Лекции по аналитической механике. Осенний семестр.

Муницына Мария Александровна

9 февраля 2018 г.

Набор и рисунки: Александр Валентиновю
За рукописные конспекты спасибо Павлу Цаю и Никите Свешникову,
а всему ПМФ ФИВТ спасибо за помощь с исправлением ошибок.

Fork me on github: `https://github.com/valentiay/analmech`

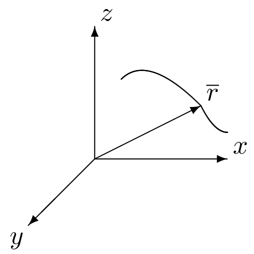
Горизонтальные черты обозначают границы между лекциями.

Содержание

1 Кинематика точки

Определение. *Материальная точка - точка, размером которой можно пренебречь.*

Мы будем полагать, что время меняется равномерно и непрерывно.



1.1 Векторное описание движения

Зависимость координат от времени назовем законом движения.

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \in C^2$$

Определение. $\gamma = \{\overline{r}(t),\ t \in (0,\ +\infty)\}$ - *траектория*

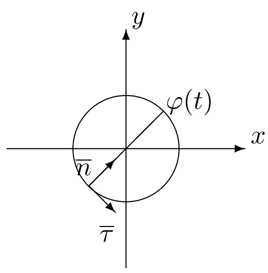
$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$
$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

1.2 Декартовы координаты

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{e_x} + y(t)\overline{e_y} + z(t)\overline{e_z}$$
$$\overline{v}(t) = \dot{x}(t)\overline{e_x} + \dot{y}(t)\overline{e_y} + \dot{z}(t)\overline{e_z}$$
$$\overline{w}(t) = \ddot{x}(t)\overline{e_x} + \ddot{y}(t)\overline{e_y} + \ddot{z}(t)\overline{e_z}$$

1.3 Движение по окружности

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - R\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + R\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{cases}$$



$$\overline{v} = R\dot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\dot{\varphi}\overline{\tau}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}(-\sin\varphi \cdot \overline{e_x} + \cos\varphi \cdot \overline{e_y}) + R\dot{\varphi}^2(-\cos\varphi \cdot \overline{e_x} - \sin\varphi \cdot \overline{e_y}) = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n}$$

$$\overline{v} = R\dot{\varphi}\overline{\tau} = v\overline{\tau}$$
$$\overline{w} = R\ddot{\varphi}\overline{\tau} + R\dot{\varphi}^2\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{R}\overline{n}$$

1.4 Естественное описание движения

Кривая задана параметрически естественным параметром s. $ds = |\overline{dr}| \neq 0$

Определение.

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{r}' \text{ - \textit{касательный вектор}} \tag{1}$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{\tau}'}{|\overline{\tau}'|} \text{ - \textit{вектор главной нормали}} \tag{2}$$

$$\overline{b} = [\overline{\tau}; \overline{n}] \text{ - \textit{вектор бинормали}} \tag{3}$$

Утверждение 1. $\{\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\}$ *- тройка ортогональных единичных векторов.*

Доказательство.

$|\overline{\tau}| = \dfrac{|d\overline{r}|}{|ds|} = 1$

$|\overline{n}| = \dfrac{|\overline{\tau}'|}{|\overline{\tau}'|} = 1$

$|\overline{\tau}| = 1 \Rightarrow (\tau, \tau) = 1$

$(\overline{\tau}', \overline{\tau}) + (\overline{\tau}, \overline{\tau}') = 0$

$2(\overline{\tau}', \overline{\tau}) = 0 \Rightarrow \overline{\tau}' \perp \overline{\tau} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{\tau}$

■

Этот трехгранник называют репер Френе. (Дарбу, сопровождающий трехгранник).

Теорема 1. $\overline{v} = v\overline{\tau}$, $\overline{w} = \dot{v}\overline{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}$, *где* $v = \dot{s}$.

Доказательство.

$\overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt} = \dfrac{d\overline{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\overline{\tau}$

$\dot{\overline{\tau}} = \dfrac{d\overline{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \overline{n}kv$, по формуле (2)

$\overline{w} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}\overline{\tau} + v\dot{\overline{\tau}} = \dot{v}\overline{\tau} + v^2k\overline{n} = \dot{v}\overline{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$

$\dot{v}\overline{\tau}$ - касательное ускорение

$\dfrac{v^2}{\rho}\overline{n}$ - нормальное ускорение

$\rho = \dfrac{1}{|\overline{r}''|}$ - радиус кривизны

$k = |\overline{r}''|$ - кривизна

$\overline{r}''$ - вектор кривизны

■

Формулы Френе:

$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

где $\varkappa$ - коэффициент кручения.

Доказательство.

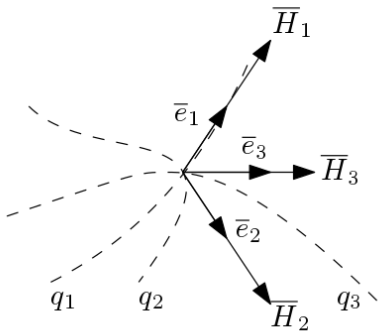
$$|\overline{n}| = 1 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{n}') = 0$$

$$\overline{n} \perp \overline{\tau} \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + (\overline{n}, \overline{\tau}') = 0 \Rightarrow (\overline{n}', \overline{\tau}) + k = 0$$

$$\overline{b}' = [\overline{\tau}', \overline{n}] + [\overline{\tau}, \overline{n}'] = [k\overline{n}, \overline{n}] + [\overline{\tau}, -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}] = 0 + \varkappa[\overline{\tau}, \overline{b}] = -\varkappa\overline{n}$$

■

1.5 Ортогональные криволинейные координаты



$$\overline{r} = \overline{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\overline{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\overline{H_i} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = H_i \overline{e_i}, \text{ где } H_i \text{ - коэффициенты Ламе.}$$

Геометрический смысл

$$ds_i = H_i dq_i$$

s_i - длина дуги i-й координатной линии.

$$H_i = \left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \overline{e_i}, \quad v^2 = (\overline{v}, \overline{v}) = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$$

Теорема 2. *Компоненты вектора ускорения в ортогональном криволинейном базисе определяются равенством:*

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right)$$

Доказательство.

$$(\overline{w}, \overline{H_i}) = \left(\frac{d\overline{v}}{dt}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) - \left(\overline{v}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) \triangleq$$

$$1) \ \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial \dot{q}_i} \text{ - из определения скорости}$$

$$2) \ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i}$$

$$\triangleq \frac{d}{dt} \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\overline{v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\overline{v}, \overline{v}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (\overline{v}, \overline{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

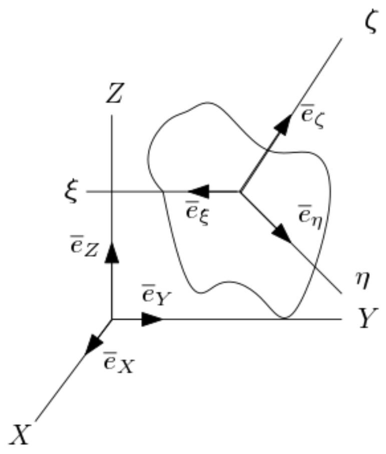
$$w_i = (\overline{w}, \overline{e_i}) = \frac{1}{H_i} (\overline{w}, \overline{H_i})$$

■

2 Кинематика твердого тела

Определение. *Абсолютно твердым телом называется множество точек, расстояние между которыми не меняется со временем.*

$\{\overline{r_i}, i = \overline{1 \dots n} \quad : \quad |\overline{r_i} - \overline{r_j}| = C_{ij} = const, \quad n \geqslant 3\}$



$OXYZ$ - неподвижная система отсчета.

$S\xi\eta\zeta$ - связаны с телом (движется).

$$X = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\eta}, \overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{e_x}) & (\overline{e_\zeta}, \overline{e_y}) & (\overline{e_\zeta}, \overline{e_z}) \end{pmatrix} \text{ - матрица направляющих косинусов.}$$

$$\overline{AB} = x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}$$

$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\eta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \\ (\overline{e_\zeta}, x\overline{e_x} + y\overline{e_y} + z\overline{e_z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\eta}, \overline{AB}) \\ (\overline{e_\zeta}, \overline{AB}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \overline{\rho}$$

$$\overline{\rho} = X\overline{r}$$

Утверждение 2. X *- ортогональная матрица.*

Доказательство.

$$XX^T = X^TX = \begin{pmatrix} (\overline{e_\xi}, \overline{e_\xi}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_\eta}) & (\overline{e_\xi}, \overline{e_\zeta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix} = E$$

Т.к. базис ортогональный. ■

$$\begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{e_\xi}} \\ \dot{\overline{e_\eta}} \\ \dot{\overline{e_\zeta}} \end{pmatrix} = \dot{X} \begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \\ \overline{e_z} \end{pmatrix} = \underbrace{\dot{X}X^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \overline{e_\xi} \\ \overline{e_\eta} \\ \overline{e_\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \dot{X}X^T$$

Утверждение 3. Ω *- кососимметрична.*

Доказательство.

$$\Omega - \Omega^T = \dot{X}X^T + (\dot{X}X^T)^T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}(XX^T) = \frac{d}{dt}(E) = 0$$

■

Следствие.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix}$$

Определение. $\overline{\omega} = \omega_\xi \overline{e_\xi} + \omega_\eta \overline{e_\eta} + \omega_\zeta \overline{e_\zeta}$ - *угловая скорость подвижного репера.*

2.1 Формулы Пуассона

Утверждение 4.

$$\dot{\overline{e_i}} = [\overline{\omega}, \overline{e_i}], \quad i = \overline{1\ldots3}$$

Доказательство.

$$\dot{\overline{e_\xi}} = \omega_\zeta \overline{e_\eta} - \omega_\eta \overline{e_\zeta} = \begin{vmatrix} \overline{e_\xi} & \overline{e_\eta} & \overline{e_\zeta} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]$$

■

Утверждение 5. $\overline{\omega} = \overline{e_\xi}(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) + \overline{e_\eta}(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) + \overline{e_\zeta}(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta})$

Доказательство.

$$(\dot{\overline{e_\xi}}, \overline{e_\eta}) = \omega_\zeta$$

$$(\dot{\overline{e_\eta}}, \overline{e_\zeta}) = \omega_\xi$$

$$(\dot{\overline{e_\zeta}}, \overline{e_\xi}) = \omega_\eta$$

■

Утверждение 6. $\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}])$

Доказательство.

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, \dot{\overline{e_\xi}}] + [\overline{e_\eta}, \dot{\overline{e_\eta}}] + [\overline{e_\zeta}, \dot{\overline{e_\zeta}}]) = \frac{1}{2}([\overline{e_\xi}, [\overline{\omega}, \overline{e_\xi}]] + [\overline{e_\eta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\eta}]] + [\overline{e_\zeta}, [\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]]) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{\omega}(\overline{e_\xi}, \overline{e_\xi}) - \overline{e_\xi}(\overline{\omega}, \overline{e_\xi}) + \overline{\omega}(\overline{e_\eta}, \overline{e_\eta}) - \overline{e_\eta}(\overline{\omega}, \overline{e_\eta}) + \overline{\omega}(\overline{e_\zeta}, \overline{e_\zeta}) - \overline{e_\zeta}(\overline{\omega}, \overline{e_\zeta})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(3\overline{\omega} - \overline{\omega}) = \overline{\omega}$$

■

Пример. *Угловая скорость репера Френе.*

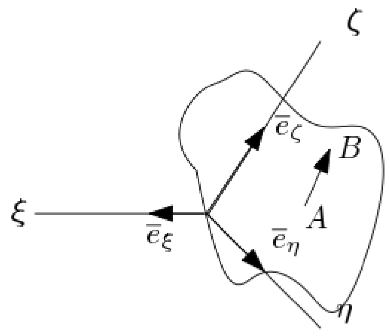
$$\begin{cases} \overline{\tau}' = k\overline{n} \\ \overline{n}' = -k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b} \\ \overline{b}' = -\varkappa\overline{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{\tau}} = \frac{d\overline{\tau}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{n}} = \frac{d\overline{n}}{ds}\dot{s} \\ \dot{\overline{b}} = \frac{d\overline{b}}{ds}\dot{s} \end{cases}$$

$$\overline{\omega} = \overline{\tau}(\dot{s}(-k\overline{\tau} + \varkappa\overline{b}), \overline{b}) + \overline{n}(\dot{s}(-\varkappa\overline{n}, \overline{\tau}) + \overline{b}(\dot{s}(k\overline{n}), \overline{n}) = \dot{s}(\varkappa\overline{\tau} + k\overline{b})$$

Определение. *Угловой скоростью твердого тела называется угловая скорость подвижного репера, с ним связанного.*

2.2 Формула распределения скоростей точек твердого тела (Формула Эйлера)



$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\overline{AB} = \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}$$

$$\dot{\overline{AB}} = \xi\dot{\overline{e_\xi}} + \eta\dot{\overline{e_\eta}} + \zeta\dot{\overline{e_\zeta}}, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$$

$$(\overline{r_B} \dot{-} \overline{r_A}) \quad = \xi[\overline{\omega}, \overline{e_\xi}] + \eta[\overline{\omega}, \overline{e_\eta}] + \zeta[\overline{\omega}, \overline{e_\zeta}]$$

$$\dot{\overline{r_B}} - \dot{\overline{r_A}} = [\overline{\omega}, \xi\overline{e_\xi} + \eta\overline{e_\eta} + \zeta\overline{e_\zeta}]$$

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

■

Следствие. $S\xi\eta\zeta \to \overline{\omega}$, $S'\xi'\eta'\zeta' \to \overline{\omega}'$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}] \\ \overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}', \overline{AB}]\end{array}\right| [\overline{\omega} - \overline{\omega}', \overline{AB}] = 0; \ \forall A, B \text{ в абсолютно твердом теле} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\omega} - \overline{\omega}' = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{\omega} = \overline{\omega}'}$$

Утверждение 7. *(Формула Ривальса)* $\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\omega, \overline{AB}]]$.

Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

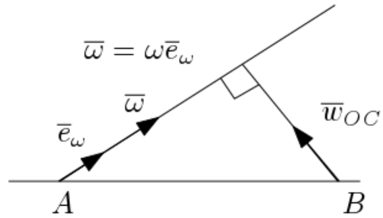
$$\dot{\overline{v_B}} = \dot{\overline{v_A}} + [\dot{\overline{\omega}}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, \overline{r_B} \dot{-} \overline{r_A}\ ]$$

$$\overline{w_B} = \overline{w_A} + [\overline{\varepsilon}, \overline{AB}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$$

$[\overline{\varepsilon}, \overline{AB}]$ - вращательное ускорение, $[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]]$ - осестремительное ускорение

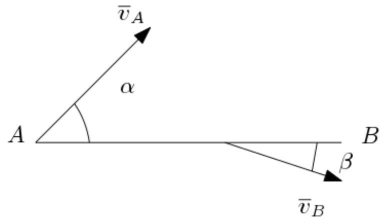
■

Геометрический смысл $\overline{w}_{OC}$



$\overline{w} = [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{AB}]] = \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{AB}) - \overline{AB}\omega^2 = \omega^2(\overline{e_\omega}(\overline{AB}, \overline{e_\omega}) - \overline{AB})$
$|\overline{w_{\mathbf{oc}}}| = \omega^2\rho(B, l)$

Утверждение 8. *Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны.*



Доказательство.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}]$$

$$(\overline{v_B}, \overline{AB}) = (\overline{v_A}, \overline{AB}) + ([\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{AB})$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$

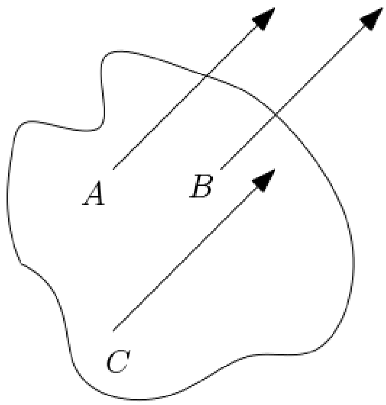
■

Замечание. *Аналогичная теорема для ускорений не верна.*

3 Классификация движения твердого тела

3.1 Поступательное движение

Определение. *Такое движение твердого тела, при котором угловая скорость равна нулю.*



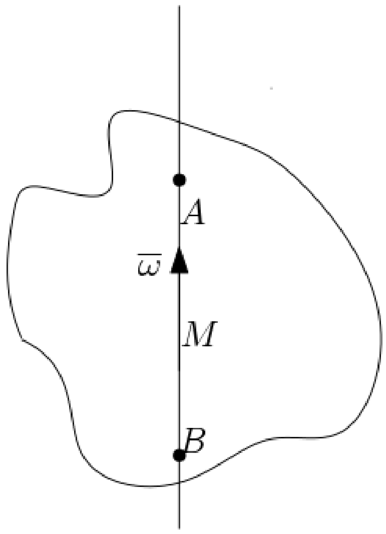
$$\overline{v_B} \equiv \overline{v_A}$$

$$\overline{w_B} \equiv \overline{w_A}$$

Мгновенное поступательное движение: $\exists t : \overline{\omega}(t) = 0, \quad \overline{\varepsilon}(t) \neq 0$

