Лекции по аналитической механике. Весенний семестр.

Муницына Мария Александровна

30 мая 2018 г.

Набор и рисунки: Александр Валентинов.
За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю.

*Об ошибках можно сообщить здесь: **https://vk.com/valentiay** или сделать пуллреквест с исправлениями здесь: **https://github.com/valentiay/analmech**.*
Горизонтальные черты обозначают границы между лекциями.

Содержание

1 Равновесие динамических сил

$$\overline{r}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad \overline{r} = (x_1, y_1, z_1, \ldots)^T$$

Определение. r_0 — *положение равновесия, если*

$$\overline{r}(t_0) = \overline{r}_0,\ \dot{\overline{r}}(t_0) = 0 \Rightarrow \overline{r}(t) = \overline{r}_0$$

Замечание. *Положение равновесия зависит от системы отсчета.*

1.1 Общая теория статики

$\overline{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \ldots)^T$

$$\left.\begin{array}{rl} f_\alpha(\overline{r}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k & \Leftrightarrow \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \overline{r}}\dot{\overline{r}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \\ f_\beta(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = 0, \quad \beta = k+1, \ldots, n & \qquad f_\beta = B(\overline{r}, t)\dot{\overline{r}} + \overline{\gamma} = 0 \end{array}\right\} \Phi\dot{\overline{r}} + \overline{\psi} = 0$$

$\delta\overline{r}$ — виртуальное перемещение, $\Phi\delta\overline{r} = 0$

$\overline{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \ldots)^T$,

$$(\overline{R}, \delta\overline{r}) = 0 \text{ — условие идеальности связей} \tag{1}$$

Принцип Даламбера. Если наложенные на систему связи идеальны, то некоторые ее положения являются положениями равновесия, тогда, и только тогда, когда работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящем систему из этого положения, равна нулю.

$$\overline{r}_0 \text{ — положение равновесия} \Leftrightarrow (\overline{F}, \delta\overline{r}) = 0 \quad \text{(связи идеальны.)}$$

Доказательство.

1. Принцип виртуальный перемещений: $\overline{r}(t)$ — движение системы $\Leftrightarrow (M\dot{\overline{r}} - \overline{F}, \delta\overline{r}) = 0$.
2. Принцип детерминированности.

■

1.2 Равновесие голономных систем

Голономная система:

$\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — обобщенные координаты.

$\overline{r} = \overline{r}(\overline{q}, t)$

$\overline{r}_0$ — положение равновесия, $\quad \overline{r}_0 = \overline{r}(\overline{q}_0, t)$

$\overline{Q} = \overline{Q}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$

$(\overline{F}, \delta\overline{r}) = (\overline{Q}, \delta\overline{q}), \quad \delta q_1, \ldots, \delta q_n$ — независимы.

$(1) \Leftrightarrow \overline{Q}(\overline{q}_0, 0, t) \equiv 0$

Система голономна, силы потенциальны:

$\exists\Pi(\overline{q}, t) : \overline{Q} = -\operatorname{grad}\Pi(\overline{q}, t) = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial\overline{q}}$

$(1) \Leftrightarrow \left.\dfrac{\partial\Pi}{\partial\overline{q}}\right|_{\overline{q}=\overline{q}_0} \equiv 0$

$\overline{q}_0$ — критическая точка $\Pi(\overline{q}, t)$

Натуральная Лагранжева система (связи идеальны, голономны, стационарны, силы потенциальны и $\frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0$):

$T = T_2 = \dfrac{1}{2}(A(\overline{q})\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}), \quad \Pi = \Pi(\overline{q})$

$\left(\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + \Pi = const\right)$

Определение. $\overline{q}_0$ *— положение равновесия, если* $\overline{q}(t) \equiv \overline{q}_0$ *— решение уравнений Лагранжа.*

Утверждение. $\overline{q}_0$ *— положение равновесия натуральной системы, тогда, и только тогда, когда* $\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Big|_{\overline{q}=\overline{q}_0} \equiv 0$.

Доказательство.

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\Big|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial \dot{\overline{q}}}\right)\Big|_{\dot{q}=0}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial \overline{q}}\Big|_{\dot{q}=0}}_{0} + \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Big|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\Big|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0$$

■

Пример (Математический маятник)**.**

$T = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \Pi = -mgl\cos\varphi$

1) Положение равновесия:

$\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{array}\right.$

2) Уравнение движения:

$\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$

3) Интеграл энергии:

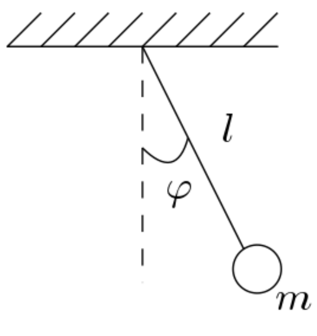
$T + \Pi = h = const$

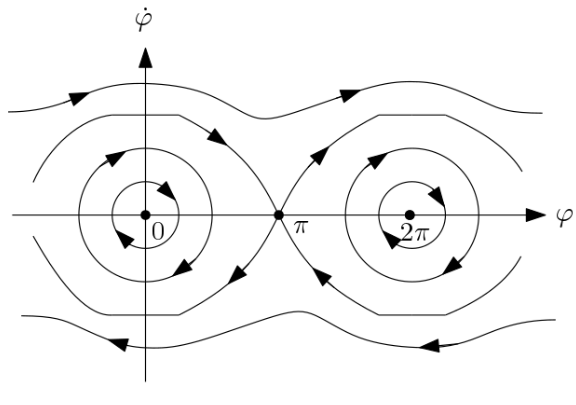
$\dfrac{1}{2}mgl^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = h$

$\dot{\varphi}^2 = \dfrac{2}{ml^2}(h - \Pi(\varphi))$

$\dot{\varphi} = \pm\alpha\sqrt{h - \Pi(\varphi)}, \quad \alpha = \sqrt{\dfrac{2}{ml^2}} = const$

$(\varphi, \dot{\varphi})$ *— фазовая плоскость.*





1)$h < -mgl \quad \varnothing$

2)$h = -mgl, \quad \varphi = 0,\ \varphi = 2\pi$ *— равновесие*

3)$-mgl < h < mgl$ *— колебания*

4)$h = mgl$ *— либо равновесие* $\varphi = \pi$*, либо движение к* $\varphi = \pi$

5)$h > mgl$ *— вращение*

Пример (Маятник во вращающейся плоскости).

