МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»
РТУ МИРЭА

ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия (2семестр)

(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)

Уровень	бакалавриат *(бакалавриат, магистратура, специалитет)*
Форма обучения	очная *(очная, очно-заочная, заочная)*
Направление(-я) подготовки	12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.03 «Системный анализ и управление» *(код(-ы) и наименование(-я))*
Институт	искусственного интеллекта *(полное и краткое наименование)*
Кафедра	высшей математики *(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))*
Лектор	к.т.н., доц. Свистова Светлана Федоровна *(сокращенно – ученая степень, ученое звание; полностью – ФИО)*

Используются в данной редакции с учебного года 2020/2021
(учебный год цифрами)

Проверено и согласовано «____» ________20___г. ____________ *М.П. Романов*
(подпись директора Института/Филиала с расшифровкой)

Москва 2023 г.

Дисциплина читается во 2 семестре

По дисциплине учебным планом предусмотрено:
лекции – 32 академических часа;
лабораторные работы – 0 академических часов;
практические занятия – 32 академических часа;
самостоятельная работа студентов – 44 академических часа;
контроль 36 часов

Курс лекций «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для специальностей 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.03 «Системный анализ и управление».

Доцент кафедры высшей математики Свистова С.Ф.

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» является обязательной дисциплиной вариативной части блока «Дисциплины» учебного плана специальностей 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 27.03.03 «Системный анализ и управление».

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 акад. час.). Форма промежуточной аттестации: экзамен.

Данный курс лекций является продолжением курса, читаемого в 1 семестре, и состоит из следующих основных разделов: системы линейных уравнений, линейные пространства, евклидовы пространства, квадратичные формы.

Знания, полученные в процессе изучения данной дисциплины, формируют логическое и системное мышление, позволяют разрабатывать теоретические и экспериментальные модели.

Задачи курса заключаются в изучении методов решения систем линейных уравнений, свойств линейных операторов, геометрических понятий в евклидовых пространствах и правил преобразования квадратичных форм.

Данная дисциплина является базой для изучения разделов высшей математики таких, как дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, основы линейного программирования, теория игр и др.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. Системы линейных алгебраических уравнений

1.1. Системы линейных однородных алгебраических уравнений

В общем виде система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.1),$$

или в матричной записи $AX = B$, $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

здесь m не обязательно равно n.

Для указанной системы вводятся следующие обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы,

$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец правых частей, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Определение. Решением системы уравнений (1) называется такой набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, который при подстановке в систему (1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения в тождества.

Определение. Система уравнений (1) совместна, если у неё существует хотя бы одно решение. Если у системы нет ни одного решения, то она называется несовместной.

СЛАУ с нулевыми правыми частями называется системой линейных однородных алгебраических уравнений. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

В этой лекции рассматривается решение однородных систем. Решение систем с ненулевыми правыми частями (такие системы называются неоднородными) будет рассмотрено в следующей лекции.

Замечание. Система линейных однородных алгебраических уравнений (1.2) всегда совместна, так как у неё существует нулевое решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Множество решений системы 1. является линейным пространством.

Доказательство. Пусть M – множество решений системы (1.2). Проверим, что для элементов множества M выполнено определение линейного пространства:

$$\forall X_1, X_2 \in M \quad A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \in M,$$
$$\forall \lambda \in R, \forall X \in M \quad A\lambda X = \lambda AX = \lambda 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda X \in M.$$

Выполнение восьми аксиом линейного пространства следует из свойств матриц-столбцов.

Задача. Докажите, что множество решений системы (1.1) не является линейным пространством.

1.2. Метод Гаусса решения СЛАУ

Следующие элементарные преобразования матрицы системы не нарушают её равносильность

A	система (1)
– перестановка двух строк	– перестановка двух уравнений
– умножение строки на $\lambda \neq 0$	– умножение уравнения на $\lambda \neq 0$
– добавление к одной строке другой, умноженной на λ	– добавление к одному уравнению другого, умноженного на λ
– перестановка двух столбцов	– перенумерация неизвестных

Таким образом, с линейными уравнениями и со строками их матриц можно совершать элементарные преобразования. Если менять местами столбцы матрицы, то требуется перенумеровывать соответствующие неизвестные, поэтому менять местами столбцы и перенумеровывать неизвестные не рекомендуется.

Теорема. Пусть ранг матрицы системы равен r ($\mathrm{rg}A = r \leq n$), тогда система (1.2) эквивалентна системе с матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \tilde{a}_{1r+2} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \tilde{a}_{2r+2} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \tilde{a}_{rr+2} & \ldots & \tilde{a}_{rn} \\ \hline & 0 & & & & 0 & & \end{array}\right)$$

Доказательство. Применим метод Гаусса приведения матрицы к верхнетреугольному виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[A_k - A_1 \frac{a_{k1}}{a_{11}}]{A_2 - A_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы предположили, что $a_{11} \neq 0$, в противном случае находим в первом столбце элемент $a_{k1} \neq 0$ и переставляем k – ую строку (её мы обозначаем A_k) матрицы на место первой строки. Если в первом столбце все элементы нулевые, то переходим в матрице A ко второму столбцу.

С использованием подобных преобразований, матрица будет приведена к верхнетреугольному виду, причём в верхнем левом углу будет матрица размера $r \times r$, поскольку $\mathrm{rg}A = r$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & a_{1r+2} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & a'_{2r+2} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a''_{rr} & a''_{rr+1} & a''_{rr+2} & \dots & a''_{rn} \\ \hline & & 0 & & & 0 & & \end{array}\right).$$

Затем к матрице $r \times r$, расположенной в верхнем левом углу применим обратный ход метода Гаусса: сначала из всех строк A_k с номерами $1 \leq k < r$ вычтем r – ую строку, умноженную на a_{kr}/a_{rr}

$$A_k - A_r \frac{a_{kr}}{a_{rr}}.$$

В результате все элементы r – ого столбца в строках с номерами от 1 до $r - 1$ станут нулевыми. Применяя подобные преобразования, получим требуемую матрицу $\tilde{A}$.

Определение. Минор $r \times r$, стоящий в верхнем левом углу матрицы $\tilde{A}$, называется базисным, а неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$, входящие в базисный минор, называются базисными неизвестными. Остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ называются свободными.

Множество решений системы (2) образует линейное пространство. Как найти базис этого линейного пространства? Какова размерность пространства решений?

Теорема. Пусть ранг матрицы системы (1.2) равен $\mathrm{rg}A = r < n$, тогда пространство решений M системы (1.2) имеет размерность $\dim M = n - r$.

Доказательство. При решении системы методом Гаусса была получена матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \tilde{a}_{1r+2} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \tilde{a}_{2r+2} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \tilde{a}_{rr+2} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ \hline & & 0 & & & 0 & & \end{array}\right).$$

Эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -\tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} - \tilde{a}_{1r+2}x_{r+2} - \dots - \tilde{a}_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = -\tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} - \tilde{a}_{rr+2}x_{r+2} - \dots - \tilde{a}_{rn}x_n, \end{cases}$$

Свободные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ принимают любые значения, а базисные переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ однозначно выражаются через свободные

$$X_{\text{общ одн}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1r+1}c_1 - \tilde{a}_{1r+2}c_2 - \dots - \tilde{a}_{1n}c_{n-r} \\ \dots \\ -\tilde{a}_{rr+1}c_1 - \tilde{a}_{rr+2}c_2 - \dots - \tilde{a}_{rn}c_{n-r} \\ \hline c_1 \\ \dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие наборы свободных переменных

1) $x_{r+1} = 1,\ x_{r+2} = 0,\ x_{r+3} = 0, \dots,\ x_n = 0;$

2) $x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ x_{r+3} = 0, \dots,\ x_n = 0;$

3) $x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 0,\ x_{r+3} = 1, \dots,\ x_n = 0;$

….

$n-r)$ $x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 0, \dots,\ x_{n-1} = 0,\ x_n = 1.$

Таких наборов $n-r$ штук по числу свободных неизвестных.

Запишем соответствующие решения однородной системы

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1r+1} \\ -\tilde{a}_{1r+1} \\ \dots \\ -\tilde{a}_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1r+2} \\ -\tilde{a}_{1r+2} \\ \dots \\ -\tilde{a}_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ E_{n-r} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1n} \\ -\tilde{a}_{1n} \\ \dots \\ -\tilde{a}_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество столбцов $S = \{E_1, E_2, \dots, E_{n-r}\}$ и докажем, что это базис в пространстве решений системы (1.2).

1) докажем линейную независимость элементов S

Составим матрицу из координат векторов

$$C = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{1r+1} & -\tilde{a}_{1r+2} & \dots & -\tilde{a}_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -\tilde{a}_{rr+1} & -\tilde{a}_{rr+2} & \dots & -\tilde{a}_{rn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Размерность этой матрицы $n \times (n-r)$, ранг матрицы C равен $\mathrm{rg}C = n - r$,

так как она содержит минор $(n-r)$ порядка, отличный от нуля. По теореме о базисном миноре все $(n-r)$ столбцов матрицы C линейно независимы, то есть система $S = \{E_1, E_2, \dots, E_{n-r}\}$ линейно независима.

2) докажем полноту системы $S=\{E_1,E_2,\dots,E_{n-r}\}$, то есть докажем, что любое решение системы выражается через элементы S

Рассмотрим любое решение системы, его можно записать в виде

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ x_r\\ \hline x_{r+1}\\ \dots\\ x_n \end{pmatrix}=x_{r+1}E_1+x_{r+2}E_2+\dots+x_nE_{n-r},$$

следовательно, оно выражается через элементы системы $S=\{E_1,E_2,\dots,E_{n-r}\}$.

Таким образом, $\{E_1,E_2,\dots,E_{n-r}\}$ – базис в пространстве решений и размерность этого пространства равна $n-r$.

Определение. Система $\{E_1,E_2,\dots,E_{n-r}\}$ является базисом в пространстве решений и называется фундаментальной системой решений (ФСР).

1.3. Примеры решения систем линейных однородных алгебраических уравнений

Пример. Решить систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\ 2x_1+3x_2+4x_3=0\\ x_1+x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

Приведём матрицу системы с помощью элементарных преобразований к диагональному виду (относительно базисных неизвестных)

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 2&3&4&0\\ 1&1&3&-3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 0&-1&2&-6\\ 0&-1&2&-6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 0&-1&2&-6\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1&0&5&-9\\ 0&1&-2&6\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

отсюда получаем x_1,x_2 – базисные неизвестные, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$ – свободные неизвестные. Исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} x_1+5c_1-9c_2=0\\ x_2-2c_1+6c_2=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x_1=-5c_1+9c_2\\ x_2=2c_1-6c_2\\ x_3=c_1\\ x_4=c_2, \end{cases}$$

запишем общее решение системы

$$X_{\text{общ}}=\begin{pmatrix} -5c_1+9c_2\\ 2c_1-6c_2\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\underbrace{\begin{pmatrix} -5\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}}_{=E_1}+c_2\underbrace{\begin{pmatrix} 9\\ -6\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}}_{=E_2}.$$

Фундаментальная система решений ФСР $=\{E_1,E_2\}$ – базис в пространстве решений M однородной системы уравнений. Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных

$$\dim M = n - r = 4 - 2 = 2.$$

Пример. Решить систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Приведём матрицу системы с помощью элементарных преобразований к диагональному виду (относительно базисных неизвестных)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, отсюда получаем x_1, x_2, x_4 – базисные неизвестные, $x_3 = c_1$ – свободное неизвестное.

Исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} x_1 - 4c_1 = 0 \\ x_2 - 3c_1 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

x_3 – свободное неизвестное, оно может принимать произвольные значения $x_3 = c_1$.

Общее решение однородной системы будет

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 4c_1 \\ 3c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= E_1}.$$

Фундаментальная система решений ФСР $= \{E_1\}$ – базис в пространстве решений M однородной системы уравнений. Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных

$$\dim M = n - r = 4 - 3 = 1.$$

Лекция 2. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Метод Гаусса систем линейных неоднородных алгебраических уравнений

Неоднородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для указанной системы вводятся следующие обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы,

$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец правых частей, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Замечание. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений может быть несовместна

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Замечание. Множество решений системы (2.1) не образует линейное пространство.
Пусть X_1 и X_2 – решения системы (2.1), то есть
$AX_1 = B$ и $AX_2 = B$,
тогда $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B$.
Значит $X_1 + X_2$ не является решением.

Теорема О структуре решения неоднородной СЛАУ.
Если X и Y – решения системы (2.1), то их разность $X - Y = X_{\text{одн}}$ – решение однородной системы уравнений.

Доказательство. Так как X и Y – решения системы (1), то $AX = B$ и $AY = B$, следовательно, $A(X - Y) = AX - AY = B - B = 0$. Поэтому $X_{\text{одн}} = X - Y$ – решение однородной системы уравнений.

Следствие. Если $X_{\text{частн}}$ – какое-либо частное решение неоднородной СЛАУ, то $Y = X_{\text{частн}} + X_{\text{одн}}$ – общее решение этого уравнения.

