad} f(\bar{r})}{|\operatorname{grad} f(\bar{r})|} = \frac{J_O \bar{r}}{|J_O \bar{r}|}$$

$$\bar{n}_P = \frac{J_O \bar{\rho}}{|J_O \bar{\rho}|} = \frac{J_O \bar{\omega} \lambda}{|J_O \bar{\omega}| \lambda} = \frac{\bar{k}}{|\bar{k}|} = \text{const}$$

$$\pi \perp \bar{n}_P, \quad P \in \pi$$

$$(\overline{OP}, \bar{n}_P) = \left( \lambda \bar{\omega}, \frac{J_O \bar{\omega}}{|J_O \bar{\omega}|} \right) = \frac{\lambda}{k} 2T = \frac{\sqrt{2T}}{k} = \text{const}$$

### 12.1.1 Динамически симметричный волчок Эйлера

**Теорема 26.** Движение динамически симметричного волчка Эйлера всегда является регулярной прецессией.

*Доказательство.*

$$\begin{cases} k_\xi = k \sin \Theta \sin \varphi \\ k_\eta = k \sin \Theta \cos \varphi \\ k_\zeta = k \cos \Theta \end{cases}$$

$$k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq = Aq, \quad k_\zeta = Cr$$

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi + \dot{\Theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$C\dot{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{const}$$

$$k \cos \Theta = Cr_0 \Rightarrow \cos \Theta = \frac{Cr_0}{k} = \text{const} \Rightarrow \Theta = \text{const} \quad (\dot{\Theta} = 0)$$

$$\begin{cases} k \sin \Theta \sin \varphi = A\dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi \\ k \sin \Theta \cos \varphi = A\dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow k = A\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{k}{A} = \text{const}$$

$$\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} \cos \Theta = r_0 - \frac{k}{A} \frac{Cr_0}{k} = r_0 \left( 1 - \frac{C}{A} \right) = \text{const}$$

■

### 12.2 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного волчка

$OXYZ$  — неподвижная система отсчета.

$O\xi\eta\zeta$  — связана с телом ( $O\xi$  - ось симметрии).

$Ox'y'z$  — подвижная система отсчета.

$$\bar{\omega}_{\text{пер}} = \dot{\psi} \bar{e}_z$$

$$\overline{M}_O = \frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{k}_O + [\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{k}_O]$$

$$\bar{k}_O = Ap\bar{e}_{x'} + Aq\bar{e}_{y''} + Cr\bar{e}_\zeta$$

$$(\bar{e}_{y''} \perp \bar{e}_\zeta, \bar{e}_{y2} \perp \bar{e}_{x'})$$

$$\bar{\omega}_{\text{абс}} = \dot{\psi} \bar{e}_z + \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta = (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \Theta) \bar{e}_\zeta + \dot{\psi} \sin \Theta \cdot \bar{e}_{y''}$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta = \text{const} \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \dot{\bar{k}}_O = 0$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= \begin{vmatrix} \bar{e}_{x'} & \bar{e}_{y''} & \bar{e}_\zeta \\ 0 & \dot{\psi} \sin \Theta & \dot{\psi} \cos \Theta \\ 0 & A\dot{\psi} \sin \Theta & C\dot{\psi} \cos \Theta + C\dot{\varphi} \end{vmatrix} = \bar{e}_{x'} \dot{\psi} \sin \Theta \cdot (C\dot{\varphi} + C\dot{\psi} \cos \Theta - A\dot{\psi} \cos \Theta) = \\ &= \bar{e}_{x'} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \Theta \cdot C \left( 1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \Theta \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\overline{M}_0 = C[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2] \left( 1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \Theta \right) - \text{точная формула гироскопии.}$$

$$\bar{\omega}_1 = \dot{\psi} \bar{e}_z$$

$$\bar{\omega}_2 = \dot{\varphi} \bar{e}_\zeta$$

$$[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2] = \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \Theta \bar{e}_{x'}$$

### 12.3 Случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называется задача о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. Считаем, что центр масс тела лежит на оси его динамической симметрии.

