

ДИСЦИЛИНА	Физика <small>(полное наименование дисциплины без сокращений)</small>
ИНСТИТУТ	Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова
КАФЕДРА	Кафедра физики и технической механики <small>полное наименование кафедры</small>
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	Лекции <small>(в соответствии с пп.1-11)</small>
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Задерновский Анатолий Андреевич <small>(фамилия, имя, отчество)</small>
СЕМЕСТР	Семестр 2. Учебный год 2023-2024 <small>(указать семестр обучения, учебный год)</small>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	6
ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	6
1.1. Закон Кулона .....	6
1.2. Понятие об электрическом поле. Напряженность электрического поля ...	8
1.3. Теорема Гаусса и ее применение .....	10
ЛЕКЦИЯ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	14
2.1. Потенциал электрического поля .....	14
2.2. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля .....	15
2.3. Потенциал поля точечного заряда и заряженной сферы (шара) .....	16
ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ .....	18
3.1. Полярные и неполярные молекулы. Электронная и ориентационная поляризация .....	18
3.2. Вектор поляризации. Диэлектрическая проницаемость среды .....	19
3.3. Электрическое поле внутри диэлектрика.....	20
3.4. Вектор электрической индукции (электрическое смещение). Теорема Гаусса для электрического поля в веществе .....	22
3.5. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред .....	23
ЛЕКЦИЯ 4. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ .....	25
4.1. Электрическое поле внутри проводника.....	25
4.2. Распределение зарядов в проводнике.....	25
4.3. Электрическое поле вблизи поверхности заряженного проводника .....	26
4.4. Потенциал различных точек проводника.....	27
4.5. Механизм образования поля вблизи поверхности проводника .....	28
4.6. Явление электростатической индукции. Экранировка .....	29
4.7 Метод зеркальных изображений .....	30
ЛЕКЦИЯ 5. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ....	32
5.1. Электроемкость уединенного проводника.....	32
5.2. Конденсаторы. Емкость конденсатора .....	33
5.3. Плоский конденсатор .....	33
5.4. Цилиндрический конденсатор .....	34
5.5. Сферический конденсатор .....	34
5.6. Соединение конденсаторов.....	35
5.7. Энергия заряженного уединенного проводника и энергия конденсатора.....	35

5.8. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии .....	36
ЛЕКЦИЯ 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК .....	36
6.1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования .....	36
6.2. Электродвижущая сила. Разность потенциалов, напряжение .....	37
6.3. Закон Ома для однородного участка цепи .....	38
6.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи .....	39
6.5. Закон Ома для замкнутой цепи.....	39
6.6. Правила Кирхгофа.....	40
6.7. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля-Ленца .....	41
6.8. Законы Ома и Джоуля -Ленца в дифференциальной форме.....	42
ЛЕКЦИЯ 7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ВЕКТОР ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	42
7.1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции .....	42
7.2. Закон Био- Савара- Лапласа и его применение .....	43
7.3. Закон полного тока (теорема о циркуляции вектора магнитной индукции) и его применение .....	45
ЛЕКЦИЯ 8. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.....	48
8.1. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных проводников с током ....	48
8.2. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле .....	50
8.3. Магнитный поток .....	51
8.4. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле..	52
ЛЕКЦИЯ 9. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ....	53
9.1. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца .....	53
9.2. Движение заряженной частицы в магнитном поле .....	54
9.3. Эффект Холла .....	56
9.4. Циклотрон.....	57
ЛЕКЦИЯ 10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ .....	57
10.1. Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты атомов.....	57
10.2. Вектор намагничивания .....	58
10.3. Напряженность магнитного поля. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость .....	58
10.4. Закон полного тока для магнитного поля в веществе .....	59
10.5. Условия на границе раздела двух магнетиков .....	60
10.6. Типы магнетиков. Ферромагнетизм .....	61

ЛЕКЦИЯ 11. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ.....	64
11.1. Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца. Закон Фарадея .....	64
11.2. Явление самоиндукции. Индуктивность .....	66
11.3. Взаимная индукция .....	69
11.4. Энергия магнитного поля.....	69
ЛЕКЦИЯ 12. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА .....	70
12.1. Теория Максвелла для электромагнитного поля .....	70
12.2. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла .....	71
12.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла.....	72
12.4. Третье и четвертое уравнение Максвелла.....	74
12.5. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме .....	74
12.6. Материальные соотношения.....	77
12.7. Уравнения Максвелла для статических полей.....	78
12.8. Уравнения Максвелла в вакууме при отсутствии зарядов и токов. Волновое уравнение .....	78
ЛЕКЦИЯ 13. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР .....	80
13.1. Свободные незатухающие гармонические колебания .....	80
13.2. Свободные механические колебания .....	80
13.3. Свободные колебания в колебательном контуре.....	82
13.4. Энергия гармонических колебаний в колебательном контуре .....	84
ЛЕКЦИЯ 14. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	84
14.1. Свободные затухающие колебания .....	84
14.2. Вынужденные колебания. Резонанс .....	87
ЛЕКЦИЯ 15. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ.....	90
15.1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Векторная диаграмма .....	90
15.2. Биения .....	92
15.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	92
ЛЕКЦИЯ 16. ВОЛНЫ .....	94
16.1. Волны в упругой среде.....	94
16.2. Уравнение плоской волны .....	96
16.3. Волновое уравнение .....	97
16.4. Плоская электромагнитная волна. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. ....	98

16.5 Энергия электромагнитной волны .....	99
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	100

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Одной из основных задач преподавания физики в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «МИРЭА - Российский технологический университет» (РТУ МИРЭА) является формирование у студентов фундаментальных основ знаний, которые создают базу для успешного освоения специальных технических дисциплин и позволяют в дальнейшем свободно ориентироваться в области своей профессиональной деятельности.

В соответствии с учебными планами курс физики в РТУ МИРЭА разбит на три части: (1) механика и молекулярная физика, (2) электричество и магнетизм, (3) оптика и атомная физика. Предлагаемое учебное пособие по второй части курса физики предназначено для студентов всех специальностей. В соответствии с учебным планом материал разбит на 16 лекций. В учебное пособие включены традиционные разделы: электрическое поле в вакууме, электрическое поле в веществе, электроемкость, постоянный электрический ток, магнитное поле в вакууме, магнитное поле в веществе, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном поле, уравнения Максвелла для электромагнитного поля, свободные, затухающие и вынужденные колебания электрического колебательного контура, электромагнитные волны. Большое внимание уделено изложению основополагающих принципов электромагнетизма и формулировке законов электрического и магнитного поля. В конце учебного пособия приведен библиографический список рекомендуемой литературы.

## **ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

### **1.1. Закон Кулона**

Давно было замечено, что янтарь, потертый о мех, способен притягивать легкие предметы. Было обнаружено также, что такие свойства приобретают при трении и многие другие вещества. Подобные явления называли электризацией (от греческого электрон – янтарь), а тела, обладающие способностью притягивать легкие предметы, стали называть наэлектризованными.

Исследования показали, что существует два вида электричества. Условились, что на янтаре, потертом о мех, возникает отрицательное электричество, а на стекле, потертом о шелк – положительное.

Для количественной оценки степени электризации вводят понятие заряда. Электрическим зарядом называется физическая величина, характеризующая свойство тел вступать в электрическое взаимодействие. В международной системе физических величин (СИ) в качестве единицы электрического заряда выбран 1 Кулон (Кл). Заряд в 1 Кл определяется как заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за одну секунду при силе тока в нем в 1 А.

Сейчас понятно, что носителями зарядов являются элементарные частицы, из которых состоят физические тела. Исследования показали, что заряд любого тела по числовому значению всегда кратен элементарному заряду  $e$  равному

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Именно таким зарядом (положительным или отрицательным) и обладают элементарные частицы. Существует лишь несколько таких стабильных заряженных частиц с бесконечным временем жизни (электрон, протон и их античастицы). В настоящее время принимается, что электрон – точечная бесструктурная частица с отрицательным зарядом  $-e$  и массой  $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Протон – носитель положительного заряда  $+e$ , и он имеет сложную структуру, т.е. состоит из отдельных частиц – кварков.

Элементарные заряды не могут бесследно исчезать и возникать вновь. Они могут исчезать и рождаться лишь парами с зарядами одинаковыми по величине и противоположными по знаку. Эта особенность поведения электрических зарядов сформулирована в виде одного из основных законов природы – закона сохранения заряда: *суммарный заряд изолированной системы не может изменяться.*

Расчет силы взаимодействия заряженных тел является, как правило, весьма сложной задачей. В первую очередь удалось описать взаимодействие так называемых точечных зарядов.

*Точечным зарядом называется заряженное тело, размером которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от этого тела до других тел, несущих электрические заряды.*

В 1785 г. французский ученый Шарль Кулон экспериментально установил, что сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов направлена по линии, соединяющей эти заряды, а величина этой силы пропорциональна ве-

личине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, то есть

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

Это утверждение называется **законом Кулона**. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. В векторном виде это соотношение, можно записать таким образом

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \text{ и } \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

где  $F_{21}$  – сила, с которой первый заряд действует на второй,  $F_{12}$  – сила, с которой второй заряд действует на первый, а  $\vec{r}_{12}$  – вектор, направленный от первого заряда ко второму, и равный расстоянию между ними  $r_{12}$  (рис 1.1).

Опыт показывает, что сила взаимодействия двух зарядов не меняется, если вблизи них поместить еще какой-либо заряд. Таким образом, если на

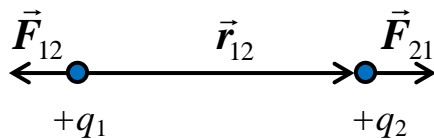


Рис. 1.1

заряд  $q$  действует  $N$  зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , то результирующая сила будет равна

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.1)$$

В настоящее время установлено, что закон Кулона выполняется в диапазоне расстояний между зарядами от  $10^{-16}$  до  $10^7$  м. В международной системе единиц этот закон имеет вид

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/(Н·м<sup>2</sup>) – электрическая постоянная.

## 1.2. Понятие об электрическом поле. Напряженность электрического поля

В современной физике взаимодействие зарядов объясняется наличием электрического поля, создаваемого любым заряженным телом. Пусть заряд  $q$  создает электрическое поле. Поместим малый пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  в какую-либо точку этого поля, заданную радиус-вектором  $\vec{r}$ , направленным от заряда  $q$  к пробному заряду. Согласно закону Кулона (1.2) на заряд  $q_{\text{пр}}$  будет действовать сила

$$\vec{F} = q_{\text{пр}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right).$$

Мы видим, что отношение  $\frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$  не зависит от величины и знака пробного

заряда, то есть может являться характеристикой поля, создаваемого зарядом  $q$ . Эта характеристика называется **напряженностью электрического поля  $\vec{E}$** . *Напряженность электрического поля равна силе, действующей на единичный положительный заряд, находящийся в данной точке поля*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.3)$$

Используя это определение и закон Кулона, получаем для напряженности поля, создаваемого точечным зарядом в вакууме, выражение

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.4)$$

Если электрическое поле создается  $N$  точечными зарядами, то, согласно (1.1), сила, действующая на пробный заряд со стороны всех  $N$  зарядов, будет равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны каждого заряда в отдельности. Следовательно, напряженность результирующего электрического поля будет равна

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (1.5)$$

то есть для напряженностей, также как и для сил, выполняется **принцип суперпозиции**.

*Напряженность электрического поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности.*

Для графического изображения электрических полей используются силовые линии. *Силовая линия (линия напряженности) – линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$*  (рис. 1.2). *Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность.*

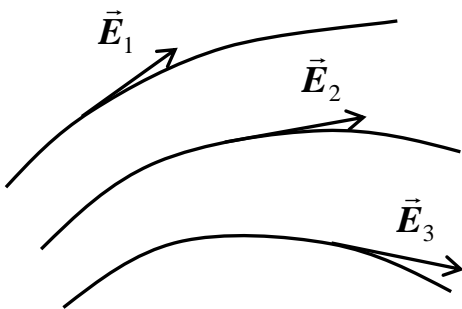


Рис. 1.2

Густота силовых линий берется такой, чтобы количество линий, пересекающих поверхность единичной площади, ориентированную перпендикулярно линиям, была численно равна модулю напряженности электрического поля. Через эле-



ментарную площадку  $dS$ , перпендикулярную силовым линиям, будет проходить  $E dS$  линий, а если вектор  $\vec{E}$  составляет угол  $\alpha$  с нормалью к площадке, то это число будет равно  $E dS \cdot \cos \alpha$ . Данное выражение называется потоком  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через площадку  $dS$ . Таким образом,  $d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}) = E dS \cos \alpha = E_n dS$ , где  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль к площадке  $dS$  и для удобства записи введен вектор  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , где  $\vec{n}$  – вектора единичной нормали к рассматриваемой площадке.

Полный поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  будет, соответственно, равен

$$\Phi = \int_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_S E_n dS. \quad (1.6)$$

### 1.3. Теорема Гаусса и ее применение

Рассмотренный выше принцип суперпозиции (1.5) позволяет найти напряженность электрического поля, создаваемого в некоторой точке системой точечных зарядов. С его помощью можно также рассчитать напряженность поля, создаваемого заряженными телами, разбивая эти тела на малые элементы, каждый из которых можно рассматривать как точечный заряд, с последующим векторным суммированием (интегрированием) напряженностей, создаваемых отдельными точечными зарядами.

В некоторых случаях удастся, однако, избежать этих, как правило, сложных расчетов, если применить теорему Гаусса. Теорема Гаусса позволяет

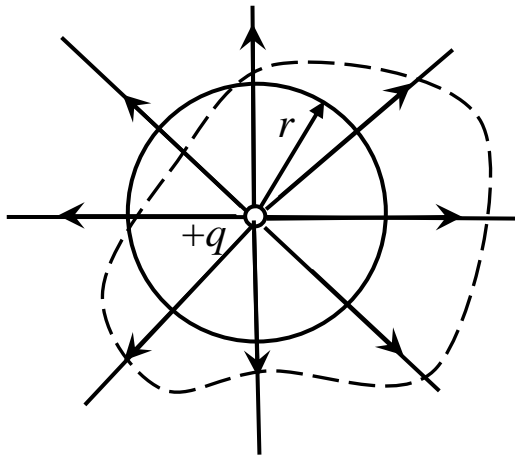


Рис. 1.3

связать поток вектора напряженности  $\vec{E}$  через некоторую замкнутую поверхность с величиной зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью. Рассмотрим сначала частный случай, а именно: определим поток вектора напряженности через произвольную воображаемую сферическую поверхность радиуса  $r$ , в центре которой расположен точечный заряд  $q$ . Электрическое поле, создаваемое этим зарядом, изображается радиальными силовыми

линиями как показано на рис. 1.3. Напряженность электрического поля во всех

точках на сферической поверхности будет одинакова и равна  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ .

Поскольку линии напряженности перпендикулярны к поверхности сферы, то  $E_n = E$  и поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность будет равен

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q \cdot 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Напомним, что поток вектора напряженности равен количеству силовых линий, пересекающих рассматриваемую сферическую поверхность. Это количество не изменится и при замене сферы на произвольную замкнутую поверхность, окружающую рассматриваемый заряд (например, на поверхность, изображенную на рис. 1.3), так как все силовые линии либо начинаются на этом заряде (положительном), либо заканчиваются на нём (отрицательном). Заметим, что, если заряд находится вне ограниченного замкнутой поверхностью пространства, то линии напряжённости пронизывают поверхность чётное число раз (снаружи внутрь и изнутри наружу), в результате чего полный поток через поверхность, не охватывающую заряд, будет равен нулю.

Если внутри поверхности находятся несколько точечных зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получим

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i, \quad (1.7)$$

где  $\sum_i q_i$  - полный заряд в объеме, ограниченном рассматриваемой поверхностью. Данное выражение носит название **теоремы Гаусса**. Эта теорема гласит, что *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на  $\epsilon_0$* . Из соотношения (1.7) видно, что, если алгебраическая сумма зарядов внутри замкнутой поверхности равна нулю, то поток вектора напряженности через эту поверхность тоже будет равен нулю.

Если заряды распределены непрерывно по всему объему внутри замкнутой поверхности, то для нахождения суммарного заряда вводится понятие **объемной плотности заряда**

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.8)$$

Тогда, заключенный в объеме  $V$  суммарный заряд будет равен  $\int_V \rho dV$ , и теорема

Гаусса примет следующий вид

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.9)$$

Рассмотрим применение теоремы Гаусса для расчета напряженности электрического поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью. Для заряда, распределенного по поверхности, вводится параметр, называемый **поверхностной плотностью заряда**

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (1.10)$$

Возьмем бесконечно большую плоскость, на которой равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Напряженность создаваемого плоскостью электрического поля будет везде направлена перпендикулярно ей. В качестве замкнутой поверхности выберем поверхность небольшого цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости, а основания находятся на одинаковом расстоянии от плоскости по обе стороны от нее (рис 1.4). Так как линии напряженности пойдут вдоль боковой поверхности цилиндра, не пересекая её, то поток вектора  $\vec{E}$  через неё будет

равен нулю. Поток через оба основания цилиндра будет одинаков и в сумме составит  $2E \cdot \Delta S$ . Используя теорему Гаусса (1.7), получим  $2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0}$ ,

откуда следует, что

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.11)$$

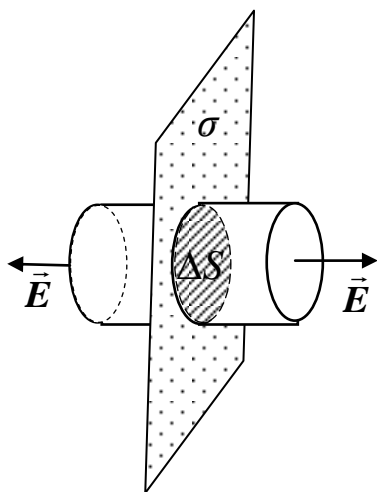


Рис. 1.4

Полученный результат показывает, что напряженность не зависит от расстояния от точки до плоскости, т. е. поле, создаваемое бесконечно большой плоскостью, является однородным. На

практике формула (1.11) может быть использована для точек, находящихся на расстояниях значительно меньших линейных размеров плоскости и вдали от ее краев.

Рассчитаем теперь напряженность электрического поля, создаваемого бесконечно длинной заряженной нитью (цилиндром, трубкой). В этом случае вводится величина, называемая **линейной плотностью заряда**

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим бесконечно длинную прямую нить, на которой равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью  $\tau$ . Из соображений симметрии вытекает, что силовые линии электрического поля будут перпендикулярны нити. Представим себе цилиндр

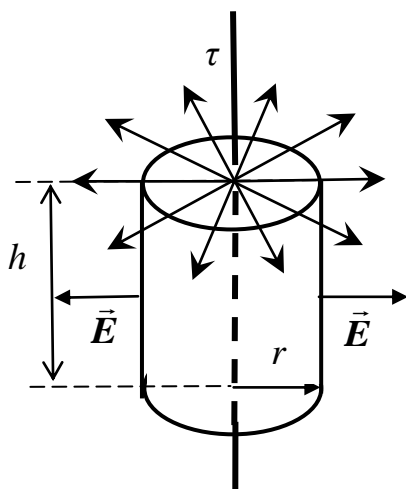


Рис. 1.5

радиусом  $r$  и высотой  $h$ , ось которого совпадает с нитью (см. рис 1.5). Напряженность  $E$  электрического поля в точках, находящихся на боковой поверхности цилиндра, будет одинаковой и направленной по нормали к ней. Поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность будет, очевидно, равен  $E \cdot 2\pi r h$ . Используя теорему Гаусса (1.7), получим

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\tau \cdot h}{\varepsilon_0},$$

откуда следует, что

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (1.13)$$

Эта формула справедлива для расчета полей, создаваемых достаточно длинными нитями, стержнями или трубками вблизи их середины при условии, что  $r \ll l$ , где  $l$  - длина заряженного объекта.

**Поле сферической поверхности** с равномерно распределенным по ней зарядом является, очевидно, радиальным. Пусть радиус такой сферы равен  $R$ , а суммарный заряд  $q$ . Представим себе концентрическую с ней сферу радиуса  $r \geq R$ . Силовые линии будут везде перпендикулярны ей, а значения напряженности электрического поля будут одинаковы на всей ее поверхности.

Применяя теорему Гаусса, получим  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ , откуда имеем  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , что

идентично выражению (1.4) для поля точечного заряда.

Если вообразить сферу радиусом  $r < R$ , то внутри нее зарядов не будет. При этом поток вектора напряженности через эту сферу, а значит и сама напряженность, равны нулю. Таким образом, внутри равномерно заряженной сферы электрическое поле отсутствует, а снаружи оно точно такое же, как поле точечного заряда той же величины, помещенного в ее центр.

Все выше сказанное относится и к полю любого шара (в том числе и полого) в случае, если внутри него суммарный заряд равен нулю, а имеющийся поверхностный заряд распределен равномерно.

## ЛЕКЦИЯ 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### 2.1. Потенциал электрического поля

Из определения напряженности электрического поля следует, что на заряд, находящийся в этом поле действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Под действием этой силы заряд способен двигаться и совершать работу. Таким образом, можно сказать, что заряд в электрическом поле обладает энергией (так же, как обладает энергией тело, находящееся в гравитационном поле).

Поместим для примера точечный заряд  $q$  в однородное электрическое поле (рис. 2.1). При перемещении заряда из точки 1 в точку 2 силы поля совершат работу  $A_{12} = FS = qES$ . Если же заряд перемещается из точки 1 в точку 3 работа сил поля будет равна  $A_{13} = F \cos \alpha L = FS$ , так как  $L \cos \alpha = S$ . При дальнейшем перемещении заряда в точку 2 работа не совершается, поскольку электрическая сила перпендикулярна направлению движения.

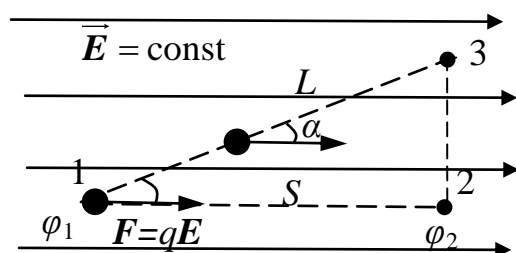


Рис. 2.1

Таким образом, можно заключить, что работа по перемещению заряда в однородном электрическом поле не зависит от формы траектории, и определяется только начальным и конечным его положением. Это означает, что такое поле является потенциальным, а электрические силы являются

консервативными. Нетрудно показать, что любое электростатическое поле также является потенциальным.

Работа консервативных сил на любом замкнутом пути  $L$  будет, очевидно, равна нулю

$$A = \oint_L (\vec{F}, d\vec{l}) = \oint_L q(\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Отсюда следует, что для любого замкнутого контура  $L$

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L E_l dl = 0, \quad (2.1)$$

где  $E_l$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на элемент контура  $dl$ . Такой интеграл называется **циркуляцией**, а выражение (1.14) носит название **теоремы о циркуляции вектора  $\vec{E}$** : *циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.*

По определению, потенциальной энергией  $W$  точечного заряд  $q$  в некоторой точке пространства называется работа сил поля по перемещению

этого заряда из данной точки в точку отсчета. В электростатике точка отсчета потенциальной энергии выбирается на бесконечном удалении от всех зарядов, создающих электрическое поле. Энергия  $W$ , которой обладает точечный заряд  $q$ , пропорциональна величине этого заряда. Поделив  $W$  на  $q$ , получим физическую величину, характеризующую поле в данной точке пространства и называемую **потенциалом**

$$\varphi = \frac{W}{q}. \quad (2.2)$$

В СИ потенциал измеряется в вольтах [В]:  $1\text{В}=1\text{Дж/Кл}$ .

Известно, что в любом потенциальном поле работа сил поля по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 может быть представлена как убыль потенциальной энергии

$$A_{12} = W_1 - W_2. \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что при удалении заряда на бесконечность его потенциальная энергия обращается в ноль, можно заключить, что *потенциал численно равен работе, совершаемой силами поля при удалении единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность*. Как следует из (2.2),  $W = q\varphi$ , и работу  $A_{12}$  можно записать в виде

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.4)$$

Заметим, что потенциалы в точках 2 и 3 на рисунке 2.1 равны друг другу. Такой же по величине потенциал будет и в любой точке на плоскости перпендикулярной силовым линиям поля. Такая плоскость служит примером **эквипотенциальной поверхности**. *Эквипотенциальные поверхности это такие поверхности, все точки которых обладают одинаковым потенциалом*. Одним из свойств эквипотенциальных поверхностей является то, что они всегда перпендикулярны линиям напряженности электрического поля.

## 2.2. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля

Как известно из курса механики, в потенциальных полях существует связь между силой, действующей на тело, и его потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\text{grad} W.$$

Для точечной частицы с зарядом  $q$ , находящейся в электрическом поле  $\vec{F} = q\vec{E}$  и  $W = q\varphi$ , и поэтому

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \quad (2.5)$$

Если напряженность поля является функцией только одной координаты  $x$ , то

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} \text{ и } d\varphi = -Edx.$$

Проинтегрировав это выражение от точки 1 до точки 2 с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно, получим

$$\int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{x_1}^{x_2} Edx,$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx. \quad (2.6)$$

В частности, для однородного поля, когда  $\vec{E} = \text{const}$ , имеем  $\varphi_1 - \varphi_2 = E(x_2 - x_1)$ , или

$$U = Ed, \quad (2.7)$$

где  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , а  $d = x_2 - x_1$ .

В общем случае справедливо интегральное соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) \quad (2.8)$$

где интегрирование идет по произвольной траектории, соединяющей точки 1 и 2. Таким образом, *разность потенциалов двух точек 1 и 2 равна работе сил электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2*.

Из формул (2.7) и (2.8) вытекает, что в СИ напряженность электрического поля измеряется в В/м.