$n = 1, q = \varphi$

$T = \dfrac{m}{2}\overline{v}^2 = \dfrac{m}{2}\left(r^2\dot\varphi^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\varphi\right)$

$\Pi = -mgr\cos\varphi$

$L = T - \Pi, \quad \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 \underbrace{-T_0 + \Pi}_{\Pi^*} = const$

$\Pi^* = -mgr\cos\varphi - \dfrac{m}{2}r^2\omega^2\sin^2\varphi$

$\dfrac{\partial\Pi^*}{\partial\varphi} = mgr\sin\varphi - \dfrac{1}{2}mr^2\omega^2\sin 2\varphi = mr\sin\varphi(g - r\omega^2\sin\varphi) = 0 \Leftrightarrow$

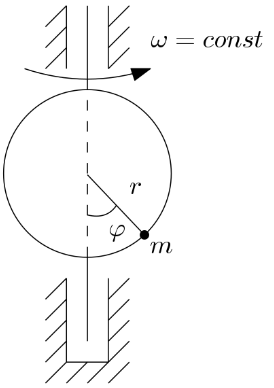
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \\ \varphi = \pm\arccos\frac{g}{r\omega^2} = \varphi_0, \omega^2 > \frac{g}{2} \end{array}\right.$

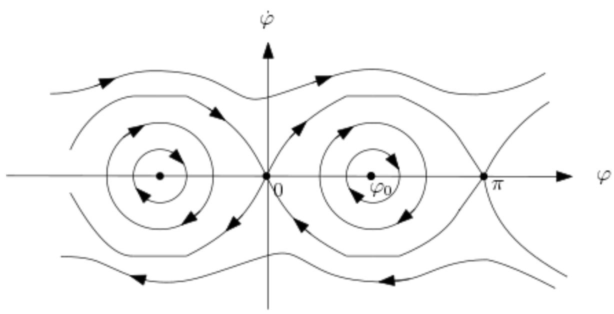
$\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2} = mgr\cos\varphi - mr^2\omega^2\cos 2\varphi$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = mr(g - r\omega^2) \gtrless 0 \quad \omega^2 \lessgtr \dfrac{g}{r}$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -mr(g + r\omega^2) < 0,$

$\left.\dfrac{\partial^2\Pi^*}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} = mgr\dfrac{g}{r\omega^2} - mr^2\omega^2\left(2\dfrac{g^2}{r^2\omega^4} - 1\right) = mr\omega^2\left(r - \dfrac{g^2}{2\omega^4}\right) < 0$





1.3 Элементы теории устойчивости

$$\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}),\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \overline{f} \in C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \overline{x}(t) = \overline{x}(t, \overline{x}(0)) \text{ — начальные условия.} \tag{2}$$

Определение. $\overline{x} = \overline{x}_0$ *— положение равновесия* (2)*, если* $\overline{f}(\overline{x}_0) = 0$ $(\overline{x}(t, \overline{x}_0 \equiv \overline{x}_0)$ $\overline{x}_0 = 0$ *без ограничения общности.*

Определение. *Равновесие* (2) *устойчиво по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$*, что любое решение с начальными условиями в* δ*-окрестности равновесия существует при всех* $t > 0$ *и находится в* ε*-окрестности.*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ |\overline{x}(0)| < \delta \Rightarrow |\overline{x}(t)| < \varepsilon,\ \forall t > 0.$$

Определение. $\overline{x} = 0$ *— неустойчивое, если*

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\overline{x}(0), t_1 > 0 : |x_0| < \delta\ |\overline{x}(t_1, \overline{x}_0)| > \varepsilon$$

Определение. $\overline{x} = 0$ *— устойчиво асимптотически, если*

1. $\overline{x} = 0$ *— устойчиво,*
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \overline{x}(t, \overline{x}(0)) = 0.$

1.4 Прямой метод Ляпунова

$V(x)$

$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \overline{x}}\dot{\overline{x}} = \frac{\partial V}{\partial \overline{x}}\overline{f}$

Определение. $\dot{V}$ — *производная функции V по времени вдоль решения* (2).

Теорема 1 (Ляпунова (об устойчивости)). *Если существует гладкая функция $V(x)$ определенная в ε-окрестности равновесия $x = 0$ системы* (2), *удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $$V(0) = 0,\ \forall x \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$
2. $$\dot{v} \leqslant 0\ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon,$$

то $x = 0$ — устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.
$1)\forall\varepsilon > 0,\ \exists\sigma = \min V(\overline{x}), |\overline{x}| = \varepsilon$

$2)V \in C^1 \Rightarrow \exists\delta : V(\overline{x}) < \sigma\ \forall\overline{x} : |\overline{x}| < \delta$

$3)\forall\overline{x}_0 :\ |\overline{x}_0| < \delta\ V(\overline{x}(t)) < \sigma \Rightarrow |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon \quad (\overline{x}_0(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_0))$

■

Замечание.
$1)v(0) = 0, v(\overline{x}) > 0\ \forall\overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow\ V$ — *положительно определенная функция в 0*

$2)v(0) = 0, v(\overline{x}) < 0\ \forall\overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow\ V$ — *отрицательно определенная функция в 0*

$3)v(0) = 0, v(\overline{x}) \geqslant (\leqslant)\ 0\ \forall\overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow\ V$ — *знакопостоянная функция в 0*

Пример.
$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ — *положительно определена в* $x_1 = x_2 = 0$
$V(x_1, x_2) = x_1^2$ — *не является положительно определенной в* $x_1 = x_2 = 0$

Замечание. *Если в условии теоремы Ляпунова в условии* 2) *поставить строгое неравенство, устойчивость станет асимптотической.*

Теорема 2. *Барбашина-Красовского Если* $\exists V(x) \in C^1 : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$, *то*

1. $$V(0) = 0\ V(\overline{x}) > 0\ \forall\overline{x} \in U_\varepsilon \setminus \{0\},$$
2. $$\dot{v} \leqslant 0\ \forall\overline{x} \in U_\varepsilon,$$
3. *множество* $\{\overline{x} : \dot{v}(\overline{x}) = 0\}$ *не содержит целиком решения системы* (2), *кроме равновесия* $\overline{x} = 0 \Rightarrow$ $\overline{x} = 0$ — *установившееся асимптотически.*

Замечание. *Если* $\dot{V} < 0$, *то* $\{x : \dot{V} = 0\} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\overline{x} = 0$ установившееся, но не асимптотическое, т.е.
I) $\exists\overline{x}_0(t)\ |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon,\ \overline{x}_0 \not\to 0$, т.е.