3.2 Вращательное движение (вращение вокруг неподвижной оси)

$$\exists A, B : \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0$$



$\overline{v_B} = \overline{v_A} + [\overline{\omega}, \overline{AB}], \overline{v_A} = \overline{v_B} = 0 \Rightarrow [\omega, \overline{AB}] = 0 \Rightarrow \omega \parallel \overline{AB}$
$\forall M \in l : \overline{v_M} = 0$, l - ось вращения
$\dot{\vec{e}}_\xi = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta,\ \dot{\vec{e}}_\eta = -\dot{\varphi}\vec{e}_\xi,\ \dot{\vec{e}}_\zeta = 0$
$\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(0, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \vec{e}_\eta) = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta = \dot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi}\vec{e}_z$
$\vec{v}_p = \vec{v}_{p'} + [\vec{\omega}, \overline{pp'}] = 0 + [\dot{\varphi}\vec{e}_z, \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta] = \dot{\varphi}(\xi\vec{e}_\eta - \eta\vec{e}_\xi)$
$|\vec{v}_p| = |\vec{\omega}| \cdot |\overline{p'p}|$
$\vec{w}_p = \vec{w}_{p'} + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overline{p'p}]] = 0 + [\vec{\varepsilon}, \overline{p'p}] - \omega^2\overline{p'p}$

3.3 Плоскопараллельное движение

Определение. *Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех точек тела параллельны некоторой неподвижной плоскости:*

$$\overline{v}_{p_i} \parallel \pi,\ \forall p_i \in ATT$$

$$\overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j} + [\overline{\omega}, \overline{p_j p_i}]$$

$$(\overline{\omega}, \overline{v_{p_i}} - \overline{v}_{p_j}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{\omega} = 0 \\ \overline{v}_{p_i} = \overline{v}_{p_j},\ \forall p_i, p_j \in \text{АТТ} \\ \overline{\omega} \perp \overline{v}_{p_i} - \overline{v}_{p_i} \parallel \pi \end{array} \right.$$

$$\overline{v}_{M_i} = \overline{v}_{M_j} + [\overline{\omega}, \overline{M_j M_i}] = \overline{v}_{M_j} \quad \forall M_i, M_j : \overline{M_i M_j} \perp \pi \Rightarrow \overline{w}_{M_i} = \overline{w}_{M_j}$$

Качение:

$$\overline{r}_S = x_S\overline{e}_x + y_S\overline{e}_y$$

$$\dot{\overline{e}}_\xi = \dot{\varphi}\overline{e}_\eta,\quad \dot{\overline{e}}_\eta = \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta,\quad \dot{\overline{e}}_\zeta = 0$$

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{e}_z,\quad \overline{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\overline{e}_z \parallel \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_S + [\overline{\omega}, \overline{SM}]$$

$$\overline{w}_M = \overline{w}_S + [\overline{\varepsilon}, \overline{SM}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SM}]] = \overline{w}_s + [\overline{\varepsilon}, \overline{SM}] - \omega^2\overline{SM}$$

Теорема 3. *Если при плоскопараллельном движении угловая скорость твердого тела отлична от нуля, то существует точка, скорость которой равна нулю в данный момент времени.*

Доказательство.

$$\begin{cases}\overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = 0\end{cases} \Rightarrow [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]] = 0$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2 \overline{SC} = 0$$

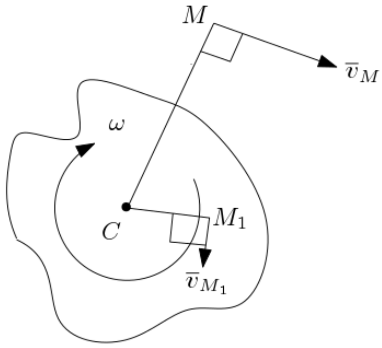
$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_s]}{\omega^2}$$

■

Следствие. *Любое плоскопараллельное движение является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным*

Доказательство. $\overline{\omega} = 0$ - мгновенно-поступательное. $\overline{\omega}(t) \neq 0$ - вращение вокруг l.

■



Определение. C *- мгновенный центр скоростей*

Замечание. *Положение* C *меняется со временем.*

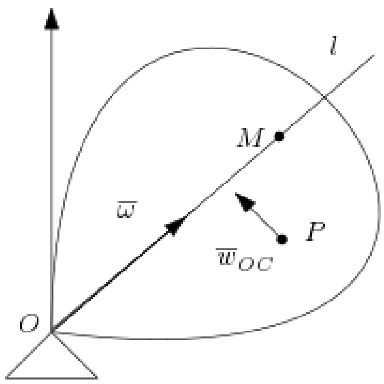
Пример. *Качение без проскальзывания*

3.4 Тело с неподвижной точкой (вращение вокруг точки)

$$\exists O : \overline{v}_O \equiv 0$$

$$l \parallel \overline{\omega}, O \in l$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_O + [\overline{\omega}, \overline{OM}] = 0 + 0, \ \forall M \in l$$



Определение. l *- мгновенная ось вращения*

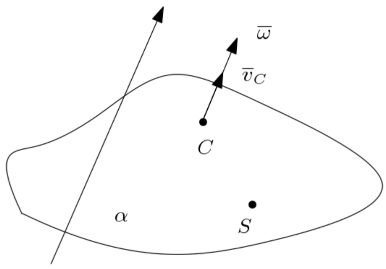
$$\overline{v}_p = [\overline{\omega}, \overline{OP}], \ \overline{w_p} = [\overline{\varepsilon}, \overline{OP}] + \underbrace{[\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{OP}]]}_{\overline{v}_{OC}}$$

3.5 Винтовое движение

Определение. *Движение твердого тела называется винтовым, если тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, а скорости всех точек, лежащий на этой оси, равны между собой, постоянны и сонаправлены с осью.*

3.6 Общий случай

Теорема 4. $\overline{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists l:\ \overline{\omega} \parallel l,\ \overline{v}_{k_i} \parallel l,\ \forall k_i \in l$



Доказательство.

$$\overline{\alpha} \perp \overline{\omega},\ S \in \alpha$$

$$\begin{cases} \overline{v}_c = \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{SC}] \\ \overline{v}_c = \lambda\overline{\omega} \end{cases} \Rightarrow 0 = [\overline{\omega}, \overline{v}_s] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{SC}]]$$

$$[\overline{\omega}, \overline{v}_s] + \overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{SC}) - \omega^2\overline{SC} = 0$$

$$\overline{SC} = \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_c]}{\omega^2}$$

$$\exists l : C \in l, l \parallel \overline{\omega}$$

$$\overline{v}_{C_1} = \overline{v}_C + [\overline{\omega}, \overline{CC_1}] = \overline{v}_C, \quad \forall C_1 \in l$$

■

$$\overline{v}_C = \overline{v}_S + \left[\overline{\omega}, \frac{[\overline{\omega}, \overline{v}_C]}{\omega^2}\right] = \overline{v}_S + \frac{1}{\omega^2}\left(\overline{\omega}(\overline{\omega}, \overline{v}_S) - \omega^2\overline{v}_S\right) = \underbrace{\frac{(\overline{\omega}, \overline{v}_S)}{\omega^2}}_{\lambda}\overline{\omega}$$

$$\lambda = \frac{(\overline{\omega}, \overline{v}_S)}{\omega^2} \text{ - параметр (шаг винта).}$$

Следствие. *Любое движение твердого тела является в каждый момент времени либо мгновенно-поступательным ($\omega = 0,\ \lambda \to +\infty$), либо мгновенно-вращательным ($\omega \neq 0,\ \lambda = 0$) , либо мгновенно-винтовым ($\omega \neq 0,\ \lambda \neq 0$).*

Определение. $\{l, \overline{\omega}, \overline{v}\}$ - *кинематический винт.*

$$\overline{v}_S = v_x\overline{e}_x + v_y\overline{e}_y + v_z\overline{e}_z$$

$$\overline{r}_S = x_S\overline{e}_x + y_S\overline{e}_y + z_S\overline{e}_z$$

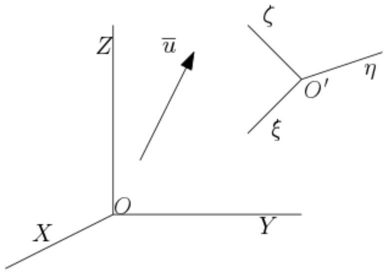
$$\overline{\omega} = \omega_x\overline{e}_x + \omega_y\overline{e}_y + \omega_z\overline{e}_z$$

$$\overline{r}_C = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y + z\overline{e}_z$$

$$\overline{v}_S + [\overline{\omega}, \overline{SC}] = \lambda\overline{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{v_x + \omega_y(z - z_S) - \omega_z(y - y_S)}{\omega_x} =$$

$$= \frac{v_y + \omega_z(x - x_S) - \omega_x(z - z_S)}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x(y - y_S) - \omega_y(x - x_S)}{\omega_z}$$

4 Кинематика сложного движения



$OXYZ$ - неподвижная система отсчета ($\overline{r}$), $O_1\xi\eta\zeta$ - подвижная система отсчета ($\overline{\rho}$).

$$\overline{u} = u_x\overline{e}_x + u_y\overline{e}_y + u_z\overline{e}_z$$

$$\overline{u} = u_\xi\overline{e}_\xi + u_\eta\overline{e}_\eta + u_\zeta\overline{e}_\zeta$$

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{u}_x\overline{e}_x + \dot{u}_y\overline{e}_y + \dot{u}_z\overline{e}_z \text{ - абсолютная производная}$$

$$\dot{\overline{u}} = \dot{u}_\xi\overline{e}_\xi + \dot{u}_\eta\overline{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\overline{e}_\zeta \text{ - относительная производная}$$

Теорема 5. *(Связь абсолютной и относительной производной)* $\frac{d\overline{u}}{dt} = \dot{\overline{u}} + [\overline{\omega}, \overline{u}]$, *где* $\overline{\omega}$ *- угловая скорость* $O_1\xi\eta\zeta$ *относительно* $OXYZ$

Доказательство.

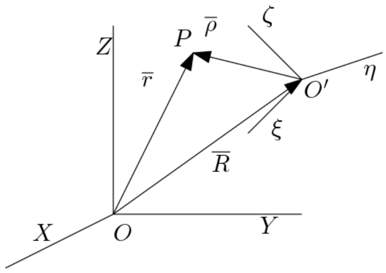
$$\frac{du}{dt} = \dot{u}_\xi\overline{e}_\xi + \dot{u}_\eta\overline{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\overline{e}_\zeta + u_\xi\frac{d\overline{e}_\xi}{dt} + u_\eta\frac{d\overline{e}_\eta}{dt} + u_\zeta\frac{d\overline{e}_\zeta}{dt} =$$

$$= \dot{\overline{u}} + u_\xi[\overline{\omega}, \overline{e}_\xi] + u_\eta[\overline{\omega}, \overline{e}_\eta] + u_\zeta[\overline{\omega}, \overline{e}_\zeta] = \dot{\overline{u}} + [\overline{\omega}, \overline{u}]$$

$$\left(\frac{d\overline{e}_i}{dt} = [\overline{\omega}, \overline{e}_i] - \text{ - формула Пуассона, } \quad \dot{\overline{e}}_i = 0\right)$$

■

4.1 Сложное движение материальной точки



Определение. *Абсолютной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{r}$

Определение. *Относительной скоростью материальной точки называется ее скорость относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{v}_{отн} = \dot{\overline{\rho}}$

Определение. *Переносной скоростью материальной точки называется абсолютная скорость той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движующаяся точка в данный момент времени.*

Теорема 6 (Формула сложения скоростей)**.** $\overline{v}_{абс} = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{v}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{R} + \overline{\rho}) = \frac{dR}{dt} + \dot{\overline{\rho}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] =$$

$$= \overline{v}_{O_1} + \overline{v}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}] = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$$

■

Определение. *Абсолютным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно неподвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{v}_{абс}$

Определение. *Относительным ускорением материальной точки называется ее ускорение относительно подвижной системы отсчета.* $\overline{w}_{отн} = \dot{\overline{v}}_{отн}$

Определение. $\overline{w}_{пер} = \overline{\omega}_{O_1} + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}]]$

Определение. $\overline{w}_{кор} = 2[\overline{\omega}, \overline{v}_{отн}]$

Теорема 7 (Формула сложения ускорений)**.** $\overline{w}_{абс} = \overline{w}_{отн} + \overline{w}_{пер} + \overline{w}_{кор}$

Доказательство.

$$\overline{w}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}) = \frac{d}{dt}(\overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{O_1} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}]) =$$

$$= \dot{\overline{v}}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}, \overline{v}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\overline{v}_{O_1} + \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}, \overline{\rho}\right] + [\overline{\omega}, \overline{\rho} + [\overline{\omega}, \overline{\rho}]] =$$

$$= \dot{\overline{v}}_{\text{отн}} + \dot{\overline{v}}_{O_1} + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + 2[\overline{\omega}, \overline{v}_{\text{отн}}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}]]$$

■

4.2 Сложное движение твердого тела

Рассмотрим неподвижную систему отсчета $OXYZ$, подвижную O_1xyz, и систему, связанную с телом $S\xi\eta\zeta$.

Определение. *Абсолютная угловая скорость - угловая скорость* $S\xi\eta\zeta$ *относительно* $OXYZ$

Определение. *Относительная угловая скорость - угловая скорость* $S\xi\eta\zeta$ *относительно* O_1xyz

Определение. *Переносная угловая скорость - угловая скорость* $Oxyz$ *относительно* $OXYZ$

Теорема 8 (О сложении угловых скоростей)**.** $\overline{\omega}_{абс} = \overline{\omega}_{отн} + \overline{\omega}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{v}_A^{\text{абс}} = \overline{v}_A^{\text{отн}} + \overline{v}_A^{\text{пер}}$$

$$\overline{v}_B^{\text{абс}} = \overline{v}_B^{\text{отн}} + \overline{v}_B^{\text{пер}}$$

$$\overline{v}_B^{\text{абс}} = \overline{v}_A^{\text{абс}} + [\overline{\omega}_{\text{абс}}, \overline{AB}]$$

$$\overline{v}_B^{\text{отн}} = \overline{v}_A^{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{отн}}, \overline{AB}]$$

$$\overline{v}_B^{\text{пер}} = \overline{v}_A^{\text{пер}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}]$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + [\overline{\omega}_{\text{абс}} - \overline{\omega}_{\text{отн}} - \overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{AB}] = 0, \quad \forall \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{\omega}_{\text{абс}} = \overline{\omega}_{\text{отн}} + \overline{\omega}_{\text{пер}}$$

■

Замечание. $\frac{d\overline{\omega}_{пер}}{dt} = \dot{\overline{\omega}}_{пер} + [\overline{\omega}_{пер}, \overline{\omega}_{пер}] = \dot{\overline{\omega}}_{пер}$

Теорема 9 (О сложении угловых ускорений)**.** $\overline{\varepsilon}_{абс} = \overline{\varepsilon}_{отн} + \overline{\varepsilon}_{пер} + [\overline{\omega}_{пер}, \overline{\omega}_{отн}]$*, где* $\overline{\varepsilon}_{абс} = \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{абс}$*,* $\overline{\varepsilon}_{отн} = \dot{\overline{\omega}}_{отн}$*,* $\overline{\varepsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{пер} = \dot{\overline{\omega}}_{пер}$

Доказательство.

$$\overline{\varepsilon}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}(\overline{\omega}_{\text{отн}} + \overline{\omega}_{\text{пер}}) =$$

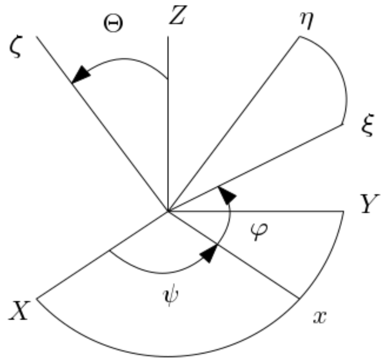
$$= \dot{\overline{\omega}}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{\omega}_{\text{отн}}] + \frac{d}{dt}\overline{\omega}_{\text{пер}} = \overline{\varepsilon}_{\text{отн}} + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{\omega}_{\text{отн}}] + \overline{\varepsilon}_{\text{пер}}$$

■

4.2.1 Несколько подвижных систем отсчета

$OXYZ$ - неподвижная СО
$Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $\ldots Ox_ny_nz_n$ - подвижные СО
$S\xi\eta\zeta$ - связана с телом
$\overline{\omega}$ - угловая скорость $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$
Тогда: $\overline{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\omega_i}$

4.3 Кинематические формулы Эйлера



Определение. $Ox = (OXY) \cap (O\xi\eta)$ - *линия узлов*

Определение. $\psi = \angle(Ox, OX)$ - *угол прецессии*

Определение. $\Theta = \angle(O\zeta, OZ)$ - *угол нутации*

Определение. $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ - *угол собственного вращения*