### 2.3. Потенциал поля точечного заряда и заряженной сферы (шара)

Рассмотрим поле, создаваемое положительным точечным зарядом  $q_1$  (рис. 2.2). Предположим, что положительный точечный заряд  $q_2$  перемещается

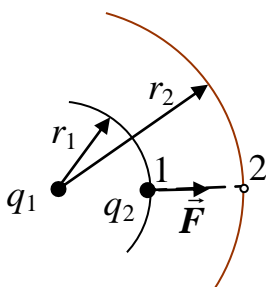


Рис. 2.2

под действием кулоновской силы из точки 1 в точку 2. Так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории, по которой происходит перемещение, то удобно выбрать радиальную траекторию. Тогда, элементарная работа  $dA$  будет равна  $dA = (\vec{F} d\vec{r}) = Fdr$ . Полная работа при перемещении заряда  $q_2$  из точки 1 в точку 2 будет выглядеть следующим образом

$$A_{12} = \int_1^2 F dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.9)$$

Поскольку с другой стороны  $A_{12} = W_1 - W_2$ , то делаем вывод, что энергия заряда  $q_2$  в поле заряда  $q_1$  равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}, \quad (2.10)$$

где  $r$  – расстояние между зарядами. Эту энергию можно также трактовать, как потенциальную энергию взаимодействия двух точечных зарядов. Используя формулу (2.2), получим выражение для потенциала поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от него

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (2.11)$$

Для потенциалов, так же как и для напряженностей, выполняется принцип суперпозиции. Это означает, что если электрическое поле создано системой точечных зарядов, то потенциал в какой-либо точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым из зарядов. Таким образом, потенциал поля системы точечных зарядов равен

$$\varphi = \sum \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}.$$

Как было показано ранее, поле, создаваемое снаружи равномерно заряженной сферы (или шара, заряд которого равномерно распределён по его поверхности), полностью идентично полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы (или шара). Поэтому потенциал на поверхности сферы радиусом  $R$ , по которой распределен заряд  $q$ , равен потенциалу, создаваемому точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $R$  от него, а именно

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (2.12)$$

Так как напряженность поля внутри такой сферы равна нулю, то учитывая соотношение (2.8) делаем вывод, что таким же будет потенциал в любой точке внутри сферы.



## ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

### 3.1. Полярные и неполярные молекулы.

#### Электронная и ориентационная поляризация

Электрическое поле в веществе отличается от поля в вакууме, поскольку в любой материи имеются заряженные частицы, определенным образом взаимодействующие с внешним полем и видоизменяющие его. Рассмотрим сначала электрическое поле в диэлектриках, т.е. в веществах, не обладающих способностью проводить электрический ток.

Различают следующие виды диэлектриков – полярные, неполярные и ионные кристаллы.

Полярные диэлектрики состоят из полярных молекул ( $\text{HCl}$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  и др.). “Центры тяжести” положительных и отрицательных зарядов таких молекул не совпадают, и их можно рассматривать как **электрические диполи**. *Электрическим диполем называют систему, состоящую из двух равных, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (плечо диполя).*

Основной характеристикой диполя (рис. 3.1) является его **электрический момент (дипольный момент)** — вектор, равный произведению заряда на плечо диполя  $l$ , и направленный от отрицательного заряда к положительному

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (3.1)$$

Пусть диполь находится в однородном электрическом поле и его дипольный момент составляет угол  $\alpha$  с силовыми линиями (рис 3.1). Тогда

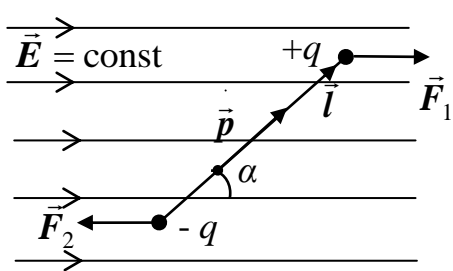


Рис. 3.1

силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , действующие на заряды  $+q$  и  $-q$ , создают вращающий момент величиной  $M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$ . С учетом векторного характера вращающего момента имеем

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (3.2)$$

Этот момент стремится повернуть диполь в положение, при котором он будет параллелен полю.

Дипольный момент полярных молекул отличен от нуля.

Неполярные диэлектрики ( $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  и др.) состоят из неполярных молекул. У таких молекул “центры тяжести” положительных и отрицательных зарядов совпадают друг с другом и их дипольный момент равен нулю.

Кристаллическую решетку ионных кристаллов можно представить как совокупность двух подрешеток, одна из которых образована положительными ионами, другая – отрицательными.

Под воздействием внешнего электрического поля происходит процесс поляризации диэлектриков. В зависимости от вида диэлектрика механизм поляризации может быть одним из следующих типов:

1. полярные молекулы преимущественно ориентируют свои собственные дипольные моменты по направлению поля (ориентационная поляризация);
2. в неполярных молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов смещаются друг относительно друга, и молекула приобретает дипольный момент, ориентированный вдоль вектора  $\vec{E}$  внешнего поля (электронная поляризация);
3. в ионных кристаллах обе подрешетки сдвигаются друг относительно друга, что также приводит к поляризации диэлектрика.

### 3.2. Вектор поляризации. Диэлектрическая проницаемость среды

Процесс поляризации диэлектрика количественно описывается с помощью *вектора поляризации*  $\vec{P}$  – дипольного момента единицы объема диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (3.3)$$

где  $\sum \vec{p}_i$  – векторная сумма дипольных моментов молекул, заключенных в физически малом объеме  $\Delta V$ .

У диэлектриков любого типа вектор  $\vec{P}$  связан с напряженностью электрического поля в той же точке пространства соотношением

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.4)$$

где  $\kappa$  (греческая буква каппа) это *диэлектрическая восприимчивость* – безразмерная постоянная, зависящая от свойств данного вещества и характеризующая его способность к поляризации.

В полярных диэлектриках ориентирующему действию внешнего поля мешает тепловое движение молекул, стремящееся “разбросать” их дипольные моменты по всем направлениям. В результате устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов в направлении поля. Изменение интенсивности теплового движения с температурой обуславливает и температурную зависимость восприимчивости. Оказывается, что диэлектрическая восприимчивость обратно пропорциональна температуре.

### 3.3. Электрическое поле внутри диэлектрика

На рис. 3.2 показан полярный диэлектрик в виде пластины. При отсутствии внешнего поля молекулы расположены хаотично и суммарный

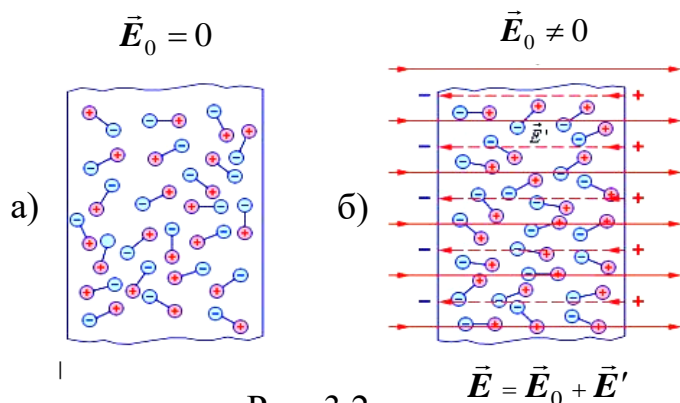


Рис. 3.2

дипольный момент единицы объема диэлектрика (вектор поляризации  $\vec{P}$ ) равен нулю (рис. 3.2 а). При включении перпендикулярного пластине внешнего поля с напряженностью  $\vec{E}_0$ , молекулы начинают ориентироваться вдоль силовых линий (рис. 3.2 б). В результате,

на поверхностях пластины появляются избыточные (не скомпенсированные) положительные и отрицательные заряды. Их называют *связанными зарядами*, подчеркивая, тем самым, что их свобода перемещения весьма ограничена.

Аналогично выглядит результат поляризации неполярных диэлектриков, показанный на рис. 3.3. Связанные заряды на поверхностях пластины создают

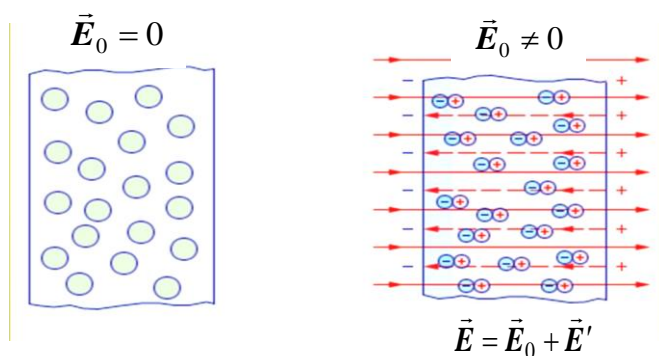


Рис. 3.3

внутри нее поле с напряженностью  $\vec{E}'$ , направленное противоположно  $\vec{E}_0$ . Суммарная напряженность будет равна  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  и по модулю будет меньше, чем  $\vec{E}_0$ .

Установим связь между численным значением вектора поляризации  $\vec{P}$  и поверхностной

плотностью связанных зарядов. Возьмем диэлектрик в виде пластины (рис. 3.4). Выделим в пластине малый объем  $\Delta V$  в виде тонкого цилиндра с образующей, параллельной вектору напряженности внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ . Пусть  $\Delta S$  – площадь оснований выделенного цилиндра,  $l$  – длина его образующей,  $h$  – высота цилиндра, она же толщина пластины. Очевидно, что

$$\Delta V = \Delta S h = \Delta S l \cos \alpha.$$

Из определения вектора поляризации следует, что суммарный дипольный момент в объеме  $\Delta V$  равен

$$P \Delta V = P l \Delta S \cos \alpha.$$

С другой стороны, выделенный цилиндр может быть представлен как диполь с зарядами  $-q = -\sigma' \Delta S$  и  $+q = +\sigma' \Delta S$  ( $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов), расположенными на расстоянии  $l$  друг от друга. Тогда  $Pl \Delta S \cos \alpha = \sigma' \Delta S l$ , откуда

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n. \quad (3.5)$$

Таким образом, получаем утверждение: *поверхностная плотность связанных зарядов численно равна нормальной составляющей вектора поляризации.*

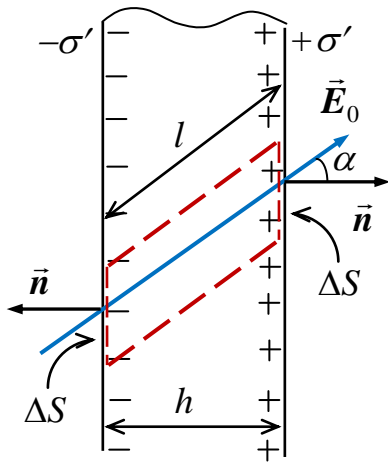


Рис. 3.4

Теперь обратимся к нахождению объемного связанного заряда, возникающего внутри диэлектрика. Представим себе внутри диэлектрика замкнутую поверхность  $S$ . При включении

электрического поля эту поверхность пересечет и выйдет наружу некоторый связанный заряд  $q'_s$ , равный полному связанному заряду на поверхности  $S$ . В соответствии с (3.5) этот заряд будет равен

$$q'_s = \oint_S P_n dS. \quad (3.6)$$

Соответственно, в объёме диэлектрика, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ , возникнет избыточный связанный заряд

$$q' = -q'_s = -\oint_S P_n dS. \quad (3.7)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение: *полный связанный заряд диэлектрика в объеме, ограниченном некоторой замкнутой поверхностью, равен взятому со знаком минус потоку вектора поляризации через эту поверхность.*

Поместим пластину из диэлектрика между двумя большими плоскостями с поверхностными плотностями зарядов  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 3.5). Каждая из

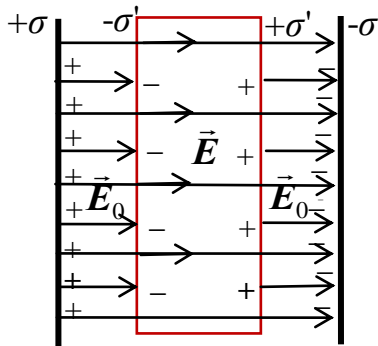


Рис. 3.5

плоскостей создает поле напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

и так как эти поля направлены в одну сторону, общая напряженность будет равна

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Внутри диэлектрика связанные заряды создают

противоположно направленное поле  $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ , и суммарная напряженность в диэлектрике будет равна

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

Поскольку, согласно соотношениям (3.4) и (3.5)  $\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E$ , получим  $E = E_0 - \kappa E$ , и  $E(1 + \kappa) = E_0$ . Безразмерная величина  $1 + \kappa$  обозначается символом  $\varepsilon$  и называется **диэлектрической проницаемостью среды**. Для вакуума  $\kappa = 0$  и  $\varepsilon = 1$ . Напряженность электрического поля в диэлектрической пластине будет тогда равна

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике.

Отсюда вытекает, что если заряженные тела находятся не в вакууме, а в диэлектрической среде (жидкой или газообразной), можно рассчитывать характеристики создаваемых ими электрических полей, вводя в знаменатель полученных в прошлой лекции формул, величину  $\varepsilon$ .

### 3.4. Вектор электрической индукции (электрическое смещение).

#### Теорема Гаусса для электрического поля в веществе

Из рис. 3.5 видно, что силовые линии вектора напряженности могут начинаться и оканчиваться как на свободных, так и на связанных зарядах. В результате на границе диэлектрика происходит скачек напряженности, что сильно затрудняет расчет электрических полей. В частности, при использовании теоремы Гаусса необходимо учитывать не только свободные, но и связанные заряды. Поэтому, в присутствии диэлектрика теорема Гаусса переписывается как

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{q'}{\varepsilon_0}, \quad (3.9)$$

где  $q$  и  $q'$  соответственно полный свободный и полный связанный заряд, заключенный в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ . Используя (3.7), перепишем (3.9) в виде

$$\oint_S (\varepsilon_0 E_n + P_n) dS = q. \quad (3.10)$$

Если теперь ввести **вектор электрической индукции**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3.11)$$

то соотношение (3.10), переписанное как

$$\oint_S D_n dS = q, \quad (3.12)$$

можно рассматривать в качестве теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$ . Эта теорема гласит: *поток вектора индукции электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности.*

Используя соотношение (3.4), найдем связь векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \kappa \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

или

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (3.13)$$

Вне диэлектрика  $\varepsilon = 1$  и  $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ . Внутри диэлектрика, с учетом (3.8), получаем:  $D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon E_0 / \varepsilon = \varepsilon_0 E_0 = D_0$ . Таким образом, значения вектора электрической индукции внутри и вне диэлектрика оказываются в нашем случае одинаковыми. Из этого следует, что силовые линии для вектора  $\vec{D}$  начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах и не прерываются (в отличие от силовых линий для вектора  $\vec{E}$ ) на границе раздела диэлектриков. Указанное обстоятельство делает теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$  значительно более удобной, чем теорема Гаусса для напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Определив из теоремы Гаусса индукцию электрического поля  $\vec{D}$ , можно затем рассчитать и его напряженность  $\vec{E}$ , используя формулу (3.13). В отсутствии же диэлектрика имеем  $D_n = \varepsilon_0 E_n$ , и утверждение (3.12) переходит теорему Гаусса для вектора  $\vec{E}$ , то есть формулу (1.7).

### 3.5. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред

Необходимо отметить, что в общем случае, когда линии поля идут под некоторым углом к границе раздела, сохраняется только нормальная

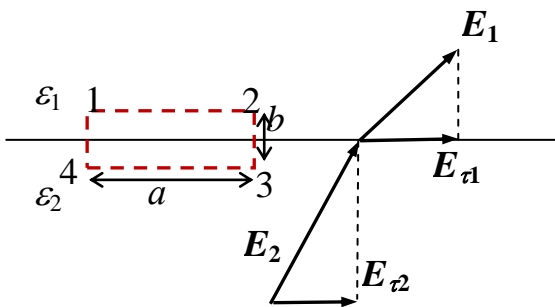


Рис. 3.6

составляющая вектора  $\vec{D}$ . Рассмотрим плоскую границу двух диэлектриков. Пусть  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — их диэлектрические проницаемости (рис. 3.6). Из-за влияния связанных зарядов, возникающих на границе раздела диэлектриков, суммарное электростатическое поле будет различным

в разных веществах.

Найдем циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по прямоугольному контуру 1–2–3–4 (контур  $\Gamma$ ). Очевидно, что

$$\oint_{\Gamma} E_l dl \approx E_{\tau 1} a - E_{\tau 2} a,$$

где  $a$  и  $b$  – длина и ширина выбранного контура,  $E_{\tau 1}$  и  $E_{\tau 2}$  – тангенциальные составляющие векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . На симметричных участках 2–3 и 4–1 составляющие циркуляции равны по модулю и противоположны по знаку, и сумма их равна нулю. Расстояние  $a$  выбираем настолько малым, что в его пределах составляющие  $E_{\tau 1}$  и  $E_{\tau 2}$  можно считать постоянными. Так как, согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{E}$  для электростатического поля, она равна нулю, то получаем  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ .

Для вектора электростатической индукции  $\vec{D}$  при этом имеем

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}, \text{ или } \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Теперь возьмем на границе диэлектриков воображаемую поверхность в виде цилиндра (рис. 3.7) с площадью оснований  $S$  и высотой  $h$  (образующая цилиндра перпендикулярна границе раздела диэлектриков). Считаем, что  $S$  настолько мало, что в пределах этой поверхности поле можно считать однородным.

Согласно (3.12) поток вектора  $\vec{D}$  через такую поверхность равен нулю, т.к. внутри неё нет свободных зарядов. С другой стороны этот поток можно представить как  $0 = D_{n1}S - D_{n2}S + \langle D_n \rangle S_{\text{бок}}$ , где  $S_{\text{бок}}$  – площадь боковой

поверхности цилиндра, а  $\langle D_n \rangle$  – средняя величина составляющей вектора  $\vec{D}$ , перпендикулярная боковой поверхности цилиндра. При  $h \rightarrow 0$  имеем  $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$ , поэтому получаем  $D_{n1} = D_{n2}$ .

Для напряженности электрического поля имеем:  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{n2}$ , откуда

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

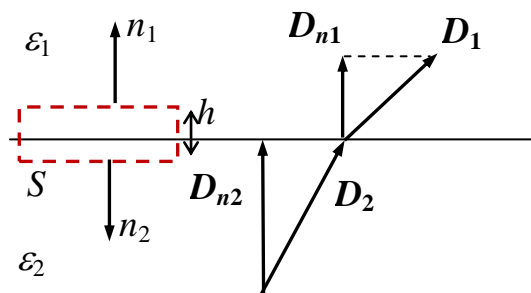


Рис. 3.7

Итак, подводя итог нашим рассуждениям, получаем, что при переходе через границу двух диэлектриков, тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  терпят разрыв, а нормальная

составляющая  $\vec{D}$  и тангенциальная составляющая  $\vec{E}$  не изменяются (непрерывны). При этом выполняются следующие условия

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad (3.14)$$

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{и} \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.15)$$

Если  $\varepsilon_1 = 1$  а  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ , то в случае нормальной ориентации вектора  $\vec{E}$  имеем  $E = E_0/\varepsilon$ , где  $E_0$  – напряженность поля в вакууме,  $E$  – напряженность поля в диэлектрике, что совпадает с полученным ранее соотношением (3.8).

## ЛЕКЦИЯ 4. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 4.1. Электрическое поле внутри проводника

Вещества, содержащие свободные заряды, способные перемещаться под действием сколь угодно слабого электрического поля, называются проводниками. Если внести незаряженный проводник в электрическое поле происходит перемещение свободных зарядов под действием электрических сил. В результате, на противоположных друг другу поверхностях проводника возникают индуцированные заряды противоположных знаков (рис. 4.1). Перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю. Таким образом, в

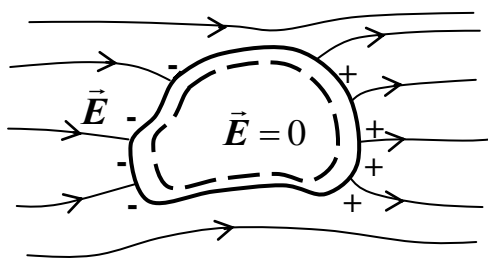


Рис. 4.1

статическом случае, когда прекратится перемещение свободных зарядов в проводнике, напряженность электрического поля внутри проводника будет равна нулю.

Действительно, если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то оно привело бы в движение свободные заряды. В проводнике возник бы электрический ток, и равновесие электрических зарядов было бы невозможно.

### 4.2. Распределение зарядов в проводнике

Если внутри проводника провести произвольную замкнутую поверхность, то поток вектора напряженности электрического поля через нее будет равен нулю, т.к. поле внутри проводника равно нулю. Следовательно, и суммарный заряд внутри произвольного объема проводника будет равен нулю, так как



$$\Phi = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что при статическом распределении электрических зарядов в проводнике их объемная плотность  $\rho$  всегда будет равна нулю. Не скомпенсированные свободные заряды могут располагаться только на поверхности проводника. Поверхностная плотность зарядов  $\sigma$  проводника может отличаться от нуля и быть как положительной, так и отрицательной.

Конечно, внутри проводника есть как положительные заряды (ядра атомов), так и отрицательные заряды (свободные и связанные с ядрами атомов электроны), но они взаимно компенсируются, и в целом внутренние области проводника нейтральны. Расчеты показывают, что образовавшийся за счет флуктуаций объемный заряд рассасывается за время  $\sim 10^{-19}$  с.

#### 4.3. Электрическое поле вблизи поверхности заряженного проводника

Рассмотрим заряженный проводник произвольной формы. Свободные заряды распределяются по поверхности проводника и напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю. Снаружи проводника электрическое поле может быть отлично от нуля. Докажем, что *напряжённость электрического поля вблизи поверхности проводника направлена перпендикулярно его поверхности*.

Для доказательства этого вычислим циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по замкнутому прямоугольному контуру ABCD (контур  $L$ ), выбранному вблизи

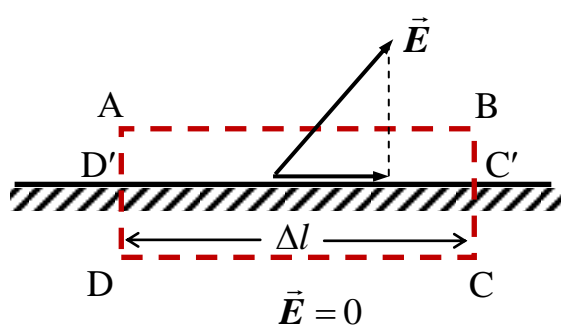


Рис. 4.2

некоторого малого участка поверхности проводника (рис. 4.2). Направление обхода выберем по часовой стрелке. Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю, а значит

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L E_l dl = 0.$$

С другой стороны, так как внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , а участки BC' и AD' вблизи поверхности являются малыми, то циркуляция по замкнутому контуру  $L$  сводится к интегралу

$$\oint_L E_l dl = \int_A^B E_l dl = E_\tau \Delta l = 0.$$

Откуда  $E_r = 0$  и, следовательно, вектор  $\vec{E}$  должен быть перпендикулярен поверхности проводника.

Примерная конфигурация силовых линий вблизи проводника показана на

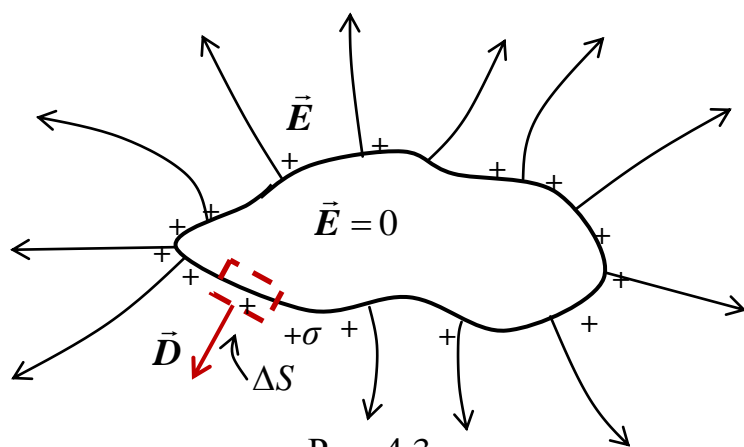


Рис. 4.3

рис. 4.3. Величину напряжённости электрического поля непосредственно у его поверхности найдем, используя теорему Гаусса для вектора индукции  $\vec{D}$ . В качестве замкнутой поверхности возьмём небольшой цилиндр, примыкающий к поверхности проводника (показан на рис. 4.3 красным

цветом). Поток вектора  $\vec{D}$  через всю поверхность этого цилиндра равен потоку через его основание площадью  $\Delta S$ , находящееся вне проводника. Это объясняется отсутствием поля внутри проводника и отсутствием потока через боковую поверхность цилиндра, в связи с малой высотой рассматриваемого цилиндра. Таким образом, теорема Гаусса запишется как  $D\Delta S = \sigma\Delta S$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда вблизи данной точки поверхности, а  $\sigma\Delta S$  – суммарный заряд, оказавшийся внутри цилиндра. Откуда имеем  $D = \sigma$  и, так как  $D = \epsilon_0\epsilon E$ , то

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}, \quad (4.1)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится проводник.

Заметим, что поверхностная плотность зарядов, а, значит, и напряженность электрического поля зависит от кривизны поверхности проводника. Она велика в тех местах, где поверхность наиболее выпуклая (с малым радиусом кривизны), и значительно меньше в области плоских участков и впадин.