$\exists\delta, \{t_k\},\ t_{k+1} > t_k\ \delta < |\overline{x}_0(t_k)| < \varepsilon$

II) $\exists\{k_s\}\ \overline{x}_s = \overline{x}_0(t_{k_s}) \xrightarrow{s\to+\infty} \overline{x}_*$

$|\overline{x}_s| > \delta \Rightarrow |\overline{x}_*| > \frac{\delta}{2}$

III) $V(\overline{x}_0(t))$

$1),\ 2) \Rightarrow \exists V = \lim\limits_{t\to+\infty} V(x_0(t))$

$v \in C^1 \Rightarrow v = V(\overline{x}_*)$

$$\boxed{\forall t\ V(\overline{x}_0(t)) \geqslant v} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$IV)$ Рассмотрим$\overline{x}_s(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_s) = \overline{x}_0(t + t_{k_s}, \overline{x}_0)$
$V)$ $\overline{x}_*(t) = \overline{x}(t, \overline{x}_*)$
$v(\overline{x}_*) = v,\ 2),\ 3) \Rightarrow \exists t^* : \underbrace{V(\overline{x}_*(t_*))}_{v_*} < v$

$VI)$ v — непрерывная б.т. $\overline{x}_*(t_*)$
$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x\ |\overline{x} - \overline{x}_*(t_*)| < \delta_1 \Rightarrow |V(\overline{x}) - V(x_*(t_*))| < \varepsilon_1$
Решения (2) непрерывно и зависит от начальных условий ($t < \infty$)
$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x\ |\overline{x} - \overline{x}_*(t_*)| < \delta_2 \Rightarrow |\overline{x}(t_*) - x_*(t_*)| < \varepsilon_2$
$\forall \varepsilon_3 > 0\ \exists s : |\overline{x}_s - x_*| < \varepsilon_3 \forall s > S$

$$\varepsilon_1 = v - v_* > 0 \to S : \left| V(\overline{x}_s(t_*)) - \underbrace{V(\overline{x}_*(t_*))}_{v_*} \right| < v - v_*$$

$V(\overline{x}_s(t_*)) - v_* < v - v_*$ — противоречие с (3)

■

Теорема 3 (Красовского)**.** *$\exists V \in C^1 : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ и область Ω:*

1. $V(0) = 0,\ V(\overline{x}) > 0\ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
   $\overline{x} = 0 \in \partial\Omega, V(\overline{x}) = 0\ \forall \overline{x} \in \partial\Omega$
2. $\dot{v} \leqslant 0\ \forall \overline{x} \in U_\varepsilon \cap \Omega$
3. $\{\overline{x} : \dot{v} = 0\} \Rightarrow \overline{x} = 0$ *— неустойчивое.*

Доказательство.

$\exists \overline{x} = 0$ — устойчивое, т.е.
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\overline{x}_0| < \delta \Rightarrow |\overline{x}_0(t)| < \varepsilon$
$1), 2) \Rightarrow \exists \delta : |\overline{x}_0(t)| > 0 \Rightarrow \exists \{x_s\} \to \overline{x}_*,$
$V(\overline{x}_s(t)) \leqslant V(\overline{x}_*) = v$
$\overline{x}_*(t),\ 3) \Rightarrow \exists t_* > 0 : (\overline{x}_*(t_*)) > v$— противоречие как в предыдущей теореме

■

Замечание. *$\dot{v} > 0$ — теорема Четаева.*

Пример (Волчок Эйлера)**.** *MISSING*

1.5 I-й метод Ляпунова

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} \quad A = const \quad \det(A - \lambda E) = 0 \tag{5}$$

Утверждение. *Если все корни характеристического многочлена линейной системы* (5) *имеет отрицательные вещественные части, то равновесие $\overline{x} = 0$ этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову:*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0\ \forall i \Rightarrow \overline{x} = 0 \text{ — асимптотически устойчиво.}$$

Доказательство.

1) $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\lambda_i \neq \lambda_j\ \forall i \neq j$

$\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \overline{u}_i e^{\lambda_i t},\ c_i = const,\ \overline{u}_i = const$

$\overline{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

1) $\lambda_1 = \lambda_2,\ \overline{u}_i \neq \overline{u}_2$ — устойчивость.

2) λ_0 — корень кратности s :

$\overline{x} = + \ldots + (C_1\overline{u}_1 + \ldots + C_s\overline{u}_s t^{s-1})e^{-\lambda_0 t} \Rightarrow \overline{x} = 0$ — устойчиво асимптотически (по определению).

3) $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ — кратность 1

$\overline{x} = + \ldots + (C_1\overline{u}_1 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} + C_2\overline{u}_2 e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}) = + \ldots + e^{\alpha_k t}(C_1'\overline{u}\sin\beta_k t + C_2'\overline{u}\cos\beta_k t) \Rightarrow$ устойчивость.

■

Утверждение. *Если существует хотя бы 1 корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью, то равновесие* $\overline{x} = 0$ *неустойчиво:*

$$\exists \lambda_k > 0 \Rightarrow \overline{x} = 0 \text{ — неустойчиво.}$$

Доказательство. Аналогично. ■

$(*)\ \dot{\overline{x}} = f(\overline{x}) \quad \overline{f}(0) = 0$

$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + O(\parallel \overline{x} \parallel^2) \quad A = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}|_{\overline{x}=0} = const$

$\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$ — линеаризованная система

$\det(A - \lambda E) = 0$

Теорема 4 (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)**.** *Если все корни характеристического уравнения* линеаризованной системы *имеют отрицательные вещественные части, то равновесие* $\overline{x} = 0$ нелинейной системы *асимптотически устойчиво, если же существует корень с положительной вещественной частью, то равновесие неустойчиво.*

Замечание (Критический случай)**.** *Если нет* $\lambda_k > 0$ $\lambda_k = 0$[1]*, то про систему ничего нельзя сказать*

Пример.

