Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Gaussa-Seidla

1. Zastosowanie

Procedura $iZGaussSeidel$ rozwiązuje układ równań liniowych postaci

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\ (1),$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ oznacza macierz kwadratową stopnia n, a $x, b \in R^n$, metodą Gaussa-Seidla.

2. Opis metody

Macierz $\boldsymbol{A}$ układu (1) jest przekształcana na sumę trzech macierzy, tj.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U},$$

gdzie $\boldsymbol{L}$ oznacza macierz trójkątną dolną, $\boldsymbol{D} -$ macierz diagonalną, a $\boldsymbol{U}$ oznacza macierz trójkątną górną. Uwzględniając rozkład macierzy $\boldsymbol{A}$**,** układ równań (1) można zapisać w postaci

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

skąd

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{d})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Ux} + \boldsymbol{b}.$$

Z powyższej zależności wynika następujący proces iteracyjny:

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} + (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{b}. (2)$$

Jeżeli promień spektralny macierzy $-(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{U}$ jest mniejszy od 1, to proces iteracyjny (2) jest zbieżny. Z zależności (2) wynika, że $(k + 1)$-sze przybliżenie $i - tej$ składowej rozwiązania jest określone wzorem

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} - \sum_{j=i+1}^{n} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ii}}}, i = 1, 2, \dots, n, (3)$$

przy czym $a_{ii} \neq 0$. Proces iteracyjny kończy się, gdy

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\|}{\mathbf{max}(\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}}\|, \|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\|)} \leq \boldsymbol{\varepsilon}, x^{k+1} \neq 0\ lub\ x^k \neq 0,$$

gdzie

$$\|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{1}\leq \boldsymbol{i}\leq \boldsymbol{n}}|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|,$$

a ε oznacza zadaną dokładność, lub gdy $x^{k+1} = x^k = 0$ lub też, gdy liczba iteracji w procesie (3) jest większa od przyjętej wartości maksymalnej.

3. Wywołanie procedury

$$iZGaussSeidel(n, a, b, mit, eps, x, it, st)$$

4. Dane

n — liczba równań (równa liczbie niewiadomych),

a — tablica zawierająca wartości elementów macierzy $\boldsymbol{A}$ (element $a[i,j]$ powinien zawierać wartość a_{ij}, gdzie $i,j = 1, 2, \ldots, n$),

b — tablica zawierająca wartości składowych wektora $\boldsymbol{b}$ (element $b[i]$ powinien zawierać wartość b_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$);

mit — maksymalna liczba iteracji w procesie (3),

eps — względna dokładność rozwiązania,

x — tablica zawierająca początkowe przybliżenia wartości x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Uwaga:
Po wykonaniu procedury $iZGaussSeidel$ wartości elementów tablicy x są zmienione.

5. Wyniki

xi — tablica zawierająca rozwiązanie (element $x[i]$ zawiera wartość $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$),

it — liczba iteracji wykonanych w procesie (3).

6. Inne parametry

st — zmienna, której w procedurze $iZGaussSeidel$ przypisuje się jedną z następujących wartości:

- 1, jeżeli $n < 1$,
- 2, gdy macierz A jest osobliwa,
- 3, jeżeli wymagana dokładność rozwiązania nie jest osiągnięta po mit iteracjach,
- 0, w przeciwnym wypadku.

Uwaga:
Jeżeli $st = 1\ lub\ 2$, to po wykonaniu procedury $iZGaussSeidel$ elementy tablicy x nie są zmienione. Gdy $st = 3$, to x zawiera ostatnio obliczone przybliżenie rozwiązania.

7. Typy parametrów

$\boldsymbol{Integer}: it, mit, n, st$
$\boldsymbol{Extended}: interval$
$\boldsymbol{imatrix}: a$
$\boldsymbol{ivector}: b, x$

8. Identyfikatory nielokalne

$\boldsymbol{interval}$ — nazwa typu rekordowego postaci:

$\boldsymbol{type}\ interval = record$
$\boldsymbol{var}\ a, b : Extended;$

Rekord zawiera przeciążone operatory, procedury oraz funkcje dotyczące obliczeń na arytmetyce przedziałowej. Szczegóły implementacji zawarte w pliku $IntervalArithmetic32and64.pas$

$\boldsymbol{ivector}$ – nazwa typu tablicowego $[q_1 \, .. \, q_n]$ o elementach typu $\boldsymbol{interval}$, gdzie $q_1 \le 1$ oraz $q_n \ge n$,

$\boldsymbol{imatrix}$ – nazwa typu tablicowego $[q_1 \, .. \, q_n, \; q_1 \, .. \, q_n]$ o elementach typu $\boldsymbol{interval}$, przy czym $q_1 \le 1$ i $q_n \ge n$,

9. Przykłady

Przykład I

Dane:

n=2;

