

Skript zum Repetitorium

# Grundlagen der Quantenmechanik

Hildegard Uecker      Andreas Sorge

23. September 2012

Organisation zur Erforschung komplexer adaptiver Systeme  
(or-cas)

Hildegard Uecker  
Universität Wien  
Mathematics and BioSciences Group  
Nordbergstraße 15  
1090 Wien  
Österreich  
hildegard.uecker@univie.ac.at

Andreas Sorge  
MPI für Dynamik und Selbstorganisation  
Network Dynamics Group  
Bunsenstraße 10  
37073 Göttingen  
Deutschland  
as@ds.mpg.de

Dieses Skript basiert teilweise auf Vorlagen von Christian Köhler, Maria Lenius, Rene Schulz, Christoph Solveen und Fabian Stiewe.

Dieses Skript wird gepflegt auf GitHub.  
<https://github.com/or-cas/qm-grundlagen>

Organisation zur Erforschung komplexer adaptiver Systeme (or-cas) e.V.



Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

# Vorwort

Das vorliegende Dokument entsteht als Skript für eine einwöchige Lehrveranstaltung „Repetitorium Quantenmechanik“ der Verfasser in den Sommersemestern 2011 und 2012 an der Fakultät für Physik der Universität Göttingen.

Ziel des Repetitoriums und dieses Skriptes ist, innerhalb von fünf Tagen die zentralen theoretischen Inhalte der Pflichtvorlesung „Quantenmechanik“ im Bachelorstudengang Physik zu wiederholen und anhand von Übungsaufgaben aufzuarbeiten. Unser Schwerpunkt bei Auswahl und Darstellung des Stoffes ist, insbesondere für die nicht theoretisch oder mathematisch veranlagten Teilnehmer in der gegebenen Zeit einen roten Faden durch Begriffe und vor allem Rechenmethoden der Quantenmechanik zu spinnen. Dafür müssen wir an vielen Stellen auf weiterführende Darstellungen verzichten, die über das aus unserer Sicht notwendige Verstehen zum Bestehen hinausgehen, obgleich sie Vorlesungsstoff und damit auch klausurrelevant sein mögen.

Wir danken unseren Vorgängern Christian Köhler, Maria Lenius, Rene Schulz, Christoph Solveen und Fabian Stiewe für das Erstellen und Überlassen ihrer Unterlagen für das Repetitorium Quantenmechanik, die uns wertvolle Anregungen zur Strukturierung und Ausgestaltung unseres Skripts sowie Übungsaufgaben geliefert haben. Die in diesem Skript gemachten Fehler sind natürlich unsere eigenen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Didaktischer Ansatz</b>	<b>1</b>
<b>Die Woche im Überblick</b>	<b>3</b>
<b>1 Montag: Wellenmechanik</b>	<b>5</b>
<b>2 Dienstag: Dirac-Formalismus</b>	<b>7</b>
2.1 Der Stern-Gerlach-Versuch . . . . .	7
2.1.1 Aufbau und gemessene Größen . . . . .	7
2.1.2 Hintereinanderschaltung von Stern-Gerlach-Apparaturen . . . . .	9
2.2 Zustände, Observable, Operatoren . . . . .	10
2.2.1 Der quantenmechanische Zustand . . . . .	10
2.3 Physikalische Interpretation . . . . .	11
2.4 Das Spin- $\frac{1}{2}$ -System und die Pauli-Matrizen . . . . .	11
2.5 Die Wellenfunktion im Dirac-Formalismus . . . . .	11
2.6 Die Dynamik von Quantensystemen . . . . .	11
2.6.1 Zeitentwicklung der Zustände (Schrödinger-Bild) . . . . .	11
2.6.2 Zeitentwicklung der Observablen (Heisenberg-Bild) . . . . .	11
<b>3 Mittwoch: Harmonischer Oszillator</b>	<b>13</b>
<b>4 Donnerstag: Drehimpuls, Zentralpotential, Wasserstoffatom</b>	<b>15</b>
<b>5 Freitag: Störungsrechnung</b>	<b>17</b>
<b>Ausblick</b>	<b>19</b>



# **Didaktischer Ansatz**





## **Die Woche im Überblick**



# **1 Montag: Wellenmechanik**



## 2 Dienstag: Dirac-Formalismus

Wir orientieren uns in diesem Kapitel im Wesentlichen an der Darstellung des Sakurai [2] und des Nolting [1].