$C > A > B$

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)r(p' + \omega) \\ C\dot{r} = (A - B)q(p' + \omega) \end{cases} \qquad \text{Линеаризованная: } \begin{cases} A\dot{p} = 0 \\ B\dot{q} = (C - A)r\omega \\ C\dot{r} = (A - B)q\omega \end{cases}$$

$\overline{x} = (p', q, r)^T$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C-A}{B}\omega \\ 0 & \frac{A-B}{C}\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbb{A} - \lambda E) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{BC}\omega^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{BC}}\omega \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \overline{x} = 0$ — *неустойчиво, т.к.* $\exists \lambda > 0$

(Из прошлой лекции (не успели) $V = BCqr$*)*

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x^3 \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (**)$$

Линеаризованная система: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad \lambda = \pm i \begin{cases} x = C_1\sin t + C_2\cos t \\ y = C_1\cos t - C_2\sin t \end{cases}$

$V = \dfrac{x^2 + y^2}{2} \quad \dot{V} = (\dot{x}x + \dot{y}y)|_{(**)} = \alpha x^4$

[1]Нечетко записано

$\alpha < 0 : V(0) = 0 \quad V(x) > 0\; \forall \overline{x} \neq 0 \quad \dot{V} \leqslant 0\; \forall \overline{x} \in U_\varepsilon$

$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (**)|_{x\equiv 0} \quad \begin{cases} 0 = y + 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \overline{x} = 0$ — *устойчиво асимптотически.*

$\alpha > 0 : \Omega = U_{\varepsilon \setminus \{0\}}$

$V(\overline{x}) > 0, \quad \dot{V}(\overline{x}) > 0, \quad \forall \overline{x} \in \Omega$

$V(0) = 0, \quad V(\overline{x}) = 0, \quad \forall \overline{x} \in \partial\Omega (x = 0)$

$\Rightarrow$ *неустойчивость, т.к.* $\dot{V} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \tag{6}$$

Пример.

$n = 2 : a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,\; a_0 > 0$

$a_1^2 \geqslant 4a_0a_2 : \lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{a_0},\; \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$

$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$

$a_1^2 < 4a_0a_2 : \operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -\dfrac{a_1}{a_0} < 0 \Rightarrow a_2 > 0, a_1 > 0$

$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0 \Leftrightarrow a_i > 0,\; i = 1, 2$

Утверждение (Необходимое условие устойчивости)**.** *Если все корни* (6) *при* $n > 2$ *имеют отрицательные вещественные части, то коэффициенты этого уравнения положительны:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Rightarrow a_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

Доказательство.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — действительные корни, $\lambda_i < 0,\; i = 1, \ldots, k$

$\lambda = \alpha_i \pm \beta_i i \quad j = 1, \ldots, m$

$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)(\lambda - \alpha_1 - \beta_1 i) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_1 + \beta_1 i) \cdot \ldots$

$= a_0(\lambda + |\lambda_1|) \cdot \ldots \cdot (\lambda + |\lambda_k|)((\lambda + |\alpha_1|)^2 + \beta_1^2) \cdot \ldots = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \quad a_i > 0 \quad i = 1, \ldots, n$

■

Пример.

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$$

Критерий Рауса-Гурвица $\forall i \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Leftrightarrow$ все главные диагональные миноры определены положительно

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \Delta_i > 0$$

Доказательство. Б/Д ■

Замечание.

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

1.6 Равновесие натуральных систем

Натуральная система:

$$L = \frac{1}{2}(A(\overline{q})\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) - \Pi(\overline{q})$$
$$\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}),\ \overline{x} = (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$
$$\overline{q} = \overline{q}_0 \text{ — равновесие, } \left(\left.\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right|_{\overline{q}=\overline{q}_0} = 0 \right)$$

Определение. $\overline{q} = \overline{q}_0$ *— установившееся равновесие положение равновесия натуральной системы, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \parallel \overline{q}(0) - \overline{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\overline{q}}(0) \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \overline{q}(t) - \overline{q}_0 \parallel + \parallel \dot{\overline{q}}(t) \parallel < \varepsilon\ \forall t > 0.$$

Теорема 5 (Лагранжа-Дирихле)**.** *Точка строго локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия этой системы:*

Доказательство.

$V = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(\overline{q}_0)$

1) $V|_{\overline{q}=\overline{q}_0,\, \dot{\overline{q}}=0} = 0, V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = \frac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) + \Pi(\overline{q}) - \Pi(\overline{q}_0) > 0$ $\quad$ (A — положительно определенная)

$\forall \overline{q}, \dot{\overline{q}} : \delta > \parallel \dot{\overline{q}} \parallel + \parallel \overline{q} - \overline{q}_0 \parallel > 0$

2) $\dot{V} = 0 \Rightarrow \dot{\overline{q}} = 0, \overline{q} = \overline{q}_0$ — устойчиво.

∎

Пример.

$\Pi = \begin{cases} 0,\ q = 0 \\ e^{-\frac{1}{|q|}} \cdot \cos \frac{1}{|q|},\ q \neq 0 \end{cases}$

1) $q = 0$ *— положение равновесия*

2) $q = 0 \neq \min \Pi$

3) $T + \Pi = h = const$

$\Pi \leqslant h,\ x = 0$ *— устойчиво по Ляпунову (по опр.)*

$\Pi(\overline{q}) = \Pi(\overline{q}_0) + \Pi^{(1)}(\overline{q}) + \Pi^{(2)}(\overline{q}) + \ldots + \Pi^{(m)}(\overline{q})$

$\Pi^{(1)} = \left.\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=\overline{q}_0} (\overline{q} - \overline{q}_0) = 0$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

$\overline{q} = 0$ — положение равновесия

$T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) \quad \Pi = \Pi(0) + \left(\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q} \right) + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \overline{q}^2}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q} \right) + \ldots = \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \ldots$

$\Pi^{(0)} = \Pi(0) = 0,\ \Pi(1) = \left(\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q} \right) = 0$

$\Pi^{(m)}$ — первая нетривиальная форма Π

Пример. *1.* $\Pi(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{2}, \quad x = y = 0$ *— устойчивое положение равновесия.*

2.

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \quad \Pi(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \Pi^{(2)} = \frac{x^2}{2}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \ddot{y} = 0 \qquad y = ct + c_1$$

$x = y = 0$ — *неустойчивое положение равновесия.*

Теорема 6. *Если T не имеет даже нестрогого минимума в окрестности некоторого положения равновесия натуральной системы, то равновесие неустойчиво.*

Теорема 7.

$$\underline{m = 2, n = 1} : T = \frac{1}{2}a(q)q^2,\ a(q) > 0$$
$$b = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{q=0} < 0$$
$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}bq^2 + O_3(q)$$
$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = a(q)\ddot{q} + a'_q\dot{q}^2 - \frac{1}{2}a'_q \cdot \dot{q}^2 + bq + O_2(q) =$$
$$= a(q) \cdot \ddot{q} + bq + O_2(q, \dot{q})$$
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q = \dot{q} \\ \frac{d}{dt}\dot{q} = -\frac{bq - O_2(q,\dot{q})}{a(0) + O_1(q)} = -\frac{bq}{a(0)} + \cancel{O_2(q, \dot{q})} \end{cases}$$
$$\overline{x} = (q, \dot{q})^T,\ \dot{\overline{x}} = A\overline{x}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{a(0)} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{b}{a(0)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{b}{a(0)} > 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{b}{a(0)}}$$

$\operatorname{Re}\lambda_+ > 0 \Rightarrow q = 0$ — *неустойчивое положение равновесия.*

Замечание.