Определение. $\{\psi, \Theta, \varphi\}$ - *углы Эйлера*

Повороты: $OXYZ \xrightarrow{\psi, OZ} OxyZ \xrightarrow{\Theta, Ox} Oxy\zeta \xrightarrow{\varphi, O\zeta} O\xi\eta\zeta$
$\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{e}_Z + \dot{\Theta}\overline{e}_x + \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta$
$\overline{e}_x = \cos\varphi\overline{e}_\xi - \sin\varphi\overline{e}_\eta$
$\overline{e}_z = \cos\Theta\overline{e}_\zeta + \sin\Theta(\sin\varphi\overline{e}_\xi + \cos\varphi\overline{e}_\eta)$

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= \dot{\psi}(\sin\Theta\sin\varphi\overline{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\overline{e}_\eta + \cos\Theta\overline{e}_\zeta) \\ &+ \dot{\Theta}(\cos\varphi\overline{e}_\xi - \sin\varphi\overline{e}_\eta) \\ &+ \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta = \omega_\xi\overline{e}_\xi + \omega_\eta\overline{e}_\eta + \omega_\zeta\overline{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overline{\omega}_\xi = \dot{\psi}\sin\Theta\sin\varphi + \dot{\Theta}\cos\varphi \\ \overline{\omega}_\eta = \dot{\psi}\sin\Theta\cos\varphi - \dot{\Theta}\sin\varphi \\ \overline{\omega}_\zeta = \dot{\psi}\cos\Theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad \text{- кинематические формулы Эйлера}$$

Определение. *Движение твердого тела называется прецессией, если некоторая ось, неподвижная в теле, в абсолютном пространстве движется по поверхности неподвижного кругового конуса.* $\dot{\Theta} = 0$. *Если* $\dot{\psi} = const$, $\dot{\varphi} = const$, *то прецессия называется регулярной.*

5 Алгебра кватернионов

Определение. *Алгеброй над полем называется векторное пространство над этим полем, снабженное билинейной операцией умножения.*

Пример.
$\underline{n=2}$*(Комплексные числа).* $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

$$z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$\underline{n=4}$(*Алгебра кватернионов*)

$\Lambda = \lambda_0 \bar{i}_0 + \lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3 \in \mathbb{H}$
$\{\bar{i}_0, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}$ - базис
$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$
$i_0 \circ i_k = i_k \quad k = \overline{1,3},\ i_0 \circ i_0 = 1$
$i_k \circ i_m = -(i_k, i_m) + [i_k, i_m] \quad k, m \in \{1, 2, 3\},$ В частности, $i_k \circ i_k = -1$
$\overline{\lambda} \circ \overline{\mu} = (\lambda_1 \bar{i}_1 + \lambda_2 \bar{i}_2 + \lambda_3 \bar{i}_3) \circ (\mu_1 \bar{i}_1 + \mu_2 \bar{i}_2 + \mu_3 \bar{i}_3) = -(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$
$\Lambda \circ M = (\lambda + \overline{\lambda}) \circ (\mu + \overline{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \overline{\mu} + \overline{\lambda} \mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) + [\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$

Свойства:

1. $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. $(\Lambda + M) \circ N = \Lambda \circ N + M \circ N$
3. $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

Определение.

$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 - \overline{\lambda}$$

Утверждение 9.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

Доказательство.

$$\overline{\Lambda \circ M} = \lambda_0 \mu_0 - (\overline{\lambda}, \overline{\mu}) - \lambda_0 \overline{\mu} - \mu_0 \overline{\lambda} - [\overline{\lambda}, \overline{\mu}] =$$
$$= (\mu_0 - \overline{\mu}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \overline{M} \circ \overline{\Lambda}$$

■

Определение.

$$\| \Lambda \| = \Lambda \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) = \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2 = |\Lambda|^2 \text{ - \textit{норма} } \Lambda$$

Утверждение 10.

$$\| \Lambda \circ M \| = \| \Lambda \| \cdot \| M \|$$

Доказательство.

$$\| \Lambda \circ M \| = (\Lambda \circ M) \circ (\overline{\Lambda \circ M}) = \Lambda \circ \underbrace{M \circ \overline{M}}_{\|M\|} \circ \overline{\Lambda} = \| M \| \cdot \| \Lambda \|$$

■

Определение.

$$\Lambda^{-1} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|},\ \| \Lambda \| \neq 0$$

Замечание.

$$\Lambda \circ \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} = \frac{\overline{\Lambda}}{\| \Lambda \|} \circ \Lambda = \frac{\| \Lambda \|}{\| \Lambda \|} = 1$$

Формула Муавра

$\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda} = |\Lambda| \left(\dfrac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \dfrac{\overline{\lambda}}{|\lambda|} \dfrac{|\overline{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| \left(\cos\nu + \overline{e} \sin\nu \right)$

$\overline{e} = \dfrac{\overline{\lambda}}{|\overline{\lambda}|},\ \cos\nu = \dfrac{\lambda_0}{|\Lambda|},\ \sin\nu = \dfrac{|\overline{\lambda}|}{|\Lambda|}$

$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos\nu_1 + \overline{e}\sin\nu_1)$

$\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos\nu_2 + \overline{e}\sin\nu_2)$

$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2|(\cos\nu_1\cos\nu_2 - \sin\nu_1\sin\nu_2(\overline{e},\overline{e}) + \cos\nu_1\sin\nu_2\overline{e} +$
$+ \cos\nu_2\sin\nu_1\overline{e} + \sin\nu_2\sin\nu_2[\overline{e},\overline{e}]) = |\Lambda_1||\Lambda_2| \cdot (\cos(\nu_1+\nu_2) + \overline{e}\sin(\nu_1+\nu_2))$

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k \cdot (\cos k\nu + \overline{e}\sin k\nu) \text{ — формула Муавра}$$

6 Задание ориентации твердого тела с помощью кватернионов

$E = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ — неподвижный базис
$E' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ — связанный с телом

Теорема 10. *Произвольному положению твердого тела с неподвижной точкой соответствует нормированный кватернион, удовлетворяющий равенству:*

$$\overline{e}'_i = \Lambda \circ \overline{e}_i \circ \overline{\Lambda}, \quad i = 1 \dots 3$$

Замечание. Λ — *нормирован, если* $\parallel \Lambda \parallel = 1$

Доказательство.

1. Нормированность

$$\parallel \overline{e}'_i \parallel = \parallel \Lambda \parallel \cdot \parallel \overline{e}_i \parallel \cdot \parallel \overline{\Lambda} \parallel \Rightarrow 1 = \parallel \Lambda \parallel \cdot 1 \cdot \parallel \Lambda \parallel \Rightarrow \parallel \Lambda \parallel = 1$$

2. Существование решения. $\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda}$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ \Lambda = \Lambda \circ \overline{e}_i \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ \overline{e}'_i \circ (\lambda_0 + \overline{\lambda}) = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0\overline{e}'_i - (\overline{e}'_i, \overline{\lambda}) + [\overline{e}'_i, \overline{\lambda}] = \lambda_0\overline{e}'_i - (\lambda, \overline{e}'_i) + [\overline{\lambda}, \overline{e}_i] \\ \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 \\ (\overline{\lambda}, \overline{r}_i) = 0 \\ \lambda_0\overline{r}_i - [\overline{\lambda}, \overline{s}_i] = 0 \end{cases} \qquad \overline{r}_i = \overline{e}'_i - \overline{e}_i,\ \overline{s}_i = \overline{e}'_i + \overline{e}_i \quad i = 1 \dots 3$$

(a)

$(\overline{r}_k, \overline{s}_k) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_k) - (\overline{e}_k, \overline{e}_k) = 0$
$(\overline{r}_k, \overline{s}_l) = (\overline{e}'_k - \overline{e}_k, \overline{e}'_l + \overline{e}_l) = (\overline{e}'_k, \overline{e}'_l) + (\overline{e}'_k, \overline{e}_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}'_l) - (\overline{e}_k, \overline{e}_l) =$
$= -(\overline{e}'_l - \overline{e}_l, \overline{e}'_k + \overline{e}_k) = -(\overline{s}_k, \overline{r}_l),\ k \neq l$

(b)

$(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3) = (\overline{e}'_1 - \overline{e}_1, \overline{e}'_2 - \overline{e}_2, \overline{e}'_3 - \overline{e}_3) = (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3) - (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) -$
$- (\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}_3) + (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}'_3) = 1 - 1 - (\underbrace{[\overline{e}'_1, \overline{e}'_2]}_{\overline{e}'_3}, \overline{e}_3) + (\underbrace{[\overline{e}_1, \overline{e}_2]}_{\overline{e}_3}, \overline{e}'_3) = 0$

(c)

$$\overline{r}_1(\overline{s}_2,\overline{r}_3)+\overline{r}_2(\overline{s}_3,\overline{r}_1)+\overline{r}_3(\overline{s}_1,\overline{r}_2)$$

$$(2b)\Rightarrow c_1\overline{r}_1+c_2\overline{r}_2+c_3\overline{r}_3=0$$

$$\begin{cases}0+c_2(\overline{s}_1,\overline{r}_2)-c_3(\overline{s}_2,\overline{r}_1)=0\\ -c_1(\overline{s}_1,\overline{r}_2)+0+c_3(\overline{s}_2,\overline{r}_3)=0\\ c_1(\overline{s}_3,\overline{r}_1)-c_2(\overline{s}_2,\overline{r}_3)+0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1=(\overline{s}_2,\overline{r}_3)\\ c_2=(\overline{s}_3,\overline{r}_1)\\ c_3=(\overline{s}_1,\overline{r}_2)\end{cases}\quad\begin{cases}\lambda_0^2+\lambda^2=1 & (1)\\ (\overline{r}_k,\overline{\lambda})=0 & (2)\\ \lambda_0\overline{r}_k+[\overline{s}_k,\overline{\lambda}]=0 & (3)\end{cases}$$

$$(3)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_0\overline{r}_1+[\overline{s}_1,\alpha[\overline{r}_1,\overline{r}_2]]=0\\ \lambda_0\overline{r}_2+[\overline{s}_2,\alpha[\overline{r}_1,\overline{r}_2]]=0\\ \lambda_0\overline{r}_3+[\overline{s}_3,\alpha[\overline{r}_1,\overline{r}_2]]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_0\overline{r}_1+\alpha\overline{r}_1(\overline{s}_1,\overline{r}_1)-0=0\\ \lambda_0\overline{r}_2+0-\alpha\overline{r}_2(\overline{s}_2,\overline{r}_1)=0\\ \lambda_0\overline{r}_3+\alpha r_1(\overline{s}_3,\overline{r}_2)-\alpha r_2(\overline{s}_3,\overline{r}_1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_0\overline{r}_1+\alpha\overline{r}_1(\overline{s}_1,\overline{r}_2)=0\\ \lambda_0\overline{r}_2+\alpha\overline{r}_2(\overline{s}_1,\overline{r}_2)=0\\ \lambda_0\overline{r}_3+\alpha\overline{r}_3(\overline{s}_1,\overline{r}_2)=0\end{cases}\qquad \lambda_0=-\alpha(\overline{s}_1,\overline{r}_2)=\alpha(\overline{s}_2,\overline{r}_1)$$

$$(1)\Rightarrow\alpha^2((\overline{s}_2,\overline{r}_1)^2+[\overline{r}_1,\overline{e}_2]^2)^2=1\Rightarrow\qquad \alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{(\overline{s}_2,\overline{r}_1)^2+[\overline{r}_1,\overline{r}_2]^2}}$$

$$\Lambda=\pm\frac{(\overline{s}_2,\overline{r}_1)+[\overline{r}_1,\overline{r}_2]}{\sqrt{(\overline{s}_2,\overline{r}_1)^2+[\overline{r}_1,\overline{r}_2]^2}}$$

■

Определение.

$$f(M)=\Lambda\circ M\circ\overline{\Lambda};\quad M\to f(M),\quad \|\,\Lambda\,\|=1-\text{ *присоединенное преобразование*}$$

Утверждение 11. *Присоединенное преобразование не меняет скалярные части кватернионов и модуль векторной части*

Доказательство.

1. $f(M)=\Lambda\circ(\mu_0+\overline{\mu})\circ\overline{\Lambda}=\Lambda\circ\mu_0\circ\overline{\Lambda}+\Lambda\circ\overline{\mu}\circ\Lambda=\mu_0\|\,\Lambda\,\|+f(\overline{\mu})=\mu_0+\overline{\mu}'$
2. $\mu_0^2+\overline{\mu}^2=\|\,M\,\|=\|\,\Lambda\circ M\circ\overline{\Lambda}\,\|=\|\,f(M)\,\|=\mu_0^2+\overline{\mu}'^2\Rightarrow\mu^2=\overline{\mu}'^2$

■

Следствие. *Всегда существует присоединенное преобразование, переводящее орты неподвижного базиса в орты базиса, связанного с телом.*

Доказательство.

$$\overline{e}_i'=\Lambda\circ\overline{e}_i\circ\overline{\Lambda}=f(\overline{e}_i)\tag{4}$$

$$\overline{r}=\sum_{k=1}^{3}r_k\overline{e}_k,\quad f(r)=\Lambda\circ\sum r_k\overline{e}_k\overline{\Lambda}=\sum_k r_kf(\overline{e}_k)=\sum_k=r_k\overline{e}_k=\overline{r}'\tag{5}$$

(6)

■

$$\boxed{\overline{r}'=\Lambda\circ\overline{r}\circ\overline{\Lambda}}\tag{7}$$

Следствие. *При повороте твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива (7), где $\overline{r}$ – начальное положение точки, $\overline{r}'$ – ее положение после поворота, а Λ – кватернион соответствующего преобразования.*

Теорема 11. *Преобразование, заданное кватернионом $\Lambda = \cos\nu + \overline{e}\sin\nu$ соответствует повороту пространства вокруг вектора $\overline{e}$ на угол 2ν*

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned}
&\Lambda = \lambda_0 + \overline{\lambda} \\
&\overline{\lambda}' = f(\overline{\lambda}) = \Lambda \circ \overline{\lambda} \circ \overline{\Lambda} = (\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ \overline{\lambda} \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda_0 + \overline{\lambda}) \circ (-\lambda^2 + \lambda_0\overline{\lambda}) = -\lambda_0\overline{\lambda}^2 - \lambda_0\overline{\lambda}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_0^2\overline{\lambda} = \\
&= \overline{\lambda}(\lambda_0^2 + \overline{\lambda}^2) \Rightarrow \overline{\lambda} \text{ — неподвижная ось} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \overline{e} = \frac{\overline{\lambda}}{\sin\nu} \text{ — ось поворота} \\
&\overline{a} \in \pi \perp \overline{e} \\
&\overline{a}' = f(\overline{a}) = (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ \overline{a} \circ (\cos\nu - \overline{e}\sin\nu) = \\
&= (\cos\nu + \overline{e}\sin\nu) \circ ([\overline{a}, \overline{e}] \cdot \sin\nu + \cos\nu\overline{a} - \sin\nu[\overline{a}, \overline{e}]) = \\
&\cos^2\nu\overline{a} + \cos\nu\sin\nu(\overline{a}, \overline{e}) + \cos\nu\sin\nu = \ldots
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\overline{a}' = ((\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \overline{a}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) = \\
&= (\overline{a}\cos\frac{\varphi}{2} + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\frac{\varphi}{2}) \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) = \\
&= \overline{a}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e}, \overline{a}]\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \overline{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \\
&= \overline{a}\cos\varphi + [\overline{e}, \overline{a}]\sin\varphi
\end{aligned}$$

$$|\overline{a}'| = |\overline{a}|$$

■

Следствие.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \lambda_0 + \lambda_1\overline{e}_1' + \lambda_2\overline{e}_2' + \lambda_3\overline{e}_3'$$

Определение.

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \text{ — \textit{Параметры Родрига-Гамильтона}}$$

Следствие (Теорема Эйлера о конечном повороте)**.** *Любые два положения твердого тела с неподвижной точкой могут быть получены одно из другого одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку на некоторый угол*

Доказательство.

1.

$$\forall E, E' \quad \exists \Lambda:\ E \to E'$$

2.

$$\forall \Lambda \overline{r} \to \overline{r}' \Leftrightarrow \text{Поворот вокруг } e \text{ на } \varphi$$

■

$E \xrightarrow{\Lambda_1} E' \xrightarrow{\Lambda_2} E'',\ E \xrightarrow{\Lambda}$

$\overline{r}' = \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda},\ \overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \overline{r}' \circ \overline{\Lambda}$

$\overline{r}'' = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}_2 = \Lambda \circ \overline{r} \circ \overline{\Lambda}, \quad \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1} \text{ — формула сложения поворотов}$$

$\Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'' = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k'$

$\Lambda_2^* = \lambda_0^{(2)} + \sum\limits_{k=1}^{3} \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k$ — собственный к Λ_2 кватернион

$\overline{e}_k' = \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \Lambda_1 \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}_1 =$

$= \Lambda_1 \circ (\lambda_0^{(2)} + \sum \lambda_k^{(2)} \overline{e}_k) \circ \overline{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ \overline{\Lambda}_1$

$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^* \circ (\overline{\Lambda}_1 \circ \Lambda_1) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_1$

$$\boxed{\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^*}$$

— формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона

7 Кинематика твердого тела в кватернионном описании

Теорема 12. *Угловая скорость твердого тела определяется равенством:*

$$\overline{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$

где Λ - кватернион, задающий положение твердого тела относительно неподвижного базиса

Доказательство.