#### 4.4. Потенциал различных точек проводника

*Все точки проводника имеют одинаковый потенциал. Иными словами, разность потенциалов между любыми двумя точками проводника, помещенного в электростатическое поле, равна нулю.* В самом деле, разность потенциалов между любыми двумя точками связана с напряженностью электрического поля известным интегральным соотношением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}), \quad (4.2)$$

где интегрирование идет по произвольной кривой, соединяющей эти две точки. Если обе рассматриваемые точки принадлежат проводнику, то их всегда можно соединить некоторой кривой расположенной целиком внутри проводника. Тогда при интегрировании вдоль этой кривой в правой части соотношения (4.2) получится ноль, так как напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю. Таким образом для произвольных двух точек проводника получаем  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Иными словами, все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Именно поэтому мы говорим не о потенциале в какой-либо точке проводника, как это мы делали для электростатического поля в пустом пространстве, а о потенциале проводника в целом.

Может возникнуть вопрос о том, что будет, если мы соединим рассматриваемые точки некоторой кривой, часть которой расположена вне проводника, где электрическое поле отлично от нуля. Тогда наши рассуждения кажутся неверными. Ответ на этот вопрос заключается в доказанном нами утверждении о консервативности электростатических кулоновских сил. Именно свойство консервативности позволило ввести само понятие потенциала и потенциальной энергии в электростатике. Для напряженности поля консервативных сил интеграл в правой части (4.2) не зависит от вида кривой, соединяющей точки. Если для какой-либо кривой интеграл равен нулю, то он будет равен нулю для всех других кривых.

Другое доказательство утверждения об эквипотенциальности всех точек проводника основано на привлечении дифференциального соотношения между потенциалом и напряженностью, а именно

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \quad (4.3)$$

Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ , откуда сразу следует, что  $\varphi = \text{const}$ , так только производная постоянной величины равна нулю. Таким образом, все точки проводника имеют один и тот же потенциал.

#### 4.5. Механизм образования поля вблизи поверхности проводника

Рассмотрим подробнее механизм образования поля вблизи поверхности проводника. Выделим на поверхности проводника малый участок  $\Delta S$  (рис. 4.4) так, чтобы его можно было считать плоским. Напряженность поля  $\vec{E}$  снаружи проводника вблизи его поверхности складывается из поля  $\vec{E}_1$ , создаваемого зарядами, лежащими на участке  $\Delta S$ , и поля  $\vec{E}_2$ , создаваемого всеми другими зарядами вне участка  $\Delta S$ . Поле зарядов, лежащих на участке проводника  $\Delta S$ ,

нам хорошо известно - это поле создаваемое по обеим сторонам равномерно заряженной плоскости. Поэтому  $\vec{E}_1 = -\vec{E}'_1$  и

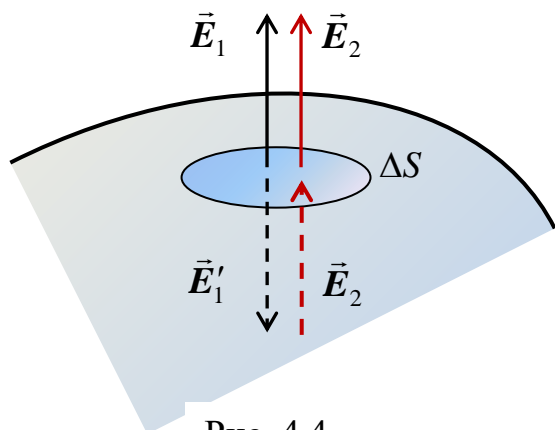


Рис. 4.4

$$E_1 = E'_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где  $\sigma$  это поверхностная плотность заряда проводника на участке  $\Delta S$  и мы предполагаем, что проводник находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  равной единице.

Поле  $\vec{E}_2$ , создаваемое зарядами, расположенными вне площадки  $\Delta S$ , нам неизвестно, но вблизи рассматриваемого участка его легко найти из тех соображений, что напряженность электростатического поля внутри проводника должна быть равна нулю. Ясно, что это может быть только в том случае, если  $\vec{E}_2 = -\vec{E}'_1$ . Но тогда снаружи проводника  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1$  и

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

что совпадает с (4.1) при  $\varepsilon = 1$ .

В итоге, мы приходим к выводу о том, что напряжённость поля вблизи поверхности проводника состоит из двух равных частей, одна из которых создается зарядами данного элемента поверхности, а вторая – всеми остальными зарядами вне этого элемента поверхности.

#### 4.6. Явление электростатической индукции. Экранировка

*Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике при его помещении во внешнее электрическое поле называется электростатической индукцией.* Это явление ответственно за экранировку электрического поля. Если внести незаряженный проводник в электрическое поле, то происходит перемещение свободных зарядов под действием электрических сил. В результате, на противоположных друг другу поверхностях проводника возникают индуцированные заряды противоположных знаков. Перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю.

Как мы знаем, объемный заряд внутри проводника отсутствует, следовательно, удалив внутреннюю часть проводника, мы не внесем никаких изменений в распределение электрических полей во внешней и внутренней

областях проводника. Таким образом, тонкостенная замкнутая проводящая оболочка является экраном для внешних электрических полей (рис. 4.5а). Этот факт используется в радиотехнике для защиты от внешних наводок чувствительных элементов радиосхем.

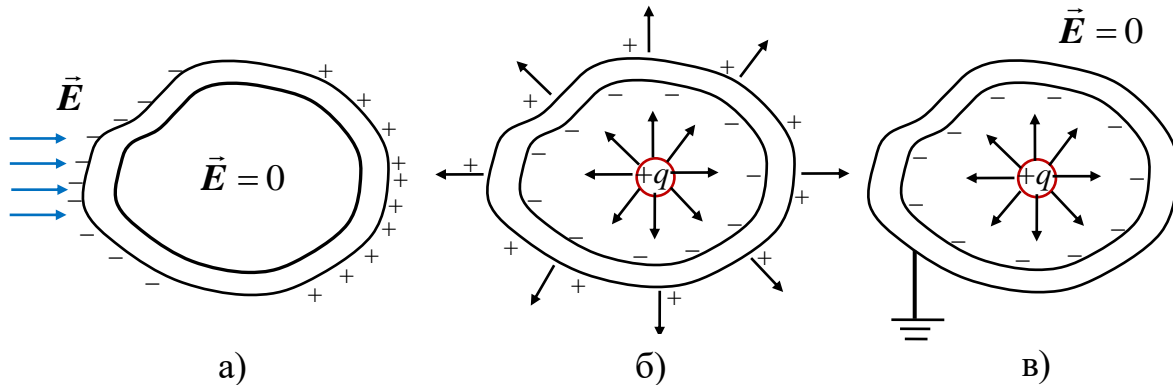


Рис. 4.5

Если внутри замкнутой проводящей оболочки поместить электрический заряд  $+q$  (рис. 4.5б), то отрицательный заряд, индуцированный на внутренней поверхности оболочки, компенсирует заряд  $+q$  внутри проводника, так что полный заряд внутри будет равен нулю. А положительный заряд, индуцированный на внешней поверхности, создает во внешнем пространстве электрическое поле. Видно, что таким способом экранировать поле заряда  $+q$  не удастся. Интересно, что проводящая оболочка скрывает перемещение заряда  $+q$ . При таком перемещении распределение заряда на внутренней поверхности оболочки меняется, а на внешней – нет.

Однако, если проводящую оболочку с помещенным внутри нее зарядом  $+q$  заземлить, то индуцированный на внешней поверхности заряд будет скомпенсирован зарядами протекшими по проводу заземления, и во внешнем пространстве поле становится равным нулю (рис. 4.5в). Таким образом, заземленная проводящая оболочка является экраном для поля зарядов, находящихся внутри нее, то есть полностью скрывает наличие таких зарядов.

#### 4.7 Метод зеркальных изображений

Основной задачей электростатики является расчет электрических полей, создаваемых заряженными телами различной формы. При этом, распределение индуцированного заряда, возникшего на поверхности близлежащих проводников, как правило, неизвестно. Поэтому для решения подобных задач пользуют-

ся разными искусственными методами. Одним из таких методов является метод зеркальных отображений.

Суть этого метода можно понять, если рассмотреть задачу о расчете поля точечного заряда  $+q$ , расположенного над бесконечной плоской проводящей поверхностью. Линии напряженности электрического поля, создаваемого зарядом, должны заканчиваться на индуцированных зарядах противоположного знака на поверхности проводника (рис. 4.6а).

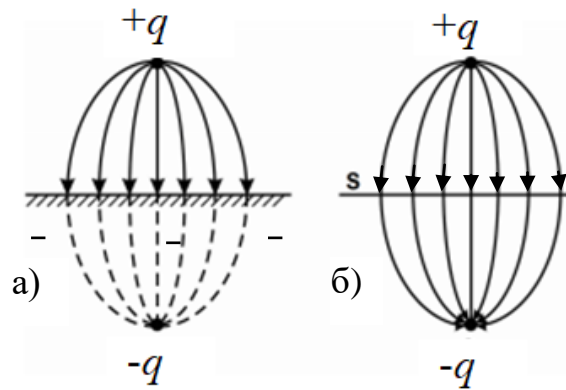


Рис. 4.6

Картина этого поля идентична картине поля создаваемого системой из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов (рис. 4.6б). Плоскость S, которая делит поле на две равных части, является эквипотенциальной, силовые линии перпендикулярны к ней, и поэтому ее можно заменить проводящей плоскостью. Картина поля от этого не изменится. Теперь, если на рис. 4.6а под бесконечной плоскостью мысленно разместить заряд  $-q$ , то получаться две абсолютно одинаковые картины распределения полей. В таком случае говорят, что заряд  $-q$ , который находится на таком же расстоянии от поверхности проводника, что и  $+q$  является его зеркальным отображением в проводящей плоскости. Теперь задача расчета поля заряда, размещенного у поверхности проводника, сводится к расчету поля, создаваемого двумя равными по величине и противоположными по знаку зарядами. А такую задачу решить нетрудно.

Так, сила притяжения заряда  $+q$  к проводящей плоскости, расположенной на расстоянии  $l$  от него, будет равна силе притяжения между зарядами  $+q$  и  $-q$ , расположенными на расстоянии  $2l$  друг от друга, а именно

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l)^2}.$$

В качестве другого примера, рассчитаем поверхностную плотность  $\sigma$  зарядов, индуцированных на бесконечной проводящей плоскости  $S$  точечным зарядом  $+q$ , находящимся на расстоянии  $l$  от плоскости (рис. 4.7).

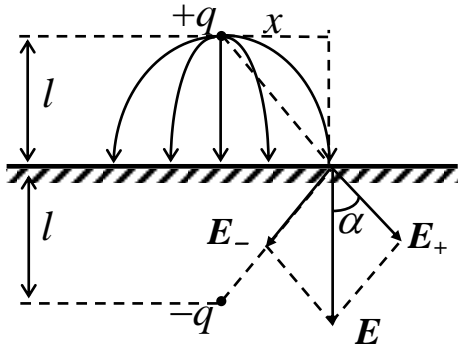


Рис. 4.7

Если мы возьмем заряд  $-q$ , расположенный симметрично заряду  $+q$  относительно плоскости  $S$ , то эта плоскость будет совпадать с эквипотенциальной поверхностью поля, создаваемого системой зарядов  $+q$  и  $-q$ . Следовательно, согласно методу зеркальных изображений, напряженность электрического поля

в выбранной точке (см. рис. 4.7) будет равна  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ . Очевидно, что

$$E = 2E_+ \cos \alpha = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + l^2)} \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

откуда

$$\sigma(x) = \frac{ql}{2\pi(x^2 + l^2)^{3/2}}.$$

## ЛЕКЦИЯ 5. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ.

### 5.1. Электроемкость уединенного проводника

Ранее было доказано, что потенциал заряженного проводника одинаков во всех точках. Как показывает опыт, заряд и потенциал уединенного проводника прямо пропорциональны друг другу, т.е.  $q = C\phi$ . Коэффициент пропорциональности  $C$  называется **электроемкостью проводника**. Таким образом, *электроемкость (емкость) уединенного проводника  $C$  равна отношению заряда проводника к его потенциалу*

$$C = q/\phi. \quad (5.1)$$

В СИ емкость проводника измеряется в фарадах (Ф),  $1\text{Ф} = 1\text{Кл}/1\text{В}$ .

Найдем для примера, емкость проводящего шара. Поскольку потенциал шара равен  $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ , его электроемкость будет определяться формулой

$C = 4\pi\epsilon_0 R$ . Поскольку  $4\pi\epsilon_0 \approx 10^{-10}$  Ф/м, получаем, что шар с емкостью 1 Ф должен иметь радиус порядка  $10^{10}$  м. Для сравнения радиус Земного шара равен примерно  $6,4 \cdot 10^6$  м. Важно отметить, что емкость проводника зависит только от его размеров и формы, и никак не связана с наличием или

отсутствием на нем заряда.

## 5.2. Конденсаторы. Емкость конденсатора

Как уже отмечалось, уединенные проводники обладают малой электроемкостью. На практике же часто необходимо накапливать большие заряды при относительно малых потенциалах. Известно, что потенциал проводника уменьшается при приближении к нему других тел. Соответственно его емкость при этом возрастает. С использованием этого обстоятельства были созданы устройства, обладающие большой емкостью при незначительных размерах и названные конденсаторами.

Простой конденсатор состоит из двух близко расположенных друг к другу проводников (обкладок). Чтобы на емкость конденсатора не влияли окружающие тела, обкладкам придают такую форму, при которой электрическое поле было бы все сосредоточено между ними. Это условие выполняется в случае, если обкладки имеют следующий вид:

- 1) две большие плоские пластины – плоский конденсатор;
- 2) два коаксиальных цилиндра – цилиндрический конденсатор;
- 3) две концентрические сферы – сферический конденсатор.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора линейно зависит от величины их заряда. Под емкостью конденсатора понимают величину, пропорциональную заряду  $q$  и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками  $U$

$$C = q/U. \quad (5.2)$$

Так же как и емкость уединенного проводника, емкость конденсатора измеряется в фарадах (Ф).

## 5.3. Плоский конденсатор

Нетрудно получить выражение для емкости плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных проводящих пластин площадью  $S$ , расстояние  $d$  между которыми много меньше их линейных размеров. Пусть между пластинами находится диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$ . Сообщим обкладкам конденсатора заряды  $+q$  и  $-q$ . Считаем, что все поле сосредоточено в зазоре между пластинами, и оно является однородным. Напряженность этого поля равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждой пластиной,

$$\text{то есть } E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \text{ а разность потенциалов } U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда, согласно определению (5.2),



$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (5.3)$$

Аналогичным образом можно рассчитать емкости цилиндрического и сферического конденсаторов.

#### 5.4. Цилиндрический конденсатор

Цилиндрический конденсатор представляет из себя два коаксиальных проводящих цилиндра с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , вложенных один в другой. Пусть высота цилиндров  $h$  и пространство между ними заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Предполагаем, что ширина зазора между цилиндрами много меньше их радиусов и высоты. Это дает возможность считать, что электрическое поле практически полностью локализовано в пространстве между цилиндрами.

Сообщаем цилиндрам заряды  $+q$  и  $-q$  с линейной плотностью  $\tau = q/h$ . Используя выражение (1.13) для напряженности электрического поля, создаваемого однородно заряженным цилиндром с линейной плотностью заряда  $\tau$ , найдем разность потенциалов между обкладками

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

откуда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\tau h}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}.$$

#### 5.5. Сферический конденсатор

Сферический конденсатор представляет из себя две концентрические проводящие сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Пусть пространство между сферами заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Сообщаем обкладкам заряды  $+q$  и  $-q$ . Очевидно, электрическое поле полностью локализовано в пространстве между сферами. Разность потенциалов между обкладками

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

откуда

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

### 5.6. Соединение конденсаторов

Конденсаторы часто соединяют в батареи. При параллельном соединении, напряжения на конденсаторах одинаковы  $U = \text{const}$ . Общая емкость

системы равна  $C = \frac{q}{U} = \frac{\sum q_i}{U}$  и так как  $C_i = q_i/U$ , то получаем

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \sum_i C_i.$$

В случае последовательного соединения заряды на всех конденсаторах одинаковы  $q = \text{const}$ , а общее напряжение на конденсаторах равно сумме напряжений на каждом из них. Для всей системы получим  $\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{\sum U_i}{q}$ , и так

как  $\frac{U_i}{q} = \frac{1}{C_i}$ , то имеем окончательно

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

### 5.7. Энергия заряженного уединенного проводника и энергия конденсатора

Ранее было показано, что потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов равна  $W = q_1\varphi_{12}$ , где  $\varphi_{12}$  – потенциал, создаваемый зарядом 2 в точке, где находится заряд 1. Очевидно, что  $q_1\varphi_{12} = q_2\varphi_{21}$ , поэтому энергию взаимодействия двух точечных зарядов можно представить в виде

$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21})$ . Аналогично для системы нескольких точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \quad (5.4)$$

где  $\varphi_i = \sum_{j \neq i} \varphi_{ij}$  – потенциал, создаваемый всеми другими зарядами, кроме самого заряда  $q_i$ , в точке, где расположен заряд  $q_i$ .

Рассмотрим уединенный проводник с зарядом  $q$ . Весь этот заряд распределен по его поверхности, и потенциал всех точек проводника одинаков  $\varphi = \text{const}$ . Тогда из (5.4) получаем  $W = \frac{1}{2} \varphi \sum q_i$ . Так как  $\sum q_i = q$ , и, учитывая, что  $q = C\varphi$ , имеем для энергии заряженного уединённого проводника выражение

$$W = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \varphi^2}{2}. \quad (5.5)$$

Найдем теперь энергию конденсатора. Пусть в конденсаторе потенциал обкладки с зарядом  $+q$  равен  $\varphi_1$ , а потенциал обкладки с зарядом  $-q$  равен  $\varphi_2$ . Тогда энергия конденсатора будет равна (с учетом соотношения  $q = CU$ )

$$W = \frac{1}{2} (q \varphi_1 - q \varphi_2) = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.6)$$

### 5.8. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии

Фактически, энергия заряженных проводников или конденсаторов это энергия создаваемых ими полей. Выразим энергию плоского заряженного конденсатора через напряженность электрического поля

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2d} U^2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 Sd$$

Поскольку  $Sd = V$  – объем конденсатора, а  $U = Ed$ , то получим  $W = (\varepsilon \varepsilon_0 / 2) E^2 V$ .

**Объемная плотность энергии электрического поля**, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объема, будет равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (5.7)$$

где учтено, что  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$ .

Полученные выражения применимы и в случае неоднородного поля. Если  $\Delta V \rightarrow 0$ , то формулы (5.7) дают значение плотности энергии в данной точке. В этом случае, энергия, заключенная в конечном объеме  $V$ , может быть вычислена по следующей формуле

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (5.8)$$

## ЛЕКЦИЯ 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 6.1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования

*Электрическим током называется упорядоченное движение заряженных частиц.* Для появления электрического тока необходимо выполнение следующих условий.

1. Наличие в данной среде зарядов, которые могут перемещаться на

большие расстояния, т.е. свободных зарядов. Носителями тока могут быть электроны, ионы, заряженные микрочастицы.

2. Наличие в данной среде электрического поля, энергия которого затрачивается на перемещение носителей тока.

Электрический ток, возникающий в проводнике вследствие того, что в нем создается электрическое поле, называется *током проводимости*. За направление тока условились считать направление движения положительных зарядов. Количественными характеристиками электрического тока служат *сила тока* и *плотность тока*.

*Сила тока в проводнике равна величине заряда, проходящего в единицу времени через полное сечение проводника*

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (6.1)$$

Единица силы тока – 1 Ампер (А). Это одна из основных единиц СИ и определяется она через магнитное взаимодействие токов. Если сила тока и его направление с течением времени не меняется, то ток называют *постоянным* или *стационарным*. Для постоянного тока сила тока одинакова в любых сечениях проводника.

Для характеристики силы тока в разных точках сечения, через которое он протекает, и распределения силы тока в этом сечении вводится **вектор плотности тока**  $\vec{j}$ . Направление этого вектора совпадает с направлением электрического тока в данной точке. Численное значение плотности тока равно силе тока через единицу поверхности  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно направлению тока

$$j = |\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (6.2)$$

Если известны значения плотности тока во всех точках сечения  $S$  проводника, то можно найти силу тока как

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_S j_n dS, \quad (6.3)$$

где  $j_n$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на нормаль к поверхности. Таким образом, сила тока  $I$  равна потоку вектора плотности тока  $\vec{j}$  через сечение проводника  $S$ .

## 6.2. Электродвижущая сила. Разность потенциалов, напряжение

Как было отмечено выше, одним из условий существования тока является наличие в среде электрического поля. Однако, наличие только электростатиче-

ского поля не может обеспечить постоянного движения носителей по замкнутой цепи, поскольку циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру равна нулю. Равенство циркуляции вектора напряженности нулю означает, что на каком-то участке цепи заряды должны двигаться против поля. Поэтому, для того, чтобы в замкнутом контуре мог существовать постоянный электрический ток, в контуре должны существовать силы не электростатического происхождения (например, силы связанные с химической реакцией в аккумуляторах и батареях). Такие силы называются **сторонними**. *Любое устройство, в котором возникают сторонние силы, называется источником тока. Величина, равная работе сторонних сил по переносу единичного положительного заряда по данному участку цепи называется электродвижущей силой (ЭДС) на данном участке.* Таким образом, ЭДС  $\mathcal{E}$  равна

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \quad (6.4)$$

Как и потенциал, ЭДС измеряется в вольтах.

Если на участке цепи 1 – 2 действует ЭДС  $\mathcal{E}_{12}$ , то работа, совершаемая при перемещении заряда  $q$ , будет состоять из работы электростатических сил и работы сторонних сил

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12} = qU_{12}.$$

Работа сторонних сил может быть как положительной, так и отрицательной. Если сторонние силы препятствуют перемещению заряда  $q$ , то в последней формуле перед ЭДС  $\mathcal{E}_{12}$  надо поставить знак минус.

*Падением напряжения (или просто напряжением) на данном участке цепи называется величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами при перемещении по данному участку единичного положительного заряда.* Таким образом, напряжение на участке цепи 1 – 2 равно

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (6.5)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*. Если на участке цепи действует ЭДС, то такой участок называется *неоднородным*. Для однородного участка цепи напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка, то есть  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

### 6.3. Закон Ома для однородного участка цепи

Опыты показывают, что на однородном участке цепи, между силой тока и напряжением существует связь, которая выражается законом Ома. *Сила тока*

на однородном участке цепи пропорциональна падению напряжения на этом участке

$$I = \frac{U}{R}, \quad (6.6)$$

где  $R$  – электрическое сопротивление проводника, зависящее от его формы, размеров и свойств материала, из которого изготовлен проводник.

Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (6.7)$$

где  $\rho$  – **удельное сопротивление** материала проводника,  $l$  – длина проводника,  $S$  – площадь его поперечного сечения.

За единицу сопротивления в СИ принимается 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток в 1 А. Часто используется также величина  $\sigma = 1/\rho$ , называемая **удельной проводимостью** материала проводника.

Для большинства металлов при нормальных условиях удельное сопротивление линейно зависит от температуры  $\rho \sim T$ . Однако, при низких температурах наблюдается отклонение от этой закономерности. Интересно, что у некоторых металлов (ртуть, свинец, олово, алюминий и др.) при температурах порядка нескольких Кельвин удельное сопротивление скачком падает до нуля, и металл переходит в сверхпроводящее состояние.

#### 6.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Согласно (6.5), напряжение  $U$  на неоднородном участке цепи, по которому течёт ток  $I$  (от точки 1 в сторону точки 2), равно разности потенциалов плюс ЭДС. Поэтому закон Ома для такого участка цепи будет выглядеть следующим образом

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}}{R + r}, \quad (6.8)$$

где  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока. Если сторонние силы направлены против тока (препятствуют перемещению условного положительного заряда), то в формуле (6.8) перед ЭДС  $\mathcal{E}_{12}$  надо поставить знак минус.

#### 6.5. Закон Ома для замкнутой цепи

Если мы имеем дело с замкнутой цепью, то точки 1 и 2 совпадают и  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Таким образом, для замкнутой цепи получаем закон Ома в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (6.9)$$

## 6.6. Правила Кирхгофа

На практике часто используются сложные разветвленные электрические цепи. Для нахождения силы тока в таких цепях применяют правила Кирхгофа. Для формулировки правил Кирхгофа вводятся понятия *узел*, *ветвь* и *контур* электрической цепи. Ветвью называют участок электрической цепи с одним и тем же током. Узлом называют точку соединения трех и более ветвей. Контур - замкнутый путь, проходящий через несколько ветвей и узлов разветвлённой электрической цепи. Термин замкнутый путь означает, что, начав с некоторого узла цепи и однократно пройдя по нескольким ветвям и узлам, можно вернуться в исходный узел. Ветви и узлы, проходимые при таком обходе, принято называть принадлежащими данному контуру. При этом нужно иметь в виду, что ветвь и узел могут принадлежать одновременно нескольким контурам.

В терминах данных определений правила Кирхгофа формулируются следующим образом.

### Первое правило Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа гласит, что *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в каждом узле любой цепи, равна нулю. При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла - отрицательным*

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (6.10)$$

Иными словами, сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов направленных от узла, или иначе, сколько заряда втекает в узел за некоторое время, столько из него за это время и вытекает. Таким образом, это правило Кирхгофа следует из фундаментального закона сохранения заряда.

### Второе правило Кирхгофа.

*В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в контур*

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_i^k \mathcal{E}_i. \quad (6.11)$$

Это правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи. При составлении уравнения напряжений для контура нужно про-

извольным образом выбрать положительное направление обхода контура. При этом падение напряжения на ветви считают положительным, если направление обхода данной ветви совпадает с ранее выбранным направлением тока ветви, и отрицательным - в противном случае.

Подводя итог, сформулируем последовательность действий для определения значений токов во всех ветвях схемы с известными параметрами.