### 2.1 Der Stern-Gerlach-Versuch

*Der Stern-Gerlach-Versuch offenbart das Paradigma der Quantenmechanik: Zwei-Zustands-Systeme, bei denen die Quantenmechanik unserer lieb gewordenen klassischen Intuition und Interpretation am meisten widerspricht!*

#### 2.1.1 Aufbau und gemessene Größen

Im in Abbildung 2.1 gezeigten und 1922 in Frankfurt a.M. durchgeführten Experiment von Otto Stern und Walther Gerlach werden ungeladene Silberatome in einem Ofen erhitzt. Der aus dem Ofen austretende Strahl ungeladener Silberatome durchläuft ein inhomogenes Magnetfeld und trifft auf einen Schirm, auf dem die Intensitätsverteilung gemessen wird. Mit der Intensitätsverteilung messen wir die Ablenkung der Silberatome im Magnetfeld.

**Frage 1.** Welche Kraft wirkt auf ein ungeladenes Silberatom in einem inhomogenen Magnetfeld?

*Antwort.* Da sie ungeladen sind, wirkt keine Lorentzkraft. Jedes Atom besitzt allerdings ein 5s-Elektron mit einem Eigendrehimpuls, dem Spin  $\mathbf{S}$  mit dem Betrag  $\frac{\hbar}{2}$ . (Die Drehimpulse der anderen 46 Elektronen heben sich gegenseitig auf.) Daher weist das *Leuchtelektron* und somit das gesamte Atom ein magnetisches Moment  $\boldsymbol{\mu}$  parallel und proportional zum Spin auf:  $\boldsymbol{\mu} \propto \mathbf{S}$ . Der Betrag des magnetischen Moments des Elektrons (und damit hier des gesamten Atoms) ist das Bohrsche Magneton  $\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar = |\boldsymbol{\mu}|$ .

**Frage 2.** Wie sieht die Formel der Kraft aus, die auf ein magnetisches Moment  $\boldsymbol{\mu}$  in einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  wirkt?

*Antwort.* Auf ein magnetisches Moment  $\boldsymbol{\mu}$  im (inhomogenen) Magnetfeld  $\mathbf{B}$  wirkt eine Kraft  $\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ . Wir nehmen an, dass sich das Magnetfeld nur in  $z$ -Richtung ändert, sodass  $\mathbf{F} = (0, 0, F)$  auch nur eine Komponente in  $z$ -Richtung hat, mit dem Betrag  $F = \mu \frac{\partial B}{\partial z} \cos \alpha$ . Hier ist  $\alpha = \angle(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B})$  der (konstante) Winkel zwischen magnetischem Moment und Magnetfeld.

**Frage 3.** Was misst der Stern-Gerlach-Apparat effektiv?

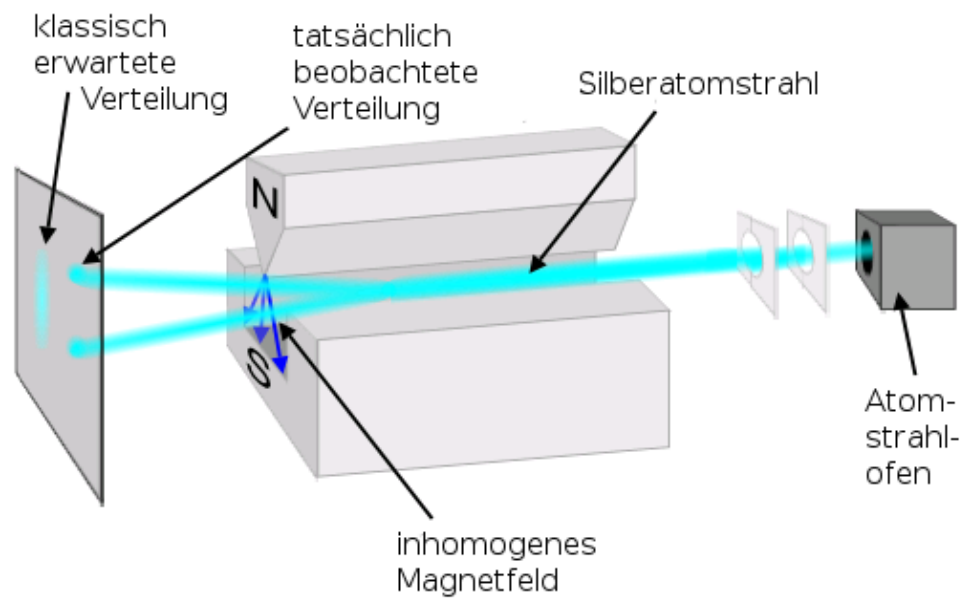


Abbildung 2.1: Der Stern-Gerlach-Versuch (1922). Grafik: Theresa Knott, Wikimedia Commons, lizenziert unter CreativeCommons-Lizenz by-sa-3.0.