Метод Гаусса решения системы (2.1)

Элементарные преобразования

A_B	система (1)
– перестановка двух строк – умножение строки на $\lambda \neq 0$ – добавление к одной строке другой, умноженной на λ	– перестановка двух уравнений – умножение уравнения на $\lambda \neq 0$ – добавление к одному уравнению другого, умноженного на λ
– перестановка двух столбцов (кроме последнего)	– перенумерация неизвестных

При элементарных преобразованиях ранг исходной матрицы A_B совпадает с рангом матрицы $\tilde{A}_B$, полученной в результате преобразований $\operatorname{rg} A_B = \operatorname{rg} \tilde{A}_B$. Система с матрицей $\tilde{A}_B$ эквивалентна системе с матрицей A_B в том смысле, что решения этих систем совпадают.

При решении неоднородных СЛАУ могут быть следующие случаи

1). $\operatorname{rg} A = r = n$, то есть ранг матрицы системы равен числу неизвестных, при этом $\operatorname{rg} A_B$ либо равен r, либо равен $r + 1$

1а). $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B = r = n$.

В результате элементарных преобразований матрица $\tilde{A}_B$ примет вид

$$\tilde{A}_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{b}_r \\ \hline & & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

Так как $\operatorname{rg} A_B = \operatorname{rg} \tilde{A}_B = r = n$, следова-тельно, $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 \\ \quad \cdots \\ x_r = \tilde{b}_r \end{cases},$$

$r = n$, решение единственное.

1б). $\operatorname{rg} A = r = n,\ \operatorname{rg} A_B = r + 1 = n + 1$.

В результате элементарных преобразований матрица $\tilde{A}_B$ примет вид

$$\tilde{A}_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{b}_r \\ \hline & & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

Так как $\operatorname{rg} \tilde{A}_B = r + 1$, следовательно, $\exists\ \tilde{b}_i \neq 0$, $r + 1 \leq i \leq m$. система несовместна.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 \\ \quad \cdots \\ x_r = \tilde{b}_r \\ 0 = 0 \\ \quad \cdots \\ 0 = \tilde{b}_i \neq 0 \end{cases},$$

2). $\operatorname{rg} A = r < n$, то есть ранг матрицы системы меньше числа неизвестных

2а). $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B = r < n$.

$$\tilde{A}_B = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \hline & & 0 & & & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \cdots \\ x_r + \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r \end{cases},$$

$x_1, \ldots, x_r$ – базисные неизвестные, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободные неизвестные.

$$X_{\text{общ.неодн.}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{1n}x_n \\ \qquad \cdots \\ \tilde{b}_r - \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \cdots \\ x_n \end{cases}$$

При заданном наборе свободных неизвестных базисные неизвестные находятся однозначно. В случае 2а) система имеет бесконечное множество решений.

2б**).** $\operatorname{rg} A = r < n,\ \operatorname{rg} A_B = r + 1$.

В результате элементарных преобразований матрица $\tilde{A}_B$ примет вид

$$\tilde{A}_B = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \hline & & & & & & \\ & & 0 & & & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right),$$

$\exists\ \tilde{b}_i \neq 0, r + 1 \leq i \leq m$, тогда i – ое уравнение системы принимает вид $0 = \tilde{b}_i \neq 0$, следовательно, система несовместна.

2.2. Теорема Кронекера-Капелли

1. Для того, чтобы СЛАУ являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы.

СЛАУ совместна $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B$

2. Для того, чтобы СЛАУ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы и был равен числу неизвестных.

СЛАУ имеет единственное решение $\Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B = n$.

3. Для того, чтобы СЛАУ имела бесконечное множество решений, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы и был меньше числа неизвестных.

СЛАУ имеет бесконечное множество решений $\Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B < n$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость: для совместной системы должны быть равны ранги $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A_B$.

Для совместной системы существует такой набор неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, что $AX = B$. Обозначим $B_1, B_2, \dots, B_n$ столбцы матрицы A, тогда $B_1x_1 + B_2x_2 + \cdots + B_nx_n = B$, следовательно, столбец B правых частей есть линейная комбинация столбцов матрицы A. Значит $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B$.

Докажем, что из равенства рангов $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B$ следует совместность системы.

Возьмём некоторый базисный минор матрицы A (т.е. минор максимальной размерности), он будет базисным и для матрицы A_B, так как $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B$. По теореме о базисном миноре все остальные столбцы, которые не входят в базисный минор, будут линейной комбинацией базисных столбцов, в том числе и столбец B. Значит, система совместна.

Доказательства утверждений теоремы по пунктам 2 и 3 фактически содержатся в рассмотренных ранее случаях 1а) и 2а).

2.3. Альтернатива Фредгольма

Имеет место одно из следующих утверждений:

– либо неоднородная система СЛАУ $AX = B$ имеет единственное решение при любой правой части,

– либо соответствующая однородная система СЛАУ $AX = 0$ имеет ненулевое решение.

Доказательство. Пусть система $AX = B$ имеет единственное решение, это возможно тогда и только тогда, когда $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_B = n$. Значит в этом случае однородная система $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Пусть система $AX = 0$ имеет ненулевое решение, это возможно тогда и только тогда, когда $\mathrm{rg}A < n$. В этом случае система $AX = B$ либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. Найти общее решение и одно частное решение системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

Элементарными преобразованиями приводим матрицу к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 12 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & -12 \\ 0 & -32 & -40 & -8 & -32 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\div -3) \\ (\div -8) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5/4 & 1/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/4 & 9/4 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 1/4 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда находим $x_1, x_2,$ – базисные неизвестные, $x_3, x_4,$ – свободные неизвестные

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{4}C_1 - \frac{9}{4}C_2 \\ x_2 = 1 - \frac{5}{4}C_1 - \frac{1}{4}C_2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2, \end{cases}$$

$$X_{\text{общ.неодн.}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -9/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

частное решение   решение однородной

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (t-1)x + y = 2 \\ 2x + ty = -2. \end{cases}$$

Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = (t-1)t - 2 = (t-2)(t+1).$$

Рассмотрим сначала случаи равенства нулю определителя $\det(A) = 0$

1) $t = 2$, в этом случае система имеет вид

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$$ – система несовместна;

2) $t = -1$, в этом случае система имеет вид

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 2x - y = -2, \end{cases}$$

приведём матрицу системы с помощью элементарных преобразований к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -1 \end{array}\right),$$

отсюда находим находим x_1 – базисное неизвестное, x_2 – свободное неизвестное

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \dfrac{1}{2}C \\ x_2 = C, \end{cases}$$

$$X_{\text{общ.неодн.}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

частное решение

решение однородной системы

3) рассмотрим случай, когда определитель матрицы системы не равен нулю $\Delta = \det(A) \neq 0$, при этом $t \neq 2,\ t \neq -1$; находим решение системы по формулам Крамера

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = 2(t+1), \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(t+1)}{(t-2)(t+1)} = \frac{2}{(t-2)},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2(t+1), \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2(t+1)}{(t-2)(t+1)} = \frac{-2}{(t-2)}.$$

§ 2.4. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трёх неизвестных.

а) Система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right).$$

Система описывает две прямые на плоскости. Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение. Если прямые параллельны, то система несовместна. Если прямые совпадают, то система имеет бесконечное множество решений.

б) Система трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right).$$

Система описывает три плоскости в пространстве.

Если плоскости пересекаются в одной точке, то система имеет единственное решение (случай $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B = 3$).

Если хотя бы две плоскости параллельны, то система несовместна (случаи $\operatorname{rg} A = 1$, $\operatorname{rg} A_B = 2$ или $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{rg} A_B = 3$).

Если плоскости совпадают, то система имеет бесконечное множество решений (случай $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B = 1$). Если три плоскости пересекаются по одной прямой, то система имеет бесконечное множество решений (случай$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B = 2$).

Лекция 3. Линейные операторы и их матрицы

3.1. Определение линейного оператора

Рассмотрим линейное пространство L и некоторое отображение $\hat{A}: L \to L$, то есть правило, по которому каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{y} \in L$, $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$. Вектор $\vec{y}$ назвается образом, вектор $\vec{x}$ назвается прообразом. Отображение $\hat{A}$ осуществляет преобразование линейного пространства L.

Определение. Отображение $\hat{A}: L \to L$ называют линейным оператором, если
1) $\hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2),\ \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$,
2) $\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}(\vec{x}),\ \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R$.

Примеры линейных операторов.
1. Линейный оператор растяжения (сжатия, подобия)

$$\hat{A}(\vec{x}) = \alpha\vec{x}, \qquad \forall \vec{x} \in L, \qquad \alpha \in R.$$

Проверим выполнение свойств линейности

$$\hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \alpha(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \alpha\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2 = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L,$$

$$\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda\alpha\vec{x} = \lambda\hat{A}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R.$$

2. Нулевой оператор

$$\hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}, \qquad \forall \vec{x} \in L.$$

Это частный случай примера 1 при $\alpha = 0$.
3. Линейный оператор дифференцирования

$$\hat{A}: P_2 \to P_2,$$

$P_2 = \{p(t) = at^2 + bt + c\}$ – многочлены степени не выше второй

$\hat{A}[p(t)] = \frac{d}{dt}[p(t)]$.

Проверим , что $\hat{A}[p(t)]$ является оператором

$$\hat{A}[p(t)] = \frac{d}{dt}[at^2 + bt + c] = 2at + b \in P_2.$$

Проверим выполнение свойств линейности

1) $\hat{A}[p_1(t) + p_2(t)] = \frac{d}{dt}[p_1(t) + p_2(t)] = \frac{d}{dt}[p_1(t)] + \frac{d}{dt}[p_2(t)] == \hat{A}[p_1(t)] + \hat{A}[p_2(t)]$,

$\forall p_1(t), p_2(t) \in P_2$,

2) $\hat{A}[\lambda p(t)] = \frac{d}{dt}[\lambda p(t)] = \lambda\frac{d}{dt}[p(t)] = \lambda\hat{A}[p(t)],\ \forall p(t) \in P_2, \forall \lambda \in R$.

Или можно объединить 1) и 2) $\hat{A}[\lambda p_1(t)+\mu p_2(t)]=\frac{d}{dt}[\lambda p_1(t)+\mu p_2(t))]=\frac{d}{dt}[\lambda p_1(t)]+\frac{d}{dt}[\mu p_2(t)]==\lambda\frac{d}{dt}[p_1(t)]+\mu\frac{d}{dt}[p_2(t)]=\lambda\hat{A}[p_1(t)]+\mu\hat{A}[p_2(t)]$

Свойства линейных операторов

1. $\hat{A}(\vec{0})=\vec{0}$.

2. $\hat{A}(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n)=\lambda_1\hat{A}(\vec{x}_1)+\lambda_2\hat{A}(\vec{x}_2)+\cdots+\lambda_n\hat{A}(\vec{x}_n)$,

$$\forall\lambda_\kappa\in\mathbb{R};\kappa=1,\cdots,n;\ \forall x_i\in L, i=1,\cdots,n.$$

3.2. Матрица линейного оператора

Пусть линейный оператор $\hat{A}$ действует в линейном пространстве $\hat{A}: L\to L$ и $E=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\rangle$ – некоторый базис в L.

Найдём образы базисных векторов

$$\hat{A}(\vec{e}_1)=\vec{f}_1,\hat{A}(\vec{e}_2)=\vec{f}_2,\dots,\hat{A}(\vec{e}_n)=\vec{f}_n,$$

Разложим полученные векторы $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\dots,\vec{f}_n$ по базису и запишем координаты в столбец

$$\hat{A}(\vec{e}_1)=\vec{f}_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\cdots+a_{n1}\vec{e}_n\sim\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(\vec{e}_2)=\vec{f}_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\cdots+a_{n2}\vec{e}_n\sim\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\cdots\\a_{n2}\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(\vec{e}_n)=\vec{f}_n=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\cdots+a_{nn}\vec{e}_n\sim\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdots\\a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из координат $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\dots,\vec{f}_n$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

Эту матрицу называют матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе E.

Определение. Матрица A называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе E, если её столбцами являются координаты образов базисных векторов.

Теорема. Пусть $\hat{A}: L\to L$ – линейный оператор в n–мерном линейном пространстве и A – матрица этого оператора в базисе $E=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\rangle$, тогда действие линейного оператора $\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})$ на элементы $\vec{x}\in L$ линейного пространства записывается формулой

$$\vec{y}=A\vec{x},$$

где $\vec{x}\sim\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$ и $\vec{y}\sim\begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}$ – координаты векторов $\vec{x}$,$\vec{y}$ в базисе E.

Доказательство. Рассмотрим разложение вектора $\vec{x}$ по базису

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

и найдём

$$\hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) =$$
$$= x_1\hat{A}(\vec{e}_1) + x_2\hat{A}(\vec{e}_2) + \cdots + x_n\hat{A}(\vec{e}_n) = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + \cdots + x_n\vec{f}_n =$$
$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n) + \cdots$$
$$\ldots + x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n)\sim$$
$$\sim x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ \cdots\\ a_{n2}\end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \cdots\\ a_{nn}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

Вывод: Зная матрицу оператора в базисе E, мы описываем его действие на любой вектор $\vec{x} \in L$.