1.

$$B = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}$$
$$B + \overline{B} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \overline{\left(\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda}\right)} = \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$
$$= \frac{d}{dt}(\Lambda \circ \overline{\Lambda}) = \frac{d}{dt}(\| \Lambda \|) = 0 \Rightarrow B = -\overline{B}$$

2.

$$\dot{\overline{e}}_k' = [\overline{\omega}, \overline{e}_k]$$
$$\overline{e}_k' = \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \overline{\Lambda}, \quad \overline{e}_k = \overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda$$
$$\dot{\overline{e}}_k' = \dot{\Lambda} \circ \overline{e}_k \circ \Lambda + \Lambda \circ \overline{e}_k \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$
$$\dot{\Lambda} \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda) \circ \overline{\Lambda} + \Lambda \circ (\overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' \circ \Lambda) \circ \dot{\overline{\Lambda}} =$$
$$= \dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} \circ \overline{e}_k' + \overline{e}_k' \circ \Lambda \circ \dot{\overline{\Lambda}} = B \circ \overline{e}_k' + \overline{e}_k' \circ \overline{B} =$$
$$[2\overline{B}, \overline{e}_k] \Rightarrow 2\overline{B} = \overline{\omega}$$

■

Пример.

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{\omega} = 2(-\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\dot{\varphi}}{2})\circ(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}) =$$
$$= \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + \overline{e}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} +$$
$$+ \overline{e}\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot{\varphi} + 2\dot{\overline{e}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2[\overline{e},\dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2} = \overline{e}\dot{\varphi} + \dot{\overline{e}}\sin\varphi + 2[\overline{e},\dot{\overline{e}}]\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Замечание.

1.
$$\overline{\omega} = \overline{e}\dot{\varphi} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \dot{\overline{e}} = 0\end{array}\right.$$

2.
$$\varphi \ll 1.\ \ \overline{\omega} \approx \overline{e}\varphi + \dot{\overline{e}}\varphi = \frac{d}{dt}(\overline{e}\varphi)$$

3.
$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{e}\Delta\varphi}{\Delta t},\quad E(t)\xrightarrow{\Delta\Lambda}E(t+\delta t),\ \ \Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta\overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Уравнение Пуассона

$$\omega = 2\dot{\Lambda}\circ\overline{\Lambda}$$

$$\boxed{\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\Lambda}\ \text{— кинематическое уравнение Пуассона} \tag{8}$$

$$\omega = p\overline{e}_1' + q\overline{e}_2' + r\overline{e}_3',\quad \overline{\omega}^* = p\overline{e}_1 + q\overline{e}_2 + r\overline{e}_3$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\circ\overline{\omega}^* \tag{9}$$

7.1 Интегрирование уравнения Пуассона

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, t) \tag{10}$$

Определение. *Функция $\Phi(\overline{x}, t)$ называется первым интегралом системы (10), если*

$$\Phi(\overline{x}(t), t) = const$$

где $\overline{x}(t)$ — решение системы (10)

Утверждение 12. *Система (8) имеет первый интеграл вида*

$$\|\ \Lambda\ \| = const$$

Доказательство.
$$\frac{d}{dt}(\|\ \Lambda\ \|) = \frac{d}{dt}(\Lambda\circ\overline{\Lambda}) = \dot{\Lambda}\circ\overline{\Lambda} + \Lambda\circ\dot{\overline{\Lambda}} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda\circ\overline{\Lambda}\ldots$$

■

Утверждение 13. *Общее решение системы (8) имеет вид:*

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t)\cdot C$$

где Λ' - частное решение, $C = const$.

Доказательство. Λ, Λ' - Нетривиальные решения (8)

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda,\quad \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda'$$

$$M = (\Lambda')^{-1}\circ\Lambda,\quad \Lambda = \Lambda'\circ M$$

$$(9)\Rightarrow\begin{cases}\dot{\Lambda}'\circ M + \Lambda'\circ\dot{M} = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda'\circ M\\ \dot{\Lambda}' = \frac{1}{2}\overline{\omega}\circ\Lambda'\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Lambda'\circ\dot{M} = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = 0 \Leftrightarrow M = C = const$$

■

Следствие.

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{\omega} \circ \Lambda, \quad \Lambda(\varphi) = 1 \tag{11}$$

Случай 1. Вращение вокруг неподвижной оси $\overline{\omega} = \overline{e}\omega$, $\overline{e} = const$:

$$(11) \Rightarrow \Lambda \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$$

Случай 2. Регулярная прецессия:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

$$\Lambda_z = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z \sin\frac{\varphi}{2}, \psi = \int\limits_0^t \omega_1(\tau)d\tau$$

$$\Lambda_\zeta = \cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_\zeta \sin\frac{\varphi}{2}, \varphi = \int\limits_0^t \omega_2(\tau)d\tau$$

1 способ:
$O\zeta$ — ось тела (подвижная)

$$\Lambda_1 = \Lambda_z, \quad \Lambda_2 = \Lambda_\zeta$$

$Oxyz$ — неподвижный базис, $Oxz = O\nu\zeta(0)$

$\Lambda_2^* = \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{e}_\xi(0)\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} + (\sin\Theta\overline{e}_x + \cos\Theta\overline{e}_z)\sin\frac{\varphi}{2}$

$\Lambda = (\cos\frac{\psi}{2} + \overline{e}_z\sin\frac{\psi}{2}) \circ \Lambda_2 = \dots$

2 способ:
$O\zeta$ — неподвижна (ось тела в начальный момент времени)

$$\Lambda_1 = \Lambda_\zeta, \quad \Lambda_2 = \Lambda_z$$

---

8 Динамика

Принцип детерминированности Ньютона

$$\overline{r}_i(t) = \varphi_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t) \;\; \forall t_0$$

$$\ddot{\overline{r}}_i(t) = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = f_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t_0, t)$$

$$\overline{r}_i(t_0) = f_i(\dots, t) \;\; \forall t_0$$

$$\ddot{\overline{r}}_i(t_0) = f_i(\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t) \;\; \forall t_0 \tag{12}$$

Пример. $f = 0 \Rightarrow \ddot{\overline{r}} = 0, \; \overline{r} = \overline{r}_0 + \dot{\overline{r}}_0(t - t_0)$
(Закон инерции Галилео-Ньютона); если m_i - масса точки $\overline{r}_i$

$$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i; \quad \overline{F}_i = m_i\overline{f}_i \text{ — сила}$$

Преобразование Галилея

$\overline{r} \to r^* = \underbrace{A\overline{r}}_{\text{Ортог. пр.}} + \overline{v}_0 t + \overline{r}_0, \quad t^* = t + t_0$

$A = const, \quad \overline{v}_0 = const, \quad \overline{r}_0 = const$

Принцип относительности Галилея

$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{F}_i(\overline{r}_1, \dots \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_1, \dots, \dot{\overline{r}}_N, t)$
$m_i\ddot{\overline{r}}_i^* = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$
$\dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt^*} = \dfrac{d\overline{r}_i^*}{dt} \cdot 1$
$\ddot{\overline{r}}_i^* = A\ddot{\overline{r}} \Rightarrow \overline{F}_i^* = A\overline{F}_i$

Принцип относительности:

$$\overline{F}_i^*(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*) = \overline{F}_i(\overline{r}_1^*, \dots \overline{r}_N^*, \dot{\overline{r}}_1^*, \dots, \dot{\overline{r}}_N^*, t^*)$$

Пример. $n = 1$:
$\overline{F} = A\overline{F}, \quad \forall A \Leftrightarrow \overline{F} = 0$

Пример. $r^* = \overline{r}, \quad t^* = t - t_0, \quad t = t_0 \Rightarrow \overline{F}_i(\dots, t) = \overline{F}_i(\dots, 0)$

Закон равенства действия и противодействия

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} \parallel \overline{r}_j - \overline{r}_i$$

Принцип суперпозиции

$\overline{F}_i = \sum\limits_{i \neq j} \overline{F}_{ij}$ (Для замкнутых систем)
$\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$
$\overline{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила
$\overline{F}_i^{(i)}$ — внутренняя сила
Система неинерциальная
$\overline{w}_i^{\text{абс}} = \overline{w}_i^{\text{отн}} + \overline{w}_i^{\text{пер}} + \overline{w}_i^{\text{кор}}$
$m_i\ddot{\overline{\rho}}_i = \overline{F}_i + \overline{F}_i^{\text{отн}} + \overline{F}_i^{\text{пер}}$
$\overline{w}_i^{\text{отн}} = \ddot{\overline{\rho}}_i$; $\overline{F}_i^{\text{отн}} = -m_i\overline{w}_i^{\text{отн}}$; $\overline{F}_i^{\text{пер}} = -m_i(\overline{w}_0 + [\overline{\varepsilon}, \overline{\rho}] + [\overline{\omega}, [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]])$

Определение. $\overline{M}_O = [\overline{r}, \overline{F}]$ — *момент силы* $\overline{F}$ *относительно* O

Определение. $M_l = (\overline{M}_O, \overline{l})$ — *момент силы* $\overline{F}$ *относительно оси* $\overline{l}$

Утверждение 14. M_l *не зависит от выбора точки* O.

Доказательство.

$$M_l = (\overline{M}_O, \overline{l}) = ([\overline{r}, \overline{F}], \overline{l}) = ([\overline{r}' + \overline{O'O}, \overline{F}], \overline{l}) =$$
$$= ([\overline{r}', \overline{F}], \overline{l}) + (\underbrace{[\lambda\overline{l}, \overline{F}]}_{0}, \overline{l}) \Rightarrow M_l = (\overline{M}_O, \overline{l})$$

∎

Определение. $(\overline{F}, d\overline{r})$ — *элементарная работа* (dA, $d'A$, δA, $A_{эл}$)

8.1 Стационарные силы

$F = \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}$ — стационарная сила
$W = (\overline{F}, \overline{v}) \leqslant 0, \ \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}})$ — диссипативная сила

Пример.

- $\overline{F} = -kN\frac{\dot{\overline{r}}}{|\dot{\overline{r}}|}$ — *сухое трение*
- $\overline{F} = -\beta\dot{\overline{r}}$ — *вязкое трение*

$W = (\overline{F}, \overline{v}) \equiv 0, \quad \overline{F}$ — гироскопическая сила

Пример. $\overline{F}^{\text{кор}} = -m\overline{w}^{\text{кор}} = -2m[\overline{\omega}, \overline{v}]$
$(\overline{F}^{\text{кор}}, \overline{v}) = -2m([\overline{\omega}, \overline{v}], \overline{v}) = 0$

8.2 Позиционные силы

$\overline{F} = \overline{F}(r, t)$ — позиционная сила (силовое поле)

Определение. $\overline{F}(\overline{r}, t)$ — *потенциальная сила.*

$$\exists u(\overline{r}, t): \quad \overline{F} = \operatorname{grad}_r u$$

u — *силовая функция,* $\Pi = -u$ — *потенциальная энергия.*

Пример. $F = F(x,t)\overline{e}_x = \frac{\partial u}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{e}_y$
$U = \int F(x,t)dx$

Определение. *Потенциальная сила* $\overline{F}(\overline{r})$ *- консервативная.*

Пример. $F = -\frac{\gamma m}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$ — *консервативная, т.к.*
$U = \int (\overline{F}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3}(\overline{r}, d\overline{r}) = -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\left(\frac{(\overline{r},\overline{r})}{2}\right) =$
$= -\int \frac{\gamma m}{r^3} d\frac{r^2}{2} = -\int \frac{\gamma m}{r^2} dr = \frac{\gamma m}{r}; \quad n = -\frac{\gamma m}{r}$
$U = \int (\overline{F}, d\overline{r})$

8.2.1 Критерий потенциальности

Утверждение 15.

$$\overline{F}(\overline{r}) = F_x\overline{e}_x + F_y\overline{e}_y + F_z\overline{e}_z \text{ — \textit{потенциальная}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$
$u \in c^2$
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\Leftarrow$
$$u = \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(\xi, y, z)d\xi + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, \eta, z)d\eta + \int\limits_{\overline{r}_0}^{\overline{r}} F_x(x_0, y_0, \zeta)d\zeta$$

■

Следствие. $F(\overline{r})$ — *потенциальная сила* $\Leftrightarrow \oint\limits_C (\overline{F}, d\overline{r}) = 0, \quad \forall C$

Доказательство.

$$\oint\limits_{C=\delta W} (\overline{F}, d\overline{r}) = -\int\limits_W (\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x})dxdy + \ldots = 0$$

■

Система точек $\overline{F}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}$.

$$F_i^{(i)} = \sum_{j\neq i} \overline{F}_i j;\ \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji} = F_{ij}(|\overline{r}_i - \overline{r}_j|)\frac{\overline{r}_j - \overline{r}_i}{|\overline{r}_j - \overline{r}_i|}$$

8.3 Свойства внутренних сил

1.
$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{(i)} = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i} \overline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i} \overline{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_{ij} - \overline{F}_{ji}) = 0$$

■

2.
$$\sum_{i=1}^{N} [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(i)}] = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}[\overline{r}_i, \overline{F}_{ij}] + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}[\overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}[\overline{r}_i - \overline{r}_j, \overline{F}_{ij}] = 0$$

■

3. Внутренние силы потенциальны, т.е.

$$\exists u(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n) :\ \overline{F}_i^{(i)} = grad_{\overline{r}_i} u$$

Доказательство.

$$u_i j(|\overline{r}|) = \int_0^{|\overline{r}|} F_{ij}(\overline{\rho})d\rho$$

$$u = \sum_{i,i<j} u_{ij} \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,i<j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \overline{r}_i} = \sum \frac{\partial u_{ij}}{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|} \cdot \frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial \overline{r}_i}$$

$$|\overline{r}_i - \overline{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_j)}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|} \quad \text{Аналогично для } y_i \text{ и } z_i$$

$$\frac{\partial |\overline{r}_i - \overline{r}_j|}{\partial r_i} = \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{r}_i} = \sum_{i,j,\ i<j} F_{ij}(\overline{r}_i - \overline{r}_j) \cdot \frac{\overline{r}_i - \overline{r}_j}{|\overline{r}_i - \overline{r}_j|} = \overline{F}_i^{(i)}$$

■

4. Работа внутренних сил в тердом теле равна нулю.

Доказательство.

$$\sum(\overline{F}_i^{(i)}, v_i) = \sum(\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_s + [\overline{\omega}, \overline{\rho}_i]) =$$
$$= \left(\underbrace{\sum \overline{F}_i^{(i)}}_{0}, \overline{v}_s\right) + \left(\overline{\omega}, \underbrace{\sum [\overline{\rho}_i, \overline{F}_i^{(i)}]}_{0}\right) = 0$$

■

---

9 Основные теоремы динамики

9.1 Основные динамические величины

Определение. $\overline{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \overline{v}_i$ *— импульс.* $\overline{K}_O = \sum\limits_{i=1}^{N} [\overline{r}_i, m_i \overline{v}_i]$ *— кинематический момент относительно точки* O. $K_l = (\overline{K}_0, \overline{e}_l)$ *— кинематический момент относительно оси* l.

Замечание. $O \in l$, $\overline{e}_l \parallel \overline{l}$; K_l *не зависит от точки* O.