$a[1,1].a := 3, \quad a[1,1].b := 3, \quad a[1,2].a := 2, \quad a[1,2].b := 2,$
$a[2,1].a := 2, \quad a[2,1].b := 2, \quad a[2,2].a := 6, \quad a[2,2].b := 6,$
$b[1].a := 1, \quad b[1].b := 1, \quad b[2].b := 1, \quad b[2].a := 1,$
$x[1].a := 8, \quad x[1].b := 8, \quad x[2].a := 10, \quad x[2].b := 10,$
$mit := 20, \quad eps = 1e - 3 \,,$

Wyniki:

$x[1].a := 2.0003612818732465E + 0000, \quad x[1].b := 2.0003612818732466E + 0000,$
$x[2].a := 1.0001806409366232E + 0000, \quad x[2].b := 1.0001806409366233E + 0000,$
$st = 0, \quad it = 11$

Przykład II

Dane:

n=4;

$a[1,1].a := 0, \quad a[1,1].b := 0, \quad a[1,2].a := 0, \quad a[1,2].b := 0,$
$a[1,3].a := 1, \quad a[1,3].b := 1, \quad a[1,4].a := 2, \quad a[1,4].b := 2,$
$a[2,1].a := 2, \quad a[2,1].b := 2, \quad a[2,2].a := 1, \quad a[2,2].b := 1,$
$a[2,3].a := 0, \quad a[2,3].b := 0, \quad a[2,4].a := 2, \quad a[2,4].b := 2,$
$a[3,1].a := 7, \quad a[3,1].b := 7, \quad a[3,2].a := 3, \quad a[3,2].b := 3,$
$a[3,3].a := 0, \quad a[3,3].b := 0, \quad a[3,4].a := 1, \quad a[3,4].b := 1,$
$a[4,1].a := 0, \quad a[4,1].b := 0, \quad a[4,2].a := 5, \quad a[4,2].b := 5,$
$a[4,3].a := 0, \quad a[4,3].b := 0, \quad a[4,4].a := 0, \quad a[4,4].b := 0,$
$b[1].a := 1, \quad b[1].b := 1, \quad b[2].b := 1, b[2].a := 1,$
$b[3].a := 1, \quad b[3].b := 1, \quad b[4].a := 1, \quad b[4].b := 1,$
$x[1].a := 0, x[1].b := 0, x[2].a := 0, x[2].b := 0,$
$x[3].a := 0, x[3].b := 0, x[4].a := 0, \quad x[4].b := 0,$
$mit := 100, \quad eps = 1e - 14 \,,$

Wyniki:

$x[1].a := -1.1616451848058977E - 0020, \quad x[1].b := 7.7443012320393174E - 0021,$
$x[2].a := 1.9999999999999999E - 0001, \quad x[2].b := 2.0000000000000001E - 0001,$
$x[3].a := 1.9999999999999999E - 0001, \quad x[3].b := 2.0000000000000001E - 0001,$
$x[4].a := 3.9999999999999999E - 0001, \quad x[4].b := 4.0000000000000001E - 0001,$
$st = 0, \quad it = 46$

Przykład III

Dane:

n=4;

$a[1,1].a := 0, \quad a[1,1].b := 0, \quad a[1,2].a := 0, \quad a[1,2].b := 0,$

$a[1,3].a := 1, \quad a[1,3].b := 1, \quad a[1,4].a := 2, \quad a[1,4].b := 2,$
$a[2,1].a := 2, \quad a[2,1].b := 2, \quad a[2,2].a := 1, \quad a[2,2].b := 1,$
$a[2,3].a := 0, \quad a[2,3].b := 0, \quad a[2,4].a := 2, \quad a[2,4].b := 2,$
$a[3,1].a := 7, \quad a[3,1].b := 7, \quad a[3,2].a := 3, \quad a[3,2].b := 3,$
$a[3,3].a := 0, \quad a[3,3].b := 0, \quad a[3,4].a := 1, \quad a[3,4].b := 1,$
$a[4,1].a := 0, \quad a[4,1].b := 0, \quad a[4,2].a := 5, \quad a[4,2].b := 5,$
$a[4,3].a := 0, \quad a[4,3].b := 0, \quad a[4,4].a := 0, \quad a[4,4].b := 0,$
$b[1].a := 1, \quad b[1].b := 1, \quad b[2].b := 1, b[2].a := 1,$
$b[3].a := 1, \quad b[3].b := 1, \quad b[4].a := 1, \quad b[4].b := 1,$
$x[1].a := 0, x[1].b := 0, x[2].a := 0, x[2].b := 0,$
$x[3].a := 0, x[3].b := 0, x[4].a := 0, \quad x[4].b := 0,$
$mit := 30, \quad eps = 1e-14$,

***Wyniki*:**

$x[1].a := -2.1063457742631235E-0014, \quad x[1].b := -2.1063430637576921E-0014,$
$x[2].a := 1.9999999999999999E-0001, \quad x[2].b := 2.0000000000000001E-0001,$
$x[3].a := 1.9999999999970511E-0001, \quad x[3].b := 1.9999999999970512E-0001,$
$x[4].a := 3.9999999999999999E-0001, \quad x[4].b := 4.0000000000000001E-0001,$
$st = 3, \quad it = 30$