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= [\bar{r}_\zeta, m\bar{g}] = [l\bar{e}_\zeta, -mg\bar{e}_z] = [l\bar{e}_\zeta, -mg(\cos \Theta \bar{e}_\zeta + \sin \Theta \cdot \sin \varphi \bar{e}_\eta + \sin \Theta \cos \varphi \cdot \bar{e}_\xi)] = \\ &= -mgl \sin \Theta (\sin \varphi \bar{e}_\eta - \cos \varphi \bar{e}_\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = mgl \sin \Theta \cos \varphi \\ A\dot{q} + (A-C)pr = -mgl \sin \Theta \sin \varphi \\ C\dot{r} + 0 = 0 \\ p = \dot{\psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{\Theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \Theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

### Лекция 12 от 22.11.2017

#### Интегралы

1.  $C\dot{e} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{const}$
2.  $(\overline{M}_0, \bar{e}_z) = 0, \quad \dot{\bar{e}}_z = 0 \Rightarrow k_z = (\bar{k}_O, \bar{e}_z) = \text{const}$   
 $k_z = (A\dot{p}\bar{e}_\xi + A\dot{q}\bar{e}_\eta + C\dot{r}\bar{e}_\zeta, \sin \Theta \sin \varphi \cdot \bar{e}_\xi + \sin \Theta \cos \varphi \bar{e}_\eta - \cos \Theta \bar{e}_\zeta) = A \sin \Theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + C r_0 \cos \Theta =$   
 $A\dot{\psi} \sin \Theta + C r_0 \cos \Theta = k = \text{const}$
3.  $T + \Pi = h = \text{const}$   
 $\frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + mgl \cos \Theta) = h$   
 $A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + C r_0^2 + 2mgl \cos \Theta = 2h$   
 $A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + 2mgl \cos \Theta = h^*, \quad h^* = 2h - C r_0^2$

Интегрирование: 2  $\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{k - C r_0 \cos \Theta}{A \sin^2 \Theta}$

$$3 \Rightarrow \frac{(k - C r_0 \cos \Theta)^2}{A \sin^2 \Theta} + A\dot{\Theta}^2 + 2mgl \cos \Theta = h^*$$

$$\dot{\Theta}^2 = f(\Theta), \quad f(\Theta) = \frac{1}{A} \left( h^* - 2mgl \cos \Theta - \frac{(k - C r_0 \cos \Theta)^2}{A \sin^2 \Theta} \right)$$

$$\dot{\Theta} = \pm \sqrt{f(\Theta)}$$

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{f(\Theta)}} = \pm dt$$

$$\int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} = t - t_0$$

$$\dot{\Theta} = \frac{kCr_0 \cos \Theta(t)}{A \sin^2 \Theta(t)} = f_1(t)$$

$$\psi = \int_0^t f_1(\tau) d\tau = \psi(t)$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \Theta = r_0 - \dot{\psi}(t) \cos \Theta(t) = f_2(t)$$

$$\varphi = \int_0^t f_2(\tau) d\tau$$

### Геометрическая интерпретация

$$\cos \Theta = x$$

$$Ah^* - 2Amglx - \frac{(Cr_0x - k)^2}{1 - x^2} = A^2 f(\Theta) = A^2 \dot{\Theta}^2$$

$$F(x) = 2Amglx + \frac{(Cr_0x - k)^2}{1 - x^2} \leq Ah^*$$

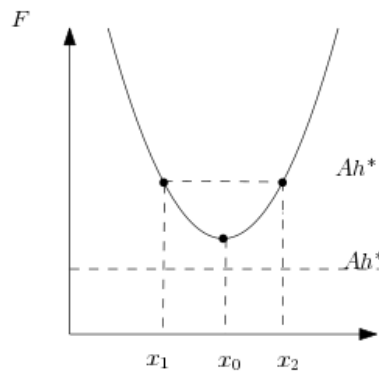
$$F(x) = 2Amglx + \frac{C^2r_0^2(x^2 - 1) + C^2r_0^2 + k^2 - 2Cr_0kx}{1 - x^2} =$$

$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{(Cr_0 - k)^2(1 + x) + (Cr_0 + k)^2(1 - x)}{2(1 - x^2)} =$$

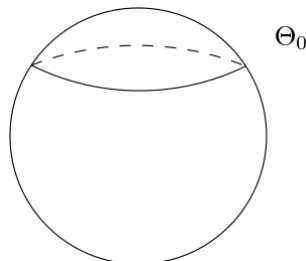
$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{(Cr_0 - k)^2}{1 - x} + \frac{(Cr_0 + k)^2}{1 + x} \right)$$

$$F'_x(x) = 2Amgl + \frac{1}{2} \left( \frac{(Cr_0 - k)^2}{(1 - x)^2} - \frac{(Cr_0 + k)^2}{(1 + x)^2} \right)$$

$$F''_x(x) = 0 + \frac{(Cr_0 - k)^2}{(1 - x)^3} + \frac{(Cr_0 + k)^2}{(1 + x)^3} \geq 0, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

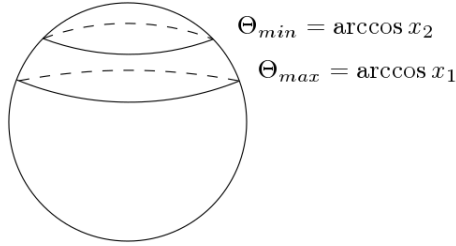


$$1. \ h^* = \frac{F(x_0)}{A} \Rightarrow x = x_0, \quad \Theta = \arccos x_0 = \text{const}$$