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}a(t)q^2 - \frac{1}{2}bq^2}_{L^*} + O_3(q, \dot{q})$$
$$C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right|_{q=0}$$

C — *положительно определена* $\Rightarrow q = 0$ — *устойчиво*

$\det C = 0$ — ?

$\exists \Delta_i < 0$

1.7 Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = Q^*$$
$$L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) - \Pi(q)$$
$$\dot{E} = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \qquad E = T + P$$

- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) = 0$, то $\overline{Q}^*$ — гироскопическая.
- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) \leqslant 0$, то $\overline{Q}^*$ — диссипативная.
- Если $(\overline{Q}^*,\ \dot{\overline{q}}) < 0$, то $\overline{Q}^*$ обладает полной диссипацией.

Теорема 8 (Кельвина-Четаева 1)**.** *Если $q = 0$ — точка строгого локального минимума* Π *натуральной системы, то даже при добавлении в систему гироскопических и (или) диссипативных сил, она является устойчивым положением равновесия A. Если при этом диссипативные силы обладают полной диссипацией, то это равновесие устойчиво асимптотически.*

Доказательство.

$V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(q)$

$q = 0$ — строгий локальный минимум $\Pi(q) \Rightarrow V(0,0) = 0,\ V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) > 0 \quad \forall \overline{q}, \dot{\overline{q}}\ 0 < \parallel q \parallel^2 + \parallel \dot{\overline{q}} \parallel^2 < \varepsilon$

$a)\dot{V} = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \leqslant 0 \Rightarrow q = 0$ — устойчиво по теореме Ляпунова

$b)\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\overline{q}} = 0 \Leftrightarrow q = 0 \Rightarrow q = 0$ — устойчиво асимптотически по т. Барабашина-Красовского

∎

Теорема 9 (Кельвина-Четаева 2)**.** *Если в изолированном положении равновесия* Π *не имеет даже нестрогого минимума, а силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от направления гироскопических сил).*

Доказательство.

$V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}) = T + \Pi(\overline{q}) - \Pi(0)$

$q = 0 - ... \Rightarrow \Omega : \Pi(\overline{q}) < \Pi(0)\ \forall q \in \Omega$

$\Pi(q) = \Pi(0)\ \forall q \in \partial\Omega,\ q = 0 \in \partial Q$

$V < 0, \dot{V} < 0 \quad \forall \{\overline{q}, \dot{\overline{q}}\} \in \Omega' = \{\overline{q}, \dot{\overline{q}} : q \in \Omega, \dot{\overline{q}} = 0\}$

$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \overline{q} = 0$

$\Rightarrow q = 0$ — неустойчиво по теореме Красовского.

∎

Пример. *MISSING*

1.8 Элементы теории бифуркации

$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, \alpha),\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^n$

Кривые равновесий $\overline{x} = \overline{x}(\alpha) : \overline{f}(\overline{x}(\alpha), \alpha) = 0$

Точка бифуркации $(\overline{x}_*, \alpha_*)$: $\left.\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}^*(\alpha_x),\ \alpha=\alpha_*} = 0$

MISSING

---

2 Малые Колебания

2.1 Общие сведения

$T = \dfrac{1}{2}(\Phi(\overline{q})\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}),\ \Pi(\overline{q}),\ \overline{q} = 0$ — положение равновесия

$$\Pi(\overline{q}) = \underbrace{\Pi(0)}_{0} + \left(\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q}\right) + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \overline{q}^2}\right|_{\overline{q}=0}, \overline{q}\right) + O_3(\overline{q})$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \overline{q}^2}\right|_{\overline{q}=0} = c = const, \quad C = C^T$$

$$T = \frac{1}{2}\left((\Phi(0) + O(\|\,\overline{q}\,\|))\,\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) = \frac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) + O_3(\overline{q}, \dot{\overline{q}})$$
$$A = \Phi(0) = const, \; A = A^T$$
$$L = \tilde{L} + O_3(\overline{q}, \dot{\overline{q}}), \; \tilde{L} = \frac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) - \frac{1}{2}(C\overline{q}, \overline{q})$$
$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\overline{q}}} = \frac{1}{2}\underbrace{(A\dot{\overline{q}} + A^T\dot{\overline{q}})}_{\text{Из 3 семестра}} = A\dot{\overline{q}}, \quad \frac{\tilde{L}}{\overline{q}} = -C\overline{q} \text{ — аналогично}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \overline{q}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = 0}$$
A положительно определена $\xrightarrow{\text{Из линейной алгебры}} \exists \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n : \; A \to E, C \to k$
$$\overline{q} = \sum \xi_i \overline{e}_i = u\overline{\xi}, \tilde{L} = \frac{1}{2}(E\dot{\overline{\xi}}, \dot{\overline{\xi}}) - \frac{1}{2}(k\overline{\xi}, \overline{\xi}),$$
$$k = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n)$$
Уравнения Лагранжа:
$$\ddot{\overline{\xi}} + k\overline{\xi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1\xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n\xi_n = 0 \end{cases}$$
Пусть $k_i = \omega_i^2 > 0$

k и C — положительно определены, $\overline{q} = 0(\overline{\xi} = 0)$ — устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле
$$\ddot{\xi}_i + k_i\xi_i = 0 \quad \lambda^2 + k_i, \quad \lambda^2 + \omega_i^2 = 0 \quad \lambda = \pm\omega_i i$$
$$\xi_i = C_{1i}\sin\omega_i t + C_{2i}\cos\omega_i t = \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$
$$\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Утверждение.
$$\det(A\omega_C^2) = 0$$
$$\begin{cases} A(\omega_i^2 - C)e_i = 0 \\ (A\overline{e}_i, \overline{e}_i) = 1 \end{cases}, i = 1, \ldots, n$$