Определение. $T = \frac{1}{2} = \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\overline{v}_i, \overline{v}_i)$ *— кинетическая энергия.*

Определение. S *— центр масс системы:*

$$\overline{r}_S = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{m}$$

$$\overline{P} = \sum m_i \frac{d\overline{r}_i}{d\tau} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \overline{r}_i\right) = \frac{d}{dt}(m\overline{r}_S) = m\overline{v}_S$$
$$\boxed{\overline{P} = m\overline{v}_S}$$

Определение. *Осями Кенига называется система отсчета с началом в центра масс системы и осями, параллельными неподвижным. (Движется поступательно вместе с центром масс)*

$$\overline{r}_i = \overline{R} + \overline{\rho}_i$$

Определение.

$$\overline{K}_{\textit{кен}} = \sum [\overline{\rho}_i, m\dot{\overline{\rho}}_i]$$

$$T_{\text{кен}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\rho}_i^2$$

Теорема 13 (Формулы Кенига)**.**

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \overline{K}_{\textit{кен}}$$
$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\textit{кен}}$$

Доказательство.

$$\overline{K}_0 = \sum [\overline{R} + \overline{\rho}, m_i \dot{\overline{R}} + m_i \dot{\overline{\rho}}_i] = \left[\overline{R}, \left(\sum m_i\right) \dot{\overline{R}}\right] + \left[\overline{R}, \sum m_i \dot{\overline{\rho}}_i\right] +$$
$$+ \left[\sum m_i \overline{\rho}_i, \dot{\overline{\rho}}_i \overline{R}\right] + \sum [\overline{\rho}_i m_i \dot{\overline{\rho}}_i] = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \overline{K}_{\text{кен}}$$
$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\overline{R}}_i + \dot{\overline{\rho}}_i, \dot{\overline{R}}_i + \dot{\overline{\rho}}_i) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) \dot{\overline{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\overline{\rho}}_i^2 +$$
$$+ \underbrace{\sum m_i (\overline{R}, \overline{\rho})}_{0} = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кен}}$$

■

Теорема 14 (Об изменении импульса).

$$\dot{\overline{P}} = \sum \overline{F}_i^{(e)} = \overline{F}$$

Доказательство.

$$\dot{\overline{P}}_i = \frac{d}{dt}\sum m_i\overline{v}_i = \sum m_i\overline{w}_i = \sum \overline{F}_i^{(e)} + \underbrace{\sum \overline{F}_i^{(i)}}_{0} = \overline{F}$$

■

Теорема 15 (Формула движения центра масс).

$$m\overline{w}_S = \overline{F}$$

Следствие.

$$\overline{F} = 0 \Rightarrow \overline{w}_S = 0 \Rightarrow \overline{v}_S = \overline{v}_0 = const \Rightarrow \overline{r}_S = \overline{v}_0(t - t_0) + \overline{r}_0$$

Следствие.

$$(\overline{F}, \overline{e}_x) = 0 \Rightarrow (\dot{\overline{P}}, \overline{e}_x) = 0 \Rightarrow \overline{v}_x = const$$

Теорема 16 (Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного полюса).

$$\dot{\overline{K}}_O = \sum [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)}] = \overline{M}_O$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\overline{K}_O = \frac{d}{dt}\left(\sum [\overline{r}_i, m_i\overline{v}_i]\right) = \sum \left[\frac{d\overline{r}_i}{dt}, m_i\overline{v}_i\right] + \sum [\overline{r}_i, m_i\dot{\overline{v}}_i] =$$
$$= \sum [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)}] + \sum [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(i)}] = \overline{M}_O$$

■

Следствие.

$$\overline{M}_O = 0 \Rightarrow \overline{K}_O = const$$

Следствие.

$$M_l = (\overline{M}_O, \overline{e}_l) = 0, \quad \overline{e}_l = const \Rightarrow K_l = const$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}K_l = \frac{d}{dt}(\overline{K}_O, \overline{e}_l) = \left(\frac{d\overline{K}_O}{dt}, \overline{e}_l\right) + 0 = (\overline{M}_O, \overline{e}_l) = M_l$$

■

Следствие.

$$\dot{K}_l = M_l$$

Формула преобразования кинетического момента при смене полюса

$$\overline{K}_B = \overline{K}_A + [\overline{P}, \overline{AB}]$$

Доказательство.

$$\overline{K}_B = \sum [\overline{BA} + \overline{\rho}_i, m_i\overline{v}_i] = [\overline{BA}, m_i\overline{v}_i] + \overline{K}_A = \overline{K}_A + [\overline{P}, \overline{AB}]$$

■

Формула преобразования момента сил при смене полюса

$$\overline{M}_B = \overline{M}_A + [\overline{F}, \overline{AB}]$$

Доказательство. Аналогично. ■

Теорема 17.

$$\dot{\overline{K}}_A = \overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$$

Доказательство.

$\overline{K}_A = \overline{K}_O + [\overline{P}, \overline{r}_A], \quad (\overline{v}_0 \equiv 0)$
$\dot{\overline{K}}_A = \dot{\overline{K}}_O + [\dot{\overline{P}}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \dot{\overline{r}}_A] = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{r}_A] + [\overline{P}, \overline{v}_A] =$
$\overline{M}_A + [\overline{P}, \overline{v}_A]$

■

Следствие (Первая теорема Кенига)**.**

$$\dot{\overline{K}}_{кен} = \overline{M}_S$$

Доказательство.

$$\overline{K}_{\text{кен}} = \overline{K}_S; \quad \dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S + [\overline{P}, \overline{v}_S] = \overline{M}_S + [m\overline{v}_S, \overline{v}_S] = \overline{M}_S$$

■

Теорема 18 (Об изменении кинетической энергии)**.**

$$\dot{T} = \sum(\overline{F}_u(e), \overline{v}_i) + \sum(\overline{F}_i^{(i)}, \overline{v}_i)$$

Доказательство.

$T = \dfrac{1}{2}\sum m_i(\overline{v}_i, \overline{v}_i)$
$\dot{T} = \sum(\overline{v}_i, m\dot{\overline{v}}_i) = \sum(\overline{v}_i, m\overline{w}_i) = \sum(\overline{v}_i, \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)})$

■

$$dT = \sum(\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) + \sum(\overline{F}_i^{(i)}, d\overline{r}_i)$$

Утверждение 16 (Вторая теорема Кенига)**.**

$$\dot{\overline{T}}_{кен} = \sum(\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$$

Доказательство.

$\dot{T}_{\text{кен}} = \dot{T} - (m\dot{\overline{v}}_S, \overline{v}_S) = \sum(\overline{F}_i, \overline{v}_i) - \sum(\overline{F}_i, \overline{v}_S)$
$\dot{\overline{\rho}}_i = \overline{v}_i^{\text{отн}} = \overline{v}_i^{\text{абс}} - \overline{v}_i^{\text{пер}} = \overline{v}_i - \overline{v}_S$
$\dot{T}_{\text{кен}} = \left(\overline{F}_i, \overline{v}_i - \overline{v}_S\right) = \sum(\overline{F}_i, \dot{\overline{\rho}}_i)$

■

Пусть $\overline{r}_i^{(e)} = -grad_{\overline{r}_i}\Pi(\overline{r}_i, \ldots, \overline{r}_N)$ (внешние силы консервативны).

$$\sum(\overline{F}_i^{(e)}, d\overline{r}_i) = -\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{r}_i}, d\overline{r}_i\right) = -d\Pi$$

$$dT = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = const$$

Теорема 19 (Закон сохранения полной механической энергии)**.** *Если все внешние силы, действующие на систему консервативны, то полная энергия системы сохраняется.*

9.2 Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета

$$m_i\overline{w}_i = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)} + \overline{F}_i^{(\text{пер})} + \overline{F}_i^{(\text{кор})}$$

$$\dot{\overline{P}} = \overline{F} + \overline{F}^{\text{пер}} + \overline{F}^{\text{кор}}$$

$$\overline{F}^{\text{пер}} = \sum \overline{F}^{\text{пер}} = -\sum m_i w_i^{\text{пер}}; \quad \overline{F}^{\text{кор}} = \sum \overline{F}_i^{\text{кор}} = -\sum m_i \cdot 2 \cdot [\overline{w}_{\text{кор}}, \overline{v}_i]$$

$$\dot{\overline{K}}_0 = \overline{M}_O + \overline{M}_O^{\text{пер}} + \overline{M}_O^{\text{кор}}$$

$$\overline{M}_O^{\text{кор}} = \sum [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{\text{пер}}]; \quad \overline{M}_O^{\text{кор}} = \sum [\overline{r}_i, \overline{F}_i^{\text{кор}}]$$

$$\dot{T} = \sum (F_i, \overline{v}_i) + \sum (\overline{F}_i^{\text{пер}}, \overline{v}_i) + 0$$

$$\sum (\overline{F}_i^{\text{кор}}, \overline{v}_i) = \sum (-2m_i[\overline{\omega}_{\text{пер}}, v_i], \overline{v}_i) = 0$$

Пример (Система отсчета Кенига)**.**

$\dot{\overline{K}}_S = \dot{\overline{K}}_{\text{кен}} = \overline{M}_S;$

$\dot{T}_S = \sum (\overline{F}_i, \overline{v}_i); \qquad \dot{\overline{P}} = \overline{F} - \sum m_i \overline{w}_S = \overline{F} - m\overline{w}_S$

---

10 Движение в центральном поле

10.1 Законы сохранения

В центральном поле

$$m\ddot{\overline{r}} = \overline{F}, \quad \overline{F} = F(r)\frac{\overline{r}}{r}$$

Закон сохранения энергии:

$$\Pi = -\int F(r)dr, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow T + \Pi = h = const$$

Закон сохранения кинетического момента:

$$\overline{M}_O = \left[\overline{r}, F(r)\frac{\overline{r}}{r}\right] = 0 \Rightarrow \dot{\overline{k}}_O = 0 \Rightarrow \overline{k}_O = [\overline{r}, \overline{mv}] = \overline{k} = const$$

Следствие. *Траектория точки в центральном поле всегда является плоской кривой.*

Доказательство.

$$[\overline{r}, m\overline{v}] = \overline{k} \perp \alpha \Rightarrow \overline{r} \in \alpha \quad \forall t,\, \alpha = const$$

■

Следствие.

$$r^2\dot{\varphi} = c = const$$

Доказательство.

$$|\overline{k}| = |[\overline{r}, m\overline{v}]| = |[r\overline{e}_r,\, m(\dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\varphi}\overline{e}_\varphi)]| = mr^2|\dot{\varphi}||\overline{e}_z| = const \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = const$$

■

Геометрический смысл

$S = \iint dS = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} r dr = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$

$\dot{S} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{r^2}{2}\varphi = \frac{c}{2} = const$

$\sigma = \dot{s} = \frac{c}{2}$ — секториальная скорость

10.2 Формулы Бине

Теорема 20 (Формулы Бине)**.** *При движении точки в центральном поле справедливы следующие равенства:*

$$v^2 = c^2\left(\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

Доказательство.

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$$

$$\overline{w} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\overline{e}^r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\overline{e}_\varphi$$

$$m\overline{w} = F\overline{e}_r \quad \begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi) = F \\ r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi} \quad \dot\varphi = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{d\varphi}\dot\varphi = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$v^2 = c^2\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + r^2\frac{c^2}{r^4} = c^2\left(\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

■

Определим траекторию.

$$T + \Pi = h, \quad T = \frac{m}{2}v^2$$

$$\frac{mc^2}{2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \underbrace{\frac{mc^2}{2r^2} + \Pi(r)}_{\Pi_c(r)} = h$$

$$\pm\sqrt{\frac{mc^2}{2}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \sqrt{h - \Pi_c(r)}$$

Замена: $\dfrac{1}{r} = u \quad \pm\sqrt{\dfrac{mc^2}{2}}\displaystyle\int\limits_{1/r_0}^{1/r}\frac{du}{\sqrt{h - \Pi_c(u)}} = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow r(\varphi)$

$$\dot\varphi = \frac{c}{r^2(\varphi)} \Rightarrow \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi)d\varphi = \int\limits_{t_0}^{t} cdt = c(t - t_0)$$

10.3 Движение точки в центральном гравитационном поле

$$F = -\gamma\frac{mM}{r^2}, \quad \Pi(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{mc^2}{2}}\int\frac{du}{\sqrt{h - m\frac{c^2}{2u^2} + \gamma mMu}} = \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} - u^2 + \frac{2\gamma M}{c^2}u}} =$$

$$= \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M^2}{c^4} - \left(u - \frac{\gamma M}{c^2}\right)^2}} = \pm\arccos\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{c^2}}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M^2}{c^4}}} + \varphi_0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{c^2} + \sqrt{\frac{2h}{mc^2} + \frac{\gamma^2M}{c^4}}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\frac{c^2}{\gamma m} = p, \quad \sqrt{\frac{2h}{mc^2}p^2 + 1} = e \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

То есть φ_0 зависит от c и h.

Замечание. $\varphi_0 = 0 \quad (\varphi' = \varphi - \varphi_0)$

Утверждение 17. *Траектория точки в центральном гравитационном поле является коническим сечением.*

- $e = 0$: $\left(h^* := h = -\frac{mc^2}{2p^2} = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2}\right)$ — *окружность.*
- $0 < e < 1$: $(h^* < h < 0)$ — *эллипс.*
- $e = 1$: $(h = 0)$ — *парабола.*
- $e > 1$: $(h > 0)$ — *гипербола.*

Пример (Первая космическая скорость)**.**

$v_1 = ?$

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R} = -\frac{m\gamma^2M^2}{2c^2} = -\frac{m\gamma^2M^2}{2R^2v_1^2}$$

$c = R^2\dot{\varphi} = Rv_1$ *(окружность)*

$$v_1^2 - \frac{2\gamma M}{R} + \frac{\gamma^2M^2}{R^2v_1^2} = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{\gamma M}{Rv_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

Пример (Вторая космическая скорость)**.**

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = 0 \Rightarrow v_2^2 = \frac{2\gamma M}{R}$$

Теорема 21 (Законы Кеплера)**.**

1. *Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце.*
2. *Радиус-вектор планеты заметает равные площади за равные промежутки времени.*
3. $\frac{T^2}{a^3} = const$ *(где a —большая полуось эллипса) для планет из одной системы.*

Доказательство.

$$\dot{s} = \frac{c}{2}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{c}$$

$a = ?$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \quad b^2 = (1 - e^2)a^2$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{pa^2}{b^2} \Rightarrow b^2 = pa$$

Тогда $T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2a^2pa}{c^2} = \frac{4\pi^2a^3c^2}{c^2\gamma M} = \frac{4\pi^2a^3}{\gamma M} \Rightarrow$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = const$$

■

10.4 Задача двух тел

$\overline{F}_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\overline{r}_1 - \overline{r}_2|^3}(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)$

$\overline{F}_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\overline{r}_1 - \overline{r}_2|^3}(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)$

Теорема о движении центра масс: $(m_1 + m_2)\ddot{\overline{r}}_S = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Система Кенига — инерциальная система отсчета($\overline{F}^{(e)} = 0$)

$\overline{\rho}_1 = \overline{r}_1 - \overline{r}_S = \overline{r}_1 - \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m}(\overline{r}_1 - \overline{r}_2)$

$\overline{\rho}_2 = \frac{m_1}{m}(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)$

Тогда второй закон Ньютона в системе Кенига имеет вид:

$m_1\ddot{\overline{\rho}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{m^3\rho_1^3/m_2^3}\frac{m\overline{\rho}_1}{m_2} = -\frac{\gamma m_1 m_2^3}{m^2\rho_1^3}\overline{\rho}_1 = -\gamma_1\frac{m_1 m}{\rho_1^3}\overline{\rho}_1$, где $\gamma_1 = \frac{\gamma m_2^3}{m^3}$

$m_2\ddot{\overline{\rho}}_2 = -\gamma_2\frac{m_2 m}{\rho_2^3}\overline{\rho}_2$, где $\gamma_2 = \frac{\gamma m_1^3}{m^3}$

Уточнение законов Кеплера

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится центр масс системы.
2. Сохраняется.
3. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{\gamma_{1,2}m}$ — зависит от m_1 (m_2). Т.е. $\frac{T_1^2}{a_1^3} \neq \frac{T_2^2}{a_2^3}$ при $m_1 \neq m_2$, но если $m_1 \gg m_2$, тогда $\frac{m_2}{m_1+m_2} \ll 1 \Rightarrow$ $|\overline{\rho}_1| \ll 1$, значит $\gamma_1 \ll \gamma$, $\gamma_2 \approx \gamma$

---

11 Динамика твердого тела

Определение. *Моментом инерции твердого тела относительно оси называется сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояния до этой оси:*

$$J_l = \sum m_i d_i^2, \quad d_i = dist(\overline{r}_i, l); \qquad \left(J_l = \int\limits_W d^2 dm\right) \tag{13}$$

$$J_l \sum m_i([\overline{r}_i, \overline{l}])^2 = \sum m_i(\overline{r}_i - (\overline{r}_i, \overline{l}_i)^2) \tag{14}$$

Теорема 22 (Гюйгенса-Штейнера)**.**

$$J_l = J_{l'} + md^2, \quad d = dist(l, l')$$

Доказательство.

$$J_l = \sum m_i([\overline{r}_S + \overline{\rho}_i, \overline{l}])^2 = \sum m([\overline{r}_S, \overline{l}]^2) + \sum m_i[\overline{\rho}_i, \overline{l}]^2 + 2\sum m_i\left((\overline{r}_S, \overline{l}) \cdot (\overline{\rho}_i, \overline{l})\right) =$$

$$= m \cdot d^2 + J_{l'} + 2(\overline{r}_S, \overline{\rho}) \cdot \left(\sum m_i\overline{\rho}_i, \overline{l}\right) = J_{l'} + d^2 m$$

■

$\overline{r}_i = x_i\overline{e}_x + y_i\overline{e}_y + z_i\overline{e}_z$

Определение.

$$\begin{array}{l} J_x = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ J_y = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2) \\ J_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{array} \quad \text{— \textit{осевые моменты инерции}}$$

Свойство 1

$$J_x + J_y \geqslant J_z$$

Доказательство.

$$J_x + J_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + 2\sum m_i, z_i \geqslant J_z$$

■

Замечание. *Равенство достигается в случае плоского тела*

$$J_x + J_y = J_z \Leftrightarrow z_i = 0 \quad \forall m$$

Определение.

$$\begin{array}{l} J_{xy} = \sum m_i x_i y_i \\ J_{yz} = \sum m_i y_i z_i \\ J_{xz} = \sum m_i x_i z_i \end{array} \quad \text{— центробежные моменты инерции.}$$

Определение.

