Типовой расчёт №3   Вариант №5

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\, dx$$

Имеем: $x = \infty$ — особая точка.

Пусть $0 < B < \infty$, тогда:

$$I(B) = \int_0^B e^{-x}\sin x\, dx = -\int_0^B \sin x\, d(e^{-x}) =$$

$$= -\left(\sin x \cdot e^{-x}\Big|_0^B - \int_0^B e^{-x}\cdot\cos x\, dx\right) = -\int_0^B \cos x\, d(e^{-x}) -$$

$$- \sin x \cdot e^{-x}\Big|_0^B = -\left(\cos x\cdot e^{-x}\Big|_0^B + \int_0^B e^{-x}\sin x\, dx\right) - \sin e^{-x}\Big|_0^B$$

$$\Rightarrow \int_0^B e^{-x}\sin x\, dx = -\int_0^B e^{-x}\sin dx - \cos x\cdot e^{-x}\Big|_0^B - \sin x\, e^{-x}\Big|_0^B$$

$$2\int_0^B e^{-x}\sin x\, dx = -\left(\cos x\cdot e^{-x}\Big|_0^B + \sin x\cdot e^{-x}\Big|_0^B\right)$$

$$\int_0^B e^{-x}\sin x\, dx = -\frac{1}{2}\left(\cos x\cdot e^{-x}\Big|_0^B + \sin x\cdot e^{-x}\Big|_0^B\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos B\, e^{-B} - \cos 0\, e^0 + \sin B\, e^{-B} - \sin 0\, e^0\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-B}\cdot\cos B + \sin B\cdot e^{-B} - 1\right)$$

$$\lim_{B \to \infty} I(B) = \lim_{B \to \infty} -\frac{1}{2}\left(\cos B\, e^{-B} + \sin B\, e^{-B} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\lim_{B \to \infty} \frac{1}{e^{B}}}_{\to 0}(\cos B + \sin B) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: несобственный интеграл конечен

и равен $\frac{1}{2}$