1. Сначала надо произвольным образом указать направление токов во всех ветвях данной схемы.
2. Затем, записать уравнения по первому правилу Кирхгофа (6.10). Число таких уравнений должно быть на одно меньше, чем число узлов в схеме. Недостающие уравнения получают, используя второе правило Кирхгофа.
3. В схеме произвольным образом выбираются замкнутые контуры и направления их обхода. Число их равно числу недостающих уравнений.
4. Для каждого из выбранных контуров записывается уравнение (6.11). При этом, если направление тока совпадает с направлением обхода, то данный ток берется со знаком "+", в противном случае выбирается знак "-". ЭДС, входящие в контур считаются положительными, если они создают ток в сторону обхода контура (то есть, при обходе контура сначала встречается знак "-" источника, а потом знак "+").

В результате получаем замкнутую систему линейных уравнений, решая которую, находим неизвестные токи во всех ветвях схемы.

### 6.7. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля-Ленца

Если между точками с разностью потенциалов  $U$  переносится заряд  $dq$ , то при этом совершается работа  $dA = Udq$ . Из определения силы тока  $I$  следует, что  $dq = Idt$ . Тогда  $dA = IUdt$ . Мощность, развиваемая током на этом участке равна

$$P = \frac{dA}{dt} = IU.$$

Если падение потенциала происходит на омическом сопротивлении проводника, то  $U = IR$ , и мощность, выделяющаяся на нагрузке можно записать в виде

$$P = IU = I^2 R \quad (6.12)$$

При протекании тока происходит нагревание проводника. За промежуток времени  $dt$  в нем выделяется количество теплоты  $dQ$  равное совершенной за это время работе

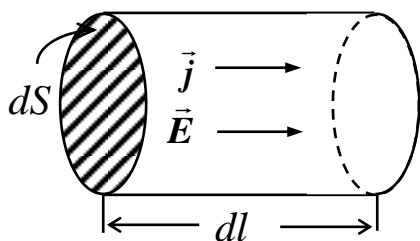
$$dQ = I^2 R dt \quad (6.13)$$



Данное соотношение носит название **закона Джоуля–Ленца**.

### 6.8. Законы Ома и Джоуля -Ленца в дифференциальной форме

В изотропном проводнике направление векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  совпадают. Выделим небольшой объем проводника в виде цилиндра с площадью основания  $dS$  и длиной  $dl$  (рис. 6.1). Ток через площадку  $dS$  будет равен  $dI = jdS$ . С другой стороны



$$dI = \frac{dU}{R} = \left( \rho \frac{dl}{dS} \right)^{-1} (Edl) = \frac{EdS}{\rho}, \text{ т.е.}$$

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{E}{\rho} = \sigma E.$$

Рис. 6.1

Записав полученное выражение в векторном виде, получаем соотношение, называемое **законом Ома в дифференциальной форме**

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (6.14)$$

Найдем теперь мощность, выделяющуюся в данном объеме  $dV$ . Согласно (6.12) с учетом (6.2) и (6.7), она будет равна

$$dP = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} = j^2 \rho (dSdl) = j^2 \rho dV.$$

Мощность, выделяющуюся в единице объема, называют **удельной мощностью тока**  $P_{уд} = \frac{dP}{dV} = j^2 \rho = \frac{j^2}{\sigma}$ . Иными словами это количество тепла, выделившееся в единице объема за единицу времени. Отсюда, используя закон Ома (6.14), получаем **закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме**

$$P_{уд} = \sigma E^2. \quad (6.15)$$

## ЛЕКЦИЯ 7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ВЕКТОР ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 7.1. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции

В 1820 году Эрстед открыл воздействие проводника с током на магнитную стрелку. В результате по аналогии с электрическим полем, создаваемым неподвижными зарядами, было введено понятие магнитного поля, создаваемого токами, то есть движущимися зарядами. Естественно было предположить, что и действовать магнитное поле должно на проводники с

токами и, соответственно, на движущиеся заряды. Взаимодействие проводников с током в том же году обнаружил и исследовал Ампер.

Основной характеристикой магнитного поля является вектор  $\vec{B}$ , носящий название **индукция магнитного поля**. В данной точке поля этот вектор совпадает по направлению с силой, которая действует на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку.

Единицей измерения магнитной индукции в СИ является тесла (Тл).

Изображают магнитное поле с помощью силовых линий. *Силовая линия (линия индукции магнитного поля) – линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$* . Однако, в отличие от линий электростатического поля, силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Это означает, что магнитное поле является вихревым, а магнитные заряды отсутствуют.

## 7.2. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение

Опыт показывает, что для магнитного поля, так же как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: *магнитное поле  $\vec{B}$ , создаваемое несколькими токами, равно векторной сумме полей  $\vec{B}_i$ , создаваемых каждым током в отдельности*

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (7.1)$$

Используя этот принцип можно рассчитать индукцию поля, создаваемого каким-либо проводником с током, разбивая проводник на малые элементы и суммируя индукции полей, порождаемых каждым из этих элементов.

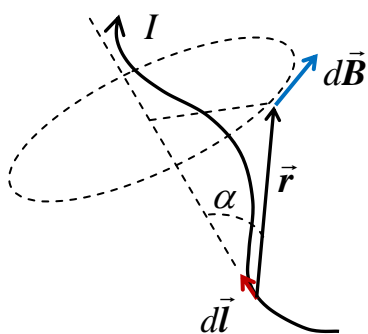


Рис. 7.1

Значение индукции магнитного поля  $d\vec{B}$ , создаваемого элементом проводника  $d\vec{l}$  в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от него (рис. 7.1), дает **закон Био-Савара-Лапласа**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (7.2)$$

Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная. (Гн – генри, единица индуктивности),  $I$  – сила тока, а  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от элемента  $d\vec{l}$  в данную точку (ориентация вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением тока). Направление вектора  $d\vec{B}$  определяется по правилам векторного произведения или с помощью правила буравчика (правого винта), которое заключается в следующем: буравчик с правым винтом (штопор) нужно вращать таким

образом, чтобы его остриё продвигалось по направлению тока, тогда направление вращения ручки буравчика совпадает с направлением вектора магнитной индукции поля, создаваемого этим током.

В скалярной форме закон Био-Савара-Лапласа имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (7.3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

С помощью данного закона нетрудно рассчитать, например, индукцию магнитного поля в центре кругового витка с током (рис. 7.2). Элемент витка  $d\vec{l}$ , по которому течет ток силой  $I$ , создает в центре витка поле с индукцией  $d\vec{B}$ , направленной вдоль оси витка. В этом случае  $r = R$ , угол  $\alpha$  равен  $90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ , поэтому получаем

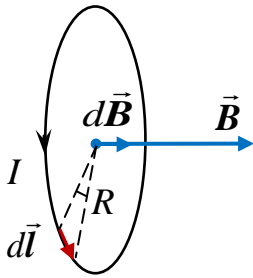


Рис. 7.2

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}.$$

Учитывая, что все элементы витка создают поля, направленные в одну сторону, находим результирующее значение индукции магнитного поля простым интегрированием

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Рассчитаем теперь поле, создаваемое отрезком прямого проводника с током, в точке М, отстоящей на расстоянии  $b$  от проводника.

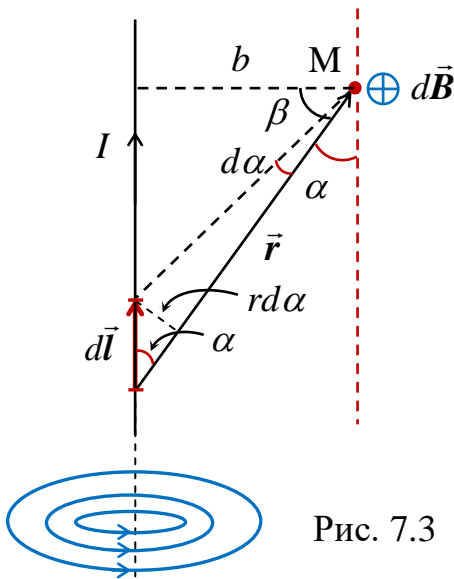


Рис. 7.3

Выделим элемент проводника  $d\vec{l}$  (рис. 7.3). Пусть элемент  $dl$  виден из точки М под малым углом  $d\alpha$ . Положение точки М относительно элемента  $d\vec{l}$  определяется вектором  $\vec{r}$ . Из рисунка видно, что выполняются следующие соотношения

$$r = \frac{b}{\sin \alpha} \text{ и } dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (7.4)$$

Используя закон Био-Савара-Лапласа (7.3), запишем индукцию магнитного поля, создаваемого элементом тока  $dl$  в точке М, как

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (7.5)$$

Подставив (7.4) в (7.5), получим

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha. \quad (7.6)$$

Направление вектора  $d\vec{B}$  в точке М перпендикулярно плоскости чертежа и показано на рис. 7.3. Все векторы  $d\vec{B}$  от произвольных элементарных участков  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление. Поэтому сложение векторов можно заменить сложением их модулей. Для протяженного проводника такое сложение сводится к интегрированию выражения (7.6) от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Тогда получим

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (7.7)$$

В случае отрезка провода, концы которого лежат по обе стороны от основания перпендикуляра из точки М, угол  $\alpha_2$  становится тупым, а  $\cos \alpha_2$  будет отрицательным. Если перейти от угла  $\alpha$  к углу  $\beta$  между направлением на элемент проводника  $d\vec{l}$  и перпендикуляром из точки М (рис. 7.3), то выражение (7.7) можно переписать в более удобном симметричном виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2), \quad (7.8)$$

где  $\beta_1$  на  $\beta_2$  это углы между перпендикуляром из точки М и соответствующими направлениями на концы отрезка проводника с током.

В случае бесконечного прямого тока углы  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = \pi$ , или  $\beta_1 = \beta_2 = \pi/2$ . В итоге, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (7.9)$$

Силовые линии магнитного поля прямого тока представляют собой концентрические окружности, охватывающие ток (см. рис. 7.3).

### 7.3. Закон полного тока (теорема о циркуляции вектора магнитной индукции) и его применение

Мы видели, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю. Иначе обстоит дело с магнитным полем. Найдем циркуляция вектора  $\vec{B}$  по какому-либо замкнутому контуру. Рассмотрим простейший случай прямого тока, и пусть выбранный контур  $L$  лежит в плоскости, перпендикулярной току  $I$  (рис. 7.4). Выберем малый элемент контура  $d\vec{l}$  и рассмотрим скалярное произведение  $(\vec{B}, d\vec{l})$ , где  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля, создаваемого током  $I$  в точке, где расположен вектор  $d\vec{l}$ . Из рисунка 7.4 и выражения (7.9) следует, что

$$(\vec{B}, d\vec{l}) = B dl_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} (rd\alpha) = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha,$$

где  $r$  – кратчайшее расстояние от проводника с током до элемента  $d\vec{l}$ ,  $d\alpha$  – угол, под которым виден элемент  $d\vec{l}$  из точки пересечения проводника и плоскости контура.

Тогда циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $L$  будет равна

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_L d\alpha.$$

Так как контур охватывает проводник с током, то,  $\oint_L d\alpha = 2\pi$ , и

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I, \quad (7.10)$$

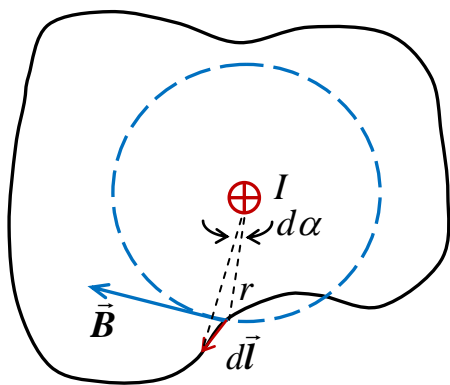


Рис. 7.4

где  $I$  – сила тока, охватываемого контуром. Можно показать, что полученное выражение справедливо и в случае неплоского контура, а также для токов любой формы.

Если контур охватывает несколько токов, получим

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i, \quad (7.11)$$

где  $\sum I_i$  – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром  $L$ . Знаки в этой алгебраической сумме выбираются следующим образом: если направление обхода контура и направление тока составляют правовинтовую систему, то ток в алгебраической сумме берётся со знаком плюс. В противоположном случае ток берётся со знаком минус. Соотношение (7.11) называется **законом полного тока или теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$** .

Применим закон полного тока для определения индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида, по которому течет ток  $I$  и который

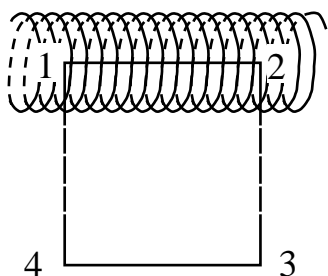


Рис. 7.5

имеет  $n$  витков на единицу длины. Выберем прямоугольный контур 1-2-3-4 (см. рис. 7.5). Сторона 1-2 параллельна оси соленоида, а сторона 3-4 удалена на очень большое расстояние от него. В силу симметрии вектор  $\vec{B}$  внутри соленоида должен быть параллелен его оси, а его значения на отрезке 1-2 должны быть одинаковыми, если длина соленоида много больше длины этого отрезка.

Интеграл в левой части выражения (7.11) может быть представлен как

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{1-2} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{2-3} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{3-4} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{4-1} (\vec{B}, d\vec{l}). \quad (7.12)$$

Так как на участке 1-2 вектор  $\vec{B}$  параллелен  $d\vec{l}$ , первый интеграл будет равен  $Bl$  ( $B$  – индукция поля на отрезке 1-2, а  $l$  – его длина). Второй и третий интегралы равны нулю, т.к. для каждого элемента  $d\vec{l}$  выполняется условие  $\vec{B} \perp d\vec{l}$ . Последний интеграл также равен нулю, поскольку на большом расстоянии от соленоида  $B = 0$ . Таким образом, получаем

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{1-2} (\vec{B}, d\vec{l}) = Bl.$$

С другой стороны, согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , полученное выражение должно быть пропорционально сумме токов, охватываемых контуром 1-2-3-4. Рассматриваемый контур охватывает  $nl$  витков, в каждом из которых течет ток  $I$ , тогда  $Bl = \mu_0(nl)I$ . Отсюда получаем

$$B = \mu_0 nI. \quad (7.13)$$

Поскольку отрезок 1-2 был выбран произвольно, делаем вывод, что такое же значение индукции магнитного поля будет в любой точке внутри соленоида, т.е. это поле является однородным. На практике формулу (7.13) можно использовать для оценки поля в средней части любого соленоида, длина которого значительно больше его диаметра.

С помощью теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  можно рассчитать также магнитное поле внутри тороида. Тороид (тор) с плотно намотанными на него витками тонкого провода, изображен на рис. 7.6. Пусть обмотка, содержит  $N$  витков, и по ней течет ток  $I$  (на рисунке показана только часть обмотки).

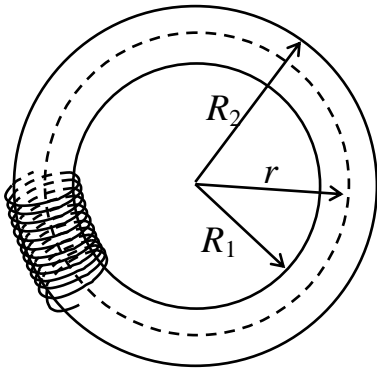


Рис. 7.6

В качестве контура интегрирования  $L$  выберем среднюю линию тороида радиусом  $r = (R_1 + R_2)/2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – внутренний и внешний радиусы тороида. В силу симметрии, вектор  $\vec{B}$  в каждой точке контура  $L$  должен быть направлен по касательной к этому контуру и быть постоянным по модулю. Выбранный нами контур

охватывает все  $N$  витков. Тогда закон полного тока для тороида будет выглядеть следующим образом

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

откуда получим

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}. \quad (7.14)$$

Данное выражение показывает, что величина индукции магнитного поля внутри тороида уменьшается при удалении от его центра. Если радиус витков обмотки значительно меньше радиуса тороида, т.е. выполняется условие  $R_2 - R_1 \ll r$ , то можно считать, что  $n = N/(2\pi r)$  это число витков на единицу длины обмотки. В этом случае выражение (7.14) принимает вид  $B = \mu_0 n I$ , полностью совпадающий с (7.13).

## ЛЕКЦИЯ 8. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 8.1. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных проводников с током

Как уже отмечалось, в начале XIX века Ампер исследовал взаимодействие друг с другом проводников с током. Он изучал также действие магнитного поля на проводники с током. Обобщая результаты опытов, Ампер сформулировал свой закон в виде

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (8.1)$$

где  $d\vec{F}$  – сила Ампера, т.е. сила, действующая на элемент  $d\vec{l}$  проводника с током  $I$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Направление вектора  $d\vec{F}$  может быть найдено по общим правилам векторного произведения или по правилу левой руки.

**Правило левой руки:** если расположить левую руку так, чтобы перпендикулярная составляющая вектора магнитной индукции входила в ладонь, а

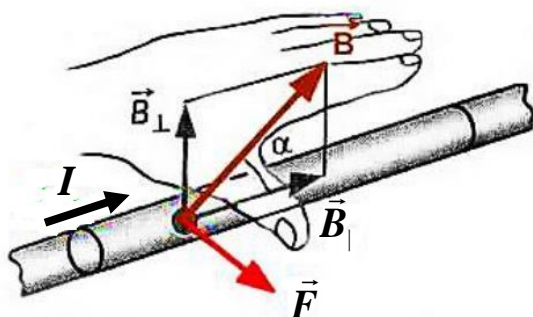


Рис. 8.1

четыре пальца были вытянуты по направлению тока в проводнике, то отставленный большой палец укажет направление силы Ампера (рис. 8.1).

Модуль силы Ампера вычисляется по формуле

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (8.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$

Закон Ампера позволяет определить единицу индукции магнитного поля  $B$  – тесла (Тл) следующим образом: 1 Тл – индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1

$H$  на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику течет ток в  $1A$  ( $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А}\cdot\text{м})$ ).

Закон Ампера можно использовать для определения силы взаимодействия двух прямолинейных параллельных проводников с током. Будем считать, что один из проводников создает магнитное поле, действующее на другой проводник. Возьмем два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расстояние между которыми равно  $b$  (рис. 8.2). Проводник с током  $I_1$  создает в месте, где находится второй проводник с током  $I_2$ , магнитное поле с индукцией

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}.$$

Подставив это выражение вместо  $B$  в (8.2), и, учитывая, что это поле перпендикулярно второму проводнику, получим, что сила, действующая на элемент  $dl$  этого проводника равна

$$dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} dl.$$

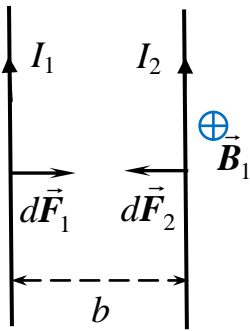


Рис. 8.2

Направление этой силы определяем по правилу левой руки с учетом направления вектора  $\vec{B}_1$ , показанного на рисунке. Такая же по модулю сила, согласно третьему закону Ньютона, будет действовать на первый проводник со стороны второго. Силы эти направлены в противоположные стороны, и проводники будут либо притягиваться друг к другу (если токи текут в одну сторону), либо отталкиваться (если токи текут в противоположные стороны).

Можно, таким образом заключить, что сила взаимодействия двух бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ , находящихся на расстоянии  $b$  друг от друга равна

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} dl.$$

Силу, приходящуюся на единицу длины проводников, запишем в виде

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} \quad (8.3)$$

Заметим, что такой же результат получил Ампер на основе своих экспериментов. В соответствии с (8.3) в СИ устанавливается единица силы тока – ампер (А):  $1A$  – это такая сила постоянного тока, который, протекая по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины,



расположенным на расстоянии  $l$  м друг от друга в вакууме, вызывает между ними силу взаимодействия  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на единицу длины.

## 8.2. Силы, действующие на контур с током в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольный контур со сторонами  $a$  и  $b$ , находящийся в однородном магнитном поле с линиями индукции  $\vec{B}$ , параллельными плоскости контура (рис. 8.3а). Если по контуру течет ток  $I$  в направлении, показанном на рисунке, то на проводники, перпендикулярные полю, действуют силы Ампера  $F = IBa$ . Момент этой пары сил, равный

$$M_{\max} = Fb = IBab = ISB,$$

( $S=ab$  – площадь контура) будет поворачивать контур относительно оси  $OO'$ . При таком положении контура этот вращающий момент имеет максимальное значение. Под действием указанной пары сил контур будет поворачиваться до тех пор, пока его плоскость не станет перпендикулярна силовым линиям магнитного поля (рис. 8.3б). При этом он окажется в положении устойчивого равновесия, т.к. силы  $F_1=F_2$  и  $F_3=F_4$  моментов не создают и стремятся лишь деформировать контур.

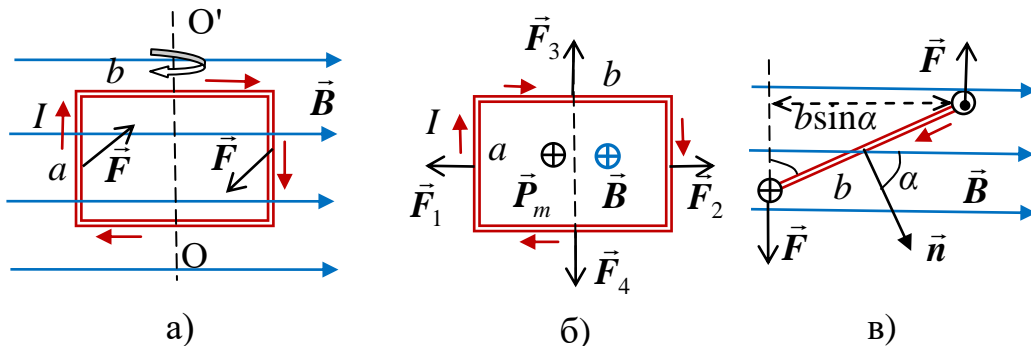


Рис. 8.3

На рис. 8.3в показан вид «сверху» (вдоль оси  $OO'$ ) на контур, в некотором промежуточном положении, когда положительная нормаль к его плоскости  $\vec{n}$  составляет угол  $\alpha$  с линиями индукции. Напомним, что положительной называется нормаль, направление которой связано с направлением тока правилом правого винта. Из рисунка видно, что вращающий момент  $M$ , действующий на контур относительно оси  $OO'$ , равен

$$M = Fb \sin \alpha = IabB \sin \alpha = ISB \sin \alpha.$$

Можно, таким образом, сделать вывод, что контур с током ориентируется в магнитном поле подобно магнитной стрелке, параллельной его нормали. При

этом вращающий момент зависит от произведения силы тока на площадь контура. Поэтому по аналогии с электрическим дипольным моментом был введен вектор, названный **магнитным дипольным моментом контура с током**

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} . \quad (8.4)$$

Модуль этого вектора равен  $IS$ , а его направление совпадает с направлением положительной нормали  $\vec{n}$ .

Момент сил, действующих на контур можно тогда записать как

$$M = p_m B \sin \alpha , \quad (8.5)$$

или в векторном виде

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}] . \quad (8.6)$$

Можно доказать, что полученное соотношение выполняется для плоского контура произвольного размера и формы в однородном магнитном поле.

### 8.3. Магнитный поток

Потоком вектора магнитной индукции (*магнитным потоком*) через элементарную площадку  $dS$  называется физическая величина, равная

$$d\Phi_m = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS = B dS \cos \alpha ,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали к площадке  $dS$  (вектора  $\vec{n}$ ),  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ ,  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали к площадке.

Магнитный поток через произвольную поверхность  $S$  будет равен

$$\Phi_m = \int_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_S B_n dS . \quad (8.7)$$

В СИ магнитный поток измеряется в веберах: *1 вебер (Вб) – магнитный поток сквозь плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл (1 Вб=1 Тл·м<sup>2</sup>).*

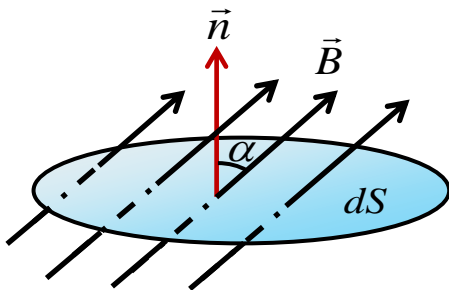


Рис. 8.4

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется *потокосцеплением*  $\Psi$  этого контура. По существу, приведенное выше определение потока  $\Phi_m$  совпадает с потокосцеплением для одновиткового контура. Но в случае многовитковых контуров вводится не совсем строгое понятие потока, сцепленного с таким витком (не совсем строгое потому, что виток в многовитковой спирали не замкнут).

Например, потокосцепление спирали, состоящей из  $N$  витков будет равно  $\Psi = N\Phi_m$ , где  $\Phi_m$  – поток через один виток (через поперечное сечение спирали).

Магнитный поток, как и поток вектора напряженности электрического поля, можно считать равным числу силовых линий, пересекающих рассматриваемую поверхность. Магнитное поле является вихревым, то есть его линии магнитной индукции замкнуты. Поэтому замкнутая поверхность, помещенная в магнитное поле, пронизывается линиями магнитной индукции так, что любая линия, входящая в эту поверхность, потом выходит из нее. Следовательно, полный магнитный поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через произвольную замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \oint_S B_n dS = 0. \quad (8.8)$$

Это утверждение носит название теоремы Гаусса для магнитных полей. Равенство нулю магнитного потока через замкнутую поверхность является следствием того, что в природе нет магнитных зарядов – источников магнитного поля, на которых начинались или заканчивались бы линии магнитной индукции. Магнитные поля образуются только движущимися электрическими зарядами.

#### 8.4. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длиной  $l$ . Пусть контур находится во внешнем однородном магнитном поле, перпендикулярном к его плоскости (рис. 8.5). При показанном на рисунке направлении тока  $I$ , вектор  $\vec{B}$  параллелен положительной нормали  $\vec{n}$  к контуру.