## 2.1 Der Stern-Gerlach-Versuch

*Antwort.* Der Stern-Gerlach-Aufbau misst effektiv die Verteilung der Ausrichtungen  $\alpha = \angle(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B})$  der magnetischen Momente der Silberatome zum magnetischen Feld. Genauer gesagt misst der Stern-Gerlach-Aufbau die  $z$ -Komponente  $\mu_z$  des magnetischen Moments jedes Silberatoms, und damit die  $z$ -Komponente  $S_z$  des Spins des Leuchtelektrons.

Die magnetischen Momente  $\boldsymbol{\mu}$  der Silberatome aus dem Ofen sind vor Eintritt in das Magnetfeld zufällig in alle Richtungen orientiert.

**Frage 4.** Welche qualitative Intensitätsverteilung erwarten Sie daher auf dem Schirm?

*Antwort.* Klassisch erwarten wir eine *kontinuierliche* Verteilung zwischen den maximalen Auslenkungen, die gerade der vollständigen Ausrichtung des magnetischen Moments entlang der  $z$ -Richtung entsprechen ( $\mu_z = \pm|\boldsymbol{\mu}|$ ). Wegen der zufälligen Orientierung der magnetischen Momente kommen auch dazwischen alle Werte vor.

**Ergebnis 1.** *Tatsächlich beobachten wir im Stern-Gerlach-Experiment, dass der Strahl im Apparat aufgespalten wird und wir zwei diskrete Komponenten  $z_+$  und  $z_-$  erhalten, die gerade den vollständigen Ausrichtungen der magnetischen Momente entsprechen!*

*Nach der Messung erhalten wir also zwei getrennte Teilstrahlen mit nur den beiden diskreten Werten  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$  und  $S_z = -\frac{\hbar}{2}$  für den Spin.*

**Zusatzfrage.** Warum richten sich nicht schon klassisch gesehen alle magnetischen Momente im Magnetfeld aus?

*Antwort.* Magnetische Momente von ruhenden Körpern (Stabmagnete z.B.) richten sich in der Tat am Magnetfeld aus. Elektronenspins stehen aber für eine *Eigenrotation*, und magnetische Momente  $\boldsymbol{\mu}$  rotierender Körper behalten ihren Winkel zur Feldrichtung  $\mathbf{B}$ : sie richten sich nicht aus, sondern präzessieren (wie ein mechanischer Kreisel) unter dem Drehmoment  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$  um die durch die Feldrichtung  $\mathbf{B}$  gegebene Achse. Dabei bleibt der Winkel zu dieser Achse konstant. Würden sich die Elektronenspins tatsächlich im Magnetfeld ausrichten, müssten zudem alle in Richtung des Magnetfeldes zeigen, und keiner in entgegengesetzte Richtung (wie es aber beim Stern-Gerlach-Experiment beobachtet wird).

### 2.1.2 Hintereinanderschaltung von Stern-Gerlach-Apparaturen

**Frage 5.** Was erwarten Sie (klassisch): Welche Teilstrahlen treten auf, wenn der  $z_-$ -Teilstrahl aus einem Stern-Gerlach-Apparat  $SG_z$  blockiert wird und nur der  $z_+$ -Teilstrahl in einen weiteren Stern-Gerlach-Apparat  $SG_z$  geschickt wird?

**Beobachtung.** Siehe Abbildung 2.2 oben: Es ändert sich nichts. Die Spins bleiben in  $z_+$ -Richtung ausgerichtet.

**Frage 6.** Der  $z_+$ -Teilstrahl aus einer Stern-Gerlach-Apparatur  $SG_z$  wird in einer in  $x$ -Richtung angeordneten Stern-Gerlach-Apparatur  $SG_x$  wieder zur Hälfte in zwei Komponenten  $x_+$  und  $x_-$  aufgeteilt, siehe Abbildung 2.2 Mitte. Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis?