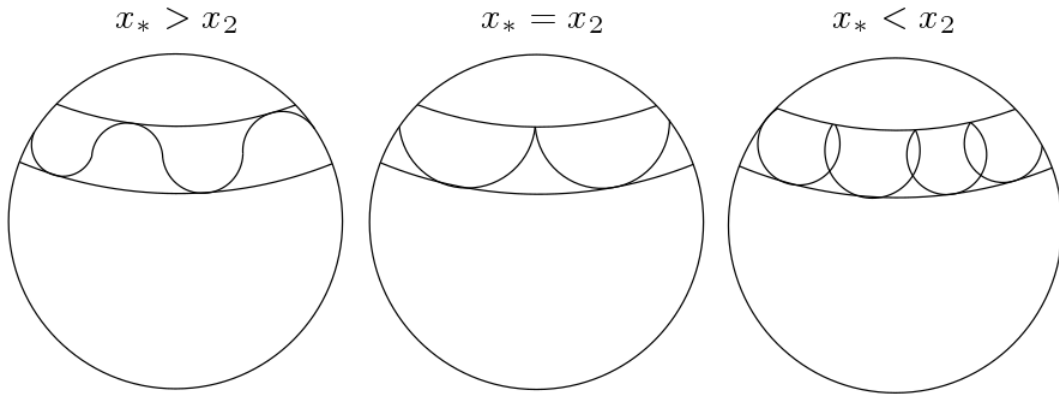


$$2. \ h^* > \frac{F(x_0)}{A}: \Theta_{min} = \arccos x_2, \quad \Theta_{max} = \arccos x_1$$



$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0x - k}{A(1-x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = x_* = \frac{k}{Cr_0}$$

$$F'_*(x_*) = 2Amgl > 0$$



**Замечание.** Если угловая скорость собственного вращения много больше скорости прецессии, т.е.  $\dot{\psi} \gg \dot{\psi}$ , тело совершает псевдoreгулярную прецессию.

### Основные теоремы динамики

$$\bar{p} = m\bar{v}_s$$

$$\bar{k}_O = [\bar{r}_s, m\bar{v}_s] + J_s\bar{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}(J_s\bar{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\dot{\bar{p}} = \sum_{i=1}^N F_i^{(e)} = \bar{F}$$

$$\dot{\bar{k}}_O = \sum p\bar{r}_i, \bar{F}_i^{(e)} = \bar{M}_O$$

$$\dot{T} = \sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i)$$

**Замечание.**

$$\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) = \dot{T} = (m\bar{w}_s, \bar{v}_s) + ((J_s\dot{\bar{\omega}}), \bar{\omega}) = (\bar{F}, \bar{v}_s) + (\bar{M}_s, \bar{\omega})$$

**Утверждение 18.** Мощность внешних сил, действующих на твердое тело определяется равенством

$$\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) = (\bar{p}, \bar{v}_p) + (\bar{M}_p, \bar{\omega}),$$

где  $p$  — произвольная точка тела.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_i) &= \sum (\bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_p + [\bar{\omega}, \rho_i]) = \left( \sum \bar{F}_i^{(e)}, \bar{v}_p \right) + (\bar{\omega}, \sum [\rho_i, \bar{F}_i]) = \\ &= (\bar{p}, \bar{v}_p) + (\bar{M}_p, \bar{\omega})\end{aligned}$$

■

**Определение.** Две системы сил (в совокупности с точками их приложения), действующих на твердое тело называются эквивалентными, если они вызывают одно и то же движение тела.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \{\bar{F}'_i, p'_i\}$$

Следствие.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \bar{F}'_i, p'_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}'_i \\ \sum [\overline{OP}, \bar{F}_i] = \sum [\overline{OP}', \bar{F}'_i] \end{cases}$$

Следствие.

$$\{\bar{F}_i, p_i\} \sim \{\bar{F}, \bar{M}_O, O\}, \quad \bar{F} = \sum \bar{F}_i, \quad \bar{M}_O = \sum [\overline{OP}, \bar{F}_i]$$

**Определение.**  $\bar{R}$  — равнодействующая системы сил  $\{\bar{F}_i, p_i\}$ , если существует точка  $O$  тела, такая что  $\{\bar{F}, p_i\} \sim \{\bar{R}, O\}$

**Пример.** Для двух сил, приложенных к разным концам твердого стержня в противоположном направлении, равнодействующая не существует.