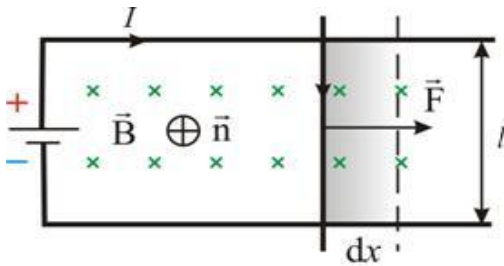


Рис. 8.5

На подвижный проводник действует сила Ампера  $F = IlB$ . При перемещении проводника на  $dx$  совершается работа  $dA = Fdx = IBl dx = IBdS$ , где  $dS$  – площадь, пересекаемая перемычкой при указанном перемещении. Поскольку  $BdS = d\Phi_m$  – магнитный поток через данную площадь, получим окончательно

$$dA = Id\Phi_m. \quad (8.9)$$

*Работа, совершаемая при перемещении проводника с током, равна произведению силы тока на магнитный поток через поверхность, пересекаемую этим проводником. Формула (8.9) остаётся*

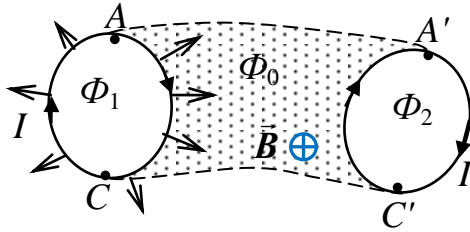


Рис. 8.6

*справедливой при любом движении проводника произвольной формы, в том числе и в неоднородном магнитном поле.*

Найдем теперь работу по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле. Предположим, что контур с током  $I$  (рис. 8.6), перемещается в плоскости чертежа из положения 1 в положение 2. Направление тока указано на рисунке. Магнитное поле (в общем случае неоднородное) направлено перпендикулярно плоскости чертежа - за чертеж. Магнитный поток через контур в начальном положении обозначим как  $\Phi_1$ , а в конечном как  $\Phi_2$ .

Разобьем контур точками  $A$  и  $C$  на два проводника. Правый проводник, перемещаясь в конечную точку, пересекает магнитный поток равный  $\Phi_0 + \Phi_2$ . В результате, согласно (8.9), силы Ампера, показанные на рисунке, совершают положительную работу  $A_1 = I(\Phi_0 + \Phi_2)$ .

Левый проводник пересекает при этом поток  $\Phi_1 + \Phi_0$ . Поскольку результирующая сила, действующая на этот проводник, направлена в сторону противоположную его движению, совершаемая работа  $A_2$  будет отрицательной и равной  $A_2 = -I(\Phi_1 + \Phi_0)$ . Суммарная работа дается выражением

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (8.10)$$

практически аналогичным (8.9).

Такой же результат получается и при неплоском перемещении контура, например при его вращении. Можно, таким образом, сделать вывод, что *работа, совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока через контур.*

## ЛЕКЦИЯ 9. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

### 9.1. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца

Рассмотренное выше действие магнитного поля на проводники с токами естественно увязать с его действием на движущиеся заряды. Действительно,

силы, действующие на электроны проводимости, передаются проводнику, в результате чего и возникает сила Ампера.

Если магнитное поле перпендикулярно проводнику, и по нему течет постоянный ток  $I$ , то на отрезок длиной  $dl$  действует сила  $dF = IdlB$ . Поскольку  $I = \frac{dq}{dt}$ , а  $dl = vdt$ , получаем  $dF = dqvB$ . Здесь  $dq$  – суммарный заряд носителей, создающих ток на участке проводника  $dl$ , а  $v$  – средняя скорость их упорядоченного движения. Можно, таким образом, сделать вывод, что на частицу с зарядом  $q$ ,двигающуюся перпендикулярно магнитному полю со скоростью  $v$ , действует сила  $F = qvB$ . Если вектор  $\vec{B}$  составляет угол  $\alpha$  с вектором скорости, выражение для данной силы приобретает вид

$$F = qvB \sin \alpha. \quad (9.1)$$

Эта сила перпендикулярна скорости частицы, и векторном виде равна

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (9.2)$$

В общем случае, если на движущуюся частицу помимо магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  действует и электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , результирующая сила (*сила Лоренца*) равна сумме двух составляющих – электрической и магнитной

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (9.3)$$

В отсутствии электрических полей силой Лоренца называют силу, определяемую формулой (9.2). Направление этой силы можно найти по правилам векторного произведения, или по правилу левой руки. При этом следует учесть, что правило левой руки дает направление силы, действующей на *положительные* заряды. Для отрицательно заряженных частиц (например, электронов) сила Лоренца будет направлена в противоположную сторону.

## 9.2. Движение заряженной частицы в магнитном поле

Рассмотрим сначала случай, когда частица, имеющая скорость  $v$  влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Перпендикулярная скорости сила Лоренца будет играть роль центростремительной силы, и частица начнет двигаться по окружности. Скорость ее при этом останется постоянной, поскольку указанная сила работы не совершает, и кинетическая энергия частицы остается неизменной. Описанный случай проиллюстрирован на рис. 9.1 для частицы с отрицательным зарядом  $-q$ , движущейся в

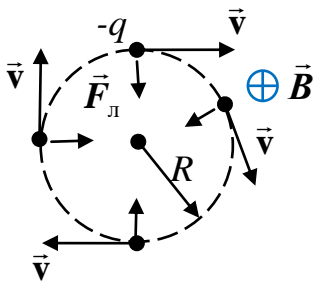


Рис. 9.1.

частицы с отрицательным зарядом  $-q$ , движущейся в

поле направленном перпендикулярно плоскости чертежа - за чертеж.

Согласно второму закону Ньютона  $qvB = mv^2/R$  ( $m$  – масса частицы). Отсюда получаем выражение для радиуса окружности, по которой движется частица

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (9.4)$$

Можно найти и период вращения частицы  $T$ , т.е. время, за которое она делает один полный оборот. По определению  $T = 2\pi R/v$  и, подставив сюда значение  $R$  из (9.4), получаем

$$T = 2\pi \frac{m}{qB}. \quad (9.5)$$

Важно отметить, что эта величина не зависит от скорости частицы, а определяется только величиной ее удельного заряда ( $q/m$ ) и индукцией магнитного поля. На этом основано действие ускорителей заряженных частиц, например циклотрона.

Рассмотрим теперь случай, когда частица влетает в область, где существует постоянное магнитное поле, под углом  $\alpha$  к линиям индукции (рис. 9.2). Представим скорость  $\vec{v}$  частицы как сумму двух составляющих, – направленную вдоль поля  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ , и перпендикулярно полю  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Параллельная полю составляющая скорости, не вызывает появление силы Лоренца, и дает

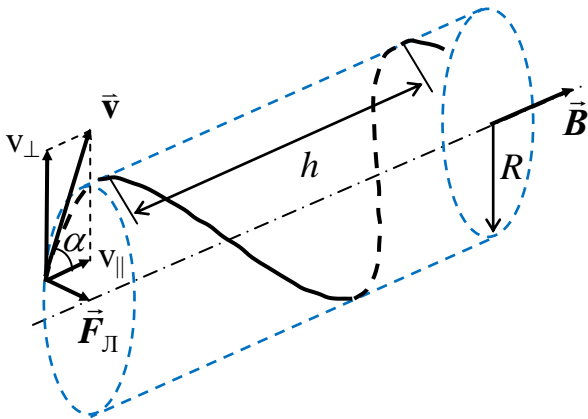


Рис. 9.2

равномерное движение частицы вдоль линий поля. Перпендикулярная составляющая обеспечивает движение по окружности в проекции на плоскость перпендикулярную полю.

В результате сложения этих двух движений получается траектория в виде винтовой линии (спирали), радиус которой можно определить по формуле (9.4), заменив  $v$  на  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ . Шаг этой вин-

товой линии  $h$  будет, очевидно, равен

$$h = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{m}{qB} v \cos \alpha.$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы. На рис. 9.2 показана траектория отрицательно заряженной частицы.

### 9.3. Эффект Холла

Эффект Холла (1879 г.) – это возникновение в металле или полупроводнике с током, помещенном в магнитное поле, разности потенциалов в направлении, перпендикулярном движению носителей тока.

Пусть ток с плотностью  $j$  в образце в виде прямоугольной пластины обусловлен упорядоченным движением электронов. Поместим пластину в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярное плотности тока  $\vec{j}$  (рис. 9.3).

На электроны, движущиеся со скоростью  $\vec{u}$  в магнитном поле, действует сила Лоренца  $\vec{F}_л$ . При указанных на рисунке направлениях  $\vec{u}$  и  $\vec{B}$  сила Лоренца направлена вверх (вдоль оси OZ).

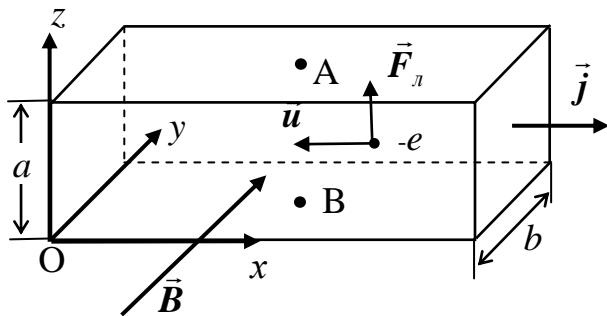


Рис. 9.3

Под действием силы  $\vec{F}_л$  электроны будут отклоняться к верхней грани пластины, так что на ней возникнет избыток отрицательных зарядов, а на нижней грани – избыток положительных зарядов. В результате этого в пластине появится поперечное электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное снизу вверх. Электрическая сила  $e\vec{E}$ , действующая на электрон, направлена в сторону, противоположную  $\vec{F}_л$ . В установившемся состоянии электроны движутся вдоль пластины. Это означает, что указанные силы равны друг другу, то есть  $eE = euB$ , и, следовательно,  $E = uB$ .

Разность потенциалов между точками А и В на гранях пластины будет равна  $U_{AB} = uBa$ . Среднюю скорость движения носителей нетрудно связать с плотностью тока в пластине. Если концентрация носителей равна  $n$ , то за время  $dt$  через элемент поперечного сечения  $dS$  пройдет заряд  $dq = ne \cdot dS \cdot udt$ . Плотность тока по определению равна  $j = \frac{dq}{dt \cdot dS}$ . В результате получаем  $j = neu$ , откуда  $u = j/ne$ . Тогда

$$U_{AB} = (1/ne)ajB = RajB = R \frac{I}{b} B, \quad (9.6)$$

где  $R = 1/(ne)$  – постоянная Холла.

Эффект Холла используется для исследования свойств металлов и полупроводников с целью определения природы носителей тока и их концентрации. Этот эффект лежит также в основе принципа действия датчиков магнитного поля (датчиков Холла).



## 9.4. Циклотрон

Циклотрон – простейший ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов). В основе конструкции циклотрона – два электрода в виде полых металлических полуцилиндров (дуантов). К дуантам приложено переменное напряжение  $\sim U$ , создающее в пространстве между ними ускоряющее электрическое поле. Дуанты находятся в вакуумной камере в сильном однородном магнитном поле, перпендикулярном их плоскости (рис. 9.4).

Заряженные частицы вводятся в центр зазора между дуантами. В зазоре частица ускоряется электрическим полем. Войдя в дуант, частица отклоняется магнитным полем и описывает полуокружность, радиус которой пропорционален ее скорости. Если за это время направление поля в зазоре поменяется на противоположное, она вновь получит ускорение. Очевидно,

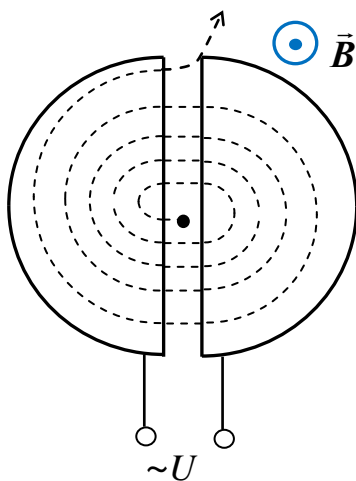


Рис. 9.4

условием ускорения частицы при каждом проходе зазора является равенство частоты ускоряющего электрического поля и частоты вращения частицы.

При выполнении этого условия частицы движутся по раскручивающейся спирали, постепенно увеличивая свою энергию. На последнем витке пучок частиц с максимальной энергией посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона.

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергии  $\sim 20$  МэВ. Дальнейшее их ускорение ограничивается релятивистскими эффектами, что приводит к увеличению периода обращения, и синхронизм нарушается

## ЛЕКЦИЯ 10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 10.1. Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты атомов

Опыты показывают, что всякое вещество при внесении его в магнитное поле намагничивается, т.е. создает собственное магнитное поле, накладывающееся на внешнее поле. Ампер предположил, что причиной намагничивания является существование в веществах, так называемых, молекулярных токов (микротоков). Эти токи, так же как и замкнутые макроток (токи проводимости), обладают магнитными моментами  $\vec{p}_m$ . В отсутствии внешнего поля,



вследствие хаотичности направлений векторов  $\vec{p}_m$ , суммарный момент равен нулю. Во внешнем поле с индукцией  $\vec{B}_0$  микротоки ориентируются так, что вектора  $\vec{p}_m$  оказываются параллельными внешнему полю  $\vec{B}_0$  и, в результате, возникает собственное магнитное поле вещества  $\vec{B}'$ . Таким образом, полное поле в веществе характеризуется индукцией  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ .

Существование микротоков и их магнитных моментов естественно увязать со структурой атомов и молекул. Согласно представлениям классической физики, электрон в атоме движется по замкнутой орбите. Такое движение эквивалентно круговому току и сопровождается появлением магнитного момента, называемого *орбитальным*. Кроме этого электрон обладает еще и *спиновым магнитным моментом*, связанным с наличием собственного момента импульса (спина). Магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) всех его электронов, и может оказаться как не нулевым, так и равным нулю.

### 10.2. Вектор намагничивания

Для количественной оценки магнитных свойств вещества вводят векторную величину – **намагниченность** или **вектор намагничивания**, определяемую как магнитный момент единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_{mi}, \quad (10.1)$$

где  $\vec{p}_{mi}$  – магнитный момент отдельного атома, находящегося в физически малом объеме  $\Delta V$ . Размерность намагниченности в СИ – А/м.

### 10.3. Напряженность магнитного поля. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

Расчет индукции магнитного поля в веществе (например, с помощью закона полного тока) затруднен тем, что в создании этого поля, наряду с макроточками, участвуют и микротоки. В таких случаях удобно использовать еще одну характеристику магнитного поля – **напряженность  $\vec{H}$** .

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (10.2)$$

Размерность напряженности магнитного поля такая же, как и намагниченности – А/м. В вакууме  $J = 0$ , и  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

Опыт показывает, что в не очень сильных полях намагниченность пропорциональна напряженности поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (10.3)$$

где  $\chi$  – безразмерная величина, называемая **магнитной восприимчивостью** вещества. С помощью (10.2) напряженность можно записать в виде

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

откуда получаем  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)}$ . Безразмерная величина  $\mu = 1 + \chi$  носит название **магнитной проницаемости** и является, наряду с магнитной восприимчивостью, параметром, характеризующим способность вещества к намагничиванию. Таким образом, связь между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  выглядит следующим образом

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (10.4)$$

Нетрудно показать, что напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  внутри длинного стержня, расположенного вдоль внешнего магнитного поля, равна напряженности поля вне стержня, т.е.  $\vec{H} = \vec{H}_0$ . Отсюда можно сделать вывод, что, в отличие от вектора  $\vec{B}$ , вектор  $\vec{H}$  связан только с макротоками (токами проводимости). Для вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в рассматриваемом примере имеем  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \mu \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu \vec{B}_0$ . Можно сказать, что магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз усиливается индукция поля в магнетике.

#### 10.4. Закон полного тока для магнитного поля в веществе

В присутствии магнетиков, теорема о циркуляции вектора индукции  $\vec{B}$  принимает вид

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i + \mu_0 \sum I'_i, \quad (10.5)$$

где в правой части присутствует не только сумма всех макротоков  $\sum I_i$ , но и сумма всех микротоков  $\sum I'_i$  вещества. Можно показать, что сумма всех микротоков, пересекающих площадку, ограниченную контуром  $L$ , равна циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  по этому контуру, то есть  $\sum I'_i = \oint_L (\vec{J}, d\vec{l})$ . Тогда, соотношение (10.5) может быть переписано как

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i + \mu_0 \oint_L (\vec{J}, d\vec{l})$$

или, с помощью определения (10.2), в виде

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum I_i. \quad (10.6)$$

Выражение (10.6) называют законом полного тока для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Этот закон гласит, что *циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых данным контуром*. Правило расстановки знаков в алгебраической сумме звучит следующим образом: положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления считается отрицательным. Определив с помощью (10.6) напряженность поля в магнетике, легко рассчитать его индукцию  $B$ , используя формулу (10.4).

### 10.5. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим плоскую границу двух магнетиков. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — их магнитные проницаемости (рис 10.1). Построим на границе диэлектриков воображаемую поверхность в виде цилиндра (пунктир на рис. 10.1) с площадью оснований  $S$  и высотой  $h$  (образующая цилиндра перпендикулярна границе раздела диэлектриков).

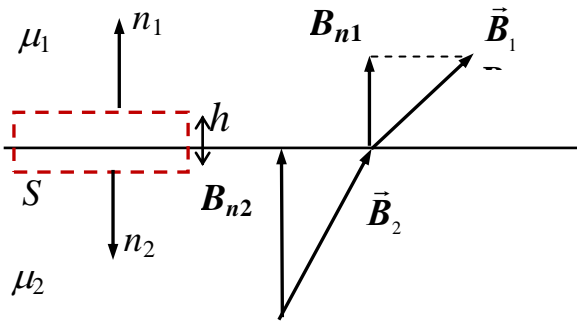


Рис. 10.1

Возьмем  $S$  настолько малым, чтобы в пределах этой поверхности поле можно было считать однородным. Как отмечалось ранее, поток вектора  $\vec{B}$  через такую

поверхность равен нулю.

С другой стороны этот поток можно представить как

$$\Phi = B_{n1}S - B_{n2}S + \langle B_{n'} \rangle S_{\text{бок}} = 0$$

где  $S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности цилиндра, а  $\langle B_{n'} \rangle$  — средняя величина составляющей вектора  $\vec{B}$ , перпендикулярная боковой поверхности цилиндра. При  $h \rightarrow 0$  имеем  $S_{\text{бок}} \rightarrow 0$ , откуда

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (10.7)$$

Для напряженности магнитного поля имеем  $\mu_0 \mu_1 H_{n1} = \mu_0 \mu_2 H_{n2}$ , и

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (10.8)$$

Найдем теперь циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по прямоугольному контуру 1–2–3–4 (рис. 10.2)

$$\oint_{\Gamma} H_1 dl \approx H_{\tau 1} a - H_{\tau 2} a,$$

где  $a$  и  $b$  – длина и ширина выбранного контура,  $H_{\tau 1}$  и  $H_{\tau 2}$  – тангенциальные составляющие векторов  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$ . На симметричных участках 2–3 и 4–1 состав-

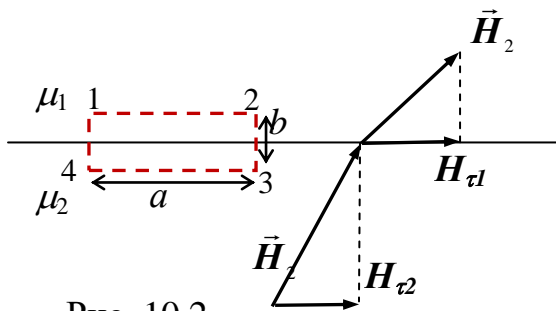


Рис. 10.2

ляющие циркуляции равны по модулю и противоположны по знаку, и сумма их равна нулю. Расстояние  $a$  выбираем настолько малым, что в его пределах составляющие  $H_{\tau 1}$  и  $H_{\tau 2}$  можно считать постоянными.

Поскольку на границе раздела макротоков нет, эта циркуляция согласно (10.6), должна быть равна нулю. Поэтому получаем  $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ . Для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  при этом имеем

$$\frac{B_{\tau 1}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_0 \mu_2}, \text{ и } \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

## 10.6. Типы магнетиков. Ферромагнетизм

Существует три типа магнетиков.

**1. Диамагнетики** (Zn, Au, Ag, H<sub>2</sub>O, инертные газы, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> и др.). Магнитная восприимчивость диамагнетиков  $\chi$  имеет небольшое отрицательное значение ( $\chi < 0$ ). Это означает, что они намагничиваются в сторону противоположную направлению внешнего магнитного поля, поскольку  $\vec{J} = \chi \vec{H}$ .

**2. Парамагнетики** (Na, K, Al, Pt, O<sub>2</sub>, NO и др.). У парамагнетиков магнитная восприимчивость  $\chi$  тоже невелика, но положительна, т.е. их намагниченность совпадает по направлению с вектором  $\vec{H}$ .

**3. Ферромагнетики** (железо, кобальт, никель, их соединения и сплавы). Восприимчивость ферромагнетиков положительна, но, в отличие от парамагнетиков, имеет очень большие численные значения. Практически это проявляется в их сильном намагничивании в относительно слабых внешних полях. К тому же у ферромагнетиков величина  $\chi$  не постоянна, а зависит от напряженности внешнего поля.

Особенности поведения различных магнетиков объясняются различиями в их магнитной структуре. Рассмотрим подробнее, как ведут себя атомы в маг-

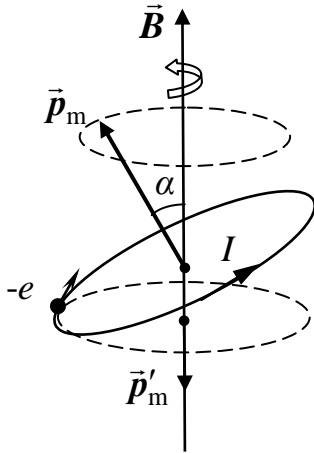


Рис. 10.3

нитном поле. Как уже отмечалось, движущийся по орбите электрон, подобно круговому току, имеет магнитный момент  $\vec{p}_m$ . Если этот вектор составляет некоторый угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{B}$ , появляется момент  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ , под действием которого  $\vec{p}_m$ , а вместе с ним и электронная орбита, начинают прецессировать вокруг вектора  $\vec{B}$  (рис. 10.3). Прецессия орбиты приводит к дополнительному движению электрона вокруг вектора  $\vec{B}$ . При этом возникает момент  $\vec{p}'_m$ , направленный против поля. В результате векторного сложения этих моментов для всех электронов атома формируется индуцированный магнит-

ный момент атома, противоположный полю.

Описанное явление называется *диамагнитным эффектом* и присутствует во всех магнетиках. Однако, этот эффект практически не заметен в парамагнетиках и ферромагнетиках, атомы которых обладают собственными магнитными моментами. Ориентация этих моментов во внешнем поле создает намагниченность параллельную этому полю, и значительно превышающую намагниченность, связанную с диамагнитным эффектом.

В диамагнетиках суммарный магнитный момент всех электронов в атоме, и, соответственно, магнитный момент атома, равен нулю. Поэтому их намагничивание обусловлено только диамагнитным эффектом.

Поведение парамагнетиков в магнитном поле аналогично поведению полярных диэлектриков в электрическом поле. Магнитные моменты атомов стремятся ориентироваться вдоль линий поля. Этому процессу мешает тепловое движение. Изменение интенсивности теплового движения с температурой обуславливает и температурную зависимость  $\chi$ . Она оказывается обратно пропорциональной абсолютной температуре.

Как в парамагнетиках, так и в диамагнетиках намагниченность линейно зависит от напряженности внешнего поля. Их магнитная восприимчивость  $\chi$  (а также и  $\mu$ ) остаются постоянными при данной температуре.

Несколько иначе происходит намагничивание ферромагнетиков. Как показали опыты А.Г. Столетова (1872 г.), их намагниченность зависит от  $H$  сложным образом. Типичная зависимость  $J$  от  $H$  для изначально не намагниченного образца показана на рис. 10.4а. Это так называемая, *основная кривая намагни-*

чивания. По мере возрастания  $H$  намагниченность  $J$  сначала растет быстро (и нелинейно), затем медленнее и, наконец, достигается магнитное насыщение, — значение  $J$  уже не зависит от напряженности  $H$ .

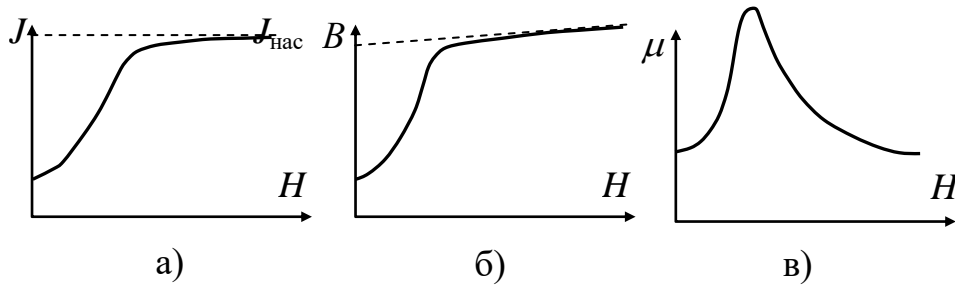


Рис. 10.4

График зависимости  $B$  от  $H$  (рис. 10.4б) отличается от графика  $J=f(H)$  отсутствием горизонтальной участка: как только наступает насыщение, магнитная индукция  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$  растет по линейному закону при увеличении напряженности магнитного поля. Из первых двух графиков вытекает зависимость  $\mu$  от  $H$ , показанная на рис. 10.4в). Максимальные значения  $\mu$  соответствуют области наиболее быстрого роста намагниченности. Численные значения  $\mu_{\text{макс.}}$  для ферромагнетиков очень велики:  $\mu_{\text{макс.}} \sim 10^3 \div 10^6$ .