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \text{ — тензор инерции тела в точке } O$$

$\bar{l} = \alpha\bar{e}_x + \beta\bar{e}_y + \gamma\bar{e}_z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

$J_l = \sum m_i\left((x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2\right) =$

$= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)\alpha^2 + \sum m_i(x_i^2 + z_i^2)\beta^2 + \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)\gamma^2 -$

$-2\left(\sum m_i x_i y_i\right)\alpha\beta - 2\left(\sum m_i y_i z_i\right)\beta\gamma - 2\left(\sum m_i x_i y_i\right)\alpha\beta =$

$= J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{xz}\alpha\gamma = (J_O\bar{l}, \bar{l})$

$Ox'y'z'$

$\bar{l}' = \alpha'\bar{e}_{x'} + \beta'\bar{e}_{y'} + \gamma'\bar{e}_{z'}, \quad J_0'$

$\bar{l}' = A\bar{l}, \quad A^T = A^{-1}$

$J_l = (J_0'\bar{l}', \bar{l}') = (J_0' \cdot A\bar{l}, A\bar{l}) = (A^T J_0' A\bar{l}, \bar{l}) = (J_O\bar{l}, \bar{l}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J_O = A^T J_O' A$

Определение.

$$\Sigma\left\{\bar{r}, \quad (J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1\right\} \text{ — эллипсоид инерции тела в точке } 0$$

Замечание.

$$(J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz = 1$$

Замечание.

$$(J_O\bar{r}, \bar{r}) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left(J_O\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}, \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}\right)}_{J_{\bar{r}}}, \quad |r|^2 = 1 \Leftrightarrow |\bar{r}| = \sqrt{\frac{1}{J_{\bar{r}}}}$$

$\exists O\xi\eta\zeta, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \equiv \Sigma$

Определение. A, B, C *— главные моменты инерции тела в точке* O

Определение. $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ *— главные оси инерции в точке* O

Определение. S *— центр масс, тогда* $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ *— главные центральные моменты*

$det(J_O - \lambda E) = 0, \quad \lambda - A, B, C \to \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} = \overline{e}_\xi \overline{e}_\eta \overline{e}_\zeta$
$A = B$(λ — корень 2ой кратности, тогда $O\zeta$ — ось динамической симметрии)

Замечание. *Если однородное твердое тело имеет ось геометрической симметрии, то она является главной в любой своей точке.*

Oz — ось симметрии, $m_i = m_i'$.

$J_{xz} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i z_i = \sum\limits_{i=0}^{N/2} (m_i x_i z_i - m x_i z_i) = 0$

$J_{yz} = 0$

Oz — главная

Замечание. *Если однородное твердое тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной в точке пересечения с плоскостью.*

11.1 Твердое тело с неподвижной точкой ($\overline{v}_O = 0$)

Теорема 23.

$$T = \frac{1}{2}(J\overline{\omega}, \overline{\omega}), \quad \overline{K}_O = J_O \overline{\omega}$$

Доказательство.

$l : l \parallel \overline{\omega}, \quad O \in l$(O — мгновенная ось вращения)

$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i([\overline{\omega}, \overline{r}_i])^2 = \frac{1}{2}\sum m_i([\overline{l}, \overline{r}_i])^2 \cdot \omega^2 =$

$\frac{1}{2}J_l \omega^2 = \frac{1}{2}(J_O, \overline{l}, \overline{l})\omega^2 = \frac{1}{2}(J_O \overline{\omega}, \overline{\omega})$

$\overline{K}_O = \sum m_i [\overline{r}_i, [\overline{\omega}, \overline{r}_i]] = \sum m_i (\overline{r}_i^2 \cdot \overline{\omega} - \overline{r}_i(\overline{\omega}, \overline{r}_i))$

$\overline{\omega} = \omega_x \overline{e}_x + \omega_y \overline{e}_y + \omega_z \overline{e}_z$

$(\overline{K}_O, \overline{e}_x) = \sum m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] x_i =$

$= J_x \omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xy}\omega_z$

$(\overline{K}_O, \overline{e}_y) = J_{xy}\omega_x - J_y \omega_y - J_{xz}\omega_z$

$(\overline{K}_O, \overline{e}_z) = J_{xz}\omega_x - J_{xz}\omega_y - J_z \omega_z$

■

Следствие. *Пусть $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — главные оси инерции:*

$$J_O = diag(A, B, C), \quad \overline{\omega} = p\overline{e}_\xi + q\overline{e}_\eta + r\overline{e}_\zeta$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \overline{K}_O = Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$$

11.2 Произвольное движение тела

Теорема 24.

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_S^2 + \frac{1}{2}(J_S \overline{\omega}, \overline{\omega})$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + J_S \overline{\omega}$$

Доказательство.

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}_S^2 + T^{\text{кен}} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(J_S \overline{\omega}, \overline{\omega})$$

■

Следствие. S_ξ, S_η, S_ζ *— главные центральные оси*

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$$

Следствие. $\overline{\omega} || \overline{e}_z, \quad \overline{e}_z = const$*:*

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(J_S\overline{e}_z, \overline{e}_z)}_{J_z}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}J_z\omega^2$$

$$\overline{K}_O = [\overline{r}_S, m\overline{v}_S] + \underbrace{J_S\overline{\omega}}_{J_z\overline{\omega} \Leftrightarrow J_{xy} = J_{yz} = 0} \nparallel \overline{e}_z$$

12 Динамика твердого тела с неподвижной точкой

$\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O$

$O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси

$\overline{K}_O = Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta$

$\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = \dot{\overline{K}}_O + [\overline{\omega}, \overline{K}_O]$

$\Rightarrow A\dot{p}\overline{e}_\xi = B\dot{q}\overline{e}_\eta + C\dot{r}\overline{e}_\zeta + \begin{vmatrix} \overline{e}_\xi & \overline{e}_\eta & \overline{e}_\zeta \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = M_\xi\overline{e}_\xi + M_\eta\overline{e}_\eta + M_\zeta\overline{e}_\zeta$

$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)qp = M_\zeta \end{cases}$

12.1 Случай Эйлера

Определение. *Случаем Эйлера называется задача о движении твердого тела с неподвижной точкой при отсутствии внешних сил (момента внешних сил) (по инерции).*

$$\overline{M}_0 = 0$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)qp = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) = h = const$$

$$\overline{k}_O = Ap\overline{e}_\xi + Bq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta = \overline{k} = const$$

Теорема 25. *Динамические уравнения Эйлера в случае Эйлера интегрируются в квадратурах.*

Доказательство.

$\begin{cases} \left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) = 2h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \end{cases}$

$1) A = B = C \qquad (15) \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 = const \\ q = q_0 = const \\ r = r_0 = const \end{cases}$

$$A \neq B \begin{cases} B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 = 2hA - k^2 \\ A(B-A)p^2 + C(B-C)r^2 = 2hB - k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \pm f_1(r) \\ p = \pm f_2(r) \end{cases}$$

$$(15) \Rightarrow C\dot{r} \pm (B-A) f_1(r) f_2(r) = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{(B-A) f_1(r) f_2(r)}{C}$$

$$\pm \int\limits_0^r \frac{d\rho}{f_1(\rho) f_2(\rho)} = \frac{B-A}{C}(t - t_0) \Rightarrow r = r(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = \pm f_1(r(t)) = q(t) \\ p = \pm f_2(r(t)) = p(t) \end{cases}$$

■

Геометрическая интерпретация Мак-Куллока

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2$$
$$k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq, \quad k_\zeta = Cr$$
$$S = \eta\overline{k}: \ \ k_\xi^2 + k_\eta^2 + k_\zeta^2 = k^2$$
$$\Phi = \left\{ \overline{k} : \frac{k_\xi^2}{A} + \frac{k_\eta^2}{B} + \frac{k_\zeta^2}{C} = 2h \right\} \text{ — эллипсоид Мак-Куллока}$$

При движении волчка Эйлера[1] эллипсоид Мак-Куллока обкатывает неподвижный конец вектора кинетического момента по линии пересечения со сферой соответсвующего радиуса. При этом проекция угловой скорости эллипсоида на ось кинетического момента постоянна.

$$(\overline{k}, \overline{\omega}) = (J_0\overline{\omega}, \overline{\omega}) = 2T = const.$$

$$\begin{aligned} & A \geqslant B \geqslant C \Rightarrow \\ \Rightarrow & A^2p^2 + ABq^2 + ACr^2 \geqslant \\ \geqslant & A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \geqslant \\ \geqslant & ACp^2 + BCq^2 + C^2r^2 \\ & 2TA \geqslant k^2 \geqslant 2TC \\ & \sqrt{2TA} \geqslant K \geqslant \sqrt{2TC} \\ & k = \sqrt{2TA} \\ & k = \sqrt{2TC} \\ & k = \sqrt{2TB} \\ & k_\xi^2 \left(1 - \frac{B}{A}\right) + K_\eta^2 \left(1 - \frac{B}{C}\right) = 0 \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация Пуансо

При движении волчка Эйлера его эллипсоид инерции катится без скольжения по неподвижной плоскости, ортогональной вектору кинетического момента.

P — точка пересечения эллипсоида инерции с мгновенной осью вращения.

$$(J_0\overline{r}, \overline{r}) = 1 \text{ — эллипсоид инерции}$$

[1] Твердое тело с неподвижной точкой, для которого выполняется случай Эйлера.

$$\overline{OP} = \overline{\rho} : \begin{cases} (J_0\overline{\rho}, \overline{\rho}) = 1 \\ \overline{\rho} = \lambda\overline{\omega} \end{cases}$$

$$(J_0\overline{\omega}, \overline{\omega})\lambda^2 = L, \quad 2T\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = const$$

$$\overline{n} = \frac{\rho \operatorname{grad} f(\overline{r})}{|\operatorname{grad} f(\overline{r})|} = \frac{J_O\overline{r}}{|J_O\overline{r}|}$$

$$\overline{n}_P = \frac{J_O\overline{\rho}}{|J_O\overline{\rho}|} = \frac{J_O\overline{\omega}\lambda}{|J_O\overline{\omega}|\lambda} = \frac{\overline{k}}{|\overline{k}|} = const$$

$$\pi \perp \overline{n}_P, \quad P \ni \pi$$

$$(\overline{OP}, \overline{n}_P) = \left(\lambda\overline{\omega}, \frac{J_O\overline{\omega}}{|J_O\overline{\omega}|}\right) = \frac{\lambda}{k}2T = \frac{\sqrt{2T}}{k} = const$$

12.1.1 Динамически симметричный волчок Эйлера

Теорема 26. *Движение динамически симметричного волчка Эйлера всегда является регулярной прецессией.*

Доказательство.

$$\begin{cases} k_\xi = k\sin\Theta\sin\varphi \\ k_\eta = k\sin\Theta\cos\varphi \\ k_\zeta = k\cos\Theta \end{cases}$$

$$k_\xi = Ap, \quad k_\eta = Bq = Aq, \quad k_\zeta = Cr$$

$$\begin{cases} p = \dot\psi\sin\Theta\sin\varphi + \dot\Theta\cos\varphi \\ q = \dot\psi\sin\Theta\cos\varphi + \dot\Theta\sin\varphi \\ r = \dot\psi\cos\Theta + \dot\varphi \end{cases}$$

$$C\dot r = 0 \Rightarrow r = r_0 = const$$

$$k\cos\Theta = Cr_0 \Rightarrow \cos\Theta = \frac{Cr_0}{k} = const \Rightarrow \Theta = const \quad (\dot\Theta = 0)$$

$$\begin{cases} k\sin\Theta\sin\varphi = A\dot\psi\sin\Theta\sin\varphi \\ k\sin\Theta\cos\varphi = A\dot\psi\sin\Theta\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow k = A\dot\psi \Rightarrow \dot\psi = \frac{k}{A} = const$$

$$\dot\varphi = r - \dot\psi\cos\Theta = r_0 - \frac{k}{A}\frac{Cr_0}{k} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right) = const$$

■

12.2 Вынужденная регулярная прецессия динамически симметричного волчка

$OXYZ$ — неподвижная система отсчета.
$O\xi\eta\zeta$ — связана с телом ($O\zeta$ - ось симметрии).
$Ox'y'Z$ — подвижная система отсчета.

$$\overline{\omega}_{\text{пер}} = \dot\psi\overline{e}_z$$

$$\overline{M}_O = \frac{d\overline{k}_O}{dt} = \dot{\overline{k}}_O + [\overline{\omega}_{\text{пер}}, \overline{k}_O]$$

$$\overline{k}_O = Ap\overline{e}_{x'} + Aq\overline{e}_{y''} + Cr\overline{e}_\zeta$$

$$(\overline{e}_{y''} \perp \overline{e}_\zeta, \overline{e}_{y2} \perp \overline{e}_{x'})$$

$$\overline{\omega}_{\text{абс}} = \dot\psi\overline{e}_z + \dot\varphi\overline{e}_\zeta = (\dot\psi + \dot\psi\cos\Theta)\overline{e}_\zeta + \dot\psi\sin\Theta\cdot\overline{e}_{y''}$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = \dot\psi\sin\Theta = const \\ r = \dot\psi\cos\Theta + \dot\varphi = const \end{cases} \Rightarrow \dot{\overline{k}}_O = 0$$

$$\overline{M}_O = \begin{vmatrix} \overline{e}_{x'} & \overline{e}_{y''} & \overline{e}_\zeta \\ 0 & \dot\psi\sin\Theta & \dot\psi\cos\Theta \\ 0 & A\dot\psi\sin\Theta & C\dot\psi\cos\Theta + C\dot\varphi \end{vmatrix} = \overline{e}_{x'}\dot\psi\sin\Theta\cdot(C\dot\varphi + C\dot\psi\cos\Theta - A\dot\psi\cos\Theta) =$$

$$= \overline{e}_{x'}\dot\psi\dot\varphi\sin\Theta\cdot C\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\Theta\right) \Rightarrow$$

$$\overline{M}_0 = C[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\Theta\right) \text{ — точная формула гироскопии.}$$

$\overline{\omega}_1 = \dot\psi\overline{e}_z$

$\overline{\omega}_2 = \dot\varphi\overline{e}_\zeta$

$[\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2] = \dot\psi\dot\varphi\sin\Theta\overline{e}_{x'}$

12.3 Случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называется задача о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. Считаем, что центр масс тела лежит на оси его динамической симметрии.

$\overline{M}_O = [\overline{r}_\zeta, m\overline{g}] = [l\overline{e}_\zeta, -mg\overline{e}_z] = [l\,\overline{e}_\zeta, -mg(\cos\Theta\overline{e}_\zeta + \sin\Theta\cdot\sin\varphi\overline{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\cdot\overline{e}_\eta)] =$
$= -mgl\sin\Theta(\sin\varphi\overline{e}_\eta - \cos\varphi\overline{e}_\xi)$

$$\begin{cases} A\dot p + (C-A)qr = mgl\sin\Theta\cos\varphi \\ A\dot q + (A-C)pr = -mgl\sin\Theta\sin\varphi \\ C\dot r + 0 = 0 \\ p = \dot\psi\sin\Theta\sin\varphi + \dot\Theta\cos\varphi \\ q = \dot\psi\sin\Theta\cos\varphi - \dot\Theta\sin\varphi \\ r = \dot\psi\cos\Theta + \dot\varphi \end{cases}$$

Интегралы

1. $C\dot e = 0 \Rightarrow r = r_0 = const$
2. $(\overline{M}_0, \overline{e}_z) = 0, \quad \dot{\overline{e}}_z = 0 \Rightarrow k_z = (\overline{k}_O, \overline{e}_z) = const$
   $k_z = (Ap\overline{e}_\xi + Aq\overline{e}_\eta + Cr\overline{e}_\zeta, \sin\Theta\sin\varphi\cdot\overline{e}_\xi + \sin\Theta\cos\varphi\overline{e}_\eta - \cos\Theta\overline{e}_\zeta = A\sin\Theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + Cr_0\cos\Theta =$
   $A\dot\psi\sin\Theta + Cr_0\cos\Theta = k = const$
3. $T + \Pi = h = const$
   $\frac{1}{2}(ap^2 + Aq^2 + Cr^2 + mgl\cos\Theta = h$
   $A(\dot\psi^2\sin^2\Theta + \dot\Theta^2) + Cr_0^2 + 2mgl\cos\Theta = 2h$
   $A(\dot\psi^2\sin^2\Theta + \dot\Theta^2) + 2mgl\cos\Theta = h^*, \quad h^* = 2h - Cr_0^2$

Интегрирование: $2 \Rightarrow \dot\psi = \frac{k - Cr_0\cos\Theta}{A\sin^2\Theta}$

$3 \Rightarrow \dfrac{(k - Cr_0\cos\Theta)^2}{A\sin^2\Theta} + A\dot\Theta^2 + 2mgl\cos\Theta = h^*$

$\dot\Theta^2 = f(\Theta), \quad f(\Theta) = \dfrac{1}{A}\left(h^* - rmgl\cos\Theta - \dfrac{(k - Cr_0\cos\Theta)^2}{A\sin^2\Theta}\right)$