Теорема.(обратная). Пусть L – n-мерное линейное пространство, $E = \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\rangle$ – базис в L, $A = (a_{ij})$ – некоторая матрица размера $n \times n$. Определим оператор $\hat{A}$ следующим образом:

$$\hat{A}(\vec{x}) = \vec{y} \iff \begin{pmatrix}y_1\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

тогда: 1) оператор $\hat{A}$ – линейный,

2) матрица оператора $\hat{A}$ в базисе E совпадает с матрицей A.

Доказательство. Проверим линейность оператора

$$\hat{A}(\vec{x} + \vec{z})\sim A\begin{pmatrix}x_1 + z_1\\ \cdots\\ x_n + z_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}z_1\\ \cdots\\ z_n\end{pmatrix}\sim\hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{z}),$$
$$\hat{A}(\lambda\vec{x})\sim A\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \cdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix} = \lambda A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\sim\lambda\hat{A}(\vec{x}).$$

Найдём матрицу линйного оператора

$$\hat{A}(\vec{e}_1)\sim A\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \cdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},$$
$$\hat{A}(\vec{e}_2)\sim A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \cdots\\ a_{n2}\end{pmatrix},$$

…

$$\hat{A}(\vec{e}_n) \sim A\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\cdots\\a_{nn}\end{pmatrix}.$$

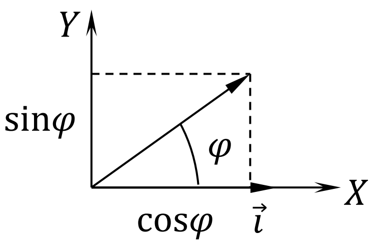
Итак, матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $E = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

3.3. Примеры нахождения матриц линейных операторов

1. Линейный оператор поворота векторов плоскости относительно начала координат на угол φ

Базис $E = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, $\vec{e}_1 = \vec{\imath}$, $\vec{e}_2 = \vec{\jmath}$.



$$\hat{A}(\vec{\imath}) = \vec{f}_1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(\vec{\jmath}) = \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

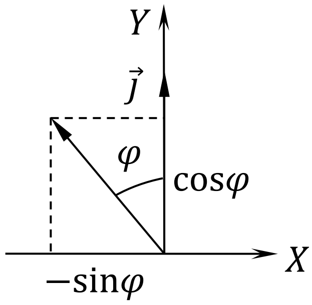


Рис.3.1

рис.3.2

Матрица линейного оператора поворота векторов плоскости относительно начала координат на угол φ

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

<u>Задача.</u> Доказать, что $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi)\\\sin(n\varphi) & \cos(n\varphi)\end{pmatrix}$.

2. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве P_2 многочленов не выше второй степени

$$\hat{A}[p(t)] = (t+1)\frac{d^2}{dt^2}[p(t)] + p(t).$$

Найдём матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе $E = \langle 1, t, t^2 \rangle$

$$\hat{A}[1] = 0 + 1 = 1 \sim \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \hat{A}[t] = 0 + t = t \sim \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}[t^2] = 2(t+1) + t^2 = t \sim \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Рассмотрим линейный оператор сдвига, действующий в линейном пространстве P_2 многочленов не выше второй степени

$$\hat{A}[p(t)] = p(t+2).$$

Найдём матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе $E = \langle 1, t, t^2 \rangle$

$$\hat{A}[1] = 1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A}[t] = t + 2 \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}[t^2] = (t+2)^2 = t^2 + 4t + 4 \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве P_3 многочленов не выше третьей степени

$$\hat{A}[p(t)] = (t+1)\frac{d^2}{dt^2}[p(t)].$$

Найдём матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе $E = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$

$$\hat{A}[1] = 0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A}[t] = 0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}[t^2] = (t+1)2 = 2 + 2t \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}[t^3] = (t+1)6t = 6t + 6t^2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лекция 4. Действия с линейными операторами и их матрицами

4.1. Действия с линейными операторами

Пусть линейные операторы $\hat{A}: L \to L$ и $\hat{B}: L \to L$ действуют в линейном пространстве L. Матрицы этих операторов в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ соответственно равны A и B.

Определение. Операции суммирования, умножения операторов, умножения оператора на число задаются следующими формулами

$(\hat{A} + \hat{B})(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{B}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in L,$

$(\hat{A} \cdot \hat{B})(\vec{x}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x})\right), \forall \vec{x} \in L,$

$(\lambda \hat{A})(\vec{x}) = \lambda \hat{A}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R.$

Утверждение. $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A} \cdot \hat{B}$ и $\lambda \hat{A}$ являются линейными операторами и имеют в том же базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ матрицы $A + B$, $A \cdot B$ и λA.

Доказательство. Рассмотрим для $\hat{A} \cdot \hat{B}$, остальные случаи – самостоятельно.

Проверим, что это линейный оператор $\hat{A} \cdot \hat{B}: L \to L$.

Пусть $\vec{x} \in L$, $\hat{B}$ – линейный оператор $\Rightarrow \hat{B}(\vec{x}) \in L \Rightarrow \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x})\right) \in L$.

Проверим выполнение свойств линейности

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \ (\hat{A} \cdot \hat{B})(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x}) + \hat{B}(\vec{y})\right) = \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x})\right) + \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{y})\right) =$

$$= (\hat{A} \cdot \hat{B})(\vec{x}) + (\hat{A} \cdot \hat{B})(\vec{y}),$$

2) $\forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R \ (\hat{A} \cdot \hat{B})(\lambda \vec{x}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\lambda \vec{x})\right) = \hat{A}\left(\lambda \hat{B}(\vec{x})\right) = \lambda \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x})\right) =$

$$= \lambda(\hat{A} \cdot \hat{B})(\vec{x}).$$

Найдем матрицу оператора $\hat{A} \cdot \hat{B}$. Рассмотрим $\vec{z} = \hat{A} \cdot \hat{B}(\vec{x}) = \hat{A}\left(\hat{B}(\vec{x})\right) =$

$$\vec{y} = \hat{B}(\vec{x}) \sim B\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Так как это верно $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$, в том числе для базисных векторов, следовательно, оператору $\hat{A} \cdot \hat{B}$ соответствует матрица $A \cdot B$.

4.2. Обратный оператор

Определение. $\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор. Линейный оператор

$\hat{A}^{-1}$ называется обратным к оператору $\hat{A}$, если $\forall \vec{x} \in L \ \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$, где $\hat{I}$ –

тождественный оператор.

Или $\hat{A}\hat{A}^{-1}(\vec{x}) = \hat{A}^{-1}\hat{A}(\vec{x}) = \vec{x}$.

Утверждение. Если $\hat{A}^{-1}$ является обратным оператором для $\hat{A}$, то

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \hat{A}^{-1}\vec{y}.$$

Теорема 1. Если $\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор, то $\hat{A}^{-1}: L \to L$ – тоже линейный оператор.

Доказательство. Проверим выполнение свойств линейности

1) $\hat{A}^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \hat{A}^{-1}(\vec{y}_1) + \hat{A}^{-1}(\vec{y}_2) \ \ \forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in L$

Если $\hat{A}^{-1}$ – обратный оператор, то $\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in L \ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2: \vec{y}_1 = \hat{A}(\vec{x}_1),\ \vec{y}_2 = \hat{A}(\vec{x}_2)$.

Тогда $\hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2) = \vec{y}_1 + \ \vec{y}_2$, то есть $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \hat{A}^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)$, следовательно, $\hat{A}^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \hat{A}^{-1}(\vec{y}_1) + \hat{A}^{-1}(\vec{y}_2)$.

2) $\hat{A}^{-1}(\lambda\vec{y}) = \lambda\hat{A}^{-1}(\vec{y})$.

$\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{y} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}^{-1}(\lambda\vec{y}) = \lambda\vec{x} = \lambda\hat{A}^{-1}(\vec{y})$.

Значит, $\hat{A}^{-1}$ – тоже линейный оператор.

Теорема 2. Рассмотрим $\hat{A}: L \to L$ линейный оператор, его матрица в базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ есть A. Оператор $\hat{A}$ имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда его матрица A – невырожденная. Матрица обратного оператора $\hat{A}^{-1}$ есть A^{-1} в этом же базисе.

Доказательство. Пусть существует обратный оператор $\hat{A}^{-1} = \hat{B}$, значит $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{I} \ \Leftrightarrow \ AB = BA = E \ \Leftrightarrow \ B = A^{-1}$.

Пусть $\det A \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица $A^{-1} = B$. Рассмотрим действие оператора $\hat{B}$ с матрицей A^{-1} на любой вектор $\vec{x} \in L$

$$\vec{y} = \hat{B}\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

рассмотрим $\vec{z} = \hat{A}\hat{B}(\vec{x})$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = AA^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \hat{A}\hat{B} = \hat{I},$$

аналогично $\hat{B}\hat{A} = \hat{I} \ \ \Rightarrow \ \ \hat{B} = \hat{A}^{-1}$.

4.3. Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса

Рассмотрим в линейном пространстве L два различных базиса $E = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ и $F = \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n \rangle$. Рассмотрим координаты векторов базиса F в базисе E

$$\vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n,$$

$$\dots$$

$$\vec{f}_n = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n,$$

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса E к базису F, её столбцами являются координаты новых базисных векторов $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n \rangle$ в старом, базисе $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$.

Рассмотрим, как меняются координаты вектора при переходе от одного базиса к другому.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{k=1}^{n} x_k{}' f_k = \sum_{k=1}^{n} x_k{}' \sum_{i=1}^{n} c_{ik} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k{}' \right) \vec{e}_i,$$

так как координаты вектора в базисе определяются однозначно, то

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k{}',$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ \dots \\ x_n{}' \end{pmatrix},$$

то есть $\vec{x} = C\vec{x}'$ или $\vec{x}' = C^{-1}\vec{x}$.

Свойства матрицы перехода

1. Матрица перехода C всегда невырожденная, то есть существует C^{-1}.
2. Если задан базис $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ и невырожденная матрица C размера $n \times n$, то всегда существует такой базис $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n \rangle$, что матрица C является матрица перехода от базиса $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ к базису $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n \rangle$.
3. Рассмотрим $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ или

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

перейдем к новому базису:

$$C \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \dots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = AC \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \dots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix},$$

так как это верно для любого вектора $\vec{x}$, следовательно, $\tilde{A} = C^{-1}AC$.

<u>Пример</u> 1 Найти матрицу перехода C от базиса $\langle t^2, t, 1 \rangle$ к базису $\langle t^2 + 6t + 9, t + 3, 1 \rangle$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 2 Найти матрицу перехода C от базиса $\langle i, j, k \rangle$ к базису $\langle i - j, i + j, i + k \rangle$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. (из типового расчёта)

Задана плоскость $P: x - y + 2z = 0$ и линейный оператор $\hat{A}: V_3 \to V_3$ проектирование на плоскость P. Требуется найти матрицу оператора $\hat{A}$ в подходящем базисе пространства V_3, а затем в каноническом базисе $\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \rangle$.

Также требуется определить, в какую точку переходит точка с координатами $(1,0,0)$ под действием оператора $\hat{A}$.

Найдем подходящий базис $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$

$\vec{f}_1 = \vec{n} = \{1; -1; 2\}$ – нормальный вектор к плоскости P, тогда проекция этого вектора на плоскость P есть нулевой вектор $\hat{A}(\vec{f}_1) = \vec{0} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Выберем векторы $\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ линейно независимыми и ортогональными вектору $\vec{f}_1$. Так как векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ линейно независимы (некомпланарны), то в трёхмерном пространстве V_3 они образуют базис.

$$\vec{f}_2 = \{1; 1; 0\} \in P, \qquad \hat{A}(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 = 0 \cdot \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}_3 = \{0; 2; 1\} \in P, \qquad \hat{A}(\vec{f}_3) = \vec{f}_3 = 0 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Следовательно, матрица линейного оператора проектирования в базисе $\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \rangle$ равна

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу перехода $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, обратная матрица равна

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если $\tilde{A} = C^{-1} A C$, то $A = C \tilde{A} C^{-1} \Rightarrow$

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В какую точку V_3 перейдет точка $M(1,0,0)$

$$M \to \overrightarrow{OM} = \{1,0,0\}$$

$$\hat{A}(\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \end{pmatrix}. (\overrightarrow{OM})' = \left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right\} \Rightarrow M'\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right).$$

<u>Задача</u> 2. Действие оператора задаётся соотношением $\hat{A}(\vec{x}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

Требуется доказать линейность оператора, найти его матрицу в каноническом базисе $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, найти матрицу обратного оператора и явный вид обратного оператора.

<u>Ответ.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\hat{A}^{-1}(\vec{x}) = (x_1, -x_1 + x_2, -x_2 + x_3).$$

Лекция 5. Образ и ядро линейного оператора

5.1. Определение образа и ядра линейного оператора

Рассмотрим $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\hat{A}: L \to L$.

Определение. Образом *элемента* $\vec{x} \in L$ называется элемент $\vec{y} \in L$ такой, что $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{y}$. Элемент $\vec{x}$ называется прообразом элемента $\vec{y}$.