**Пример.**

$$\{m_i \bar{g}, P_i\} \sim \{m \bar{g}, S\}$$

$$\sum m_i \bar{p} = \left( \sum m_i \right) \bar{g} = m \bar{g}$$

$$\sum [\overline{OP}, m_i \bar{g}] = \sum [m_i \overline{OP}, \bar{g}] = \left[ \sum m_i \overline{OP}, \bar{g} \right] = [m \bar{r}_s, \bar{g}] = [\bar{r}_s, m \bar{g}]$$

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + [\bar{F}, \overline{OO'}]$$

**Теорема 27.** Если главный вектор внешних сил, действующих на твердое тело отличен от нуля, то существует такая точка, при приведении к которой, главный вектор и главный момент параллельны.

$$\bar{F} \neq 0 \quad \exists A : \bar{M}_A \parallel \bar{F}$$

Доказательство.

$$\bar{M}_a = \bar{M}_O + [\bar{F}, \overline{OA}] = \lambda \bar{F} \quad | \times \bar{F}$$

$$[\bar{F}, \bar{M}_O] + \bar{F}(\bar{F}, \overline{OA}) - F^2 \overline{OA} = 0$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{F^2} [\bar{F}, \bar{M}_O] + \alpha \bar{F}, \quad \forall \alpha = \text{const}$$

■

**Определение.** Прямая, определяемая последним равенством называется осью динамического винта (осью минимальных моментов).

**Определение.**  $\lambda$  — параметр винта.

$$\lambda \bar{F} = \bar{M}_O + \left[ \bar{F}, \frac{1}{F^2} [\bar{F}, \bar{M}_O] + \alpha \bar{F} \right] = \bar{M}_O + \frac{1}{F^2} (\bar{F}(\bar{F}, \bar{M}_O) - F^2 \bar{M}_O) = \frac{(\bar{F}, \bar{M}_O)}{F^2} \bar{F}$$

$$\lambda = \frac{(\bar{F}, \bar{M}_O)}{F^2}$$

$$1. \quad \bar{F} = 0 : \quad \{\bar{F}_i, P_i\} \sim \{\bar{M}_O, O\}$$

$$2. \quad \bar{F} \neq 0, \lambda = 0 : \{\bar{F}_i, P_i\} \sim \{\bar{R}, A\}$$

$$3. \quad \bar{F} \neq 0, \lambda \neq 0 : \{\bar{F}, P_i\} \sim \{\bar{F}, \bar{M}_A, A\}$$

Лекция 13 от 29.11.2017**13 Уравнения Лагранжа**

$$\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N \in \mathbb{R}^3$$

**Определение.** Механическими связями называются ограничения на положения и скорости материальных точек системы, которые выполняются при всех действующих на систему силах.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_j(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0, \quad j = 1, \dots, k \text{ — уравнение связи.} \end{aligned} \quad (16)$$

**13.1 Классификация связей**

1. (16) — двусторонняя связь.
2.  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$  — стационарная связь (склерономная).  
 $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \neq 0$  — нестационарная связь (реономная).
3.  $f_\alpha(\bar{r}, t) = 0$  — геометрическая.
4.  $f_\alpha(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) = 0$  — дифференциальная связь.

**13.1.1 Геометрические связи**

**Определение.**  $\Sigma = \{\bar{r} : f_j(\bar{r}, t) = 0, j = 1, \dots, k\}$  — пространство положений (конфигурационное пространство).

**Определение.**  $n = \dim \Sigma$  — количество степеней свободы.

**Определение.**  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$  — обобщенные локальные координаты.

$n = 3N - k$ , где  $k$  — число уравнений связи, если

1. функции связей гладкие ( $\text{grad}_{\bar{r}} f_j \neq 0, \forall i \in 1, \dots, k$ )
2.  $f_j$  — независимые. ( $\text{rank} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \right) = k$ )

**Определение.** Функции  $f_1, \dots, f_n$  функционально независимы, если  $F(f_1, \dots, f_n) = 0 \Leftrightarrow F \equiv 0$

**Пример (Независимые функции).**  $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_2 = f_1^2, F_2 = f_2 - f_1^2$ .

**Пример.**

$$\begin{aligned} f(\bar{r}) &= x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ \text{grad } f|_{x=0} &= 0 \quad n = 0 \neq 3 \cdot 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} |\bar{r}_i - \bar{r}_j| &= c_{ij} = \text{const} \\ k &= \frac{N(N-1)}{2} \quad n = 6 \neq 3N - \frac{N(N-1)}{2}, \quad N > 4 \\ \bar{r} &= \bar{r}(\bar{q}, t) \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= 0, n = 2, \bar{q} = (x, \varphi)^T \\ \bar{v}_k &= \bar{v}_0 + [\bar{\omega}, \overline{OK}] = \dot{x} \bar{e}_x + [-\dot{\varphi} \bar{e}_z, -R \dot{\varphi} \bar{e}_y] = (\dot{x} - R \dot{\varphi}) \bar{e}_x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{x} - R \dot{\varphi} = 0 \\ \int dx &= \int R d\varphi \\ x - x_0 &= R(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

**Замечание.**

$$f(\bar{r}, t) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \dot{\bar{r}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

**Определение.** Дифференциальная связь называется голономной (интегрируемой), если она может быть представлена в эквивалентной геометрической форме. В противном случае связь неголономна (неинтегрируема).