Доказательство.
$$2\tilde{\Pi} = (C\overline{q}, \overline{q}) = (CU\overline{\xi}, U\overline{\xi}) = (U^TCU\overline{\xi}, \overline{\xi}) = (k\overline{\xi}, \xi) \Leftrightarrow k = U^TCU$$
$$2\tilde{T} = (A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) = (U^TAU\overline{\xi}, \overline{\xi}) = (E\dot{\overline{\xi}}, \dot{\overline{\xi}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E = U^TAU (\Leftrightarrow (A\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \delta_{ij})$$
$$k - k_iE = \mathrm{diag}(k_1 - k_i, \ldots, k_{i-1} - k_i, 0, \ldots)$$
$$\det(k - k_iE) = 0 \Leftrightarrow \det(U^TCU - k_iU^TAU) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \det U^T \det(C - Ak_i)\det U = 0 \xleftrightarrow{\det U \neq 0} \det(Ak_i - C) = 0, \det(A\omega_i^2 - C) = 0$$
$$2)(k - k_iE)(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots)^T$$
$$(U^TC - k_iU^TA)\underbrace{U(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T}_{\overline{e}_i} \qquad C\overline{q} = \sum \overline{e}_i\xi_i$$
$$U^T(C - \omega_i^2 A)\overline{e}_i = 0 \Leftrightarrow (A\omega_i - C)\overline{e}_i = 0$$

■

Определение. $\det(A\omega^2 - C) = 0$ — *вековое уравнение (уравнение частот).* ω_i — *частоты малых колебаний (собственные частоты).*

Следствие. *Частоты малых колебаний не зависят от выбора обобщенных координат.*

Определение. *Если* $(A\omega_i^2 - C)\overline{U}_i = 0$, *то* $\overline{U}_i$ — *амплитудный вектор, соответствующий частоте* ω_i.

Замечание. $\overline{U}_i = \beta_i \bar{e}_i,\ \beta_i = const$

$$\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \overline{U}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Следствие. *1. Ортогональность*

$$(A\overline{U}_i, \overline{U}_j) = 0,\ i \neq j$$

2. Линейная независимость

$$C_1 U_1 + \ldots + C_n U_n = 0$$
$$0 + \ldots + (A\overline{U}_i, C_i \overline{U}_i) + \ldots + 0 = 0 \Leftrightarrow C : (A\overline{U}_i, \overline{U}_i) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0$$
$$(A\overline{U}, \overline{U}) = 0 \Leftrightarrow \overline{U} = 0$$

Замечание. $\tilde{\alpha}, \varphi$ *— определяются начальными условиями.*

$I.$ $\tilde{\alpha}_i = 0, \quad \forall i \neq m : \overline{q} = \tilde{\alpha}_m \overline{U}_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$
главные (нормальные) колебания

$Ia.$ Кратные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$k = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots)$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = 0 \end{cases}$$

$(A\omega^2 - C)\overline{U} = 0$

$U = C_1 \overline{U}_1 + C_2 \overline{U}_2$

$II.$ $\exists k_m = 0$

$\ddot{\xi}_m = 0,\ \xi_m = C_1 t + C_2$

$III.$ $\exists k_m < 0, \overline{q} = 0 (\xi = 0)$ — неустойчиво.

$\ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$

$\lambda^2 = -k_m > 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-k_m}$

Теорема 10. *Если* $\Pi_{(0)}^{(2)}$ *не имеет даже нестрогий минимум, то* $\overline{q} = 0$ *неустойчиво.*

Доказательство.

<u>$n = 1$</u> уже доказано

<u>$n > 1$</u> $\quad \overline{q} \to \overline{\xi}$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + k_1 \xi_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = 0 \end{cases}$$

$\exists k_m < 0 : \ddot{\xi}_m + k_m \xi_m = 0$ —||—

■

2.2 Вынужденные колебания в линейных системах

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$

$x = x_{\text{одн}} + x_r$

$x_{\text{одн}} = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$

1) $\omega \neq \omega_0 : x_r = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \quad / \, \omega_0^2$

$\dot{x}_r = \alpha\omega \cos \omega t - \beta\omega \sin \omega t \quad / \, 0$

$\ddot{x}_r = -\alpha\omega^2 \sin \omega t - \beta\omega^2 \cos \omega t \quad / \, 1$

$$\begin{cases} \alpha\omega_0^2 - \alpha\omega^2 = 0 \\ \beta\omega_0^2 - \beta\omega^2 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

РИСУНОК биений

2) $\omega = \omega_0 \quad x_r = \alpha t \sin \omega_0 t$

$\dot{x}_r = \alpha \sin \omega_0 t + \alpha\omega_0 t \cos \omega_0 t$

$\ddot{x}_r = \alpha\omega_0 \cos \omega_0 t - \alpha\omega_0 t \sin \omega_0 t \Rightarrow 2\alpha\omega_0 = f \Rightarrow \alpha = \dfrac{f}{2\omega_0}$

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

РУСУНОК резонанса

$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = \overline{Q}, \quad \overline{Q} = \overline{F} \cos \omega t$

$\overline{q} = U\overline{\xi}, \quad A \to E, \; C \to K$

$(\overline{Q}, \delta\overline{q}) = (\overline{Q}, U\delta\overline{\xi}) = (U^T\overline{Q}, \delta\overline{\xi}) = (\overline{Q}\delta\overline{\xi})$

$\tilde{Q} = U^T \tilde{Q}$

$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = \overline{Q} = \ddot{\xi}_i + \omega^2\xi_i = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \ldots, n$

1) $\overline{Q} = \overline{F} \cos \omega t, \quad Q_i = \mu_i \cos \omega t \qquad \tilde{Q} = U^T\overline{F}$

$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \mu_i \cos \omega t$

$$\left[\begin{array}{ll} \omega \neq \omega_i, \; \forall i = 1, \ldots, n & \xi_i = \alpha_i \cos(\omega_i t + \beta_i) + \frac{\mu_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ \omega = \omega_k, \; \mu_k = 0, & \xi_k = \alpha_k \cos(\omega_k t + \beta_k) + \frac{\mu_k}{2\omega} \sin \omega t \end{array} \right.$$

2) $\overline{Q}$ периодично по t: $(\overline{Q}(t+T) = \overline{Q}(t), \forall t \in (0; +\infty))$

$$\overline{Q}(t) = \overline{F} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} + Q_k \right) \right)$$

$$\overline{q} = \overline{q}_{\text{одн}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{q}_r^{(k)}$$

$$\omega_i = \frac{2\pi k}{T}$$

Пример.