Описанное поведение ферромагнетиков объясняется наличием в них областей самопроизвольно (спонтанно) намагниченных до насыщения. В этих областях, называемых **доменами**, магнитные моменты атомов под действием определенных внутренних сил выстраиваются параллельно друг другу. При этом энергетически выгодным оказывается такое расположение доменов, при котором суммарный магнитный момент образца равен нулю.

Уже в слабом магнитном поле начинается смещение границ между доменами. При этом домены, намагниченность которых близка по направлению к направлению внешнего поля, растут за счет других доменов. В результате общая намагниченность образца быстро увеличивается. Вторая стадия процесса — поворот магнитных моментов доменов в направлении поля соответствует более медленному росту намагниченности вплоть до достижения насыщения.

Интересно, что описанные процессы являются необратимыми. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения, а затем уменьшать напряженность магнитного поля, то намагниченность будет изменяться по кривой, лежащей выше основной кривой намагничивания (рис. 10.5). При  $H = 0$  в ферромагнетике наблюдается остаточная намагниченность  $J_{\text{ост}}$ , что объясняет существование постоянных магнитов. Намагниченность обращается в нуль только в размагни-

чивающем поле, напряженностью  $H = -H_C < 0$ . Дальнейший ход зависимости  $J$  от  $H$  показан на рисунке.

Описанное явление называется **гистерезисом**, а замкнутая кривая, показывающая перемагничивание образца, - **петлей гистерезиса**. Величина  $H_C$  называется **коэрцитивной силой**. Коэрцитивная сила характеризует способность ферромагнетика сохранять состояние с постоянной намагниченностью.

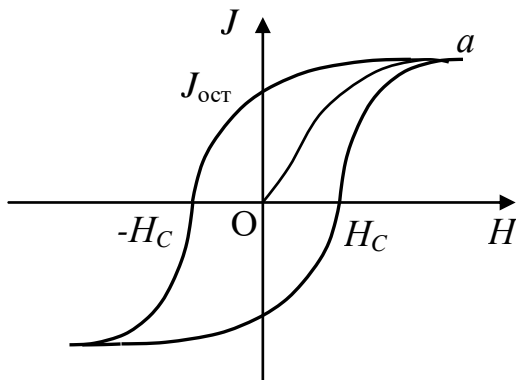


Рис. 10.5

Различные ферромагнетики дают разные гистерезисные петли. В зависимости от значения коэрцитивной силы различают магнито-мягкие и магнито-жесткие ферромагнетики. Магнито-мягкие ферромагнетики отлича-

ются малым значением коэрцитивной силы. Они легко перемагничиваются и используются при изготовлении трансформаторов, электрических машин и т.п. Из магнито-жестких ферромагнетиков изготавливаются постоянные магниты.

Как показывает опыт, при достаточно высоких температурах доменная структура ферромагнитных веществ разрушается. Для каждого ферромагнетика есть определенная температура, при которой он теряет ферромагнитные свойства. Эта температура называется **точкой Кюри**. При температурах выше точки Кюри ферромагнетик ведет себя так же, как обычный парамагнетик. Для железа, например, эта температура равна  $768^{\circ}\text{C}$ , а для никеля  $365^{\circ}\text{C}$ .

## ЛЕКЦИЯ 11. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ.

### 11.1. Явление электромагнитной индукции. Правило Ленца.

#### Закон Фарадея

Открытие Эрстедом магнитного поля, создаваемого проводником с током, навело английского ученого Фарадея на мысль о возможности противоположного явления. Он предположил, что с помощью магнитного поля можно создать электрический ток. После многочисленных опытов Фарадею в 1831 году удалось обнаружить появление электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока  $\Phi$  через поверхность, ограниченную данным контуром. Это явление называют **электромагнитной индукцией** а, полученный таким образом ток - **индукционным током**.

Схема одного из опытов Фарадея показана на рис. 11.1. При движении постоянного магнита внутрь катушки, замкнутой на гальванометр, в ней возникает индукционный ток. При движении в обратном направлении меняется и направление тока. Появление тока указывает на то, что в цепи начинает действовать электродвижущая сила, называемая ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ .

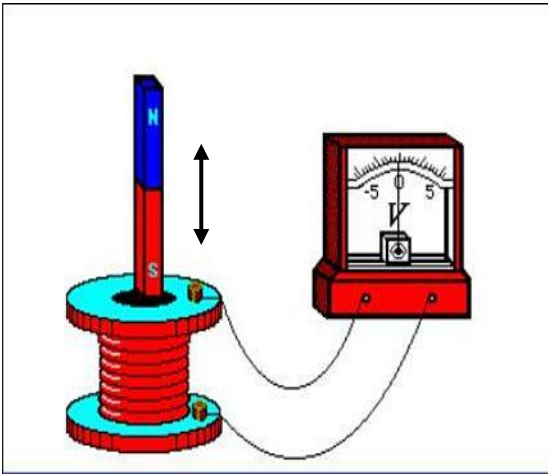


Рис. 11.1

Из определения магнитного потока  $d\Phi = B dS \cos \alpha$  видно, что его величина может изменяться не только при увеличении или уменьшении индукции магнитного поля, как в рассмотренном выше опыте. Изменение потока происходит и при изменении площади контура, находящегося в постоянном магнитном поле (например, при деформации контура). К такому же результату приводит изменение угла  $\alpha$  между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к контуру  $\vec{n}$  (поворот контура в однородном поле).

Ряд других опытов показал, что при любом изменении магнитного потока через замкнутый контур в нем появляется индукционный ток. Направление этого тока можно определить по, так называемому, **правилу Ленца**: *индукционный ток всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего этот ток.*

Рассмотрим в качестве примера контур с подвижной перемычкой (рис. 11.2). Поместим этот контур в однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно его плоскости (за чертеж). Если перемещать перемычку вправо, площадь контура, а значит и магнитный поток через нее, будут увеличиваться. Согласно правилу Ленца магнитное поле возникающего при этом индукционного тока должно быть направлено на нас. Отсюда однозначно вытекает указанное на рисунке направление тока (против часовой стрелки).

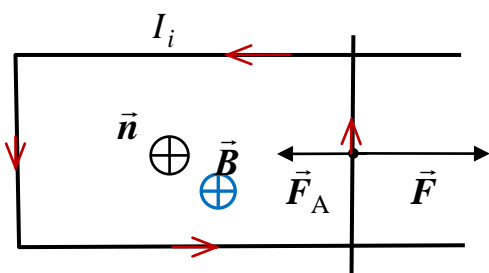


Рис. 11.2

Существует и более общая формулировка правила Ленца: *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей.* Применим это правило к рассматриваемому нами случаю. В качестве причины возникновения тока будем рассматривать внешнюю силу  $\vec{F}$ , обуславли-

вающую изменение магнитного потока.

Существует и более общая формулировка правила Ленца: *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей.* Применим это правило к рассматриваемому нами случаю. В качестве причины возникновения тока будем рассматривать внешнюю силу  $\vec{F}$ , обуславли-



вающую движение переключки (см. рис. 11.2). Тогда следует сделать вывод, что должна появиться некая противодействующая сила, направленная в противоположную сторону. Действительно, на переключку с током будет действовать сила Ампера. Определив, таким образом, направление этой силы, нетрудно, используя правило левой руки, установить направление индукционного тока.

Обобщая результаты своих опытов, Фарадей установил, что величина индукционного тока, а, значит, и ЭДС электромагнитной индукции, не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока, и определяется только скоростью его изменения, т. е.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.1)$$

Данное соотношение носит название **закона электромагнитной индукции Фарадея**. Знак минус в этом законе иллюстрирует **правило Ленца**. В самом деле, если нормаль к контуру  $\vec{n}$  выбрать так, как показано на рис. 11.2, поток  $\Phi$  будет положительным и при его возрастании выполняется неравенство  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ . Тогда  $\mathcal{E}_i < 0$ , и индукционный ток будет создавать отрицательный магнитный поток, то есть поток, направленный противоположно нормали и внешнему магнитному потоку. Если переключку перемещать в противоположную сторону поток  $\Phi$  будет уменьшаться, и тогда  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ , а  $\mathcal{E}_i > 0$ . При этом индукционный ток изменит направление и создаст положительный поток вдоль нормали  $\vec{n}$ , противодействуя тем самым уменьшению внешнего магнитного потока.

Если индукционный ток возникает в катушке, состоящей из  $N$  витков, ЭДС индукции будет равна сумме ЭДС, возникающих в каждом витке. Тогда закон электромагнитной индукции можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (11.2)$$

где  $\Psi = N \cdot \Phi$  - **полный магнитный поток** или потокосцепление.

## 11.2. Явление самоиндукции. Индуктивность

**Самоиндукция** это частный случай явления электромагнитной индукции. Самоиндукцией называют возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении протекающего через него тока.

Рассмотрим контур, изображенный на рис. 11.3. Протекающий в контуре ток  $I$  создает магнитное поле, индукция которого в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа, пропорциональна силе тока. Силовые линии пересекают при этом поверхность, ограниченную контуром, создавая магнитный поток также пропорциональный току.

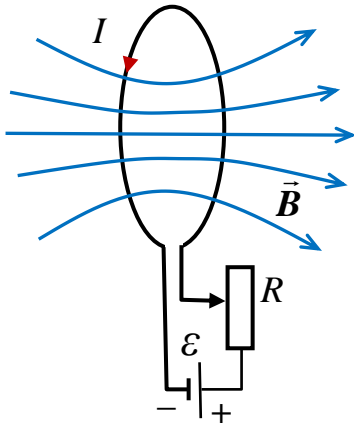


Рис. 11.3

Запишем полный магнитный поток в виде

$$\Psi = L \cdot I \quad (11.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока и полным магнитным потоком называется **индуктивностью**. Единицей измерения индуктивности в СИ

является **генри** (Гн). Так как  $L = \frac{\Psi}{I}$ , то  $1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}}$ . В

отсутствии ферромагнетиков индуктивность является характеристикой контура и зависит только от его формы и размеров.

С помощью реостата  $R$  можно увеличивать или уменьшать силу тока в цепи. При этом будет меняться и магнитный поток через контур. В силу закона электромагнитной индукции, изменение этого магнитного потока, приведет к возбуждению в контуре ЭДС индукции, равной

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt},$$

и называемой **ЭДС самоиндукции**

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (11.4)$$

Знак минус в этой формуле, как и в законе Фарадея, иллюстрирует **правило Ленца**. Действительно, при увеличении тока ЭДС самоиндукции отрицательна, и действует против ЭДС источника  $\mathcal{E}$ , препятствуя этому увеличению. В случае уменьшения тока, ЭДС самоиндукции положительна, и стремится поддерживать убывающий ток.

Индуктивность отдельно взятого контура весьма мала. Значительной индуктивностью может обладать соленоид с большим количеством витков  $N$ . Полный магнитный поток в этом случае равен  $\Psi = N \cdot \Phi$ , где  $\Phi = BS$  - поток через один виток соленоида. Если длина соленоида  $l$ , достаточно велика, то  $B = \mu_0 n I$  (см. 7.13). Тогда  $\Psi = N \mu_0 n I S = \mu_0 n^2 l S I$ , где  $n = N/l$  - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Поделив потокосцепление на силу тока, получим выражение для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V, \quad (11.5)$$

где  $V = lS$  - объем соленоида.

Индуктивность соленоида можно существенно увеличить поместив в него сердечник из ферромагнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ . При этом в  $\mu$  раз увеличится индукция магнитного поля  $B$ , а выражение для индуктивности будет выглядеть следующим образом

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (11.6)$$

Заметим, что в этом случае индуктивность уже не является постоянной величиной. Как было показано ранее, в ферромагнетике  $\mu$  сложным образом зависит от напряженности магнитного поля. Таким образом, и индуктивность будет, в конечном счете, зависеть от тока в соленоиде.

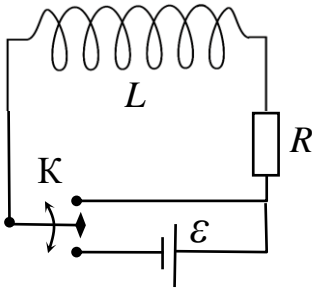


Рис. 11.4

Явление самоиндукции проявляется в замедлении процессов исчезновения и установления тока. Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 11.4. При замыкании цепи с помощью ключа  $K$ , в соленоиде  $L$  возникает ЭДС самоиндукции. Она

действует против ЭДС источника  $\mathcal{E}$  и препятствует быстрому увеличению тока. Несложный расчет показывает, что сила тока в цепи  $I$  изменяется со временем по закону

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (11.7)$$

где  $I_0 = \mathcal{E}/R$  - конечное значение тока (сопротивлением обмотки соленоида пренебрегаем). Данная зависимость показана на рис. 11.5 (кривая 1).

Если теперь отсоединить источник, переведя ключ в верхнее положение (не разрывая цепь), ЭДС самоиндукции поменяет знак и будет препятствовать исчезновению тока. В результате сила тока будет убывать по закону

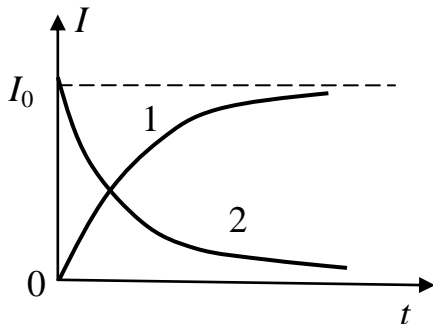


Рис. 11.5

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (11.8)$$

График данной зависимости представлен на рис. 11.5 кривой 2. Из формул (11.7) и (11.8) видно, что скорость нарастания и убывания тока в цепи, содержащей индуктивность, зависят от отношения  $R/L$ . Чем больше индуктивность и

меньше активное сопротивление цепи, тем медленнее эти процессы.

### 11.3. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура 1 и 2, расположенные близко друг к другу (рис. 11.6). Если в контуре 1 течет ток силы  $I_1$ , то он создает через контур 2 полный магнитный поток

$$\Psi_2 = L_{21}I_1 \quad (11.9)$$

пропорциональный  $I_1$ . Поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями. При изменении тока  $I_1$  в контуре 2 индуцируется ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Psi_2}{dt}. \quad (11.10)$$

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока силы  $I_2$  возникает сцепленный с контуром 1 поток

$$\Psi_1 = L_{12}I_2.$$

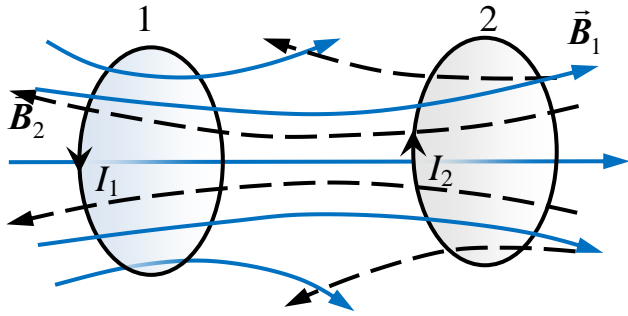


Рис. 11.6

Поле, создающее этот поток, изображено на рис. 11.6 пунктирными линиями. При изменении тока  $I_2$  в контуре 1 индуцируется ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Psi_1}{dt}.$$

Контур 1, 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется **взаимной индукцией**.

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются взаимной индуктивностью контуров. Их величина зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости  $\mu$  окружающей среды. В отсутствии ферромагнетиков  $\mu = \text{const}$  и  $L_{12} = L_{21}$ .

### 11.4. Энергия магнитного поля

Вернемся к схеме, изображенной на рис. 11.4. При подключенном источнике ток, текущий в катушке индуктивности, создает внутри нее магнитное поле. Если с помощью ключа отсоединить источник, оставив цепь замкнутой, сила тока, как мы видели, будет убывать по экспоненте. При этом, за малый промежуток времени  $dt$  будет совершена работа  $dA = \mathcal{E}_s I dt$ , где  $\mathcal{E}_s$  - ЭДС самоиндукции. Подставив сюда ее выражение (11.4), получим  $dA = -LI dI$ . Чтобы найти работу, совершаемую за время практически полного исчезновения тока

(и магнитного поля в катушке), проинтегрируем это соотношение по току от его начального значения до нуля

$$A = -L \int_I^0 IdI = \frac{LI^2}{2}.$$

Эта работа идет на нагревание проводов и резистора  $R$ , и совершается, очевидно, за счет энергии магнитного поля, существовавшего в катушке. Можно, таким образом, заключить, что катушка, по которой течет ток  $I$ , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (11.11)$$

Поскольку носителем этой энергии является магнитное поле, имеет смысл выразить ее через параметры, характеризующие поле, т.е.  $B$  и  $H$ . Поскольку

$$L = \mu_0 n^2 V, \text{ и } H = nI, \text{ получим } W = \frac{\mu_0 \mu n^2 V}{2} \frac{H^2}{n^2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V.$$

Найдем теперь **объемную плотность энергии магнитного поля**  $w = \frac{dW}{dV}$ , т.е. энергию, приходящаяся на единицу объема. В рассмотренном случае она будет равна

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2}, \quad (11.12)$$

где учтено, что  $B = \mu_0 \mu H$ .

Полученные выражения применимы и в случае неоднородного поля. Формулы (11.12) дают значение плотности энергии в данной точке пространства. Энергия, заключенная в конечном объеме  $V$ , может быть вычислена по следующей формуле

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (11.13)$$

## ЛЕКЦИЯ 12. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### 12.1. Теория Максвелла для электромагнитного поля

Теория электромагнитного поля была разработана британским физиком Джеймсом Максвеллом в 1865 г. Теория Максвелла явилась итогом интенсивных исследований электричества и магнетизма, проводимых в первой половине XIX века. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений. Основным следствием теории Максвелла был вы-

вод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Таким образом, теория Максвелла явилась теоретическим обоснованием электромагнитной природы света.

Основу теории электромагнитного поля образуют уравнения Максвелла. Они являются теоретическим обобщением экспериментально установленных законов: закона Кулона, закона Ампера, закона электромагнитной индукции Фарадея и других. Современная форма уравнений Максвелла появилась около 1884 года после работ Хевисайда, Герца и Гиббса. Они переписали систему уравнений Максвелла в векторном виде, переформулировав эти уравнения в терминах напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  электрического и магнитного полей.

К основным следствиям теории Максвелла можно отнести следующие утверждения:

- (1) переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле;
- (2) переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Таким образом, теория Максвелла позволяет рассматривать электрическое и магнитное поле как различные проявления единого электромагнитного поля.

## 12.2. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Как показал Фарадей, при любом изменении магнитного потока, пронизывающего проводящий замкнутый контур, в нем возникает индукционный ток. Допустим, что контур неподвижен, а изменение магнитного потока связано с изменением индукции магнитного поля. Тогда можно сказать, что переменное магнитное поле вызывает электрический ток в замкнутом проводящем контуре. Движение зарядов в замкнутом проводнике подразумевает существование в нем *вихревого электрического поля*, циркуляция которого по контуру проводника не равна нулю. Максвелл предположил, что любое переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, циркуляция напряженности которого по произвольному замкнутому контуру не равна нулю. Причем, это происходит независимо от наличия или отсутствия в контуре свободных носителей заряда. Контур может быть просто мысленным.

Вихревое поле не является электростатическим, так как циркуляция напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю. В этом смысле вихревое поле является сторонним по отноше-

нию к электростатическому полю. Напомним, что работа сторонних сил по переносу единичного положительного заряда по замкнутому контуру есть, по определению, электродвижущая сила (ЭДС), действующая в этом контуре. Обозначим напряженность вихревого поля символом  $\vec{E}_v$ . Работа  $A$  по перемещению заряда  $q$  по замкнутому контуру  $L$  будет равна  $A = \oint_L q(\vec{E}_v, d\vec{l})$ . Поэтому

ЭДС индукции в этом контуре будет

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} = \oint_L (\vec{E}_v, d\vec{l}).$$

Согласно закону Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}, d\vec{S}),$$

где  $S$  это произвольная поверхность, ограниченная рассматриваемым контуром. Поэтому получаем уравнение

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right), \quad (12.1)$$

где в левой части под  $\vec{E}$  можно понимать суммарную напряженность вихревого и электростатического полей, поскольку для электростатического поля циркуляция равна нулю. Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру  $L$ , а в правой части - по произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на этот контур. Переход к частной производной связан с тем, что  $\vec{B}$  зависит в общем случае еще и от координат.

Уравнение (12.1) дает, таким образом, полное описание явления электромагнитной индукции. Оно показывает, что переменное магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля, величина которого (точнее циркуляция вектора  $\vec{E}$ ) определяется скоростью изменения магнитного потока. Это соотношение является одним из основных уравнений теории электромагнитного поля Максвелла.

### 12.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Развивая свою теорию, Максвелл предположил, что существует и обратное явление: переменное электрическое поле должно порождать вихревое магнитное поле. Поскольку магнитные поля создаются токами, Максвелл назвал переменное электрическое поле *током смещения*. Этот ток, в отличие от тока проводимости, не связан с движением зарядов.

Рассмотрим цепь, содержащую источник переменного тока и конденсатор без диэлектрика (рис. 12.1). При зарядке и разрядке конденсатора в цепи существует ток проводимости, плотность которого обозначим  $\vec{j}$ .

Согласно идее Максвелла, на границах обкладок конденсатора линии тока проводимости переходят в линии тока смещения, как показано на рисунке.

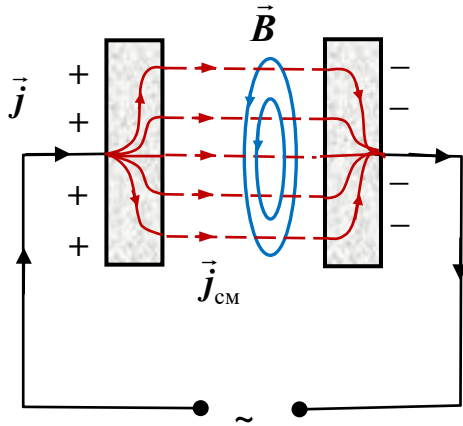


Рис. 12.1

При этом плотность тока проводимости  $\vec{j}$  равна плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ . Ток смещения (то есть переменное электрическое поле) создает в конденсаторе магнитное поле, конфигурация которого также показана на рис. 12.1.

Численное значение плотности тока проводимости равно

$$j = \frac{I}{S} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt},$$

где  $I$  – сила тока,  $S$  – площадь пластин,  $q$  – заряд на пластине, а  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда. Поскольку напряженность электрического поля между пластинами равна  $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , то

$\sigma = \varepsilon_0 E_0 = D$  (здесь  $D$  – индукция электрического поля). Можно таким образом записать  $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}$ . Это означает, что плотность тока смещения определяется

скоростью изменения электрического поля. Нетрудно убедиться, что направления векторов  $\vec{j}$ ,  $\vec{j}_{\text{см}}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  совпадают, как при зарядке, так и при разрядке конденсатора, поэтому

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Максвелл ввел понятие **полного тока**, равного сумме токов проводимости  $\vec{j}$  и тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ . Плотность полного тока записывают в виде

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Циркуляция вектора напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля (закон полного тока) будет тогда выглядеть следующим образом

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum I_i = \int_S (\vec{j}_{\text{полн}}, d\vec{S}).$$



Интеграл в правой части этого уравнения дает величину полного тока через любую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ . Окончательно, обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  запишется в виде

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (12.2)$$

Это второе основное уравнение Максвелла, показывающее, что вихревое магнитное поле создается не только токами проводимости, но и переменными электрическими полями (т.е. токами смещения).

#### 12.4. Третье и четвертое уравнение Максвелла

Помимо соотношений (12.1) и (12.2), описывающих связь между электрическими и магнитными явлениями, Максвелл включил в свою систему уравнений теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \quad (12.3)$$

и теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$  в виде

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV, \quad (12.4)$$

где  $\rho$  – объемная плотность зарядов, а интеграл в правой части дает суммарный свободный заряд в объеме  $V$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ .

#### 12.5. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

Перечисленные выше уравнения Максвелла являются интегральными уравнениями, куда входят векторные функции координат и времени – векторы напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и векторы индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  электрического и магнитного полей, вектор плотности тока  $\vec{j}$  и одна скалярная функция – плотность заряда  $\rho$ . Соберем эти уравнения все вместе.

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right), \quad (12.5)$$

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (12.6)$$

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \quad (12.7)$$

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \rho dV. \quad (12.8)$$

Еще раз обратим внимание на то обстоятельство, что выбор направления обхода контуров в левой части первых двух уравнений (12.5) и (12.6) должен быть согласован с выбором направления нормали к элементу поверхности в интегралах правой части упомянутых уравнений: обход контура и нормаль должны составлять правовинтовую систему. В уравнениях же (12.7) и (12.8) используется внешняя нормаль по отношению к объему, ограниченному рассматриваемой замкнутой поверхностью.