**Пример** (конек Чаплыгина).

$$\bar{v}_k \parallel \bar{l}, \quad n = 3, \bar{q} = (x, y, \varphi)^T$$

$$\bar{v}_k = \dot{x}\bar{e}_x + \dot{y}\bar{e}_y \parallel \cos \varphi \bar{e}_x + \sin \varphi \bar{e}_y$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{Пусть } \exists f(x, y, \varphi, t) = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \Leftrightarrow \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\dot{x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi \right) + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{tg} \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\bar{a}(\bar{r})\dot{\bar{r}} + b(\bar{r}) = 0$  — интегрируема, если

$$\exists f : \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = \bar{a}, \frac{\partial f}{\partial t} = b \Leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial q_n} & \frac{\partial a_n}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Критерий ( $n = 3$ )  $a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + a_3\dot{q}_3 = 0$  — интегрируемая  $\Leftrightarrow \bar{a} \operatorname{rot} \bar{a} = 0$

## 13.2 Действительные и виртуальные перемещения

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt — \text{действительные перемещения.}$$

$$\Sigma = \{\bar{r}, f_j(\bar{r}) = 0, j = 1, \dots, k\}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}_i} d\bar{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

$$\delta \bar{r} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \delta q_i — \text{виртуальные перемещения.}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{r}} \delta \bar{r} = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

**Замечание.** Если связи стационарные, то пространство действительных и виртуальных перемещений совпадают<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Написано неразборчиво, доверять этому утверждению не стоит.

### 13.3 Идеальные связи и общие уравнения динамики. Принцип освобождения связи. (Уравнения Лагранжа первого рода)

Если к активным силам, действующим на механическую систему, добавляются силы, с помощью которых реализуется уравнения связи, то систему можно рассматривать как свободную.

$\bar{R}_i$  — сила реакции, действующая на  $m_i$

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{R}_i + \bar{F}_i$$

**Определение.** Связи идеальные, если при любом виртуальном перемещении системы выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n (\bar{R}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

$$\bar{R}_i = m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

#### 13.3.1 Принцип Даламбера-Лагранжа<sup>3</sup>

**Утверждение 19.** Если связи, наложенные на механическую систему идеальные, то при любом ее движении и любом виртуальном перемещении выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0 \quad (17)$$

**Утверждение 20** (Обратное). Если связи идеальные и какое-то движение удовлетворяет (17), то это движение является действительным движением системы.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Если связи идеальны, то

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

$$\ddot{\bar{r}}_i = \ddot{\bar{r}}_i(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \dots, \dot{\bar{r}}_N, t)$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N)$$

$$\bar{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \dots, R_{Nx}, R_{Ny}, R_{Nz})^T$$

$$\bar{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})^T$$

$$(17) \Leftrightarrow (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) = 0, \bar{R} = M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}$$

$$\delta \bar{r} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \Rightarrow \bar{R} = \bar{R}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$$

### Лекция 14 от 06.12.2017

Вроде бы это еще не в другую сторону, но уже и не в ту (Тут был перерыв между лекциями)

$$\bar{r} = (x_1, \dots, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\bar{F} = (F_{1x}, \dots, F_{Nz})^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_I = (\cdot; t) = 0, i = \overline{1, \dots, k}$$

$$\bar{\varphi}_i \text{grad}_{\bar{r}} \rho_i \in \mathbb{R}^{3N}$$

<sup>3</sup>Также принцип виртуальных перемещений.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } \Phi = k$$

Число степеней свободы — размерность пространства виртуальных перемещений.  $\delta \bar{r} : \left( \frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}}, \delta \bar{r} \right) = (\bar{\varphi}_i, \delta \bar{r}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \Leftrightarrow \Phi d\bar{r} = 0, n = 3N - k$   
 $\bar{R} \in \mathbb{R}^{3N}$  — реакции  $(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0$  — условия идеальной связи.