Определение. Образом (*Image*) *линейного оператора* $\hat{A}$ называется множество элементов линейного пространства L, имеющих прообраз

$$\mathrm{Im}\hat{A} = \left\{\vec{y} \in L: \exists\vec{x} \in L: \hat{A}(\vec{x}) = \vec{y}\right\}.$$

Определение. Ядром (*Kernel*) линейного оператора $\hat{A}$ называется множество элементов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}$:

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \left\{\vec{x} \in L: \hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Пример. Пусть $\hat{A}: V_3 \to V_3$ – оператор проектирования геометрических векторов на ось OX, тогда образом оператора $\mathrm{Im}\hat{A}$ будет множество векторов $\vec{y}$, параллельных оси OX, ядром линейного оператора $\mathrm{Ker}\hat{A}$ будут векторы, перпендикулярные оси OX.

Если $\hat{A}: V_3 \to V_3$ – оператор проектирования геометрических векторов на плоскость XOY, тогда образом оператора $\mathrm{Im}\hat{A}$ будет множество векторов $\vec{y}$, параллельных плоскости $XOY.$ а ядром линейного оператора $\mathrm{Ker}\hat{A}$ будут векторы, перпендикулярные плоскости XOY.

Теорема. Ядро и образ линейного оператора $\hat{A}$ являются линейными подпространствами пространства L.

Доказательство. Возьмём два произвольных элемента из ядра линейного оператора $\forall\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\hat{A}$, по определению $\hat{A}(\vec{x}_1) = \vec{0}, \hat{A}(\vec{x}_2) = \vec{0}$,

тогда $\hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\hat{A}$.

Для произвольного действительного числа $\forall\lambda \in R$ и произвольного элемента ядра $\forall\vec{x} \in \mathrm{Ker}\hat{A}$ получим

$$\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{x} \in \mathrm{Ker}\hat{A}.$$

Так как $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ и $\lambda\vec{x}$ принадлежат ядру, следовательно, ядро линейного оператора является линейным подпространством.

Возьмём два произвольных элемента из образа линейного оператора

$\forall\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\hat{A}$, по определению образа $\exists\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L: \hat{A}(\vec{x}_1) = \vec{y}_1, \hat{A}(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$,

тогда $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$, то есть элемент $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ является прообразом элемента $\vec{y}_1 + \vec{y}_2$, следовательно, $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\hat{A}$.

Для произвольного действительного числа $\forall\lambda \in R$ и произвольного элемента образа $\forall\vec{y} \in \mathrm{Im}\hat{A}: \vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ получим $\lambda\vec{y} = \lambda\hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}(\lambda\vec{x})$, значит элемент $\lambda\vec{y}$ имеет прообраз – элемент $\lambda\vec{x}$. Следовательно, $\lambda\vec{y} \in \mathrm{Im}\hat{A}$.

Так как $\vec{y}_1 + \vec{y}_2$ и $\lambda\vec{y}$ принадлежат образу, следовательно, образ линейного оператора является линейным пространством.

Определение. Рангом линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность его образа

$$\mathrm{rg}\hat{A} = \dim\left(\mathrm{Im}\hat{A}\right).$$

Определение. Дефектом линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность его ядра

$$\mathrm{def}\hat{A} = \dim\left(\mathrm{Ker}\hat{A}\right).$$

Пример. Пусть линейный оператор $\hat{A}$ действует в линейном пространстве P_2 многочленов не выше второй степени так, что

$$\hat{A}\big(p(t)\big) = (t-1)\big(p(t-1)\big)'.$$

Требуется найти дефект и ранг линейного оператора.

Сначала найдем матрицу этого оператора в базисе $< 1; t; t^2 >$:

$$\hat{A}(1) = 0 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(t) = (t-1)(t-1)' = t - 1 \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(t^2) = (t-1)((t-1)^2)' = 2(t-1)^2 = 2t^2 - 4t + 2 + \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ – матрица линейного оператора.}$$

Найдем ядро линейного оператора $\mathrm{Ker}\hat{A}$, решая уравнение $A\vec{x} = \vec{0}$ в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

x_2, x_3 – базисные неизвестные,

$x_1 = C$ – свободное неизвестное,

$\vec{x}_{\text{общ.одн.}} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – общее решение однородного уравнения.

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{p(t): p(t) = C, \forall C \in R\},$$

базис ядра $p(t) = 1$, следовательно, дефект линейного оператора равен

$$\mathrm{def}\hat{A} = \dim(\mathrm{Ker}\hat{A}) = 1.$$

Найдем образ оператора $\hat{A}$ из условия $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$, или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ x_2 - 4x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \sim x_2(-1 + t) + x_3(2 - 4t + 2t^2),$$

то есть, образом линейного оператора $\hat{A}$ является линейная оболочка этих двух многочленов

$$\mathrm{Im}\hat{A} = \{p(t): p(t) = C_1(-1 + t) + C_2(2 - 4t + 2t^2), \forall C_1, C_2 \in R\}.$$

Очевидно, что $p_1(t) = -1 + t$ и $p_2(t) = 2 - 4t + 2t^2$ линейно независимы, следовательно, это базис образа оператора и ранг линейного оператора равен

$$\mathrm{rg}\hat{A} = \dim(\mathrm{Im}\hat{A}) = 2.$$

5.2. Теорема о сумме ранга и дефекта линейного оператора

Определение. Рассмотрим L_1 и L_2 линейные пространства, тогда $L_1 + L_2$ называют объединением (суммой) линейных пространств, если $L_1 + L_2 = \{\vec{x}: \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2;\ \vec{x}_1 \in L_1; \vec{x}_2 \in L_2\}$,

$L_1 \cdot L_2$ называют пересечением (произведением) линейных пространств, если $L_1 \cdot L_2 = \{\vec{x}: \vec{x}_1 \in L_1 \text{ и } \vec{x}_2 \in L_2\}$.

Пример. Пусть $L_1 = \{\vec{x}: \vec{x} \parallel XOY\}$ и $L_2 = \{\vec{z}: \vec{z} \parallel YOZ\}$,
тогда $L_1 + L_2 = V_3$, $L_1 \cdot L_2 = \{\vec{y}: \vec{y} \parallel OY\}$.

Определение. Пространства L_1и L_2 образуют прямую сумму, если

$$L_1 \oplus L_2 = \{\vec{x}: \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2;\ \vec{x}_1 \in L_1; \vec{x}_2 \in L_2\}$$

и такое представление единственно.

Пример. Пусть $L_1 = V_2 = \{\vec{x}: \vec{x} \parallel XOY\}$ и $L_2 = V_2 = \{\vec{z}: \vec{z} \parallel OZ\}$, тогда $V_3 = L_1 \oplus L_2$.

Теорема. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\hat{A}: L \to L$. Утверждается, что сумма ранга и дефекта линейного оператора $\hat{A}$ равна размерности линейного пространства L.

Доказательство. Обозначим $r = \dim(\mathrm{Im}\hat{A})$. Выберем в линейном протсранстве $\mathrm{Im}\hat{A}$ некоторый базис $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r>$ и обозначим через $\vec{f}_i$ прообраз $\vec{e}_i$:

$$\hat{A}(\vec{f}_i) = \vec{e}_i, i = 1,2, \dots r.$$

Утверждается, что система векторов $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r\}$ тоже линейно независимая. Действительно, если

$\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r=\vec{0}$, то

$$\vec{0}=\hat{A}\left(\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r\right)=\lambda_1\hat{A}\left(\vec{f}_1\right)+\dots+\lambda_r\hat{A}\left(\vec{f}_r\right)=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_r\vec{e}_r,$$

но $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_r>$ – базис, следовательно $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_r=0$.

Рассмотрим линейную оболочку векторов $\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_r$, обозначим её $L_1=L(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_r)$, $\dim L_1=r$.

Покажем, что $L=L_1\oplus Ker\hat{A}$.

Возьмём $\forall\vec{x}\in L$, рассмотрим $\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})\in \mathrm{Im}\hat{A}$ и разложим этот образ по базису

$$\vec{y}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_r\vec{e}_r.$$

Рассмотрим вектор $\vec{u}=\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r\in L_1$ и вектор $\vec{w}=\vec{x}-\vec{u}$. Так как

$$\hat{A}(\vec{u})=\lambda_1\hat{A}\left(\vec{f}_1\right)+\dots+\lambda_r\hat{A}\left(\vec{f}_r\right)=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_r\vec{e}_r=\vec{y},$$

то $\hat{A}(\vec{w})=\hat{A}(\vec{x})-\hat{A}(\vec{u})=\vec{y}-\vec{y}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{w}\in \mathrm{Ker}\hat{A}$.

Итак, $\forall\vec{x}\in L\ \exists\vec{u}\in L_1, \exists\ \vec{w}\in \mathrm{Ker}\hat{A}: \vec{x}=\vec{u}+\vec{w}$, следовательно $L=L_1+\ \mathrm{Ker}\hat{A}$.

Докажем теперь, что это представление единственное, то есть $L_1\cdot\ \mathrm{Ker}\hat{A}=\{\vec{0}\}$.

Предположим, что $\exists\vec{x}\neq\vec{0}: \vec{x}\in L_1$ и $\vec{x}\in \mathrm{Ker}\hat{A}$. Так как $\vec{x}\in L_1$, то разложим его по базису

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r.$$

Так как $\vec{x}\in \mathrm{Ker}\hat{A}$, следовательно $\hat{A}(\vec{x})=\vec{0}$.

Таким образом, $\vec{0}=\hat{A}(\vec{x})=\hat{A}\left(\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r\right)=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_r\vec{e}_r=\vec{0}$.

Так как $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_r>$ – базис, следовательно, $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_r=0$,откуда получаем

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{f}_1+\dots+\lambda_r\vec{f}_r=\vec{0}.$$

Итак, доказано, что $L=L_1\oplus Ker\hat{A}$, следовательно,

$$\dim L=\dim L_1+\dim\left(\mathrm{Ker}\hat{A}\right)=r+\dim\left(\mathrm{Ker}\hat{A}\right)=\dim\left(\mathrm{Im}\hat{A}\right)+\dim\left(\mathrm{Ker}\hat{A}\right).$$

Поэтому $\dim L=\mathrm{rg}\hat{A}+\mathrm{def}\hat{A}$.

Теорема (без доказательства). Рассмотрим n −мерное линейное прост-ранство L, тогда для любых линейных пространств $L_1,L_2\subseteq L,\ dimL_1+dimL_2=n$ существует линейный оператор $\hat{A}: L\to L$, для которого $L_1=\mathrm{Im}\hat{A},\ L_2=\mathrm{Ker}\hat{A}$.

Теорема. Ранг оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве L равен рангу его матрицы в любом базисе простртнаства L.

Доказательство. Возьмём произвольный $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>$ – базис в линейном пространстве L, тогда образ линейного оператора есть линейная оболочка, образуемая образами базисных векторов

$$\mathrm{Im}\hat{A}=L\{\hat{A}(\vec{e}_1),\dots,\hat{A}(\vec{e}_n)\},$$

и ранг линейного оператора есть размерность этой линейной оболочки

$$\mathrm{rg}\hat{A}=\dim L\{\hat{A}(\vec{e}_1),\dots,\hat{A}(\vec{e}_n)\}.$$

Рассмотрим матрицу A линейного оператора $\hat{A}$, её столбцами являются координаты векторов $\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)$ в базисе $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$. Так как ранг матрицы A равен числу её линейно независимых столбцов, то $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\hat{A}$.

Теорема. У линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве L, существует обратный оператор $\hat{A}^{-1}$ тогда и только тогда, когда ядро линейного оператора состоит только из нулевого вектора $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$ $(\mathrm{def}\hat{A} = 0)$.

Доказательство. Запишем эквивалентные утверждения

$\exists\hat{A}^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ – имеет только тривиальное решение

$$\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{def}\hat{A} = 0.$$

Примеры.

1). $L = L\{1, sin3t, cos3t\}$, $\hat{A}[f(t)] = f'(t)$.

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{f(t) = c\},$$

$$\mathrm{Im}\hat{A} = \{f(t) = C_1 sin3t + C_2 cos3t\}.$$

2). $L = L\{e^t, sin3t, cos3t\}$, $\hat{A}[f(t)] = f''(t) + 9f(t)$.

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{f(t) = C_1 sin3t + C_2 cos3t\},$$

$$\mathrm{Im}\hat{A} = \{f(t) = Ce^t\}.$$

Лекция 6. Подобные матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

6.1. Подобные матрицы и их свойства

Определение. Матрица A подобна матрице B $(A\sim B)$, если существует такая матрица C, что $\det C \neq 0$ и при этом $A = C^{-1}BC$.

Замечание. Подобные матрицы – матрицы одного линейного оператора в разных базисах.

Свойства подобных матриц

1. Любая матрица подобна себе самой $A\sim A$, так как $C = E$ и $A = E^{-1}AE$.
2. Если $A\sim B$, то $B\sim A$.

$A\sim B \Rightarrow \exists C: A = C^{-1}BC \Rightarrow B = CAC^{-1}$, если взять $D = C^{-1}$, то $C = D^{-1}$ и $B = D^{-1}AD$, то есть $B\sim A$.

3. Если $A\sim B$, и $B\sim D$, то $A\sim D$.

