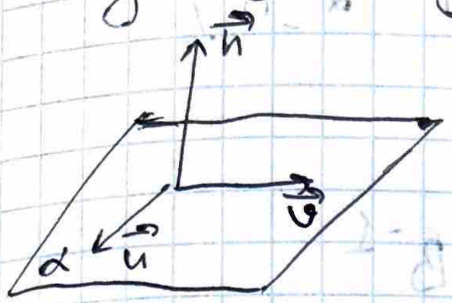
Типовой рассчёт №3 Вариант №5

$A' : V^3 \to V^3$

α: $x+y-z=0$ (отражение относит. плоскости)

1) Найдём матрицу операт. A' в „подходящем" базисе.



$\vec{n} = (1, 1, -1)$

$\vec{u}$ и $\vec{v}$ должны быть перпендикулярны $\vec{n}$

$\vec{u} = (1, 0, 1)$; $(\vec{u}, \vec{n}) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$

$\vec{v} = (0, 1, 1)$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$

$\Rightarrow \{\vec{n}, \vec{u}, \vec{v}\}$ - подходящий базис

$$A'(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A'(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A'(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{v}\}$ имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \det B = -1-1-1=-3$$

$$B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^T=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

По формуле:

$$A'=B^{-1}\cdot A\cdot B \Rightarrow A=B\cdot A'B^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

2) т $M(1,0,0) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=(1,0,0)$

$$A(\overrightarrow{OM})=(1,0,0)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}(1,-2,2)=\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$$