$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = f \sin \omega t, \; k > 0$

$x = 0$ — *равновесие (установившееся асимптотически) свободной системы*

$\lim\limits_{x \to +\infty} x_{\text{одн}} = 0$

$x_r = R \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}_r = R\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x}_r = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

$R(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + KR\omega \cos(\omega t + \varphi) = f \sin \omega t$

$$R = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$((\omega_0^2 - \omega^2) + k^2\omega^2)'_\omega = -2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 2k^2\omega = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k^2}{2} \end{array} \right.$$

РИСУНКИ чего-то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}^* + \overline{Q}(t)$$

$\overline{Q}^* = B\dot{\overline{q}},\ B = const$

$\overline{q} = 0$ — устойчиво асимптотически

$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, \ldots, n$

$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$

$\overline{Q}(t) = \overline{F}\sin\omega t \Rightarrow \overline{Q}(t) = \overline{F}e^{i\omega t}$

$\overline{q} = \overline{q}_r = \overline{h}e^{i\omega t} \quad \dot{\overline{q}} = \overline{h}i\omega e^{i\omega t} \quad \ddot{\overline{q}} = \overline{h}(i\omega)^2 e^{i\omega t}$

$D(i\omega)\overline{h} = \overline{F} \quad \det D(i\omega) \neq 0$

$\overline{h} = [D(i\omega)]^{-1}\overline{F} = W(i\omega)\overline{F},\ W(i\omega) = (w_{kj}),\ k, j = 1, \ldots, n$

$w_{kj} = |w_{kj}|e^{i\arg\omega_{kj}} = R_{kj}e^{i\varphi_{kj}}$

$R_{kj} = |w_{kj}| \qquad \overline{q} = W(i\omega)\overline{F}e^{i\omega t}$

$\varphi_{kj} = \arg\omega_{kj} \qquad \sum_{j=1}^{n} w_{kj}F_j e^{i\omega t} = \sum R_{kj}F_j e^{i(\omega t + \varphi_{kj})}$

РИСУНОК чего-то

3 Гамильтонова механика

3.1 Преобразования Лежандра

Рассмотрим $X(\overline{x}) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ X(\overline{x}) \in C$.

$$\det\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \neq 0$$

$$\overline{y} = \overline{f}(\overline{x}) = \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \overline{f}^{-1}(\overline{y}) = \overline{x}(\overline{y})$$

$$Y(\overline{y}) = ((\overline{x}, \overline{y}) - X(\overline{x}))|_{\overline{x} = \overline{x}(\overline{y})}$$

Определение. $Y(\overline{y})$ — *преобразование Лежандра функции* $X(\overline{x})$ *по переменной* $\overline{x}$.

Свойства преобразований Лежандра[2]:

1. Инвалютивность.

$$X, \overline{x} \to Y,\ \overline{y} \to X, \overline{x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = x_i + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial y_i}, \overline{y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial y_i}\right) =$$

$$x_i + \left(\underbrace{\overline{y} - \frac{\partial X}{\partial \overline{x}}}_{0}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\right) = x_i,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{\partial Y}{\partial \overline{y}}$$

2.

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{y}} = \left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \overline{x}^2}\right)^{-1}$$

[2]Возможно, тут чего-то не хватает

$$\det \frac{\partial^2 Y}{\partial \overline{y}^2} = \left(\det \frac{\partial^2 X}{\partial \overline{x}^2} \neq 0\right)$$

3.

$$\overline{x}, X \to \overline{y}, Y = [(\overline{x}, \overline{y}) - X(\overline{x})]|_{\overline{x}=f'(\overline{y})} \to \overline{z}, Z$$
$$\overline{y} = \overline{f}_2(\overline{z}),\ \overline{z} = \overline{x},\ \overline{y} = f_2^{-1}(\overline{x}),\ f'(f_2^{-1}) = \overline{x}$$
$$Y(\overline{y})_{\overline{y}=f_2^{-1}(\overline{x})} = (\overline{x}, \overline{y}|_{\overline{y}=f_2^{-1}(\overline{x})}) - X(\overline{x})$$
$$X(\overline{x}) = [(\overline{x}, \overline{y}) - Y(\overline{y})]|_{\overline{y}=\overline{y}(x)}$$

4.

$$X = X(\overline{x}, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$
$$Y = Y(\overline{y}, \alpha)$$
$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$$
$$Y(\overline{y}, \alpha) = ((\overline{x}, \overline{y}(\overline{x}, \alpha)) - X(\overline{x}, \alpha))|_{\overline{x}=\overline{x}(\overline{y},\alpha)}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}, \overline{y}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} =$$
$$= \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha}, \underbrace{\overline{y} - \frac{\partial X}{\partial \overline{x}}}_{0}\right) - \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha}$$

Повторим это с лагранжианом.

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Определение. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ *— обобщенный импульс.*

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$
$$H(q, p, t) = [(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}$$

Определение. H *— гамильтониан (функция Гамильтона).*

Определение. (q, p, t) *— канонические переменные (параметры Гамильтона).*

Теорема 11. *В канонических переменных уравнения движения имеют вид*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Доказательство.

Инвалютивность $\Rightarrow \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{L}{q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

■

Определение.

$\dot{\overline{x}} = \overline{F}(\overline{x}, t)\overline{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ *— гамильтонова система, если*

$\overline{x} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)^T \quad \exists H = H(q, p):$

$$\overline{F} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T$$

ПРИМЕР

3.2 Первый интеграл и понижение порядка в уравнении Гамильтона

Определение. *q_k — циклическая переменная, если* $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$.

Утверждение. *Если q_k — циклическая координата, то $p_n = const$.*

Доказательство.

$$\dot p_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = const.$$

■

Утверждение. *Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = const$.*

Доказательство.

$$\frac{dH(q,p,t)}{t} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \dot q \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \dot p \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const$$

■

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = const = \beta$$
$$H = H(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, \beta, t)$$
$$\tilde q = (q_1, \ldots, q_{n-1})^T, \quad \tilde p = (p_1, \ldots, p_{n-1})^T$$
$$H = H(\tilde q, \tilde p, \beta, t)$$
$$\begin{cases} \dot{\tilde q} = \frac{\partial H(\tilde q, \tilde p, \beta, t)}{\partial \tilde p} \\ \dot{\tilde p} = \frac{\partial H(\tilde q, \tilde p, \beta, t)}{\partial \tilde q} \end{cases}$$

Утверждение. *При $\beta = const$ (заданном значении циклического интеграла β) уравнения движения системы имеют вид*

$$\begin{cases} \dot{\tilde q} = \frac{\partial H(\tilde q, \tilde p, \beta, t)}{\partial \tilde p} \\ \dot{\tilde p} = \frac{\partial H(\tilde q, \tilde p, \beta, t)}{\partial \tilde q} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \right) \Bigg|_{\beta = const}$$

$$\begin{cases} \tilde q = \tilde q(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) \\ \tilde p = \tilde p(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) \end{cases} \quad (*)$$
$$p_n = \beta = const$$
$$\dot q_n = \left(\frac{\partial H(\tilde q, \tilde p, t, \beta)}{\partial p_n} \right) \Bigg|_{(*)} = f(t, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta)$$
$$\frac{dq_n}{dt} = f \Rightarrow q_n = \int\limits_0^t f(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2}, \beta) d\tau + c_{2n-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q,p) = const = h$$