$\Leftarrow$

*I*

$$\begin{aligned} (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) &= 0 \stackrel{?}{\rightarrow} \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \\ (\bar{\varphi}_i, \delta \bar{r}) &= 0 \quad \forall i = \overline{1, \dots, k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \bar{r} &\perp \pi = \{c_1 \bar{\varphi}_1 + c_2 \bar{\varphi}_2 + \dots + c_k \bar{\varphi}_k, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, \dots, k}\} \\ (M\ddot{\bar{r}} - \bar{F}, \delta \bar{r}) &= 0 \Rightarrow M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} \in \pi \rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k : M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} &= \lambda_1 \bar{\varphi}_1 + \dots + \lambda_k \bar{\varphi}_k = \Phi^T \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in \mathbb{R}^k &\rightarrow \ddot{\bar{r}} = M^{-1} \bar{F} + M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} \end{aligned}$$

*II*

$$\begin{aligned} f_i(\bar{r}, t) &\equiv 0 \\ \frac{df_i}{dt} &= \left( \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}}}_{\bar{\varphi}_i}, \dot{\bar{r}} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \forall i = \overline{1, \dots, k} \\ \Phi \dot{\bar{r}} + \bar{\beta}(\bar{r}, t) &= 0 \\ \Phi \dot{\bar{r}} + \psi(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) &= 0 \Rightarrow \\ \Phi M^{-1} \bar{F} + \Phi M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} + \bar{\psi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi M^{-1} \Phi^T \bar{\lambda} &= \bar{h}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \end{aligned}$$

*III*

$$\begin{aligned} \forall \bar{u} \neq 0 : (\Phi M^{-1} \Phi^T \bar{u}, \bar{u}) &= (M^{-1} \Phi^T \bar{u}, \Phi^T \bar{u}) = \\ &= (M^{-1} \bar{x}, \bar{x}) > 0, \text{ т.к.} \\ a) \det M^{-1} &= (\det M)^{-1} \neq 0, \\ b) \bar{x} &= \Phi^T \bar{u} \neq 0, \quad \forall \bar{u} \neq 0. \\ \Rightarrow \det(\Phi M^{-1} \Phi^T) &\neq 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = (\Phi M^{-1} \Phi^T)^{-1} h(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) = \lambda(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \Rightarrow \\ \bar{R} = M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} &= \bar{R}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \end{aligned}$$

■

**Замечание.** Принцип виртуальных перемещений справедлив и для неголономных систем и доказываться аналогично.

**Замечание.**

$$\begin{cases} M\ddot{\bar{r}} - \bar{F} = \Phi^T \bar{\lambda} \\ R_i(\bar{r}, t) = 0, i = 1, \dots, k \end{cases} \quad \text{— уравнения Лагранжа 1 рода (Это неточно)}$$

### 13.4 Обобщенные силы

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{q}, t), \quad (\bar{u} = \bar{r}_i(\bar{q}, t)), \quad \bar{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = (\bar{F}, \delta \bar{r}) = \left( \bar{F}, \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^N \left( \bar{F}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = (\bar{Q}, \delta \bar{q})$$

**Определение.**

$$Q_j = (\bar{F}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i)$$

— обобщенная сила, соответствующая координате  $q_j$ .

**Утверждение 21.** Если координата  $q_l$  — декартова координата центра масс всей системы, то соответствующая ей обобщенная сила равна проекции главного вектора внешних сил системы на соответствующую декартову ось.

$$q_l = x_s \Rightarrow Q_l = (\bar{F}, \bar{e}_x)$$

*Доказательство.*

$$\delta q_j = 0, \quad j \neq l \Rightarrow \delta \bar{r}_i = \delta x_s \bar{e}_x$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta x_s \bar{e}_x) = \left( \sum_{i=1}^N \bar{F}_i, \bar{e}_x \right) \delta x_s = Q_l \delta q_l$$

■

**Пример (АТТ).**

$$\bar{r}_i = \bar{r}_p + \bar{\rho}_i = \bar{r}_p + \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \bar{e}_\alpha,$$

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  — базис, связанный с телом.

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t), \quad \bar{r}_p = \bar{r}_p(\bar{q}, t), \quad \bar{e}_\alpha = \bar{e}_\alpha(\bar{q}, t)$$

$$\rho_{i\alpha} = const$$

$$\left( \dot{\bar{e}}_\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{e}}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \right)$$

$$\delta e_\alpha = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \dot{\bar{e}}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} ([\bar{\omega}, \bar{e}_\alpha]) \delta q_j = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \bar{e}_\alpha \right] \delta q_j$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{u} &= \delta \bar{r}_p + \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j}, \bar{e}_\alpha \right] \delta q_j = \\ &= \delta \bar{r}_p + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j, \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{i\alpha} \bar{e}_\alpha \right] = \\ &= \delta \bar{r}_p + \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j, \bar{\rho}_i \right] = \delta \bar{r}_p + [\bar{\omega}_\delta, \bar{\rho}_i], \quad \bar{\omega}_\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_p) + \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, [\bar{\omega}_\delta, \bar{\rho}_i]) = \\ &= (\sum \bar{F}_i, \delta \bar{r}_p) + \left( \bar{\omega}_\delta, \sum_{i=1}^N [\bar{\rho}_i, \bar{F}_i] \right) = (\bar{F}, \delta \bar{r}_p) + (\bar{\omega}_\delta, \bar{M}_p) \end{aligned}$$