## 2 Dienstag: Dirac-Formalismus

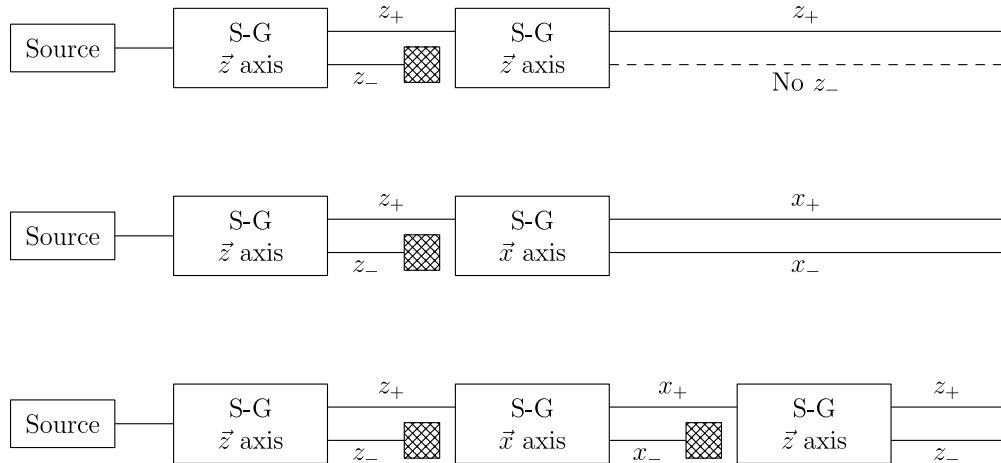


Abbildung 2.2: Sequentielle Stern-Gerlach-Versuche. Grafik: Francesco Versaci, Wikimedia Commons, Public Domain.

Man könnte klassisch vermuten, dass die Spins der Leuchtelektroden der Silberatome im  $z_+$ -Strahl je zur Hälfte durch  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ ,  $S_x = +\frac{\hbar}{2}$  und  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ ,  $S_x = -\frac{\hbar}{2}$  bestimmt sind.

Aber:

**Beobachtung.** Schickt man nur den  $x_+$ -Teilstrahl aus einer Stern-Gerlach-Apparatur  $SG_x$ , der nur aus dem  $z_+$ -Teilstrahl einer  $SG_z$ -Apparatur gewonnen wurde, erneut durch eine  $SG_z$ -Apparatur, so spaltet sich dieser erneut je zur Hälfte in  $z_+$  und  $z_-$  auf!

Willkommen in der Quantenmechanik! Denn:

**Ergebnis 2.** Die Messung von  $S_x$  durch die  $SG_x$ -Apparatur verbunden mit der Selektion des  $x_+$ -Zustands vernichtet alle vorherige Information über den Zustand  $z_+$ .  $S_z$  und  $S_x$  lassen sich nicht gleichzeitig bestimmen!

## 2.2 Zustände, Observable, Operatoren

### 2.2.1 Der quantenmechanische Zustand

Der sequentielle Stern-Gerlach-Versuch widerlegt unsere klassische Intuition: physikalische Messungen verändern nämlich im Allgemeinen den Zustand unseres Systems! Ein weiterer Widerspruch zu unserer klassischen Intuition ist, dass wir nicht alle physikalischen Größen gleichzeitig messen können. Wir können daher nicht alles gleichzeitig über einen Zustand wissen. Wir definieren daher nach Nolting [1]:



## **2.3 Physikalische Interpretation**

## **2.4 Das Spin- $\frac{1}{2}$ -System und die Pauli-Matrizen**

## **2.5 Die Wellenfunktion im Dirac-Formalismus**

## **2.6 Die Dynamik von Quantensystemen**

### **2.6.1 Zeitentwicklung der Zustände (Schrödinger-Bild)**

### **2.6.2 Zeitentwicklung der Observablen (Heisenberg-Bild)**



### **3 Mittwoch: Harmonischer Oszillator**



## **4 Donnerstag: Drehimpuls, Zentralpotential, Wasserstoffatom**



## **5 Freitag: Störungsrechnung**





## **Ausblick**



# Literatur

- [1] Wolfgang Nolting. *Quantenmechanik – Grundlagen*. 6. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.
- [2] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Revised Edition. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.