Уравнения Максвелла можно переписать в дифференциальной форме, не содержащей интегралов. Для перехода к дифференциальной форме первых двух уравнений Максвелла воспользуемся теоремой Стокса, которая гласит, что циркуляция векторного поля  $\vec{A}$  по произвольному контуру  $L$  равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром, то есть

$$\oint_L (\vec{A}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot} \vec{A}, d\vec{S}). \quad (12.9)$$

Векторная функция  $\text{rot} \vec{A}$  представляет собой вектор, определяемый в декартовой системе координат выражением

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (12.10)$$

Мнемоническое правило для запоминания вектора  $\text{rot} \vec{A}$  основано на вычислении определителя

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

который следует раскрывать по первой строке. Другое мнемоническое правило привлекает векторный дифференциальный оператор Гамильтона, обозначаемый символом набла  $\vec{\nabla}$  (название символа заимствовано из древнегреческого языка, набла - род арфы с треугольным остовом). По определению

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (12.11)$$

тогда вектор  $\text{rot} \vec{A}$  можно представлять себе как векторное произведение двух векторов  $\vec{\nabla}$  и  $\vec{A}$ , то есть

$$\text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}]. \quad (12.12)$$

Для преобразования интегральной формы уравнения (12.5) в дифференциальную, перепишем его с помощью теоремы Стокса (12.9) как

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S (\text{rot} \vec{E}, d\vec{S}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right).$$

Так как равенство интегралов выполняется для произвольной площадки  $S$ , то должны быть равны и подынтегральные выражения, то есть

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12.13)$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Максвелла (12.6) дают

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.14)$$

Для перехода к дифференциальной форме уравнений Максвелла (12.7) и (12.8) воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса, которая гласит, что поток векторного поля  $\vec{A}$  через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, ограниченному этой поверхностью, то есть

$$\oint_S (\vec{A}, d\vec{S}) = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (12.15)$$

Скалярная функция  $\text{div} \vec{A}$  определяется в декартовой системе координат выражением

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (12.16)$$

Мнемоническое правило для записи дивергенции с привлечением векторного дифференциального оператора набла  $\vec{\nabla}$  (12.11) говорит, что  $\text{div} \vec{A}$  можно представлять себе как скалярное произведение двух векторов  $\vec{\nabla}$  и  $\vec{A}$ , то есть

$$\text{div} \vec{A} = (\vec{\nabla}, \vec{A}) = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z. \quad (12.17)$$

Для преобразования интегральной формы уравнения (12.8) в дифференциальную, перепишем его с помощью теоремы Остроградского-Гаусса (12.15) как

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Так как равенство интегралов выполняется для произвольного объема  $V$ , то должны быть равны и подынтегральные выражения, то есть

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (12.18)$$

Аналогичные преобразования уравнения Максвелла (12.7) дают

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (12.19)$$

Собирая полученные уравнения все вместе, получаем набор уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.20)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.21)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (12.22)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (12.23)$$

Физический смысл уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах полностью эквивалентен. Еще раз напомним физический смысл этих уравнений. Первое уравнение Максвелла является выражением закона электромагнитной индукции. Оно утверждает, что всякое изменение магнитного поля во времени вызывает появление вихревого электрического поля. Второе уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока и утверждает, что протекание тока проводимости по проводникам и изменение электрического поля во времени приводят к появлению вихревого магнитного поля. Третье уравнение Максвелла указывает на отсутствие в природе источников магнитного поля в виде магнитных зарядов. Наконец, четвертое уравнение Максвелла служит обобщением закона Кулона и теоремы Гаусса. Физический смысл этого уравнения состоит в утверждении, что источником электрического поля является электрический заряд.

## 12.6. Материальные соотношения

Записанные четыре уравнения Максвелла не образуют замкнутой системы, позволяющей рассчитать электромагнитные процессы при наличии материальной среды, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа уравнений. Для расчета полей в среде система уравнений Максвелла дополняется так называемыми, материальными соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (12.24)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (12.25)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (12.26)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\sigma$  – удельная проводимость среды;  $\vec{j}$  – вектор плотности тока. Величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ , определяющие индивидуальные электрические и магнитные свойства среды, могут быть найдены экспериментально. Они собраны в различных

справочниках физических величин. Уравнения Максвелла вместе с материальными соотношениями образуют полную систему уравнений.

### 12.7. Уравнения Максвелла для статических полей

В случае стационарных полей, система уравнений Максвелла распадается на две группы независимых уравнений. Первая группа относится только к электрическому полю

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho,\end{aligned}$$

а вторая группа – только к магнитному полю

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

Видно, что в этом случае электрическое поле и магнитное поле независимы друг от друга. Источниками электрических полей являются только заряды, а магнитных полей – только токи проводимости. Таким образом, электростатические и магнитостатические явления могут рассматриваться отдельно.

### 12.8. Уравнения Максвелла в вакууме при отсутствии зарядов и токов.

#### Волновое уравнение

В вакууме без зарядов и токов система уравнений Максвелла, с учетом связи  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , приобретает следующий вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (12.27)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12.28)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (12.29)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (12.30)$$

содержащий только два вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Видно, что в отсутствие зарядов и токов невозможно существование статических полей. Однако переменное электрическое поле возбуждает магнитное поле, и наоборот, переменное магнитное поле создает электрическое поле. Поэтому имеются решения уравнений Максвелла в вакууме, в отсутствие зарядов и токов, где электрические и магнитные поля оказываются неразрывно связанными друг с другом. Таким образом, в теории Максвелла впервые были объединены два фундаментальных взаимодействия, ранее считавшихся независимыми. Теперь мы говорим не об отдельном электрическом и магнитном поле, а о едином электромагнитном поле.

Изменения поля, происходящие в некоторой области пространства, распространяются от точки к точке. Процесс согласованного изменения электрического и магнитного полей в пространстве и времени, при распространении электромагнитного возмущения из одной точки пространства в другую, получил название электромагнитной волны. Напряженности электрического и магнитного полей изменяются в электромагнитной волне по периодическому закону. Найдем уравнение электромагнитной волны (волновое уравнение). Возьмем ротор от обеих частей уравнения (12.27) и воспользуемся формулой из векторного анализа

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E},$$

где  $\Delta$  это дифференциальный оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Принимая во внимание (12.30) и (12.28), получим

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (12.31)$$

Аналогично, применяя операцию ротора к обеим частям уравнения (12.28) можно получить

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \quad (12.32)$$

Решением уравнений (12.31) и (12.32) является гармоническая плоская электромагнитная волна, распространяющаяся с фазовой скоростью

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (12.33)$$

Эта электромагнитная волна является поперечной. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в этой волне перпендикулярны направлению распространения волны и друг другу, а их колебания происходят в фазе. Оказалось, что скорость волны  $c$  совпадает со скоростью света в вакууме и равна  $3 \times 10^8$  м/с. Поэтому можно сделать вывод о том, что свет это электромагнитная волна. К этому выводу пришел Максвелл в 1865 году задолго до экспериментального подтверждения существования электромагнитных волн. Экспериментальное подтверждение электромагнитной теории света получил немецкий физик Генрих Рудольф Герц в работах, выполненных в период с 1885 по 1889 годы.

## ЛЕКЦИЯ 13. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 13.1. Свободные незатухающие гармонические колебания

Колебаниями называются процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени. Колебания считают свободными, если они совершаются за счет запаса энергии, первоначально сообщенной системе, при отсутствии какого-либо внешнего воздействия. В идеальном случае, если нет потерь энергии, колебания будут незатухающими и могут длиться бесконечно долго.

Физическая природа колебательных процессов может быть разной. Различают механические колебания, электромагнитные колебания и др. Наиболее простыми являются так называемые **гармонические колебания**, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Такие колебания описываются, как известно, уравнением вида

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (13.1)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний, выражение в скобках – фаза колебаний,  $\varphi$  – начальная фаза, а  $\omega$  – циклическая (круговая) частота колебаний. Напомним, что  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ , где  $T$  – период, а  $f$  – частота колебаний.

### 13.2. Свободные механические колебания

Рассмотрим гармонические колебания в механических системах на примере пружинного маятника, показанного на рис. 13.1. Груз массой  $m$  прикреплен к вертикальной стенке с помощью пружины, жесткостью  $k$ , и может скользить без трения по горизонтальной поверхности.

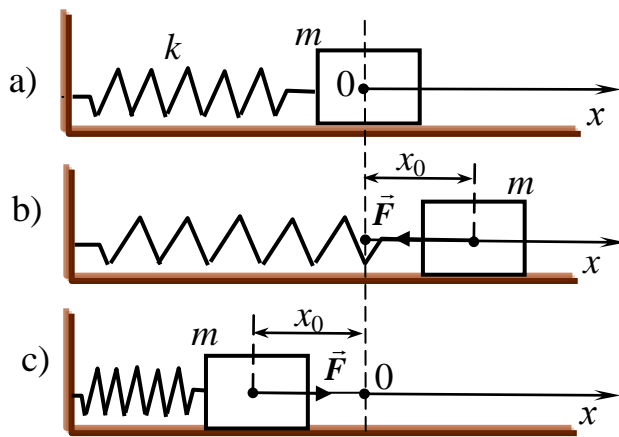


Рис. 13.1

На рис. 13.1а показано положение равновесия системы. Если переместить груз вправо на расстояние  $x_0$ , пружина растянется и появится (согласно закону Гука) упругая сила  $F = -kx_0$  (рис. 13.1b). Под действием этой силы груз вернется в положение

равновесия ( $x = 0$ ), и за счет приобретенной кинетической энергии продолжит свое движение, сжимая пружину. В положении, показанном на рис. 13.1с, скорость груза равна нулю, и начинается движение в обратную сторону.

Если силы сопротивления пренебрежимо малы, маятник будет совершать свободные незатухающие гармонические колебания. Дифференциальное урав-

Если силы сопротивления пренебрежимо малы, маятник будет совершать свободные незатухающие гармонические колебания. Дифференциальное урав-

нение этих колебаний выводится из второго закона Ньютона, согласно которому  $F = -kx = ma$ . Поскольку  $a = \ddot{x}$ , получим

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Обозначив теперь  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , приходим к искомому уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13.2)$$

Решение этого уравнения показывает, что координата центра масс груза меняется со временем по гармоническому закону  $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Поскольку, в нашем примере в момент времени  $t = 0$ ,  $x = x_0$ , то начальная фаза колебаний  $\varphi = 0$ , поэтому

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (13.3)$$

Собственная частота колебаний пружинного маятника зависит, таким образом, от массы груза и коэффициента жесткости пружины, и равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13.4)$$

Скорость груза  $v$  и его ускорение также будут меняться по гармоническому закону. Скорость получим, продифференцировав выражение (13.3)

$$v = \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) = -v_0 \sin(\omega_0 t),$$

где  $v_0 = x_0 \omega_0$  – максимальная скорость груза.

Для ускорения имеем, соответственно

$$a = \ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -a_0 \cos(\omega_0 t),$$

где  $a_0 = x_0 \omega_0^2$  – максимальное ускорение груза.

В отсутствие сил сопротивления движению, полная энергия системы  $W$ , включающая в себя кинетическую энергию груза и энергию деформации пружины, остается постоянной

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const} \quad (13.5)$$

Ее можно выразить как максимальную кинетическую энергию груза (когда  $x = 0$  и пружина не деформирована); либо как максимальную энергию пружины (когда  $v = 0$ )

$$W = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}.$$



### 13.3. Свободные колебания в колебательном контуре

Рассмотрим систему, состоящую из конденсатора (емкости) и катушки (индуктивности), соединенных друг с другом. Пусть в момент  $t = 0$  конденсатор  $C$  заряжен, а ток в катушке  $L$  отсутствует (рис. 13.2a). При разряде конденсатора в контуре появляется ток, создающий в катушке магнитное поле. В результате возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует быстрому разряду конденсатора.

Когда конденсатор полностью разрядится, сила тока достигнет максимального значения (рис. 13.2b). Затем ток начинает убывать, ЭДС самоиндукции меняет знак, и начинает поддерживать этот ток, перезаряжая тем самым конденсатор. Момент полной перезарядки емкости и исчезновения тока показан на рис. 13.2c. Обратный процесс и переход системы в исходное состояние иллюстрируются рисунками 13.2d и 13.2e. В нижней части рис. 13.21 приведены графики зависимости заряда на конденсаторе и тока в катушке от времени, т.е. функции  $q(t)$  и  $I(t)$ . Эти графики наглядно демонстрирует процессы, происходящие в контуре за время одного полного колебания.

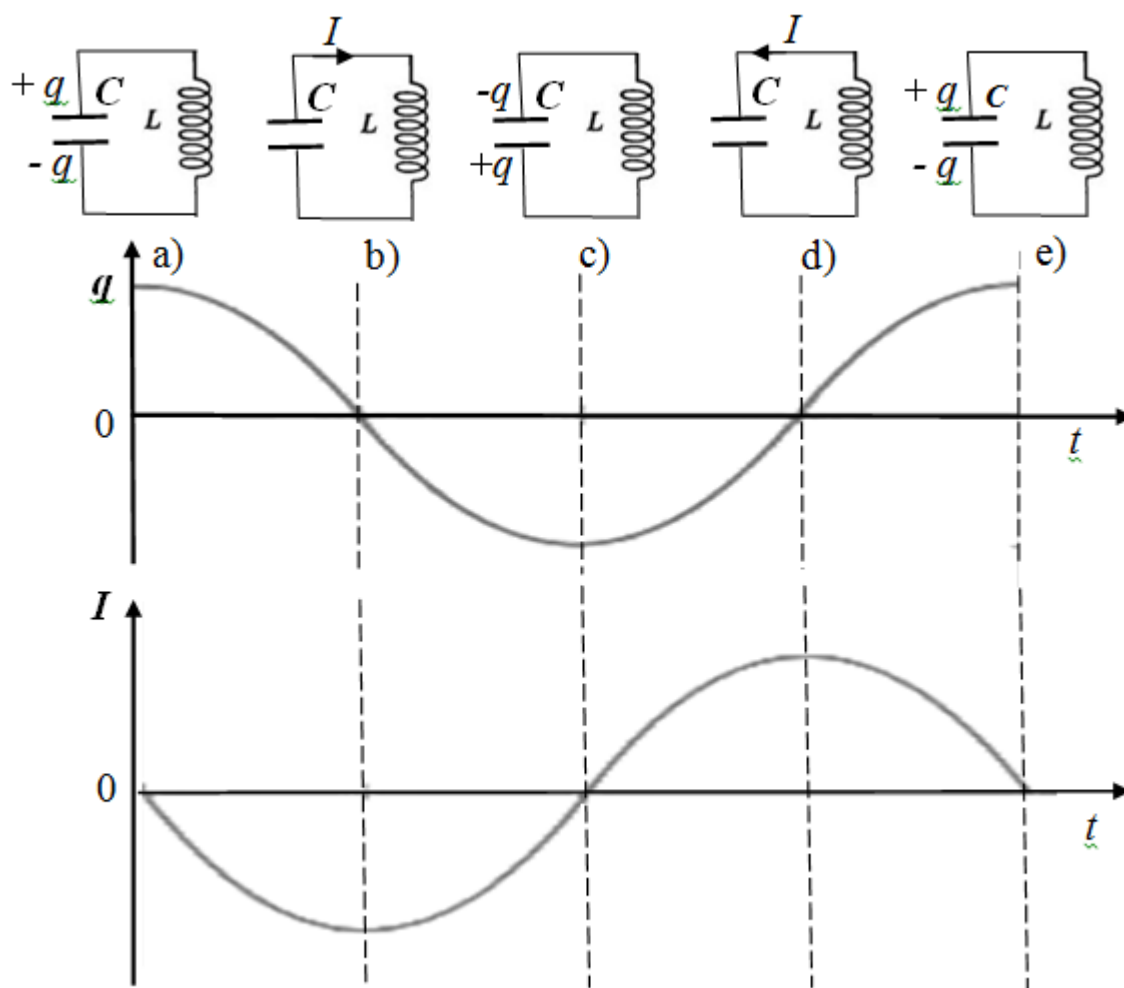


Рис. 13.2

Нетрудно убедиться в том, что если активное сопротивление  $R$  контура стремится к нулю, указанные функции являются гармоническими. Действительно, при отсутствии падения напряжения на нагрузке разность потенциалов на обкладках конденсатора  $U$  в любой момент времени должна быть равна действующей в цепи ЭДС. Так как, в контуре действует только ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_S$ , имеем  $U = \mathcal{E}_S$ . Поскольку  $U = \frac{q}{C}$ , а  $\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$ , получаем

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (13.6)$$

Введя обозначения  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{q}$ , и поделив уравнение (13.6) на  $L$ , получим  $\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$ . Заменяя теперь  $\frac{1}{LC}$  на  $\omega_0^2$ , приходим к каноническому дифференциальному уравнению гармонических колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (13.7)$$

Общим решением этого уравнения будет выражение вида (7.1), а именно:  $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Здесь  $q_0$  - максимальное значение заряда на конденсаторе. Согласно принятым нами начальным условиям, в момент времени  $t = 0$   $q = q_0$ , и, следовательно,  $\varphi = 0$ . Таким образом, имеем окончательно

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t). \quad (13.8)$$

В этом выражении  $\omega_0$  - **собственная частота свободных незатухающих колебаний** в контуре. Она равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (13.9)$$

т.е. зависит только от параметров контура. Период свободных колебаний будет, соответственно, определяться по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (13.10)$$

носящей название **формулы Томсона**.

Поскольку напряжение на конденсаторе равно  $U = \frac{q}{C}$ , функция  $U(t)$  будет выглядеть практически так же, как и  $q(t)$ , а именно  $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ , где  $U_0 = \frac{q_0}{C}$  - максимальное напряжение на обкладках конденсатора. Зависимость тока в контуре от времени получим, продифференцировав выражение (13.8)

$$I(t) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) = -I_0 \sin(\omega_0 t), \quad (13.11)$$

где  $I_0 = q_0\omega_0$  – максимальная сила тока в катушке. Гармонические функции (13.8) и (13.11) полностью соответствуют графикам на рис. 13.2.

### 13.4. Энергия гармонических колебаний в колебательном контуре

Полная энергия  $W$ , запасенная в колебательном контуре, состоит в общем случае из двух составляющих: энергии заряженного конденсатора и энергии катушки с током, то есть

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}. \quad (13.12)$$

При отсутствии потерь, связанных с нагреванием проводов (если  $R=0$ ), эта энергия остается постоянной. Когда конденсатор полностью заряжен (напряжение на конденсаторе в этот момент равно  $U_0$ ), ток в катушке отсутствует, и вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе. Это энергия электрического поля между его обкладками. Когда заряд конденсатора равен нулю, ток в контуре максимален и равен  $I_0$ , а вся энергия контура сосредоточена в катушке. Это энергия магнитного поля в катушке. Можно, таким образом записать

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const}.$$

Эта запись является выражением закона сохранения энергии в контуре.

## ЛЕКЦИЯ 14. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

### 14.1. Свободные затухающие колебания

Любой реальный колебательный контур характеризуется наличием активного сопротивления (это, как минимум, сопротивление проводов). Поэтому, часть запасенной в контуре энергии расходуется на их нагревание. В результате

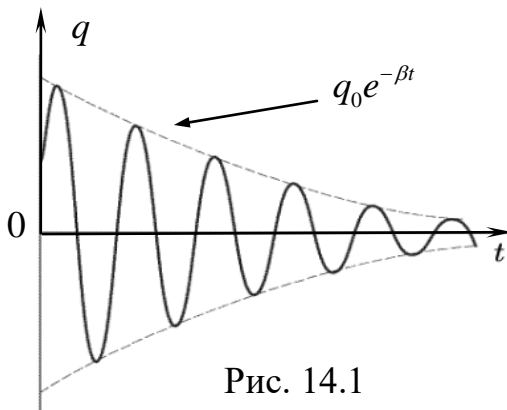


Рис. 14.1

амплитуда колебаний, т.е. максимальные значения заряда и напряжения на конденсаторе, так же, как и максимальная сила тока в катушке, постепенно уменьшаются. Колебания такого вида называются затухающими.

Примерная зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени для затухающих колебаний показана на рис. 14.1. При описании процессов, происходящих в

этом случае в контуре необходимо учесть падение напряжения на сопротивлении  $R$ . Для этого добавим в выражение (13.6) слагаемое, равное  $IR$ . В результате получим

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0.$$

Обозначив, как и ранее,  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$  и  $\frac{dI}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{q}$  и поделив уравнение это уравнение на  $L$ , получим

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя теперь обозначения  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$  и  $\frac{R}{2L} = \beta$ , приходим к **дифференциальному уравнению затухающих колебаний**

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (14.1)$$

Параметр  $\beta$  называется **коэффициентом затухания**. При малом затухании решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (14.2)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  - частота затухающих колебаний. Отсюда видно, что, чем больше сопротивление  $R$ , а, значит и величина коэффициента  $\beta$ , тем сильнее частота затухающих колебаний  $\omega$  отличается от частоты собственных колебаний  $\omega_0$ . При  $R=0$ , очевидно,  $\omega = \omega_0$ . При сильном затухании, если  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , колебаний вообще не будет, и произойдет так называемый **апериодический разряд конденсатора**.

Полученная для случая небольшого затухания функция  $q(t)$ , полностью соответствует представленному на рис. 14.1 графику. Пунктирная кривая на рисунке показывает экспоненту  $e^{-\beta t}$ . Аналогичным образом зависит от времени напряжение на конденсаторе  $U=q/C$ , а также ток в катушке, выражение для которого можно получить, дифференцируя уравнение (14.2).

Отношение амплитуд двух следующих друг за другом колебаний

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

называют **декрементом затухания**. Здесь  $A(t)$  – амплитуда любой колеблющейся величины, (например,  $q$ ,  $U$  или  $x$  для механических колебаний) в момент времени  $t$ . Логарифм этого отношения называют **логарифмическим декрементом затухания**  $\lambda$ . Он равен

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (14.3)$$

Для колебательного контура при малом затухании  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , и

$$\lambda = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (14.4)$$

В качестве одной из характеристик колебательного контура часто используют параметр, называемый **добротностью контура**  $Q$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (14.5)$$

Аналогичным образом можно описать затухающие механические колебания. В механических системах затухание колебаний связано, как правило, с наличием сил сопротивления движению. В разобранный ранее примере с пружинным маятником, это сила сопротивления воздуха (или другой среды, в которой может находиться маятник).

В общем случае считается, что сила сопротивления пропорциональна скорости, т.е.  $F_c = -r\dot{x}$ . Здесь  $r$  - **коэффициент сопротивления**, а знак минус указывает на противоположность направлений силы сопротивления и скорости груза. Поэтому в законе движения груза появится еще одно слагаемое, и уравнение движения будет выглядеть так:  $-kx - r\dot{x} = m\ddot{x}$ . Поделив это уравнение на  $m$ , и введя обозначения  $\beta = \frac{r}{2m}$  и  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , получим уравнение

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , полностью аналогичное уравнению (14.1). Решение этого уравнения при малом затухании аналогично (14.2), то есть,

$$x = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (14.6)$$

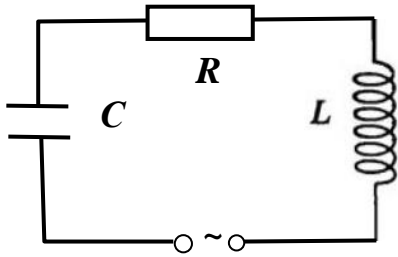
Таким образом, зависимость координаты  $x$  от времени будет выглядеть точно так же, как график на рис. 14.1. Частота затухающих колебаний будет соответственно равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

и при  $\beta \rightarrow 0$ , получим  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Дифференцируя (14.6) по времени, можно получить зависимость от времени скорости и ускорения груза. Это, очевидно, тоже будут затухающие колебания той же частоты, но с определенным сдвигом по фазе.

## 14.2. Вынужденные колебания. Резонанс

Для реализации незатухающих колебаний в реальных системах, необходимо каким-то образом компенсировать потери энергии. Это можно сделать с



$$U = U_m \cos \omega t$$

Рис. 14.2

помощью внешнего периодического воздействия. Для поддержания механических колебаний следует приложить некую силу, меняющуюся по гармоническому закону. В случае электромагнитных колебаний в контуре, нужна, соответственно, внешняя переменная ЭДС.

Колебания, происходящие в системе в результате таких внешних воздействий, называются вынужденными. Рассмотрим колебательный контур, в состав которого помимо емкости  $C$ , индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$ , включен генератор, дающий переменное напряжение  $U$  с амплитудой  $U_m$  и частотой  $\omega$ . (рис. 14.2).

Тогда, уравнение, описывающее колебания в контуре будет выглядеть следующим образом

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t.$$

Отсюда после стандартных преобразований получим **дифференциальное уравнение вынужденных колебаний**

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t \quad (14.7)$$

Решение такого неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения (формула 14.2) содержит экспоненту, стремящуюся со временем к нулю. Поэтому, нас интересует только установившееся частное решение. Оно имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (14.8)$$

Это означает, что колебания в контуре имеют частоту равную частоте генератора, и отстают по фазе на  $\varphi$ . Максимальное значение заряда на конденсаторе  $q_m$  находим подстановкой этого выражения в (14.7). В результате получим, что

$$q_m = \frac{U_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (14.9)$$

Подстановка значений  $\omega_0$  и  $\beta$ , дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (14.10)$$

В соответствии с (14.8), напряжение на конденсаторе  $U_C$  меняется как

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi).$$

Видно, что амплитуды колебаний ( $q_m$  и  $U_{Cm}$ ) зависят не только от напряжения генератора  $U_m$  и параметров контура, но и от частоты  $\omega$ . Опыты показывают, что при определенной частоте, близкой к собственной частоте  $\omega_0$ , эти амплитуды достигают максимальных значений. Резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты переменного напряжения к частоте  $\omega_0$ , называется **резонансом**.

Резонансную частоту  $\omega_{рез}$  можно найти, определив максимум функции (14.9). Она оказывается равной

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (14.11)$$

При малом коэффициенте затухания  $\beta$ , значение  $\omega_{рез}$  практически совпадает с собственной частотой  $\omega_0$ .

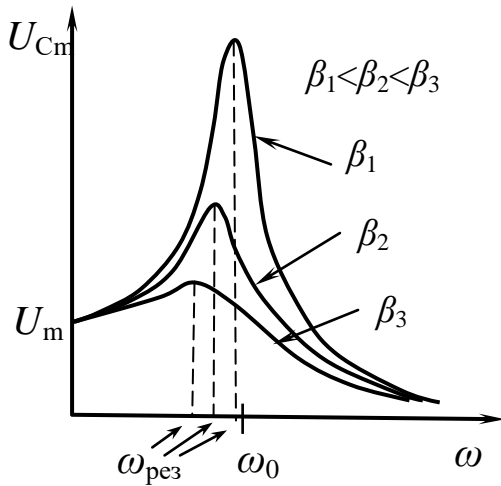


Рис. 14.3

На рис. 14.3 приведены так называемые **резонансные кривые**. Это зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты переменного напряжения для различных значений  $\beta$ .