Пусть $\dfrac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0 \Rightarrow p_n = p_n(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{n-1}, h) = -K(\tilde q, \tilde p, \tau, h)$,

где $\tilde q = (q_1, \ldots, q_{n-1})^T$, $\tilde p = (p_1, \ldots, p_{n-1})^T$, $\tau = q_n$

Определение. *$K(\tilde q, \tilde p, \tau, h)$ — функция Уиттекера.*

Утверждение. *Уравнения Гамильтона на фиксированном уровне интеграла энергии локально эквивалентны уравнениям Уиттекера*

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} \\ \tilde{p}' = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} \end{cases}, \quad \tilde{q}' = \frac{d\tilde{q}}{d\tau},\ \tilde{p}' = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}.$$

Доказательство.

$H(\tilde{q}, \tau, \tilde{p}, -K) \equiv h$

$0 = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} - \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \dfrac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_n \cdot \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \dfrac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \Rightarrow \dfrac{dq_i}{d\tau} = \dfrac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$

$\dfrac{dH}{dq_i} = 0 = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} - \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{p}_i - \dot{q}_n \dfrac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \dfrac{\dot{p}_i}{\dot{q}_n} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow \dfrac{dp_i}{d\tau} = -\dfrac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$

$\tilde{q} = \tilde{q}(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2})$

$\tilde{p} = \tilde{p}(\tau, c_1, \ldots, c_{2n-2})$

$p_n = -K(\tilde{q}(q_m, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \tilde{p}(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}), q_n, h) = p_n(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)$

$\dot{q}_n = \dfrac{\partial H}{\partial p_n} = f(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)$

$\displaystyle\int_0^t \frac{dq_n}{f(q_n, c_1, \ldots, c_{2n-2}, h)} = t + c_{2n-1}$

■

3.3 Скобки Пуассона

Определение. *Скобкой Пуассона двух функций $F(q,p)$ и $G(q,p)$ называется*

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\right)$$

1. Линейность

   $\{F, \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\} = \alpha_1\{F, G_1\} + \alpha_2\{F, G_2\}$

   $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$

2. Антикоммутативность

   $$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

3. Тождество Якоби-Пуассона[3]

   $\{F, \{G, W\}\} + \{G, \{W, F\}\} + \{W, \{F, G\}\} = 0$

   $\displaystyle\{F, \{G, W\}\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)\right) -$

   $\displaystyle- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)\right) = \ldots$

4. Правило Лейбница

   $\{F_1 F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\}$

[3] Доказательство не доведено до конца

5. $\{\varphi(F_1,\dots,F_k),G\} = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial F_i}\{F_i,G\}$

6.

$$F = F(q,p,t),\ G = G(q,p,t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial q_i}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial q_i}\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\{F,G\}\right) = \left\{\frac{\partial F}{\partial p_i}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial p_i}\right\}$$

Пример.

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot q_i = \{q_i, H\} \\ \dot p_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

Утверждение. *Функция $F(q,p,t)$ — первый интеграл системы с гамильтонианом $H(q,p,t)$ тогда, и только тогда, когда*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\} = 0.$$

Доказательство.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \dot q\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \dot p\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

■

Замечание.

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\} = 0$$

Теорема 12 (Якоби-Пуассона)**.** *Скобка Пуассона двух первых интегралов в уравнении Гамильтона также является первым интегралом этих уравнений.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — первые интегралы системы с гамильтонианом H.

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1,H\} = 0,\ \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2,H\} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\{F_1,F_2\}\right) + \{\{F_1,F_2\},H\} = \left\{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\right\} + \left\{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right\} - \{H,\{F_1,F_2\}\} =$$
$$= \{F_2,\{F_1,H\}\} + \{F_1,\{H,F_2\}\} + \{H,\{F_1,F_2\}\} = 0 \Leftrightarrow \{F_1,F_2\} \text{ — первый интеграл.}$$

■

$$L = \frac{1}{2}(A\dot q,\dot q) + (B,\dot q) - \Pi(q,t)$$
$$H = \frac{1}{2}(A^{-1}(p-B),(p-B)) + \Pi(1,t) = \underbrace{\frac{1}{2}(A^{-1}p,p)}_{H_2} - \underbrace{(A^{-1}p,B)}_{H_1} + \underbrace{\Pi(q,t) + \frac{1}{2}(A^{-1}B,B)}_{H_0}$$

Утверждение. $H = H(q_1,\dots,q_{n-1},p_1,\dots,p_{n-1},f(q_n,p_n),t) \Rightarrow f(q_n,p_n) = const = \alpha$

Определение. q_n, p_n *— отделяющиеся переменные*

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

■

$L = L(q, \dot{q}, t)$
$\gamma = \{q(t), t \in [t_1, t_2]\ q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2\}$ — какая-то траектория
$\Omega = \{q(t) \in C^2, t \in [t_1, t_2]\ q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2\}$
$\gamma \in \Omega$

Определение. *Кривая, соответствующая решению уравнения Лагранжа системы с лагранжианом L называется прямым путем системы. Остальные пути называются окольными.*

Замечание. *Прямой путь не единственный.*

Определение. *S — функционал действия по Гамильтону*

$$S = S(q(t))_{q(t)\in\Omega} = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt.$$

Определение. *Семейство кривых $q^\varepsilon(t) = q(t, \varepsilon)^{t\in[t_1,t_2]}_{\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]}$, $q^\varepsilon(t) \in \Omega$ — вариация кривой $q(t)$, если*

1. $q(t_0) = q(t)\ \forall t \in [t_1, t_2]$,
2. $q(\varepsilon, t_1) = q_1,\ q(\varepsilon, t_2) = q_2,\ \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Определение. $\delta S = \left(\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} S(q^\varepsilon(t))\right)\delta\varepsilon$ *— вариация функционала S, соответствующая $q(t)$ при вариации $q^\varepsilon(t)$.*

3.4 Принцип Гамильтона

Утверждение. *Вариация функционала действия на некотором пути равный нулю тогда, и только тогда, когда путь прямой.*

$$\delta S = 0\ \forall q^\varepsilon(t) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q=q^\varepsilon(t,0)}$$

Доказательство.

$$S(q^\varepsilon(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q^\varepsilon(t), \dot{q}^\varepsilon(t), t)dt$$

$\vdots$

MISSING ■