$A\sim B \Rightarrow \exists C_1: A = {C_1}^{-1}BC_1$,

$B\sim D \Rightarrow \exists C_2: B = {C_2}^{-1}DC_2$,

$\Rightarrow A = {C_1}^{-1}({C_2}^{-1}DC_2)C_1 = {C_1}^{-1}{C_2}^{-1}DC_2C_1 = (C_2C_1)^{-1}DC_2C_1$,

обозначим $C_3 = C_2C_1$, тогда $A = {C_3}^{-1}DC_3$, то есть $A\sim D$.

4. Если $A\sim B$, то $\det A = \det B$.

$$A\sim B \Rightarrow\ \exists C\ A = C^{-1}BC \Rightarrow \det A = \det C^{-1}\det B\det C = \det B.$$

Определение: Следом матрицы A $(\mathrm{tr}A)$ называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы:

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

5. Если $A\sim B$, то $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.

Пример. Пусть матрицы A и B имеют вид $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$.

При каких значениях α и β матрица A будет подобно матрице B?

$$\begin{cases}\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B\\ \det A = \det B\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}1+4 = 2+\beta\\ 4+6 = 2\beta+\alpha\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\beta = 3\\ \alpha = 4.\end{cases}$$

6.2 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Вид матрицы линейного оператора зависит от того в каком базисе рассматривается линейный оператор. Задача состоит в том, чтобы найти такой базис, в котором матрица будет иметь наиболе простой, а именно диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Тогда образы линейного оператора $\vec{y} = A\vec{x}$ находятся максимально просто:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_3 x_3 \end{pmatrix}.$$

Вопросы: Для всех ли линейных операторов существуют базисы, в которых их матрицы имеют диагональный вид? Если такой базис существует, то как его искать?

Определение. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}: L \to L.$ Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором оператора $\hat{A}$, соотвествующим собственному значению λ, если
$\hat{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}.$

Свойства собственных векторов.

1. Если $\vec{x}$ собственный вектор, соответсвующий собственному значению λ, то $\vec{u} = \alpha\vec{x}, \alpha \in R$ – собственный вектор с тем же собственным значением λ.
$\hat{A}(\vec{u}) = \hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}(\vec{x}) = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x}) = \lambda(\vec{u}).$

2. Если $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то эти собственные векторы линейно независмы.

Докажем это свойство по индукции.

Пусть $n = 1$, $\vec{x}_1$ – собственный вектор с собственным значением λ_1, то есть $\hat{A}(\vec{x}_1) = \lambda_1\vec{x}_1$, $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$. Один ненулевой вектор всегда линейно независим.

Пусть утверждение выполнено при $n - 1$, то есть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ – линейно независимые собственные векторы

$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_{n-1}\vec{x}_{n-1} = \vec{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{n-1} = 0.$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ и приравниваем её к нулевому вектору

$$\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \cdots + \beta_n\vec{x}_n = \vec{0} \qquad (1)$$

и докажем, что равенство возможно лишь при $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0.$

Воздействуем линейным оператором $\hat{A}$ на обе части равентсва (1)

$\hat{A}(\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \dots + \beta_n\vec{x}_n) = \hat{A}(\vec{0}),$

$$\beta_1\lambda_1\vec{x}_1 + \beta_2\lambda_2\vec{x}_2 \dots + \beta_n\lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}. \qquad (2)$$

Умножим выражение (1) на λ_n и вычтем его из выражения (2):

$$\begin{array}{c} \beta_1\lambda_1\vec{x}_1 + \beta_2\lambda_2\vec{x}_2 \dots + \beta_n\lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \\ - \\ \beta_1\lambda_n\vec{x}_1 + \beta_2\lambda_n\vec{x}_2 \dots + \beta_n\lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \end{array}$$

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_n)\vec{x}_1 + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_n)\vec{x}_2 + \cdots + \beta_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\vec{x}_{n-1} = \vec{0}$$

По индуктивному предположению для . $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}$ из этого следует, что

$\beta_i(\lambda_i - \lambda_n) = 0$ для $\forall i = 1,2,\dots,n-1$.

Так как $\lambda_i \neq \lambda_n$, следовательно $\beta_i = 0, i = 1,2,\dots,n-1$.

Осталось доказать, что $\beta_n = 0$.

Рассмотрим полученное равенство

$$0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_{n-1} + \beta_n \vec{x}_n = \vec{0}.$$

Так как $\vec{x}_n \neq \vec{0}$, следовательно $\beta_n = 0$, значит собственные векторы $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ линейно независмы.

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L размерности n, называется оператором простого типа (диагонализируемым), если существует такой базис <$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$>, в котором матрица A этого оператора имеет диагональный вид.

Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L размерности n, является оператором простого типа тогда и только тогда, когда у него существует ровно n линейно независимых собственных векторов.

6.3 Характеристический многочлен

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L. Пусть $\vec{u}$ – собственный вектор линейного оператора с собственным значением λ, тогда по определению

$$\hat{A}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \ \ \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Чтобы найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, перейдём к матричной записи. Если A – матрица линейного оператора, то уравнение в матричной форме имеет вид

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad \text{или} \quad A\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{0}.$$

Далее преобразуем это выражение

$$A\vec{u} - \lambda E\vec{u} = \vec{0} \text{ или } (A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}.$$

Последнее выражение есть однородная система линейных алгебраических уравнений для координат вектора $\vec{u}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет ненулевое решение $\vec{u} \neq \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}(A - \lambda E) < n$, что эквивалентно $\det(A - \lambda E) = 0$.

Таким образом, для нахождения собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ решается характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, где A – матрица оператора.

Определение. Многочлен $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом.

Пример 1. Вычислить собственные числа и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$|\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix},$$

независимых собственных векторов.$(2-\lambda)^2 - 9 = 0,$

$$(2 - \lambda - 3)(2 - \lambda + 3) = 0,$$

$$\lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Для собственного значения $\lambda_1 = 5$ найдём собственный вектор

$$(A - 5E)\vec{u} = \vec{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 3 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту однородную систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1$ – базисное неизвестное, x_2 – свободное неизвестное, $x_2 = C_1 \Rightarrow x_1 = C_1$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для собственного значения $\lambda_2 = -1$ найдём собственный вектор

$$(A - (-1)E)\vec{u} = \vec{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 3 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту однородную систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1$ – базисное неизвестное, x_2 – свободное неизвестное, $x_2 = C_2 \Rightarrow x_1 = -C_2$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если рассмотреть базис из собственных векторов $<\vec{u}_1, \vec{u}_2>$, то матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{так как } \hat{A}(\vec{u}_1) = 5\vec{u}_1 \sim \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{A}(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Действие оператора на вектор $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ (в базисе из собственных векторов) можно записать в виде

$$\hat{A}(\vec{x}) = x_1\lambda_1\vec{u}_1 + x_2\lambda_2\vec{u}_2 = 5x_1\vec{u}_1 - x_2\vec{u}_2.$$

Пример. Вычислить собственные числа и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix},$$

$$(2-\lambda)^3 = 0.$$

Собственные числа линейного оператора $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Найдём собственные векторы из уравнения $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ – базисные неизвестные, $x_1 = C$ – свободное неизвестное. Этот оператор имеет единственный собственный вектор

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, базис из собственных векторов существует не всегда.

Лекция 7. Оператор простого типа

7.1. Определение и условие существования оператора простого типа

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L размерности n, называется оператором простого типа (диагонализируемым), если существует такой базис <$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$>, в котором матрица A этого оператора имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Достаточное условие существования оператора простого типа.

Если у линейного оператора $\hat{A}$ существует n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то соответствующие им собственные векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ образуют базис в линейном пространстве L и матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

Замечание. Условие различия собственных значений $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j)$ оператора не является необходимым, для того чтобы он был оператором простого типа. Об этом свидетельствует пример, рассмотренный в лекции 6

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема (без доказательства). Необходимое и достаточное условие существования оператора простого типа

Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L размерности n, является оператором простого типа тогда и только тогда, когда у него существует ровно n линейно независимых собственных векторов.

7.2. Характеристический многочлен

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L. Пусть $\vec{u}$ – собственный вектор линейного оператора с собственным значением λ, тогда по определению

$$\hat{A}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \ \ \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Чтобы найти собственные значения линейного оператора $\hat{A}$, решаем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \text{ где } A \text{ – матрица оператора.}$$

Определение. Многочлен $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом.

Степнь характеристического многочлена равна размерности линейного пространства

$$n = \dim L.$$

<u>Теорема.</u> Характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ не зависит от выбора базиса, т.е. инвариантен.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим два базиса в линейном пространстве L: $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n>$ и $<\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n>$.

Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ в первом базисе, а $\tilde{A}$ – матрица оператора $\hat{A}$ во втором базисе. Обозначим C – матрица перехода от первого базиса ко второму

$$\tilde{A} = C^{-1}AC.$$

Запишем характеристический многочлен во втором базисе

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) =$$

$$= \det(C^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det(C) = \det(A - \lambda E) = P_n(\lambda).$$

Таким образом, характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

<u>Утверждение.</u> Характеристический многочлен линейного оператора с матрицей A имеет вид

$$P_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \lambda^k = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr} A \lambda^{n-1} + \dots + \det A,$$

где остальные d_k $(k = 1,2, \dots n-2)$ выражаются через элементы матрицы A

<u>Доказательство</u>**.** Вычислим $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + Q_{n-2}(\lambda) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det A,$$

где через $Q_{n-2}(\lambda)$ обозначен некоторый многочлен степени $n - 2$.

<u>Следствие.</u> Так как характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ инвариантен относительно выбора базиса, то его коэффициенты – след матрицы $\mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ и определитель матрицы $\det A$ также инвариантны, т.е. не зависит от выбора базиса.

<u>Пример</u>. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix},$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda)-3+3-3(2-\lambda)+3(2-\lambda)-(4-\lambda)=0,$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda)-(4-\lambda)=0, (4-\lambda)((2-\lambda)^2-1))=0,$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)=0, -\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0,$$

Собственные числа линейного оператора $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=4$.

$$\mathrm{tr}\tilde{A}=8, \det\tilde{A}=12. \tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Пример. Найдём собственные значения и собственные векторы оператора со следующей матрицей (аналог задачи 4 типового расчёта)

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}. \quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^3-\frac{1}{27}-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)=0.$$

После приведения подобных получается

$$-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)=0,$$

$$\lambda_1=0;\ \lambda_{2,3}=1.$$

Найдем собственные векторы методом Гаусса:

1) при $\lambda_1=0$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x_3=C_1, \qquad x_2=-C_1; x_1=2x_2+x_3=-C_1,$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}_1=C_1\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix};$$

2) при $\lambda_{2,3}=1$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$x_2=C_2, \qquad x_3=C_3; x_1=-C_2+C_3\Rightarrow\ \vec{u}_{2,3}=\begin{pmatrix}-C_2+C_3\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_2\\ C_2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_3\\ 0\\ C_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}_2 = C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}_3 = C_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, двум совпавшим собственным значениям $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ соответствуют два различных линейно независимых собственных вектора. Собственные векторы $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\ ,\vec{u}_3$ образуют базис и матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов, имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Действие оператора на вектор $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ (в базисе из собственных векторов) можно записать в виде

$$\hat{A}(\vec{x}) = x_1\lambda_1\vec{u}_1 + x_2\lambda_2\vec{u}_2 + x_3\lambda_3\vec{u}_3 = 0\cdot x_1\vec{u}_1 + 1\cdot x_2\vec{u}_2 + 1\cdot x_3\vec{u}_3.$$

Лекция 8. Билинейные и квадратичные формы

8.1. Линейный и билинейный функционалы

Определение. Линейным функционалом на пространстве L называется всякое линейное отображение линейного пространства в множество действительных чисел

$f: L \to R$ такое, что $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in L$,

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R.$$

Пусть L – линейное пространство и $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ базис в нём, тогда

$\forall \vec{x} \in L: \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ получаем

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n).$$

Действие линейного функционала можно представить как скалярное произведение вектора $\vec{x}$ и некоторого вектора $\vec{a}$

$$f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x});\ \text{где } \vec{a} = \{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}.$$

Определение. Билинейным функционалом называется отображение $B: L \times L \to R$, если оно линейно по каждому аргументу, т. е.

1). $B(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{z}) + B(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$,

$B(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{x}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$,

2). $B(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \forall \lambda \in R$.

Определение. Билинейный функционал $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется симметричным, если $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in L$.

Примеры билинейных симметричных функционалов

1) скалярное произведение:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$$

2) интеграл от произведения функций

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot y(t)\, dt.$$

8.2. Билинейные формы

Рассмотрим билинейный функционал специального вида

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j\,, \text{где } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пример. Если размерность линейного пространства $n = 2$, то билинейный функционал в общем виде записывается следующим образом

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Функционалы такого вида называются билинейными формами.

Пример билинейной формы: $B(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 + 7x_2y_2$.

Проверим выполнение свойств 1) и 2) билинейного функционала.

$$B(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x_i+y_i)z_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,x_iz_j + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,y_iz_j = B(\vec{x},\vec{z}) + B(\vec{y},\vec{z}).$$

Для $B(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})$ доказывается аналогично.

$$B(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\lambda x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\lambda y_j = B(\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j = \lambda B(\vec{x},\vec{y}).$$

Рассмотрим матрично-координатную запись билинейной формы.

$$B(\vec{x},\vec{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_iB(\vec{e}_i,\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_iB\left(\vec{e}_i,\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{j=1}^{n} y_jB\big(\vec{e}_i,\vec{e}_j\big) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{x}^TB\vec{y},$$

где обозначено $b_{ij} = B\big(\vec{e}_i,\vec{e}_j\big)$.