$\dot\Theta = \pm\sqrt{f(\Theta)}$

$\dfrac{d\Theta}{\sqrt{f(\Theta)}} = \pm dt$

$$\int\limits_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} = t - t_0$$

$$\dot{\Theta} = \frac{kCr_0 \cos\Theta(t)}{A\sin^2\Theta(t)} = f_1(t)$$

$$\psi = \int\limits_0^t f_1(\tau)d\tau = \psi(t)$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi}\cos\Theta = r_0 - \psi(t)\cos\Theta(t) = f_2(t)$$

$$\varphi = \int\limits_0^t f_2(\tau)d\tau$$

Геометрическая интерпретация

$$\cos\Theta = x$$

$$Ah^* - 2Amglx - \frac{(Cr_0x-k)^2}{1-x^2} = A^2 f(\Theta) = A^2\dot{\Theta}^2$$

$$F(x) = 2Amglx + \frac{(Cr_0x-k)^2}{1-x^2} \leqslant Ah^*$$

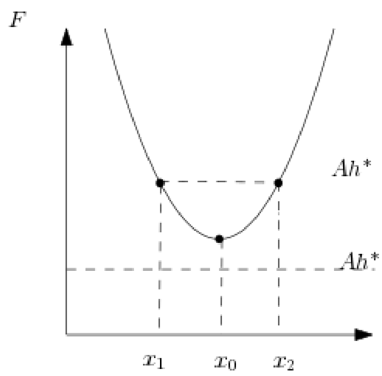
$$F(x) = 2Amglx + \frac{C^2r_0^2(x^2-1)+C^2r_0^2+k^2-2Cr_0kx}{1-x^2} =$$

$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{(Cr_0-k)^2(1+x)+(Cr_0+k)^2(1-x)}{2(1-x^2)} =$$

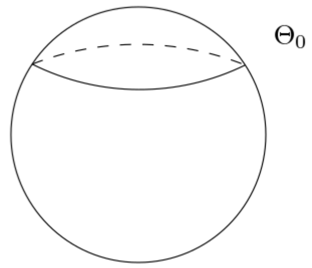
$$= 2Amglx - C^2r_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{(Cr_0-k)^2}{1-x} + \frac{(Cr_0+k)^2}{1+x}\right)$$

$$F'_x(x) = 2Amgl + \frac{1}{2}\left(\frac{(Cr_0-k)^2}{(1-x)^2} - \frac{(Cr_0+k)^2}{(1+x)^2}\right)$$

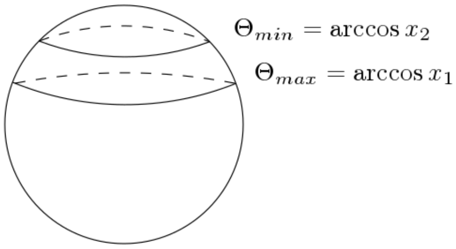
$$F''_x(x) = 0 + \frac{(Cr_0-k)^2}{(1-x)^3} + \frac{(Cr_0+k)^2}{(1+x)^3} \geqslant 0, \quad \forall x \in (-1,1)$$



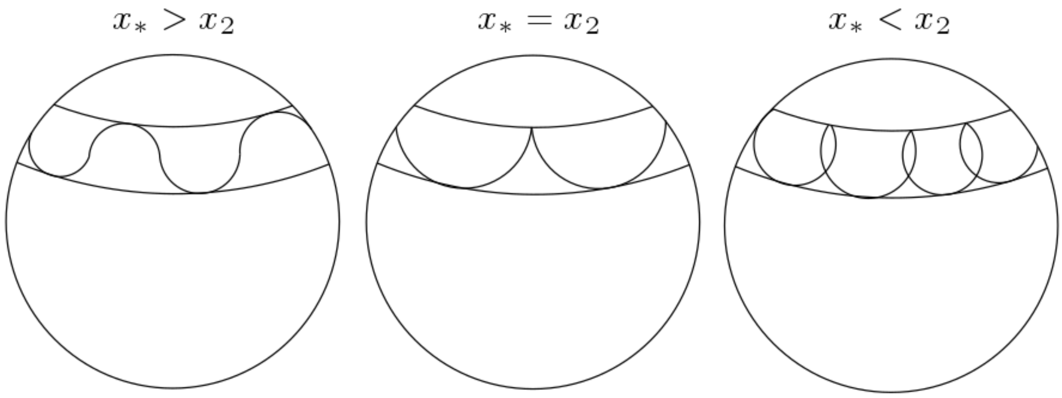
1. $h^* = \frac{F(x_0)}{A} \Rightarrow x = x_0, \;\; \Theta = \arccos x_0 = const$



2. $h^* > \frac{F(x_0)}{A}$: $\Theta_{min} = \arccos x_2$, $\quad \Theta_{max} = \arccos x_1$



$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0 x - k}{A(1-x^2)} = 0 \Leftrightarrow x = x_* = \frac{k}{Cr_0}$$
$$F_*'(x_*) = 2Amgl > 0$$



Замечание. *Если угловая скорость собственного вращения много больше скорости прецессии, т.е.* $\dot{\varphi} \gg \dot{\psi}$*, тело совершает псевдорегулярную пресессию.*

Основные теоремы динамики

$$\overline{p} = m\overline{v}_s$$
$$\overline{k}_O = [\overline{r}_s, m\overline{v}_s] + J_s\overline{\omega}$$
$$T = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}(J_s\overline{\omega}, \overline{\omega})$$

$$\dot{\overline{p}} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(e)} = \overline{F}$$
$$\dot{\overline{k}}_O = \sum p\overline{r}_i, \overline{F}_i^{(e)} = \overline{M}_O$$
$$\dot{T} = \sum(\overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_i)$$

Замечание.
$$\sum(\overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_i) = \dot{T} = (m\overline{w}_s, \overline{v}_s) + ((J_s\dot{\overline{\omega}}), \overline{\omega}) = (\overline{F}, \overline{v}_s) + (\overline{M}_s, \overline{\omega})$$

Утверждение 18. *Мощность внешних сил, действующих на твердое тело определяется равенством*

$$\sum(\overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_i) = (\overline{p}, \overline{v}_p) + (\overline{M}_p, \overline{\omega}),$$

где p — произвольная точка тела.

Доказательство.

$$\sum(\overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_i) = \sum(\overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_p + [\overline{\omega}, \rho_i]) = \left(\sum \overline{F}_i^{(e)}, \overline{v}_p\right) + (\overline{\omega}, \sum[\overline{\rho}_i, \overline{F}_i]) =$$
$$= (\overline{p}, \overline{v}_p) + (\overline{M}_p, \overline{\omega})$$

■

Определение. *Две системы сил (в совокупности с точками их приложения), действующих на твердое тело называются эквивалентными, если они вызывают одно и то же движение тела.*

$$\{\overline{F}_i, p_i\} \sim \{\overline{F}'_i, p'_i\}$$

Следствие.

$$\{\overline{F}_i, p_i\} \sim \overline{F}'_i, p'_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \overline{F}_i = \sum \overline{F}'_i \\ \sum[\overline{OP}, \overline{F}_i] = \sum[\overline{OP}', \overline{F}'_i] \end{cases}$$

Следствие.

$$\{\overline{F}_i, p_i\} \sim \{\overline{F}, \overline{M}_O, O\}, \quad \overline{F} = \sum \overline{F}_i, \ \ \overline{M}_O = \sum[\overline{OP}, \overline{F}_i]$$

Определение. $\overline{R}$ *— равнодействующая системы сил* $\{\overline{F}_i, \overline{p}_i\}$, *если существует точка* O *тела, такая что* $\{\overline{F}, p_i\} \sim \{\overline{R}, O\}$

Пример. *Для двух сил, приложенных к разным концам твердого стержня в противоположном направлении, равнодействующая не существует.*

Пример.

$$\{m_i\overline{g}, P_i\} \sim \{m\overline{g}, S\}$$

$$\sum m_i\overline{\rho} = \left(\sum m_i\right)\overline{g} = m\overline{g}$$
$$\sum[\overline{OP}, m_i\overline{g}] = \sum[m_i\overline{OP}, \overline{g}] = \left[\sum m_i\overline{OP}, \overline{g}\right] = [m\overline{r}_s, \overline{g}] = [\overline{r}_s, m\overline{g}]$$

$$\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{OO'}]$$

Теорема 27. *Если главный вектор внешних сил, действующих на твердое тело отличен от нуля, то существует такая точка, при приведении к которой, главный вектор и главный момент параллельны.*

$$\overline{F} \neq 0 \quad \exists A : \overline{M}_A \parallel \overline{F}$$

Доказательство.

$$\overline{M}_a = \overline{M}_O + [\overline{F}, \overline{OA}] = \lambda\overline{F} \quad \Big| \times \overline{F}$$
$$[\overline{F}, \overline{M}_O] + \overline{F}(\overline{F}, \overline{OA}) - F^2\overline{OA} = 0$$
$$\overline{OA} = \frac{1}{F^2}[\overline{F}, \overline{M}_O] + \alpha\overline{F}, \quad \forall\alpha = const$$

■

Определение. *Прямая, определяемая последним равенством называется осью динамического винта (осью минимальных моментов).*

Определение. λ *— параметр винта.*

$$\lambda\overline{F} = \overline{M}_O + \left[\overline{F}, \frac{1}{F^2}[\overline{F}, \overline{M}_O] + \alpha\ F\right] = \overline{M}_O + \frac{1}{F^2}\left(\overline{F}(\overline{F}, \overline{M}_O) - F^2\overline{M}_O\right) = \frac{(\overline{F}, \overline{M}_O)}{F^2}\overline{F}$$

$$\lambda = \frac{(\overline{F}, \overline{M}_O)}{F^2}$$

1. $\overline{F} = 0 : \quad \{\overline{F}_i, P_i\} \sim \{\overline{M}_O, O\}$
2. $\overline{F} \neq 0, \lambda = 0 : \{\overline{F}_i, P_i\} \sim \{\overline{R}, A\}$
3. $\overline{F} \neq 0, \lambda \neq 0 : \{\overline{F}, P_i\} \sim \{\overline{F}, \overline{M}_A, A\}$

13 Уравнения Лагранжа

$\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N \in \mathbb{R}^3$

Определение. *Механическими связями называются ограничения на положения и скорости материальных точек системы, которые выполняются при всех действующих на систему силах.*

$$\overline{r} = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_j(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, k \text{ — \textit{уравнение связи.}} \tag{16}$$

13.1 Классификация связей

1. (16) — двусторонняя связь.
2. $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ — стационарная связь (склерономная).
   $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \neq 0$ — нестационарная связь (реономная.)
3. $f_\alpha(\overline{r}, t) = 0$ — геометрическая.
4. $f_\alpha(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = 0$ — дифференциальная связь.

13.1.1 Геометрические связи

Определение. $\Sigma = \{\overline{r} : f_j(\overline{r}, t) = 0, j = 1, \ldots, k\}$ — *пространство положений (конфигурационное пространство).*

Определение. $n = dim\Sigma$ — *количество степеней свободы.*

Определение. $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — *обобщенные локольные координаты.*

$n = 3N - k$, где k — число уравнений связи, если

1. функции связей гладкие ($\mathrm{grad}_{\overline{r}} f_j \neq 0, \forall i \in 1, \ldots, k$)
2. f_j — независимые. ($\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{r}}\right) = k$)

Определение. *Функции $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы, если $F(f_1, \ldots, f_n) = 0 \Leftrightarrow F \equiv 0$*

Пример (Независимые функции)**.** $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_2 = f_1^2, F_2 = f_2 - f_1^2$.

Пример.

$$f(\overline{r}) = x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$
$$\mathrm{grad}\, f|_{x=0} = 0 \qquad n = 0 \neq 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

Пример.

$$|\overline{r}_i - \overline{r}_j| = c_{ij} = const$$
$$k = \frac{N(N-1)}{2} \qquad n = 6 \neq 3N - \frac{N(N-1)}{2}, \quad N > 4$$

$$\overline{r} = \overline{r}(\overline{q}, t)$$

Пример.

$$\overline{v}_k = 0, n = 2, \overline{q} = (x, \overline{\varphi})^T$$
$$\overline{v}_k = \overline{v}_0 + [\overline{\omega}, \overline{OK}] = \dot{x}, \overline{e}_x + [-\dot{\varphi}\overline{e}_z, -R\overline{e}_y] = (\dot{x} - R\dot{\varphi})\overline{e}_x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$$
$$\int dx = \int R d\varphi$$
$$x - x_0 = R(\varphi - \varphi_0)$$

Замечание.
$$f(\overline{r},t)\equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{r}}\dot{\overline{r}}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Определение. *Дифференциальная связь называется голономной (интегрируемой), если она может быть представлена в эквивалентной геометрической форме. В противном случае связь неголономна (неинтегрируема).*

Пример (конек Чаплыгина).

$\overline{v}_k \parallel \overline{l}, \quad n=3, \overline{q}=(x,y,\varphi)^T$

$\overline{v}_k=\dot{x}\overline{e}_x+\dot{y}\overline{e}_y \parallel \cos\varphi\overline{e}_x+\sin\varphi\overline{e}_y$

$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\varphi$

Пусть $\exists f(x,y,\varphi,t)=0 \Leftrightarrow \dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\varphi$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi}+\dfrac{\partial f}{\partial t} \Leftrightarrow \dot{y}=\dot{x}\operatorname{tg}\varphi$

$\dot{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\operatorname{tg}\varphi\right)+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi}+\dfrac{\partial f}{\partial t}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{tg}\varphi=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow f=0$$

$\overline{a}(\overline{r})\dot{\overline{r}}+b(\overline{r})=0$ — интегрируема, если

$$\exists f:\frac{\partial f}{\partial \overline{r}}=\overline{a}, \frac{\partial f}{\partial t}=b \Leftrightarrow \Phi=\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial q_n} & \frac{\partial a_n}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Критерий $(n=3)$ $a_1\dot{q}_1+a_2\dot{q}_2+a_3\dot{q}_3=0$ — интегрируемая $\Leftrightarrow \overline{a}\operatorname{rot}\overline{a}=0$

13.2 Действительные и виртуальные перемещения

$\overline{r}=\overline{r}(\overline{q},t)$

$\overline{v}=\dot{\overline{r}}=\dfrac{d\overline{r}}{dt}=\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \overline{q}}\dot{\overline{q}}+\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial t}$

$d\overline{r}=\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial \overline{q}}d\overline{q}+\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial t}dt$ — действительные перемещения.

$\Sigma=\{\overline{r}, f_j(\overline{r})=0, j=1,\ldots,k\}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial \overline{r}_i}d\overline{r}_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=\frac{\partial f_j}{\partial \overline{r}}d\overline{r}+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0$

$\displaystyle\delta\overline{r}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i}\delta q_i$ — виртуальные перемещения.

$\dfrac{\partial f_j}{\partial \overline{r}}\delta\overline{r}=0, \quad j=1,\ldots,k$

Замечание. *Если связи стационарные, то пространство действительных и виртуальных перемещений совпадают*[2].

[2]Написано неразборчиво, доверять этому утверждению не стоит.

13.3 Идеальные связи и общие уравнения динамики. Принцип освобождаемости связи. (Уравнения Лагранжа первого рода)

Если к активным силам, действующим на механическую систему, добавляются силы, с помощью которых реализуется уравнения связи, то систему можно рассматривать как свободную.

$\overline{R}_i$ — сила реакции, действующая на m_i

$$m_i\ddot{\overline{r}}_i = \overline{R}_i + \overline{F}_i$$

Определение. *Связи идеальные, если при любом виртуальном перемещении системы выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{R}_i, \delta\overline{r}_i) = 0$$

$\overline{R}_i = m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i$

$\sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \delta\overline{r}_i) = 0$

13.3.1 Принцип Даламбера-Лагранжа[3]

Утверждение 19. *Если связи, наложенные на мезаническую систему идеальные, то при любом ее движении и любом виртуальном перемещении выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = 0 \tag{17}$$

Утверждение 20 (Обратное)**.** *Если связи идеальные и какое-то движение удовлетворяет* (17)*, то это движение является действительным движением системы.*

Доказательство. $\Rightarrow$
Если связи идеальны, то

$\overline{r} = \overline{r}(t) \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = 0$

$\ddot{\overline{r}}_i = \ddot{\overline{r}}_i(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \dot{\overline{r}}_N, \ldots, \dot{\overline{r}}_N, t)$

$M = \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N)$

$\overline{R} = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, \ldots, R_{Nx}, R_{Ny}, R_{Nz})^T$

$\overline{F} = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \ldots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})^T$

$(17) \Leftrightarrow (M\ddot{\overline{r}} - \overline{F}, \delta\overline{r}) = 0, \overline{R} = M\ddot{\overline{r}} - \overline{F}$

$\delta\overline{r} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{r}}$

$\ddot{\overline{r}} = \ddot{\overline{r}}(\ddot{\overline{r}}, \dot{\overline{r}}, t) \Rightarrow \overline{R} = \overline{R}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t)$

Вроде бы это еще не в другую сторону, но уже и не в ту (Тут был перерыв между лекциями)

$\overline{r} = (x_1, \ldots, z_N)^T \in \mathbb{R}^{3N}$

$\overline{F} = (F_{1x}, \ldots, F_{Nz})^T \in \mathbb{R}^{3N}$

$f_I = (,t) = 0, i = \overline{1, \ldots k}$

$\overline{\varphi}_i \operatorname{grad}_{\overline{r}} \rho_i \in \mathbb{R}^{3N}$

[3]Также принцип виртуальных перемещений.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}\Phi = k$

Число степеней свободы — размерность пространства виртуальных перемещений. $\delta\overline{r} : \left(\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}}, \delta\overline{r}\right) = (\overline{\varphi}_i, \delta\overline{r}) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \Phi d\overline{r} = 0, \underline{n = 3N - k}$
$\overline{R} \in \mathbb{R}^{3N}$ — реакции $(\overline{R}, \delta\overline{r}) = 0$ — условия идеальной связи.