Чем меньше  $\beta$ , тем выше и острее максимум соответствующей кривой, и тем ближе резонансная частота к  $\omega_0$ . При  $\omega \rightarrow 0$  напряжение на конденсаторе становится равным  $U_m$  для любого контура, поскольку источник дает в этом случае практически постоянное напряжение.

Несколько иначе выглядят резонансные кривые для максимальных значений тока в контуре  $I_m$ . Дифференцируя выражение для заряда (14.8) получаем  $I = -q_m \omega \sin(\omega t - \varphi)$ . Таким образом,  $I_m = q_m \omega$ , и, учитывая (14.10), получаем

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (14.12)$$

Амплитуда колебаний тока  $I_m$  при любых  $R$  (а, значит и  $\beta$ ) будет максимальна, если выражение в скобках равно нулю, т.е. когда  $\omega L = 1/\omega C$ . Это означает, что резонанс для тока в контуре наступает при частоте генератора

$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ , то есть при частоте, равной собственной частоте колебаний контура. Соответствующие резонансные кривые приведены на рис. 14.4. Здесь,

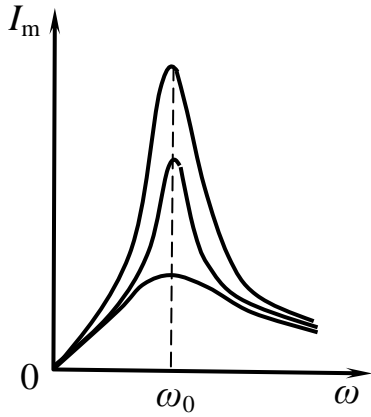


Рис. 14.4

так же, как и на рис. 14.3, чем меньше  $\beta$  (т.е., чем меньше  $R$ , и чем больше  $L$ ), тем выше и острее резонансный пик. Теоретически при  $R = 0$ , амплитуда колебаний стремится к бесконечности.

При  $\omega \rightarrow 0$ , т.е. при постоянном напряжении источника, ток в контуре не течет, и все кривые сходятся в начале координат (то есть  $I_m = 0$ ).

Отметим, что при малом затухании максимальный заряд конденсатора при резонансе равен

$$q_m = \frac{U_m}{\omega_0 R}, \text{ как это вытекает из формулы (14.10) при}$$

$\omega L = 1/\omega C$ . Соответственно, максимальное значение напряжения на конденсаторе будет равно

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega_0 RC} = \frac{U_m \sqrt{LC}}{RC} = \frac{U_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = U_m Q,$$

где  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  - добротность контура. Таким образом, получаем  $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$ . Это

означает, что добротность колебательного контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение.

Явление резонанса в колебательном контуре используется в радиоприемных устройствах для выделения в эфире сигнала определенной радиостанции. При этом приемный контур настраивается так, чтобы его собственная частота совпадала с частотой, на которой работает данная станция. Тогда, благодаря резонансу, сигнал именно этой радиостанции будет усиливаться в  $Q$  раз. Если добротность контура велика, резонансная кривая имеет очень малую ширину, и сигналы других радиостанций восприниматься практически не будут.



## ЛЕКЦИЯ 15. СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ.

### 15.1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Векторная диаграмма

Гармонические колебания удобно представлять с помощью векторных диаграмм. Попробуем изобразить колебание  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Для этого из произвольной точки  $O$  на оси  $x$  под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе, отложим век-

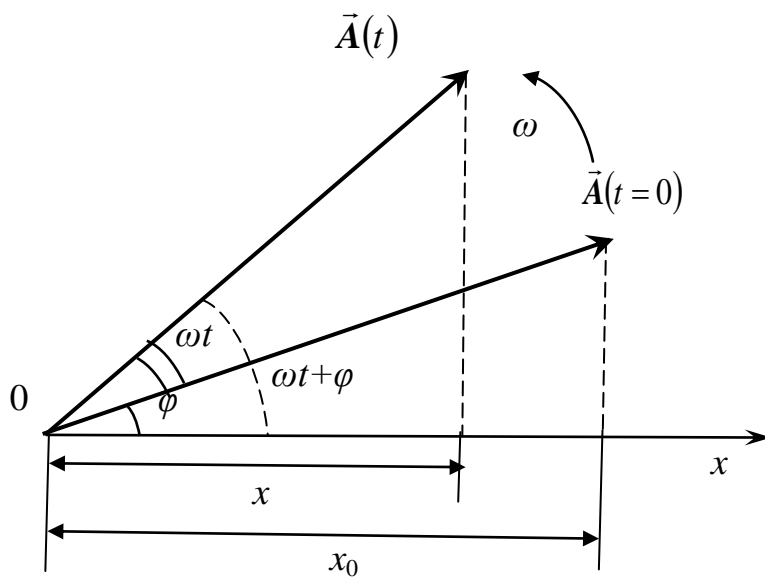


Рис. 15.1

тор  $\vec{A}$ , равный по модулю амплитуде данного колебания  $A$ . Его проекция на ось будет равна  $x_0 = A \cos \varphi$  (рис. 15.1).

Приведем этот вектор во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , равной циклической частоте рассматриваемого колебания. К моменту времени  $t$  он повернется на угол  $\omega t$  от начального положения ( $t = 0$ ) и составит с осью  $x$  угол

$\omega t + \varphi$ , равный фазе колебаний в этот момент времени. Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $x$  будет, соответственно, равна  $A \cos(\omega t + \varphi)$ .

Таким образом, при вращении вектора  $\vec{A}$  против часовой стрелки вокруг выбранного начала координат (точка  $O$ ), проекция конца этого вектора будет совершать колебания вдоль оси  $x$  по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

принимая значения от  $-A$  до  $+A$ . то есть будет представлять собой изображаемое на диаграмме гармоническое колебание.

Описанный метод позволяет легко складывать колебания одинакового направления. Сложим, например, два колебания:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и} \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Оба колебания имеют направление вдоль оси  $x$ , одинаковую частоту  $\omega$ , но разные амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  и начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Изобразим на векторной диаграмме векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , соответствующие амплитудам этих колебаний в

начальный момент времени, когда их фазы равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно (рис. 15.2). Построим по правилу сложения векторов результирующий вектор

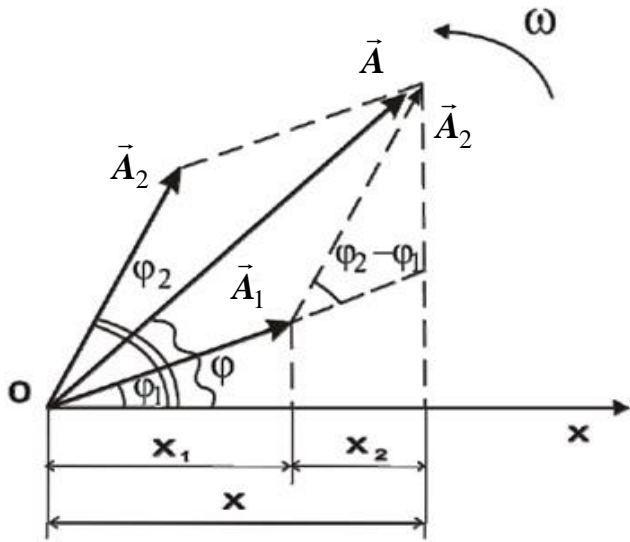


Рис. 15.2

$\vec{A}$  Легко видеть, что проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых  $x = x_1 + x_2$ .

Так как векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , то и вектор  $\vec{A}$  вращается с той же скоростью. Следовательно, результирующее колебание будет иметь вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (15.1)$$

Амплитуда результирующего колебания  $A$  может быть найдена с

помощью теоремы косинусов

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (15.2)$$

где  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  — угол между векторами  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ .

Из рис. 15.2 можно найти и выражение для начальной фазы  $\varphi$  результирующего колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (15.3)$$

Таким образом, при сложении двух колебаний одинакового направления и одинаковой частоты получается колебание той же частоты и того же направления.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний. Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ , ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), то колебания происходят в одинаковой фазе. В этом случае  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ , и  $A = A_1 + A_2$ , т. е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний. При этом, на диаграмме оба вектора направлены в одну сторону.

Если  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ , ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), то колебания происходят в противофазе. Теперь  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ , и  $A = |A_1 - A_2|$ , т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний. При этом, на диаграмме векторы амплитуд противоположны друг другу, и, если, например,  $A_1 = A_2$ , то суммарная амплитуда равна нулю.

## 15.2. Биения

Особый интерес представляет сложение двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами, одинаковыми начальными фазами и мало отличающимися друг от друга частотами ( $\Delta\omega \ll \omega$ ). Будем считать для простоты, что начальные фазы обоих колебаний равны нулю.

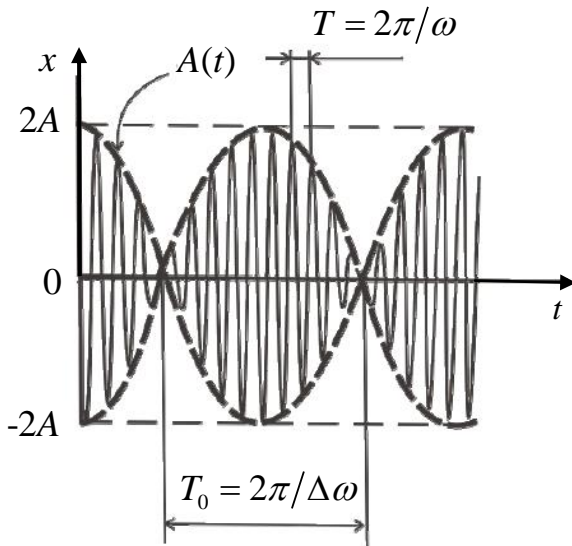


Рис. 15.3

Возьмем два колебания, направленные вдоль оси  $x$ :

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Складывая  $x_1$  и  $x_2$  и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получим (с учетом того, что  $\Delta\omega \ll \omega$ ),

$$x \approx \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (15.4)$$

Полученное выражение можно рассматривать как гармоническое колебание с периодически изменяющейся амплитудой равной  $2A \cos(\Delta\omega/2)t$ . Такие колебания называются **биениями**. График функции (15.4) показан на рис. 15.3.

Таким образом, результирующее колебание будет практически гармоническим с частотой  $\omega$  и периодом  $T=2\pi/\omega$ , амплитуда которого  $A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$  меняется с частотой  $\Delta\omega$  (частота биений) и периодом  $T_0 = 2\pi/\Delta\omega$ .

## 15.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты  $\omega$  происходят во взаимно перпендикулярных направлениях: одно вдоль оси  $x$ , другое вдоль оси  $y$ . Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, тогда

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

Записанные уравнения представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, которую описывает тело, участвующее одновременно в обоих колебаниях. Исключив из этих уравнений параметр  $t$ , найдём,

что результирующий процесс движения точки, может быть представлен кривой, уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (15.5)$$

Это уравнение эллипса, ориентация и величина полуосей которого зависит от амплитуд  $A$  и  $B$ , и разности фаз  $\varphi$  складываемых колебаний. В частности, если  $\varphi = m\pi$ , ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то уравнение (15.5) принимает вид

$$\left( \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой  $y = \pm(B/A)x$ . Здесь знак плюс соответствует нулю и четным значениям  $m$  (рис. 15.4а), а знак минус — нечетным значениям  $m$  (рис. 15.4б). Результирующее колебание является гармоническим с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\sqrt{A^2 + B^2}$  и совершается вдоль прямых, показанных на этих рисунках.

Если  $\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ , где  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , соотношение (15.5) переходит в уравнение эллипса

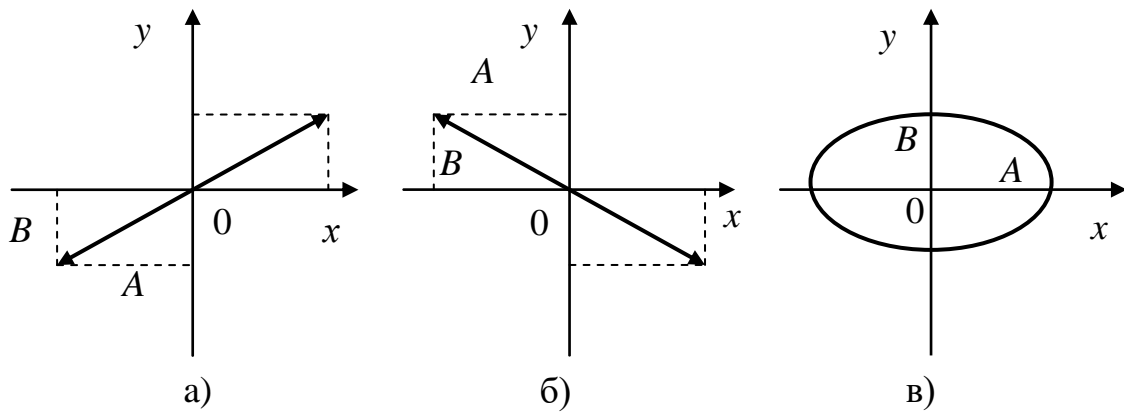


Рис. 15.4

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (15.6)$$

Оси данного эллипса совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 15.4в). В частном случае, когда  $A=B$ , эллипс (15.6) вырождается в окружность.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с различными частотами, траектории результирующих колебаний представляют собой довольно

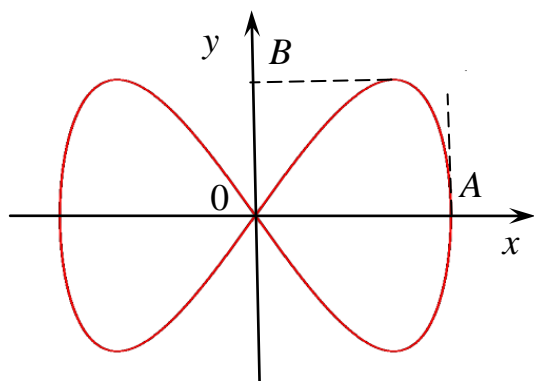


Рис. 15.5

сложные замкнутые кривые, называемые **фигурами Лиссажу**. Наиболее простой вид имеют фигуры, получаемые при сложении колебаний с кратными частотами.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда частота колебаний по оси  $y$  в два раза больше, чем по оси  $x$ . Пусть  $x = A \cos \omega t$ , а  $y = B \sin 2\omega t$ . Используя формулы тригонометрии нетрудно исключить из этих уравнений время  $t$  и получить

$$y = \frac{2B}{A} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

уравнение траектории в виде

Соответствующая фигура Лиссажу представлена на рис. 15.5

## ЛЕКЦИЯ 16. ВОЛНЫ

### 16.1. Волны в упругой среде

Если в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), возникают колебания, то благодаря взаимодействию между частицами данной среды, эти колебания будут передаваться от одной точке к другой с некоторой скоростью, зависящей от свойств среды. Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волновым процессом** (или **волной**). Под сплошной средой понимается среда, непрерывно распределенная в определенной области пространства, и обладающая упругими свойствами.

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

**Упругими волнами** называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Эти волны бывают продольные и поперечные. **Продольная волна**, - это волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны. **Поперечная волна** — это волна, в которой части-

цы колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в любых средах (твердых, жидких или газообразных), в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*. По-

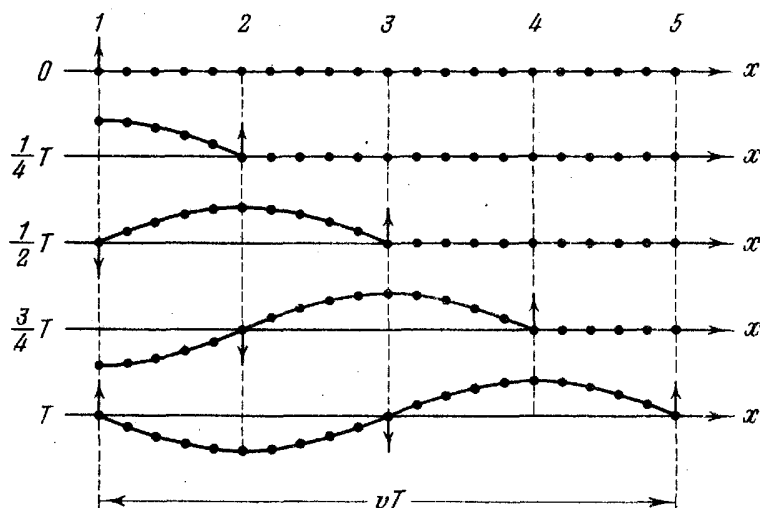


Рис. 16.1

перечные волны могут возбуждаться только в тех средах, где возникают упругие силы *при деформации сдвига*, т. е. в твердых телах. Если колебания частиц среды являются гармоническими, то и упругая волна называется гармонической.

На рис. 16.1 показан процесс возникновения гармонической поперечной

волны, движущейся вдоль оси  $x$  для частиц, расположенных на этой оси. В начальный момент времени  $t = 0$  все частицы покоятся, и частица, находящаяся в точке 1, начинает колебательное движение, смещаясь перпендикулярно оси  $x$ . В момент времени  $t = T/4$  ( $T$  – период колебаний) отклонение первой частицы становится максимальным и начинает двигаться частица, находящаяся в точке 2.

Следующие картинки демонстрируют процесс распространения колебательного движения на частицы более удаленные от точки 1. В момент времени  $t = T$  первая частица завершает полное колебание и в фазе с ней начинает колебаться частица, находящаяся в точке 5.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны**  $\lambda$ . Как видно из рис. 16.1, длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется волна (или определенная фаза колебания) за время, равное периоду колебаний  $T$ , т. е.

$$\lambda = vt, \quad (16.1)$$

где  $v$  – скорость волны, определяющая скорость перемещения фазы, и называемая **фазовой скоростью**.

Понятно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , а все частицы в некотором объеме данной упругой среды. Волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области простран-

ства Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Волновые поверхности неподвижны и их можно провести через любые точки. Волновой фронт в каждый момент времени — один, и он перемещается

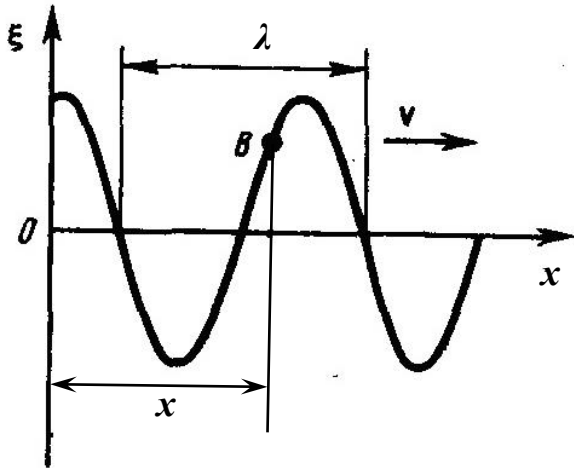


Рис. 16.2

со скоростью распространения волны в данной среде. Волновые поверхности могут иметь различную форму. В простейших случаях они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно волна будет называться **плоской** или **сферической**.

Представим себе плоскую гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . На рис. 16.2

приведен так называемый **график волны**. Он представляет собой зависимость смещения  $\xi$  частиц среды, участвующих в волновом процессе, от расстояния  $x$  этих частиц (например, частицы  $B$ ) до источника колебаний  $O$  в данный момент времени  $t$ .

## 16.2. Уравнение плоской волны

Уравнением волны называют функцию  $\xi = \xi(x, y, z, t)$ , показывающую величину смещения частицы с заданными координатами из положения равновесия в момент времени  $t$ . В случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , эта функция выглядит как  $\xi = \xi(x, t)$ .

Пусть точки, расположенные в плоскости  $x=0$ , колеблются по закону  $\xi(0, t) = A \cos \omega t$ . Тогда колебания частицы  $B$  (см. рис. 16.2), как и всех частиц в плоскости, находящейся на расстоянии  $x$ , будут происходить по тому же закону. Однако, для прохождения волной расстояния  $x$  требуется время  $\tau = x/v$ , где  $v$  — скорость распространения волны. Поэтому эти колебания будут отставать по времени от колебаний источника на  $\tau$ . Таким образом, уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (16.2)$$

В общем случае уравнение **плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (16.3)$$

Здесь  $A = \text{const}$  — амплитуда волны,  $\omega$  — циклическая частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза волны.

Для характеристики волн часто используют **волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (16.4)$$

а также **волновой вектор**  $\vec{k}$ , равный по модулю волновому числу, и направленный перпендикулярно волновой поверхности в сторону распространения волны. Так как  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vt} = \frac{\omega}{v}$ , уравнение (16.3) можно записать следующим образом

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (16.5)$$

Из приведенных уравнений следует, что  $\xi(x, t)$  является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты  $x$ . Если волна перемещается в произвольном направлении, отклонение от положения равновесия точки, положение которой определено радиус вектором  $\vec{r}$ , в момент времени  $t$ , будет равно

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad (16.6)$$

где  $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  это скалярное произведение векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{r}$ .

### 16.3. Волновое уравнение

Распространение волн в *однородной изотропной* среде в общем случае описывается **волновым уравнением** — дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16.7)$$

или

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16.8)$$

где  $v$  — фазовая скорость, а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — **оператор Лапласа**.



Решением уравнения (16.8) является уравнение любой волны (и плоской и сферической). Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16.9)$$

#### 16.4. Плоская электромагнитная волна. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны.

Как уже отмечалось ранее, существование электромагнитных волн было предсказано Максвеллом. При создании в какой-либо области пространства переменного электрического поля, согласно теории Максвелла, возникает переменное магнитное поле, которое в свою очередь порождает переменное электрическое поле и т.д. Этот процесс, распространяясь с конечной скоростью, захватывает все большие и большие области пространства. Таким образом, получается электромагнитная волна. При этом в каждой точке происходят колебания напряженности электрического поля и колебания напряженности магнитного поля согласно уравнениям

$$E = E_0 \cos \omega t \quad \text{и} \quad H = H_0 \cos \omega t. \quad (16.10)$$

Колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят во взаимно перпендикулярных плоскостях, и перпендикулярно направлению распространения волны, т.е. ее скорости (и волновому вектору). Причем вектора  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему. Поперечность электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Из них же следует, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда колеблются в одинаковой фазе. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны включает в себя волновые уравнения для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , подобные уравнению (16.8)

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (16.11)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа, а  $v$  - фазовая скорость электромагнитной волны, определяемая выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (16.12)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ , а  $\varepsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой распространяется волна. В вакууме скорость электромагнитной волны  $v = c$ , и т.к.  $\varepsilon\mu > 1$ , то в любой среде  $v < c$ .

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$ , изображена на рис. 16.3. На этом рисунке показаны значения напряженностей электрического и магнитного полей в точках, расположенных на оси  $x$  в определенный момент времени.

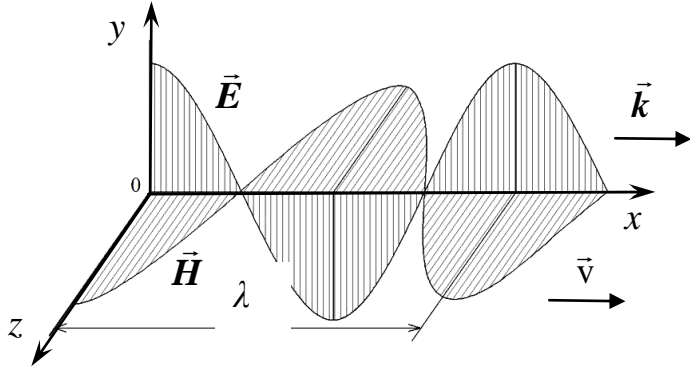


Рис. 16.3

Из уравнений Максвелла вытекает, что в любой момент времени эти значения связаны между собой соотношением

$$E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu}. \quad (16.13)$$

С учетом того, что вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $y$ , а вектор  $\vec{H}$  - оси  $z$ , волновые уравнения (16.11) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (16.14)$$

Решения этих уравнений, т.е. уравнения плоской электромагнитной волны, выглядят следующим образом

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $E_0$  и  $H_0$  амплитуды соответствующих волн, связанные, согласно (16.13), соотношением  $E_0\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0\mu}$ .

### 16.5 Энергия электромагнитной волны

Объемная плотность  $w$  энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей энергии электрического  $w_E$  и магнитного  $w_H$  и полей

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0\mu H^2}{2}.$$

Учитывая соотношение (16.13), получим, что плотности энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинаковы, т. е.  $w_E = w_H$ . Поэтому можно записать

$$w = 2w_E = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot EH$$

Волна, двигаясь со скоростью  $v$ , за время  $\Delta t$  проходит расстояние  $v\Delta t$ . Как видно из рис. 16.4, через площадку  $\Delta s$  пройдет вся энергия, заключенная в объеме  $v\Delta t \Delta s$ . Она будет равна  $\Delta W = w v\Delta t \Delta s$ . Поделив это выражение на  $\Delta t \Delta s$ , определим **плотность потока энергии**, т.е. энергию, проходящую через единицу площади в единицу времени. Она будет равна  $w v$ . Подставив сюда выражение для скорости (16.12), получим, что модуль плотности потока энергии  $S = EH$ .

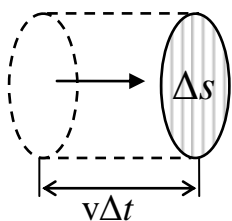


Рис. 16.4.

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с вектором скорости правовинтовую систему, то направление вектора  $[\vec{E}\vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ . Поэтому можно ввести **вектор плотности потока энергии** в виде

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (16.15)$$

Он называется **вектором Умова — Пойнтинга**.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волновая оптика. – М.: «Лань», 2019. – 468 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. Том 3. Учебное пособие. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2020. – 656 с.
3. Трофимова Т.И. Основы физики. Электродинамика. – М., КноРус, 2019. – 270 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2019. – 560 с.
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2020. – 718 с.