Матрица $B = \big(b_{ij}\big)$ – матрица билинейной формы в базисе $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>$.

Пример матрично-координатной записи билинейной формы:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 7x_2y_1 + 4x_2y_2 = (x_1x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, любое билинейное отображение (функционал) в данном базисе выражается через билинейную форму от координат исходных векторов

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j.$$

Верно и обратное: любой билинейной форме соответствует билинейное отображение (функционал).

8.3. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $B(\vec{x},\vec{y})$ – билинейная форма в базисе $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>$, C – матрица перехода от этого базиса к базису $<\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n>$. Запишем билинейную форму в разных базисах, воспользовавшись соотношениями $\vec{x} = C\vec{x}'$ и $\vec{y} = C\vec{y}'$

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^TB\vec{y} = (C\vec{x}')^TB(C\vec{y}') = \vec{x}'^TC^TBC\vec{y}',$$

следовательно, $\tilde{B} = C^TBC$ – матрица билинейной формы в базисе $<\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n>$.

Пример записи билинейной формы в разных базисах

Пусть в базисе $<\vec{e}_1, \vec{e}_2>$ билинейная форма имеет вид

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{y} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2.$$

Требуется найти вид этой билинейной формы в новом базисе$< \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 >$.

Матрица перехода к новому имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,транспонированная матрица будет$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица билинейной формы в новом базисе имеет вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма в новом базисе имеет вид $B(\vec{x}', \vec{y}') = -4x_1' y_2' - 2x_2' y_1' + 10x_2' y_2'$.

Рассмотрим далее симметричные билинейные формы

Определение. Билинейные формы, значения которох не меняются при перестановке аргументов называются симметричными

$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in L$.

Теорема: Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда в одном (а тогда и в любом) из базисов её матрица симметрична.

Доказательство: Пусть $B(\vec{x}, \vec{y})$ – симметричная билинейная форма в базисе $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$, значит $B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = b_{ij} = B(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = b_{ji}$, то есть матрица билинейной формы симметрична $B = B^T$.

Докажем обратное утверждение. Пусть матрица билинейной формы симметрична, т. е. $B = B^T$, тогда (воспользуемся тем, что значение билинейной формы есть число, и оно не меняется при транспонировании)

$B(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T B \vec{y} = (\vec{x}^T B \vec{y})^T = \vec{y}^T B^T \vec{x} = \vec{y}^T B \vec{x} = B(\vec{y}, \vec{x})$,

значит, билинейная форма симметрична.

8.4. Квадратичные формы

Определение. Квадратичной формой на линейном пространстве L называется следующая числовая функция векторного аргумента

$$\varphi(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x}), \qquad \vec{x} \in L,$$

где $B(\vec{x}, \vec{y})$ – симметричная билинейная форма.

Говорят, что симметричная билинейная форма порождает квадратичную форму. Верно и обратное утверждение: по каждой квадратичной форме однозначно восстанавливается симметричная билинейная форма.

Теорема. Симметричная билинейная форма однозначно определяется по порожденной ею квадратичной форме.

Доказательство. Для данной квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ рассмотрим

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = B(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = B(\vec{x}, \vec{x}) + 2B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{y}, \vec{y}) == \varphi(\vec{x}) + 2B(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{y}).$$

Откуда получается выражение симметричной билинейной формы через квадратичную

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\big(\varphi(\vec{x}+\vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})\big).$$

<u>Определение.</u> Матрицей квадратичной формы называется матрица соответсвующей симметричной билинейной формы.

Рассмотрим матрично-координатную запись билинейной формы.

$$\varphi(\vec{x}) = B(\vec{x},\vec{x}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\,,\vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i B(\vec{e}_i,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i B\left(\vec{e}_i,\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j B\big(\vec{e}_i,\vec{e}_j\big) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j =$$

$$= (x_1 \quad \dots \quad x_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T B\vec{x},$$

где обозначено $b_{ij} = B\big(\vec{e}_i,\vec{e}_j\big)$.

<u>Определение.</u> Рангом квадратичной формы называется ранг соответствующей ей матрицы.

Квадратичную форму можно представить в виде

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x}^T B\vec{x} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}{x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j.$$

<u>Пример</u> .матричной записи квадратичной формы

Пусть $\varphi(\vec{x}) = {x_1}^2 + 6x_1x_2 + 7{x_2}^2$, тогда этой квадратичной форме соответствует симметричная матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Квадратичную форму можно представить в виде

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> Пусть $\varphi(\vec{x}) = {x_1}^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + {x_2}^2 - 4x_2x_3$, тогда этой квадратичной форме соответствует симметричная матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичную форму можно представить в виде

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса

Пусть $\varphi(\vec{x})$ – квадратичная форма в базисе $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$, C – матрица перехода от этого базиса к базису $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$. Запишем квадратичную форму в разных базисах, воспользовавшись соотношением $\vec{x} = C\vec{x}'$

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x}^T B\vec{x} = (C\vec{x}')^T B(C\vec{x}') = \vec{x}'^T C^T BC\vec{x}',$$

следовательно, $\tilde{B} = C^T BC$ – матрица билинейной формы в базисе $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$.

Пример записи квадратичной формы в разных базисах

Пусть в базисе $<\vec{e}_1, \vec{e}_2>$ квадратичная форма имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Требуется найти вид этой билинейной формы в новом базисе $<\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2>$.

Матрица перехода к новому имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,транспонированная матрица будет $C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица билинейной формы в новом базисе имеет вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма в новом базисе имеет вид

$$\varphi(\vec{x}') = \vec{x}'^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \vec{x}' = 2x_1'^2 + 10x_2'^2.$$

Лекция 9. Квадратичные формы. Канонический вид квадратичной формы

9.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть в линейном пространстве L в базисе <$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$> задана квадратичная форма

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij}x_i x_j\,, \quad \text{где } b_{ij} = b_{ji}, \forall i,j = 1,2,\dots,n.$$

<u>Определение.</u> Квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, у которой все коэффициенты при произведениях различных переменных равны нулю, называется квадратичной формой канонического вида.

Наша задача – найти новый базис $< \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n >$, в котором $\varphi(\vec{x})$ будет иметь канонический вид. Если C – матрица перехода к новому базису, то

$$\tilde{B} = C^T B C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

<u>Определение.</u> Базис <$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$>, в котором квадратичная форма имеет канонический вид $\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, называется каноническим базисом.

<u>Определение.</u> Канонический базис <$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$> называется нормальным, если коэффициенты квадратичной формы принимают только значения $-1, 0, 1$.

<u>Замечание.</u> От канонического базиса с помощью преобразования $\vec{f}_i{}' = \frac{\vec{f}_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad \lambda_i \neq 0,$ $i = 1,2,\dots,n$ легко перейти к нормальному.

<u>Теорема.</u> Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Если рассматривается действительная квадратичная форма ($b_{ij} \in R$), то все коэффициенты указанного линейного преобразования будут действительными.

<u>Доказательство</u>. Будем вести доказательство методом математической индукции.

При $n = 1$ $\varphi(\vec{x}) = b_{11}x_1^2$ – утверждение верно.

Пусть утверждение верно для $(n-1)$, докажем, что оно верно для n.

Возможны два случая:

а) среди b_{11}, $b_{22} \ldots$, b_{nn} есть ненулевой коэффициент, пусть $b_{11} \neq 0$, тогда выделим полный квадрат для переменной x_1:

$$\frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 = \frac{1}{b_{11}}(b_{11}^2 x_1^2 + 2b_{11}b_{12}x_1x_2 + b_{12}^2 x_2^2 +$$
$$+ 2b_{11}b_{13}x_1x_3 + \cdots + 2b_{11}b_{1n}x_1x_n + b_{nn}^2 x_n^2).$$

полученное выражение содержит все слагаемые с переменной x_1 из $\varphi(\vec{x})$.

Рассмотрим выражение

$$\varphi(\vec{x}) - \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2,$$

оно содержит лишь переменные $x_2, x_3, \ldots, x_n$, поэтому по индукции оно в новых координатах приводится к каноническому виду

$$\varphi(\vec{x}) - \frac{1}{b_{11}}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 = \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Если ввести новую переменную $y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n$,

то в новых координатах квадратичная форма будет иметь канонический вид

$$\varphi(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

б) если $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = 0$, и существует $b_{ij} \neq 0$, например, $b_{12} \neq 0$, то рассмотрим дополнительное линейное преобразование: $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad \ldots \\ x_n = y_n, \end{cases}$

тогда в выражении для квадратичной формы

$2b_{12}x_1x_2 = 2b_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2b_{12}y_1^2 - 2b_{12}y_2^2$

появились квадраты и всё сведено к случаю а).

Если квадратичная форма действительная, то все коэффициенты в линейных преобразованиях – действительные. Теорема доказана.

Пример. Приведём квадратичную форму

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

с матрицей квадратичной формы $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

к каноническому виду методом выделения полных квадратов (метод Лагранжа), воспользовавшись известной формулой

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

выделим полный квадрат по переменной x_1

$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$

где обозначено

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2\,. \end{cases}$$

В матричной записи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

Где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования координат.

Используя формулу преобразования матрицы квадратичной формы при изменении базиса, вычислим

$$\tilde{B} = C^T B C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть все коэффициенты при произведении различных переменных действительно равны нулю

$\varphi(\vec{y}) = \ y_1^2 + y_2^2.$

<u>Пример.</u> Приведём квадратичную форму

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3$$

с матрицей квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

к каноническому виду методом выделения полных квадратов (метод Лагранжа), воспользовавшись известной формулой

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

выделим полный квадрат по переменной x_1 и вычтем добавленные слагаемые

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3 =$$

$$= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + (2x_3)^2 + 4x_2x_3) - x_2^2 - (2x_3)^2 - 4x_2x_3 +$$

$$+2x_2^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_3^2 =$$

теперь выделяем полный квадрат по переменной x_2

$$= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 - 4x_3^2 = \ y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2,$$

где обозначено

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_{3,} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_{3,} \end{cases}$ в матричной записи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования координат.

Используя формулу преобразования матрицы квадратичной формы при изменении базиса, вычислим

$$\tilde{B} = C^T B C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

то есть все коэффициенты при произведении различных переменных действительно равны нулю.

Пример. Приведём квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3$ к каноническому виду. Так как эта квадратичная форма не содержит квадратов переменных, то сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

тогда $\varphi(\vec{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 2(y_1 - y_2)y_3 =$

$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 - 2y_2y_3 = (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 =$$

$$= (y_1 + y_3)^2 - (y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2) = (y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2 = u_1^2 - u_2^2.$$

где обозначено

$$\begin{cases} u_1 = y_1 + y_3 \\ u_2 = y_2 + y_3 \\ u_3 = y_3. \end{cases}$$

Выразим переменные u_1, u_2, u_3 через переменные x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} u_1 = y_1 + y_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3 \\ u_2 = y_2 + y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + x_3, \\ u_3 = y_3 = x_3, \end{cases}$$ матрица преобразования имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2. Положительные и отрицательные индексы инерции квадратичной формы

Определение. Положительным индексом инерции квадратичной формы называется $i_+ -$ количество положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

Определение. Отрицательным индексом инерции квадратичной формы называется $i_- -$ количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы. Очевидно, что количественных нулевых коэффициентов в каноническом разложении квадратичной формы равно $n - (i_+ + i_-)$.

Пример. У квадратичной формы $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2$ положительный и отрицательный индексы инерции соответственно равны $i_+ = 2,\ i_- = 1$.

Теорема Закон инерции квадратичной формы

Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы являются инвариантами, при этом $i_+ + i_- = \mathrm{rg}\varphi$.

Лемма. Для любых линейных пространств L_1 и L_2 верно следующее утверждение $\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$.

Доказательство леммы. В пересечение линейных пространств L_1 и L_2 входят те векторы $\vec{x}$, которые входят как в линейное пространство L_1, так и в линейное пространство L_2:

$$L_1 \cap L_2 = \{\vec{x}: \vec{x} \epsilon L_1; \vec{x} \epsilon L_2\}.$$

В объединение линейных пространств L_1 и L_2 входят всевозможные линейные комбинации векторов из линейных пространств L_1 и L_2:

$$L_1 \cup L_2 = \{\vec{x}: \vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2; \vec{x}_1 \epsilon L_1\ \vec{x}_2 \epsilon L_2\}.$$

Пусть пересечение линейных пространств L_1 и L_2 есть не пустое множество: $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, рассмотрим базис $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k>$ в этом линейном подпростространстве и дополним его до базиса пространства L_1 $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m>$, а также до базиса пространства L_2 $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s>$.

Рассмотрим систему векторов $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s>$ и докажем, что это базис в объединенном пространстве $L_1 \cup L_2$.

1). По построению рассматриваемая система векторов является полной.