**Следствие.**  $\bar{F}^{(i)} = 0, \bar{M}_p^{(i)} = 0 \Rightarrow$  внутренние связи в твердом теле идеальны.

**Пример** (АТТ с неподвижной точкой).

$$n = 3,$$

$$q = (\varphi, \psi, \Theta)^T, \quad \bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{e}_z + \Theta\bar{e}_{x_1} + \dot{\varphi}\bar{e}_\zeta$$

$$\bar{\omega}\delta = \delta\psi\bar{e}_z + \delta\Theta\bar{e}_{x_1} + \delta\varphi\bar{e}_\zeta$$

$$\begin{aligned} \delta A &= (\bar{M}_O, \delta\psi\bar{e}_z + \delta\Theta\bar{e}_{x_1} + \delta\varphi\bar{e}_\zeta) = \\ &= (\bar{M}_O, \bar{e}_z)\delta\psi + (\bar{M}_O, \bar{e}_{x_1})\delta\Theta + (\bar{M}_O, \bar{e}_\zeta)\delta\varphi \end{aligned}$$

**Утверждение 22.** Если обобщенная координата — это угол поворота силы относительно некоторой оси, то обобщенная сила — это момент силы относительно этой же оси.

### 13.5 Уравнения Лагранжа второго рода

**Теорема 28.** Если связи, наложенные на механическую систему, идеальны и голономны, то уравнения ее движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

*Доказательство.*

$$\sum_{i=1}^N (M_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0, \quad \bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$$

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

$\delta q_1, \dots, \delta q_n$  — независимые  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = 0, \quad \forall j = \overline{1, \dots, n}$$

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left( \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) - \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\bar{r}}_i, \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_i)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_i)}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

■

**Следствие.** Связи идеальны и голономны, а силы потенциальны  $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0, \quad L = T - \Pi$$

**Определение.**  $L$  — лагранжиан системы, система лагранжева.

$$\exists \Pi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t), \quad \text{grad}_{\bar{r}_i} \Pi = -\bar{F}_i$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = (\bar{F}, \delta \bar{r}) = - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{r}}, \delta \bar{r} \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \Pi(\bar{r}(\bar{q}, t), t)}{\partial \bar{r}}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}_j} \right) \delta q_j = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j \Rightarrow \\
&\Rightarrow Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \\
L = T - \Pi = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - \Pi(\bar{q}, t) \\
\frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} + \bar{Q}
\end{aligned}$$

### Лекция 15 от 13.12.2017

$$\begin{aligned}
\bar{q} &= (q_1, \dots, q_n)^T, \quad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad \bar{r}_i = r_i(\bar{q}, t) \\
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2}_{\text{структура кинетической энергии}} = T_2 + T_1 + T_0 \\
T_0 &= \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\
T_1 &= \sum_j \underbrace{\sum_i m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)}_{b_j} \dot{q}_j = \sum_j b_j \dot{q}_j = (\bar{b}, \dot{\bar{q}}) \\
\bar{b} &= (b_1, \dots, b_n)^T, \bar{b} = \bar{b}(\bar{q}, t) \\
T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \underbrace{\sum_i m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{a_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} (A \dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}), \quad A = (a_{jk}), A = A^T
\end{aligned}$$

**Утверждение 23.**  $A$  — положительно определенная матрица.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\delta \bar{q} &= (\delta q_1, \dots, \delta q_n)^T, \delta \bar{r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j \\
\delta \bar{r} &= 0 \Leftrightarrow \delta \bar{q} = 0 \\
(A \delta \bar{q}, \delta \bar{q}) &= \sum_{j=1}^N m_i \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \delta a_j \right)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\delta r_i)^2 = (M \delta \bar{r}, \delta \bar{r}) > 0, \forall \delta \bar{q} \neq 0
\end{aligned}$$

■

**Следствие.**  $\det A \neq 0$ .

## 13.6 Свойства уравнений Лагранжа

**Уравнения Лагранжа:**

1. Связи идеальны и голономны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

2. Связи идеальны и голономны, а активные силы потенциальны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0$$

3. Связи идеальны и голономны, а активные силы не потенциальны:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^*$$

Где  $L = T - \Pi$ ,  $\bar{Q}^*$  — обобщенные силы, вызванные непотенциальными активными силами.  
 $\bar{Q}^*(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  — обобщенный потенциал, если  $\exists V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^* \Rightarrow L = T - \Pi - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0$$