$\Leftarrow$

I

$(M\ddot{\overline{r}} - \overline{F}, \delta\overline{r}) = 0 \xrightarrow{?} \ddot{\overline{r}} = \ddot{\overline{r}}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t)$

$(\overline{\varphi}_i, \delta\overline{r}) = 0 \quad \forall i = \overline{1, \ldots k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta\overline{r} \perp \pi = \{c_1\overline{\varphi}_1 + c_2\overline{\varphi}_2 + \ldots + c_k\overline{\varphi}_k, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \overline{1, \ldots k}\}$

$(M\ddot{\overline{r}} - \overline{F}, \delta r) = 0 \Rightarrow M\ddot{\overline{r}} - \overline{F} \in \pi \rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k : M\ddot{\overline{r}} - \overline{F} = \lambda_1\overline{\varphi}_1 + \ldots + \lambda_k\overline{\varphi}_k = \Phi^T\overline{\lambda}$

$\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T \in \mathbb{R}^k \rightarrow \ddot{\overline{r}} = M^{-1}\overline{F} + M^{-1}\Phi^T\overline{\lambda}$

II

$f_i(\overline{r}, t) \equiv 0$

$$\frac{df_i}{dt} = \left(\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}}}_{\overline{\varphi}_i}, \ \dot{\overline{r}}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \forall i = \overline{1, \ldots k}$$

$\Phi\dot{\overline{r}} + \overline{\beta}(\overline{r}, t) = 0$

$\Phi\dot{\overline{r}} + \psi(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = 0 \Rightarrow$

$\Phi M^{-1}\overline{F} + \Phi M^{-1}\Phi^T\overline{\lambda} + \overline{\psi} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi M^{-1}\Phi^T\overline{\lambda} = \overline{h}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t)$

III

$\forall \overline{u} \neq 0 : (\Phi M^{-1}\Phi^T\overline{u}, \overline{u}) = (M^{-1}\Phi^T\overline{u}, \Phi^T\overline{u}) =$

$= (M^{-1}\overline{x}, \overline{x}) > 0, \text{т.к.}$

$a) det M^{-1} = (det M)^{-1} \neq 0,$

$b) \overline{x} = \Phi^T\overline{u} \neq 0, \quad \forall \overline{u} \neq 0.$

$\Rightarrow det(\Phi M^{-1}\Phi^T) \neq 0 \Rightarrow \overline{\lambda} = (\Phi M^{-1}\Phi^T)^{-1}h(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) = \lambda(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t) \Rightarrow$

$\overline{R} = M\ddot{\overline{r}} - \overline{F} = \overline{R}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t)$

$\blacksquare$

Замечание. *Принцип виртуальных перемещений справедлив и для неголономных систем и доказывается аналогично.*

Замечание.

$$\begin{cases} M\ddot{\overline{r}} - \overline{F} = \Phi^T\overline{\lambda} \\ R_i(\overline{r}, t) = 0, i = 1, \ldots, k \end{cases} \quad \text{— \textit{уравнения Лагранжа 1 рода (Это неточно)}}$$

13.4 Обобщенные силы

$\overline{r} = \overline{r}(\overline{q}, t), \quad (\overline{u} = \overline{r}_i(\overline{q}, t)), \overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} (\overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = (\overline{F}, \delta\overline{r}) = \left(\overline{F}, \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\overline{r}}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\overline{F}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial q_j}\right)\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j = (\overline{Q}, \delta\overline{q})$$

Определение.

$$Q_j = (\overline{F}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial q_j}) = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta\overline{r}_i)$$

— обобщенная сила, соответствующая координате q_j.

Утверждение 21. *Если координата* q_l *— декартова координата центра масс всей системы, то соответствующая ей обобщенная сила равна проекции главного вектора внешних сил системы на соответствующую декартову ось.*

$$q_l = x_s \Rightarrow Q_l = (\overline{F}, \overline{e}_x)$$

Доказательство.

$\delta q_j = 0, \quad j \neq l \Rightarrow \delta\overline{r}_i = \delta x_s \overline{e}_x$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta x_S \overline{e}_x) = \left(\sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i, \overline{e}_x\right)\delta x_s = Q_l \delta q_l$$

■

Пример (АТТ).

$$\overline{r}_i = \overline{r}_p + \overline{\rho}_i = \overline{r}_p + \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_{i\alpha}\overline{e}_\alpha,$$

$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ *— базис, связянный с телом.*

$\overline{r}_i = \overline{r}_i(\overline{q}, t), \quad \overline{r}_p = \overline{r}_p(\overline{q}, t), \quad \overline{e}_\alpha = \overline{e}_\alpha(\overline{q}, t)$

$\rho_{i\alpha} = const$

$$\left(\dot{\overline{e}}_\alpha = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\overline{e}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\overline{e}_\alpha}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\dot{\overline{e}}_\alpha}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\overline{e}_\alpha}{\partial q_j}\right)$$

$$\delta e_\alpha = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\overline{e}_\alpha}{\partial q_j}\delta q_j = \sum\frac{\partial\dot{\overline{e}}_\alpha}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left([\overline{\omega}, \overline{e}_\alpha]\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{q}_j}, \overline{e}_\alpha\right]\delta q_j$$

$$\delta\overline{u} = \delta\overline{r}_p + \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_{i\alpha}\sum\left[\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{q}_j}, \overline{e}_\alpha\right]\delta q_i =$$

$$= \delta\overline{r}_p + \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j, \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_{i\alpha}\overline{e}_\alpha\right] =$$

$$= \delta\overline{r}_p + \left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j, \overline{\rho}_j\right] = \delta\overline{r}_p + [\overline{\omega}_\delta, \overline{\rho}_i], \quad \overline{\omega}_\delta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta\overline{r}_p) + \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, [\overline{\omega}_\delta, \overline{\rho}]) =$$

$$= (\sum\overline{F}_i, \delta r_p) + \left(\overline{\omega}_\delta, \sum_{i=1}^{N}[\overline{\rho}_i, \overline{F}_i]\right) = (\overline{F}, \delta\overline{r}_p) + (\overline{\omega}_\delta, \overline{M}_p)$$

Следствие. $\overline{F}^{(i)} = 0$, $\overline{M}_p^{(i)} = 0 \Rightarrow$ *внутренние связи в твердом теле идеальны.*

Пример (АТТ с неподвижной точкой).

$n = 3,$

$q = (\varphi, \psi, \Theta)^T, \quad \overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{e}_z + \Theta\overline{e}_{x_1} + \dot{\varphi}\overline{e}_\zeta$

$\overline{\omega}\delta = \delta\psi\overline{e}_z + \delta\Theta\overline{e}_{x_1} + \delta\varphi\overline{e}_\zeta$

$\delta A = \left(\overline{M}_O, \delta\psi\overline{e}_z + \delta\Theta\overline{e}_x + \delta\varphi\overline{e}_\zeta\right) =$

$= (\overline{M}_O, \overline{e}_z)\delta\psi + (\overline{M}_O, \overline{e}_{x_1})\delta\Theta + (\overline{M}_O, \overline{e}_\zeta)\delta\varphi$

Утверждение 22. *Если обобщенная координата — это угол поворота силы относительно некоторой оси, то обобщенная сила — это момент силы относительно этой же оси.*

13.5 Уравнения Лагранжа второго рода

Теорема 28. *Если связи, наложенные на механическую систему, идеальны и голономны, то уравнения ее движения имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{N}(M_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = 0, \quad \overline{r}_i = \overline{r}_i(\overline{q}, t)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i, \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum i = 1^N(m_i\ddot{\overline{r}}_i - \overline{F}_i\cdot\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j})\right)\delta q_j = 0$$

$\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ — независимые $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\overline{r}}_i - F_i, \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\right) = 0, \quad \forall j = \overline{1, \ldots n}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{F}_i, \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{Q_j}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i, \ddot{\overline{r}}_i, \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\overline{r}}_i, \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\overline{r}}_i, \frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\overline{r}}_i, \frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial\dot{q}}\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\overline{r}}, \frac{\partial\dot{\overline{r}}_i}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{(\dot{\overline{r}}_i, \dot{\overline{r}}_i)}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{(\dot{\overline{r}}_i, \dot{\overline{r}}_i)}{2}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

■

Следствие. *Связи идеальны и голономны, а силы потенциальны* $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial\overline{q}} = 0, L = T - \Pi$$

Определение. L *— лагранжиан системы, система лагранжева.*

$\exists\Pi(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, t), \quad \operatorname{grad}_{\overline{r}_i}\Pi = -\overline{F}_i$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\overline{F}_i, \delta\overline{r}_i) = (\overline{F}, \delta\overline{r}) = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\overline{r}}, \delta\overline{r}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \Pi(\overline{r}(\overline{q},t),t)}{\partial \overline{r}}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial \overline{q}_j}\right)\delta q_j = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\delta q_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$L = T - \Pi = T(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t) - \Pi(\overline{q}, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \overline{q}} = \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} + \overline{Q}$$

$$\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T, \quad \dot{\overline{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \quad \overline{r}_i = r_i(\overline{q}, t)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overline{r}}_i^{\,2} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{\text{структура кинетической энергии}} = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$T_1 = \sum_j \underbrace{\sum_i m_i \left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \overline{q}_j}, \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t}\right)}_{b_j} \dot{q}_j = \sum_j b_j \dot{q}_j = (\overline{b}, \dot{\overline{q}})$$

$$\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T, \overline{b} = \overline{b}(\overline{q}, t)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \underbrace{\sum_i m_i \left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{a_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}), \quad A = (a_{jk}), A = A^T$$

Утверждение 23. *A — положительно определенная матрица.*

Доказательство.

$$\delta\overline{q} = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n)^T, \delta\overline{r} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \overline{r}}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$\delta\overline{r} = 0 \Leftrightarrow \delta\overline{q} = 0$$

$$(A\delta\overline{q}, \delta\overline{q}) = \sum_{j=1}^{N} m_i \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}, \delta a_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i(\delta r_i)^2 = (M\delta\overline{r}, \delta\overline{r}) > 0, \forall \delta\overline{q} \neq 0$$

∎

Следствие. $\det A \neq 0$.

13.6 Свойства уравнений Лагранжа

Уравнения Лагранжа:

1. Связи идеальны и голономны:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}$$

2. Связи идеальны и голономны, а активные силы потенциальны:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = 0$$

3. Связи идеальны и голономны, а активные силы не потенциальны:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}^*$$

Где $L = T - \Pi$, $\overline{Q}^*$ — обобщенные силы, вызванные непотенциальными активными силами.
$\overline{Q}^*(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$ — обобщенный потенциал, если $\exists V(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}^* \Rightarrow L = T - \Pi - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}} = 0$$

1. Ковариантность по отношению к выбору обобщенных координат

$$\overline{q} \longrightarrow T(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t), \quad \overline{Q}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t) \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}$$

$$\overline{q}' \longrightarrow T'(\overline{q}', \dot{\overline{q}}, t) = T(\overline{q}, (\overline{q}', t), \ \dot{\overline{q}}'(\dot{\overline{q}}', \overline{q}', t), \ t), \quad \overline{Q}'$$

2. Калибровочная инвариантность

Утверждение 24. *Уравнения Лагранжа не меняются при добавлении кинетической энергии полной производной гладкой функции от обобщенных координат и времени.*

$$T' = T + \frac{d}{dt} f(\overline{q}, t)$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} f(\overline{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial \overline{q}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial T'}{\partial \overline{q}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}$$

■

Утверждение 25. *В Лагранжевой системе*

$$L' = c_1 L + \dot{f} + c_2, \quad c_1 \neq 0, \quad c_1 = const, c_2 = const$$

3. Разрешимо относительно $\ddot{\overline{q}}$

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j,k} q_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\right) =$$

$$= \sum_k a_{ik}\dot{q}_k + \sum_j a_{ji}\dot{q}_j = 2\sum_k a_{ik}\dot{q}_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\overline{q}}}\left(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) = 2A\dot{\overline{q}}$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\overline{q}}}, \dot{\overline{q}}\right) = 2T_2 \text{ (формально, теорема об однородных функциях)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\overline{q}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(A\dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}) + (\overline{b}, \dot{\overline{q}}) + T_0\right) = \frac{d}{dt}\left(A(\overline{q}, t)\dot{\overline{q}} + \overline{b}(\overline{q}, t)\right) =$$

$$= A\ddot{\overline{q}} + \overline{\beta}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{q}} = \frac{\partial}{\partial \overline{q}}\left(T_2 + T_1 + T_0\right) = \overline{\varphi}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$$

$$A\ddot{\overline{q}} + \overline{\beta} - \overline{\varphi} = \overline{Q} \Rightarrow A\ddot{\overline{q}} = \overline{\psi}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t)$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \ddot{\overline{q}} = A^{-1}\overline{\psi}(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t) = f(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t) \tag{18}$$

■

Замечание. *Система* (18) *может быть записана в форме Коши:*

$$\begin{cases} \dot{\overline{q}} = \overline{v} \\ \dot{\overline{v}} = f(\overline{q}, \dot{\overline{q}}, t) \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \overline{x} = (q_1, \ldots, q_k, v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{2n} \\ \dot{\overline{x}} = \overline{F}(\overline{x}, t) \end{array}$$

13.7 Первые интегралы Лагранжевой системы координат

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}}, \quad L = T - \Pi$$

13.7.1 Циклический интеграл

Определение. q_1 *— циклическая координата, если* $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$.

Утверждение 26.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} = c = const$$

Доказательство.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}_1} = c = const$$

■

Пример (Движение точки в центральном поле)**.**

$L = T - \Pi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \Pi(r), \quad F = F(r)$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = c = const$

Пример. *Волчок Лагранжа.*

13.7.2 Обобщенный интеграл (интеграл Пенлеве-Якоби)

Утверждение 27.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \left(\frac{\partial L}{\partial \overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) - L = const$$

Доказательство.

$\frac{\partial L}{\partial t} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}}, \dot{\overline{q}}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}}, \dot{\overline{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}}, \dot{\overline{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}E = 0 \Rightarrow E = const$

■

Замечание.

$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$

$E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}}, \overline{q}\right) - L = \underbrace{\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\overline{q}}}, \dot{\overline{q}}\right)}_{2T_2} + \underbrace{\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\overline{q}}, \dot{\overline{q}}}\right)}_{T_1} + 0 - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi = T_2 - T_0 + \Pi$

если $T = T_2$, *то* $E = T_2 + \Pi = T + \Pi$ *— полная энергия*

если $T \neq T_2$, *то* $E = T_2 - T_0 + \Pi$ *— обобщенная энергия*

Следствие. *Если связи идеальные, голономные и стационарные, а активные силы консервативны, то*

$$T + \Pi = const$$

Доказательство. 1. Связи идеальные, голономные, значит силы потенциальны.

2. Связи стационарны $\Rightarrow \overline{r}_i(\overline{q}, t) = \overline{r}_i(q)$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_1 = 0, T_0 = 0, T = T_2.$$

3.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow E = T_2 + \Pi - T + \Pi = const$$

■

Обобщение

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \dfrac{\partial L}{\partial \overline{q}} = \overline{Q}^*, L = T_2 - \Pi(\overline{q})$

$\dfrac{dE}{dt} = \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}} - \dfrac{\partial L}{\partial \overline{q}}, \dot{\overline{q}}\right) + 0 = (Q^*, \dot{\overline{q}})$

Замечание.

$$(\overline{Q}, \dot{\overline{q}}) = \sum_j Q_j^* \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N (\overline{F}_i^*, \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j})\right) \dot{q}_j = \sum_{i=1}^N \left(\overline{F}_i^*, \sum \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \sum_{i=1}^N (\overline{F}_i^*, \overline{v}_i),\ \textit{т.к.} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial t} = 0$$

Определение. $E = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \equiv 0 \quad \forall \dot{\overline{q}}$ — $\overline{Q}^*$ — *гироскопическая*

Определение. $E = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) \leqslant 0$ — $\overline{Q}^*$ — *диссипативная*

Определение. $E = (\overline{Q}^*, \dot{\overline{q}}) < 0 \forall \quad \dot{\overline{q}} \neq 0$ — $\overline{Q}^*$ — *гироскопическая*