2). Докажем линейную независимость рассматриваемой системы векторов. Пусть линейная комбинация векторов равна нулевому вектору

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_m\vec{e}_m + \beta_1\vec{g}_1 + \dots + \beta_k\vec{g}_k + \gamma_1\vec{f}_1 + \dots + \gamma_s\vec{f}_s = \vec{0}.$$

Покажем, что все коэффициенты в этом выражении нулевые.

Запишем выражение в виде

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_m\vec{e}_m = -\beta_1\vec{g}_1 - \dots - \beta_k\vec{g}_k - \gamma_1\vec{f}_1 - \dots - \gamma_s\vec{f}_s.$$

В левой части последнего выражения записан вектор из пространства L_1 за вычетом пересечения пространств $L_1 \cap L_2$

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{e}_m \in L_1 \backslash (L_1 \cap L_2),$$

а в правой части – вектор из пространства L_2.

$$-\beta_1\vec{g}_1 - \dots - \beta_k\vec{g}_k - \gamma_1\vec{f}_1 - \dots - \gamma_s\vec{f}_s \in L_2.$$

Но пересечение пространств $L_1 \backslash (L_1 \cap L_2)$ и L_2 содержит только нулевой вектор, поэтому

$$\begin{cases} \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{e}_m = \vec{0} \\ \beta_1\vec{g}_1 + \dots + \beta_k\vec{g}_k + \gamma_1\vec{f}_1 + \dots + \gamma_s\vec{f}_s = \vec{0}. \end{cases}$$

Поскольку $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ – векторы из базиса пространства L_1, то из первого равенства следует, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

Так как $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s>$ – базис в пространстве L_2, то из второго равенства следует, что

$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_s = 0$.

Рассматриваемая система векторов $<\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s>$ линейно независима и является базисом в пространстве $L_1 \cup L_2$.

Найдём размерность пространства $L_1 \cup L_2$

$$\dim(L_1 \cup L_2) = m + k + s = m + k + k + s - k == \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы (закон инерции квадратичной формы).

Пусть в линейном пространстве L с каноническим базисом $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ квадратическая форма имеет вид $\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 - \mu_1 x_{k+1}^2 - \dots - \mu_s x_{k+s}^2$,

где все $\lambda_i > 0$; $\mu_j > 0$ и $k + s \leq n$. То есть положительный индекс инерции $i_+ = k$ и отрицательный индекс инерции $i_- = s$.

Рассмотрим квадратическую форму в другом каноническом базисе $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$

$\varphi(\vec{y}) = \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_m y_m^2 - \beta_1 y_{m+1}^2 - \dots - \beta_l y_{m+l}^2$, где все $\alpha_i > 0$; $\beta_j > 0$ и $m + l \leq n$. То есть положительный индекс инерции $i_+ = m$ и отрицательный индекс инерции $i_- = l$.

Используя метод доказательства от противного, докажем, что $k = m$ и $s = l$.

Пусть $k > m$.

Возьмём в первом базисе те векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$, которые соответствуют положительным слагаемым квадратичной формы

$$\lambda_i = b_{ii} = B(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \varphi(\vec{e}_i), \ \ i = 1,2, \dots, k.$$

Во втором базисе возьмём те векторы $\vec{f}_{m+1}, \dots, \vec{f}_n$, которые соответствуют отрицательным или нулевым слагаемым квадратичной формы

$$\beta_j = b_{jj} = B\left(\vec{f}_j, \vec{f}_j\right) = \varphi\left(\vec{f}_j\right), \ \ j = 1,2, \dots, n - m.$$

Рассмотрим $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ и $\{\vec{f}_{m+1}, \dots, \vec{f}_n\}$ и их линейные оболочки

$L_1 = L\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ и $L_2 = L\{\vec{f}_{m+1}, \dots, \vec{f}_n\}$.

По лемме

$\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) =$

$$= k + (n - m) - \dim(L_1 \cap L_2) = k - m + n - \dim(L_1 \cap L_2) = k - m + n.$$

Здесь использовано, что $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Если бы это было не так, то существовал бы вектор $\vec{u} \in L_1 \cap L_2$, для которого выполнялись бы взаимоисключающие условия: $\varphi(\vec{u}) > 0$ и $\varphi(\vec{u}) < 0$, что невозможно.

По предположению $k > m$, то есть $k - m > 0$, значит

$$\dim(L_1 \cup L_2) = k - m + n > n = \dim L.$$

Получили противоречие, следовательно, $m \geq k$.

Предположение, что $m > k$ аналогично приводит к противоречию. Значит, $k = m$.

Аналогично доказывается, что $s = l$.

Доказано, что положительный и отрицательный индексы инерции i_+, i_- не зависят от выбора базиса, то есть инвариантны. Число ненулевых слагаемых в каноническом виде равно рангу квадратичной формы $\Rightarrow$ $i_+ + i_- = \mathrm{rg}\varphi$

Лекция 10. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приложение квадратичных форм

10.1. Положительно определенные квадратичные формы

Определение: Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в линейном пространстве L называется положительно определенной, если для $\forall\vec{x} \in L,\ \vec{x} \neq \vec{0},\ \varphi(\vec{x}) > 0$.

Пример. $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Определение: Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в линейном пространстве L называется отрицательно определенной, если для $\forall\vec{x} \in L,\ \vec{x} \neq \vec{0},\ \varphi(\vec{x}) < 0$.

Пример. $\varphi(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Теорема. Если квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ положительно определена, то во всяком представлении её в виде

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

все b_{ii} будут положительными, то есть $b_{ii} > 0,\ \forall i = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Рассмотрим $\vec{x} = \vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, тогда $\varphi(\vec{x}) = b_{11} > 0$, аналогично для $\vec{e}_i\ i = 2,3,\ldots n$.

Обратное утверждение в общем случае не верно: если все коэффициенты при квадратах переменных положительны, то квадратичная форма не обязательно положительно определена.

Пример. Квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 15x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + 4x_2)^2 - x_2^2 + x_3^2$ на векторе с координатами $\vec{x} = (-4,1,0)$ принимает отрицательное значение $\varphi(\vec{x}) < 0$.

Теорема. Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в линейном пространстве L положительно определена тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в каноническом разложении этой формы положительны.

Доказательство. Пусть квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ положительно определена и в каноническом базисе имеет вид $\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

Поскольку $\varphi(\vec{x}) > 0, \forall\vec{x} \in L,\ \vec{x} \neq \vec{0}$, возьмём в качестве $\vec{x} = \vec{e}_i$, тогда $\varphi(\vec{e}_i) = \lambda_i > 0,\ \forall i = 1,2,\ldots,n$.

Докажем обратное утверждение. Пусть все $\lambda_i > 0,\ \forall i = 1,2,\ldots,n$, тогда очевидно, что $\varphi(\vec{x}) > 0$.

Определение. Разность между положительными и отрицательными индексами инерции квадратичной формы $\sigma = i_+ - i_-$ называется сигнатурой формы.

10.2. Критерий Сильвестра

Рассмотрим матрицу квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

и обозначим

$$M_1 = b_{11}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \dots, \; M_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1k} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix},$$

$\det B = M_n = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$ $k = 1,2, \dots n$ - главные миноры матрицы B.

Теорема. Критерий Сильвестра

Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительными.

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы $M_1 < 0;\ M_2 > 0;\ M_3 < 0$ и т.д.

Докажем необходимость. Пусть $\varphi(\vec{x})$ положительно определена. Возьмём некоторый базис $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ и будем рассматривать линейные оболочки системы векторов: $L_k = L\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$.

Форма $\varphi(\vec{x})$ будет положительно определена на $L_k, \forall\, k,$ так как она положительно определена на всем пространстве.

При изменении базиса в $L_k\ \forall\, k$ матрица квадратичной формы меняется следующим образом

$$\tilde{B} = C^T B C,$$

где C – матрица перехода к новому базису. При этом

$$\det\tilde{B} = \det C^T \cdot \det B \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det B.$$

Таким образом, знак определителя матрицы квадратичной формы не меняется при изменении базиса.

Так как в каноническом базисе $\lambda_i > 0,\ i = 1,2, \dots n$, то минор k – го порядка

$$\widetilde{M}_k = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{vmatrix} > 0,$$

значит, и в любом базисе

$$M_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1k} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Если квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ положительно определена, то $-\varphi(\vec{x})$ определена отрицательно:

$B = \begin{pmatrix} -b_{11} & \dots & -b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -b_{1n} & \dots & -b_{nn} \end{pmatrix} => M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0$ и т.д.

Достаточность условия теоремы доказывается методом математической индукции.

<u>Пример</u>. Найти все значения λ, при которых квадратичная форма$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + \lambda x_2^2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2$ положительно определена.

Запишем матрицу квадратичной формы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и найдем главные миноры этой матрицы

$M_1 = 1,\ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 4, M_3 = \det B = 3\lambda - \lambda - 12 = 2\lambda - 12.$

Для положительной определенности по критерию Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры были положительны

$$\begin{cases} \lambda - 4 > 0 \\ 2\lambda - 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > 6.$$

<u>Пример</u>. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = -3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$ на знакоопределенность.

Запишем матрицу квадратичной формы $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и найдем главные миноры этой матрицы

$M_1 = -3,\ M_2 = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5, M_3 = \det B = -24 + 1 + 1 + 2 + 4 + 3 = -13.$

Таким образом, $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0$, следовательно, квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ отрицательно определена.

10.3. Приложения квадратичных форм

1). Нахождение экстремумов функции нескольких переменных.

Ряд Тейлора для функций одной

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \mathrm{o}(x - x_0)^2$$

и нескольких переменных имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_i} \left(x_i - x_{i_0}\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \left(x_i - x_{i_0}\right)\left(x_j - x_{j_0}\right) + \mathrm{o}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^2),$$

где

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vec{x}_0 = \left(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}\right).$$

В точке локального экстремума $\dfrac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_i} = 0,$

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_i - x_{i_0}\right)\left(x_j - x_{j_0}\right) + \mathrm{o}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^2).$$

С точностью до слагаемого $\mathrm{o}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^2)$ получена некоторая квадратичная форма с коэффициентами $b_{ij} = \dfrac{\partial^2\varphi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$для переменных $x_i - x_{i_0}$ и $x_j - x_{j_0}$.

Если $\vec{x}_0$ – точка локального минимума, то в некоторой окрестности этой точки $\varphi(\vec{x}) > \varphi(\vec{x}_0)$, то есть $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0) > 0$, значит, квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)$ положительно определена.

Аналогично для точки x_0 локального максимума получаем, что квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)$ отрицательно определена.

<u>Замечание.</u> Если $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)$ знаконеопреденная квадратичная форма, то у функции $\varphi(\vec{x})$ нет локального экстремума (знаконеопреденная форма – не является ни положительно ни отрицательно определенной).

<u>Пример.</u> Найдём локальные экстремумы функции

$$\varphi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 3x + 4y.$$

Найдём стационарные точки (точки, в которых частные производные обращаются в ноль)

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4x - y - 3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y - x + 4 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z + 2 \end{cases} \quad => \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2y - x = -4 \\ 2z = -2, \end{cases} \quad \text{откуда находим } M_0\left(\tfrac{2}{7}; -\tfrac{13}{7}; -1\right).$$

Составим матрицу вторых производных

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2\varphi(M_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры этой матрицы равны

$$M_1 = 4 > 0, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

По критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена, следовательно $M_0\left(\frac{2}{7}; -\frac{13}{7}; -1\right)$ – точка локального минимума.

2). Классификация поверхностей второго порядка.

Рассмотрим линейное пространство геометрических векторов V_3 с каноническим базисом $< \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} >$ и уравнение поверхности второго порядка $F(x, y, z) = 0$ или

$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{3} c_i x_i + d = 0$.

Используя метод Лагранжа, приведём квадратичную форму $\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} x_i x_j$ к каноническому виду, тогда уравнение поверхности примет вид:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \text{c}.$$

<u>Пример.</u> Пусть поверхность второго порядка задана уравнением

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_3^2 + 2x_1 + x_3 = 1.$$

Выделим полный квадрат по переменной x_1

$$(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 4x_3^2) + 4x_2x_3 - 4x_3^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 + x_3 = 1.$$

Выделим полный квадрат по переменной x_2

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - 3x_3^2 + 2x_1 + x_3 = 1,$$

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2 + 2x_1 + x_3 = 1.$$

Введём новые переменные

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Уравнение поверхности в новых координатах имеет вид

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 2y_1 - 2y_2 + y_3 = 1.$$

Выделим полные квадраты по переменным y_1, y_2, y_3

$$y_1^2 + 2y_1 + 1 - 1 - (y_2^2 + 2y_2 + 1) + 1 + \left(y_3^2 + y_3 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 1,$$

$$(y_1 + 1)^2 - (y_2 + 1)^2 + \left(y_3 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Это уравнение однополостного гиперболоида.