1. Ковариантность по отношению к выбору обобщенных координат

$$\bar{q} \longrightarrow T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \quad \bar{Q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}$$

$$\bar{q}' \longrightarrow T'(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t) = T(\bar{q}, (\bar{q}', t), \dot{\bar{q}}'(\bar{q}', \bar{q}', t), t), \quad \bar{Q}'$$

2. Калибровочная инвариантность

**Утверждение 24.** Уравнения Лагранжа не меняются при добавлении кинетической энергии полной производной гладкой функции от обобщенных координат и времени.

$$T' = T + \frac{d}{dt} f(\bar{q}, t)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\bar{q}, t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial \bar{q}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T'}{\partial \bar{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} = \bar{Q} \end{aligned}$$

■

**Утверждение 25.** В Лагранжевой системе

$$L' = c_1 L + \dot{f} + c_2, \quad c_1 \neq 0, \quad c_1 = \text{const}, c_2 = \text{const}$$

3. Разрешимо относительно  $\ddot{\bar{q}}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}_i} (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \left( \sum_{j,k} q_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) = \\ &= \sum_k a_{ik} \dot{q}_k + \sum_j a_{ji} \dot{q}_j = 2 \sum_k a_{ik} \dot{q}_k \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}} (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) &= 2A\dot{\bar{q}} \\ \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\bar{q}}}, \dot{\bar{q}} \right) &= 2T_2 \text{ (формально, теорема об однородных функциях)} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) + (\bar{b}, \dot{\bar{q}}) + T_0 \right) = \frac{d}{dt} (A(\bar{q}, t)\dot{\bar{q}} + \bar{b}(\bar{q}, t)) = \\ &= A\ddot{\bar{q}} + \bar{\beta}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{q}}} (T_2 + T_1 + T_0) = \bar{\varphi}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \\ A\ddot{\bar{q}} + \bar{\beta} - \bar{\varphi} &= \bar{Q} \Rightarrow A\ddot{\bar{q}} = \bar{\psi}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \end{aligned}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \ddot{\bar{q}} = A^{-1} \bar{\psi}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = f(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad (18)$$

■

**Замечание.** Система (18) может быть записана в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{v} \\ \dot{\bar{v}} = f(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \end{cases} \quad \bar{x} = (q_1, \dots, q_k, v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{2n} \\ \quad \quad \quad \dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, t)$$

### 13.7 Первые интегралы Лагранжевой системы координат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \quad L = T - \Pi$$

#### 13.7.1 Циклический интеграл

**Определение.**  $q_1$  — циклическая координата, если  $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ .

**Утверждение 26.**

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c = const$$

*Доказательство.*

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c = const$$

■

**Пример** (Движение точки в центральном поле).

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \Pi(r), \quad F = F(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = c = const$$

**Пример.** Волчок Лагранжа.

#### 13.7.2 Обобщенный интеграл (интеграл Пенлеве-Якоби)

**Утверждение 27.**

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - L = const$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}, \dot{q} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} E = 0 \Rightarrow E = const \end{aligned}$$

■

**Замечание.**

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$$

$$E = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right) - L = \underbrace{\left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right)}_{2T_2} + \underbrace{\left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}}, \dot{q} \right)}_{T_1} + 0 - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi = T_2 - T_0 + \Pi$$

если  $T = T_2$ , то  $E = T_2 + \Pi = T + \Pi$  — полная энергия

если  $T \neq T_2$ , то  $E = T_2 - T_0 + \Pi$  — обобщенная энергия

**Следствие.** Если связи идеальные, голономные и стационарные, а активные силы консервативны, то

$$T + \Pi = const$$

*Доказательство.* 1. Связи идеальные, голономные, значит силы потенциальны.

2. Связи стационарны  $\Rightarrow \bar{r}_i(\bar{q}, t) = \bar{r}_i(q)$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_1 = 0, T_0 = 0, T = T_2.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow E &= T_2 + \Pi - T + \Pi = const \end{aligned}$$

■

**Обобщение**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^*, L = T_2 - \Pi(\bar{q})$$

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}, \dot{\bar{q}} \right) + 0 = (Q^*, \dot{\bar{q}})$$

**Замечание.**

$$(\bar{Q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_j Q_j^* \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i^*, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}) \right) \dot{q}_j = \sum_{i=1}^N \left( \bar{F}_i^*, \sum \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_{i=1}^N (\bar{F}_i^*, \bar{v}_i), \text{ т.к. } \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$$

**Определение.**  $E = (\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \equiv 0 \quad \forall \dot{\bar{q}} - \bar{Q}^* - \text{гироскопическая}$

**Определение.**  $E = (\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) \leq 0 - \bar{Q}^* - \text{диссипативная}$

**Определение.**  $E = (\bar{Q}^*, \dot{\bar{q}}) < 0 \forall \quad \dot{\bar{q}} \neq 0 - \bar{Q}^* - \text{гироскопическая}$