<u>Теорема.</u> Любая поверхность второго порядка имеет один из нижеперечисленных видов в некоторой системе координат $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + m x_i = c$

rgφ	i_+	m	c	Вид поверхности
3	3	0	-1	$x^2 + y^2 + z^2 = -1$ – пустое множество
3	3	0	0	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – точка
3	3	0	1	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ – эллипсоид
3	2	0	-1	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$ – двуполостный гиперболоид
3	2	0	0	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – конус
3	2	0	1	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ – однополостный гиперболоид
2	2	0	-1	$x^2 + y^2 = -1$ – пустое множество
2	2	0	0	$x^2 + y^2 = 0$ – прямая (ось Oz)
2	2	0	1	$x^2 + y^2 = 1$ – эллиптический цилиндр
2	2	1	0	$x^2 + y^2 + z = 0$ – эллиптический параболоид
2	1	0	0	$x^2 - y^2 = 0$ – пара пересекающихся плоскостей
2	1	0	1	$x^2 - y^2 = 1$ – гиперболический цилиндр
2	1	1	0	$x^2 - y^2 + z = 0$ – гиперболический параболоид
1	1	0	1	$x^2 = 1$ – пара параллельных плоскостей
1	1	0	0	$x^2 = 0$ – плоскость
1	1	1	0	$x^2 + y = 0$ – параболический цилиндр
0	0	1	0	$x = 0$ – плоскость

Лекция 11. Евклидовы пространства

11.1. Скалярное произведение в линейном пространстве

Для элементов из линейного пространства геометрических векторов V_3 определены понятия длины вектора, углов между векторами, скалярного произведения векторов. Для произвольного линейного пространства эти понятия пока не определены. Наша задача так определить скалярное произведение, чтобы все геометрические понятия были корректны, т.е. длина вектора была неотрицательна $\|\vec{x}\| \geq 0$ и

$$|\cos\varphi| = \frac{|(\vec{x},\vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Определение: Скалярным произвдением векторов из линейного пространства $\mathbb{E}$ называется числовая функция двух векторых аргументов $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to R$, обозначаемая $(\vec{x},\vec{y})$ и обладающая свойствами:

1) Симметрии $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}), \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{E}$.

Линейность по первому аргументу

2). $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z}), \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{E}$.

3). $(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y}), \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in R$.

4). Положительная определённость $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{E}$,при этом $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Замечание. Из линейности по первому аргументу и свойства симметрии следует линейность скалярного произведения и по второму аргументу.

Таким образом, скалярное произведение есть симметричная билинейная форма в линейном пространстве, причём, порождаемая ей квадратичная форма, будет положительно определена.

Примеры скалярного произведения.

1. Пространство геометрических векторов V_3, скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot cos\varphi$.

2. Пространство арифметических векторов R^n, скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

3. Пространство непрерывных на отрезке функций $C_{[\alpha,\beta]}$, скалярное произведение $\int_\alpha^\beta x(t)y(t)dt$.

4. $\mathbb{E}$ – произвольное линейное пространство, скалярное произведение определим с помощью симметричной положительно определенной квадратичной формы

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j.$$

Пример не скалярного произведения в пространстве R^3. Пусть

$$(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 4x_1x_2 + 4x_2y_2 + x_3y_3,$$

тогда $\quad (\vec{x},\vec{x}) = {x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4{x_2}^2 + {x_3}^2 = (x_1+2x_2)^2 + {x_3}^2$, что не является скалярным произведением, так как не выполняется четвёртое свойство в определении:

на ненулевом векторе $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ выражение $(\vec{x}, \vec{x}) = (-2 + 2 \cdot 1)^2 + 0 = 0$ обращается в ноль.

11.2. Евклидово пространство и матрица Грама

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{E}$ и зададим на нём скалярное произведение – положительно определённую симметричную билинейную форму (евклидову метрику).

Определение. Линейное пространство с заданным в нём скалярным произведением называется евклидовым пространством.

Замечание. Будем рассматривать только вещественные линейные пространства.

Для базиса $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n>$ в евклидовом пространстве определим матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix},$$

элементами которой являются скалярные произведения

В силу симметрии скалярного произведения

$$g_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_j, \vec{e}_i\right) = g_{ji},$$

матрица Грама является симметричной матрицей.

Скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве с базисом $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n>$ можно выразить через координаты векторов и матрицу Грама

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (\vec{e}_i, \vec{e}_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j =$$

$$= (x_1 \dots x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T G \vec{y}.$$

Критерий матрицы Грама. Чтобы в евклидовом пространстве с базисом $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n>$ матрица G была матрицей Грама, необходимо и достаточно, чтобы она была симметрична $g_{ij} = g_{ji} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ и положительна определена (т.е. для неё выполняется критерий Сильвестра).

Примеры. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ не является матрицей Грама, так как она не симметричная.

2. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ не является матрицей Грама, так как она вырожденная $\det(G) = 4 - 4 = 0$.

3. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ не является матрицей Грама, так как она не является положительно определённой $\det(G) = 3 - 4 = -1 < 0$.

4. Матрица $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ является матрицей Грама, так как она симметричная и положительно определённая.

Задача. В евклидовом пространстве V_3 геометрических векторов с базисом

$< \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} >$ найти матрицу Грама.

Решение. Координаты векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} : \vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

Координаты базисных векторов будут

$\vec{f_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1,1,0), \vec{f_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} = (1,-1,0), \vec{f_3} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = (1,1,1)$.

Найдём элементы матрицы Грама

$g_{11} = (\vec{f_1}, \vec{f_1}) = 1 + 1 = 2, g_{12} = g_{21} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}) = 1 - 1 = 0,$

$g_{13} = g_{31} = (\vec{f_1}, \vec{f_3}) = 1 + 1 = 0, g_{22} = (\vec{f_2}, \vec{f_2}) = 1 + 1 = 2,$

$g_{23} = g_{32} = (\vec{f_2}, \vec{f_3}) = 1 - 1 = 0, g_{33} = (\vec{f_3}, \vec{f_3}) = 1 + 1 + 1 = 3.$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11.3. Геометрические понятия в евклидовом пространстве

Определение: Нормой (длиной) вектора $\vec{x}$ в евклидовом пространстве называется число, равное $\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ и обозначаемое $\|\vec{x}\|$:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

Замечание. Норма вектора $\vec{x}$ равна нулю тогда и только тогда, когда это нулевой вектор

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = 0 <=> \vec{x} = \vec{0}.$$

Определение. Углом между векторами называется угол, косинус которого равен

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

Далее будет доказана корректность определения угла между векторами в том смысле, что

$$|\cos\varphi| = \frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Определение. Ненулевые векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю $(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$.

Определение. Векторы называются ортонормированными, если они ортогональны и их длины равны 1: $(\vec{x}, \vec{y}) = 0,\ \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$.

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов евклидова пространства модуль их скалярного произведения не превышает произведения их норм (длин)

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$$

Доказательство.

1). Первый способ. Возьмём произвольные векторы $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства, произвольный параметр λ из множества действительных чисел и рассмотрим скалярное произведение, которое по определению неотрицательно $(\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{x}+\lambda\vec{y}) \geq 0$, раскроем скалярное произведение, воспользовавшись линейностью

$$(\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{x}+\lambda\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2(\vec{y}, \vec{y}) \geq 0.$$

Получено квадратное неравенство относительно λ.

Дискриминант квадратного трёхчлена должен быть меньше или равен нулю

$D = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0$, откуда получаем $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$. Извлекая квадратный корень, получим $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Заметим, что если один из векторов $\vec{x}$ или $\vec{y}$ равен нулевому вектору ($\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$), или оба равны нулевому вектору ($\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$), то неравенство Коши-Буняковского также выполняется, поскольку в этом случае $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, то $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = 0$ и $0 \leq 0$ – верное неравенство.

Второй способ. Рассмотрим ненулевые линейно независимые векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ $(\vec{x} \neq \lambda\vec{y})$ и составим для них матрицу Грама. Определитель этой матрицы в силу критерия матрицы Грама положительный

$\det(G) = \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{x}) & (\vec{x}, \vec{y}) \\ (\vec{x}, \vec{y}) & (\vec{y}, \vec{y}) \end{vmatrix} > 0$,значит $(\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{y})^2 > 0$,

откуда для ненулевых линейно независимых векторов находим $|(\vec{x}, \vec{y})| < \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Если один из векторов $\vec{x}$ или $\vec{y}$ равен нулевому вектору ($\vec{x} = \vec{0}$ или $\vec{y} = \vec{0}$), или оба равны нулевому вектору ($\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$), или векторы линейно зависимы ($\vec{x} = \lambda\vec{y}$), то определитель матрицы Грама равен нулю

$$\det(G) = (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{y})^2 = 0$$

и неравенство Коши-Буняковского становится равенством, следовательно также выполняется

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Заметим, что из неравенства Коши-Буняковского следует корректность определения угла между векторами в том смысле, что

$$|\cos\varphi| = \frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Неравенство треугольника. Для любых векторов евклидова пространства норма суммы векторов не превышает суммы их норм

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y})$.

С одной стороны $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2$, с другой стороны, с использованием неравенства Коши-Буняковского, получим

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2 + 2|(\vec{x},\vec{y})| + \|\vec{y}\|^2 \le$$
$$\le \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Итак, $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$ или $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Если хотя-бы один из векторов $\vec{x},\vec{y}$ равен нулевому вектору, или векторы линейно зависимы $\vec{x} = \lambda\,\vec{y}$, то неравенство треугольника превращается в равенство.

Задача Доказать самостоятельно неравенство треугольника для n слагаемых $\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_n\| \le \|\vec{x}_1\| + \|\vec{x}_2\| + \cdots + \|\vec{x}_n\|$.

Неравенство треугольника даёт оценку сверху для нормы суммы векторов. Наряду с этой оценкой бывает полезна следующая оценка снизу для нормы разности векторов

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \ge |\ \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\ |,$$

то есть норма разности векторов евклидова пространства не превосходит модуля разности их норм.

Докажем это неравенство. Рассмотрим скалярное произведение $(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y})$ и воспользуемся неравенством треугольника

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \ge$$
$$\ge \|\vec{x}\|^2 - 2|(\vec{x},\vec{y})| + \|\vec{y}\|^2 \ge \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 =$$
$$= (\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|)^2.$$

Отсюда получаем $\|\vec{x}-\vec{y}\| \ge |\ \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\ |$.

11.4. Изменение матрицы Грама при изменении базиса

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с базисом $<\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n>$ определено скалярное произведение с помощью матрицы Грама

$$(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \ldots x_n)G\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T G\vec{y},$$

где $\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $<\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n>$.

Перейдём в рассматриваемом пространстве от базиса $<\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n>$ к новому базису $<\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n>$, где $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}$ – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $<\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n>$.

Пусть C – матрица перехода к новому базису, то есть $\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y'_1 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}$

или $\vec{x} = C\vec{x}', \vec{y} = C\vec{y}'$, где $\begin{pmatrix} x_1' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$ – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в новом базисе $< \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n >$.

Запишем$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T G \vec{y} = (C\vec{x}')^T G C \vec{y}' = \vec{x}'^T C^T G C \vec{y}' = \vec{x}'^T \tilde{G} \vec{y}'$.

Матрица Грама в новом базисе равна

$$\tilde{G} = C^T G C.$$

<u>Задача .</u>В евклидовом пространстве задан базис $\vec{e}_1 = \{1,1,1\}$, $\vec{e}_2 = \{2,0,1\}$, $\vec{e}_3 = \{1,1,0\}$. Найти матрицу Грама, выписать формулу для длины вектора, найти угол между векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, обозначаемый $\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$.

Решение. Элементы матрицы Грама

$g_{11} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1 + 1 + 1 = 3$, $g_{12} = g_{21} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2 + 0 + 1 = 3$,

$g_{13} = g_{31} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 1 + 1 + 0 = 2$, $g_{22} = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 4 + 0 + 1 = 5$,

$g_{23} = g_{32} = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2 + 0 + 0 = 2$, $g_{33} = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 + 1 + 0 = 2$.

Матрица Грама

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение

$$(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^T G \vec{x} = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Длина вектора

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2}.$$

Косинус угла между векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \frac{(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})}{\|\vec{e}_1\| \cdot \|\vec{e}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

Угол между векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \arccos \frac{3}{\sqrt{15}}.$$

<u>Задача.</u> Пусть в евклидовом пространстве в базисе $< \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} >$ координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно равны

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

требуется найти скалярное произведение этих векторов:

а) в базисе $< \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} >$;

б) в базисе $< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 >$, где $\vec{e}_1 = \{1,1,1\}$, $\vec{e}_2 = \{2,0,1\}$, $\vec{e}_3 = \{1,1,0\}$

а). Скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $< \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} >$ будет

$$(\vec{x},\vec{y}) = -3+4-3=-2.$$

б). Матрица перехода от базиса $<\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}>$ к базису $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3>$ имеет вид (столбцами являются координаты векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ в базисе $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$)

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, \text{тогда } C^{-1}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$

Координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в новом базисе

$$\vec{x}'=C^{-1}\vec{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\-1\\-3\end{pmatrix},$$

$$\vec{y}'=C^{-1}\vec{y}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение в новом базисе будет (матрицу Грама возьмём из задачи 2)

$$(\vec{x}',\vec{y}')=\vec{x}'^T\tilde{G}\vec{y}'=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&2\\3&5&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}==\frac{1}{4}\begin{pmatrix}12&10&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}(36-50+6)=-2.$$

Теорема. В евклидовом пространстве система векторов $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель её матрицы Грама отличен от нуля $\det(G)\neq 0$.

Доказательство. Если система векторов $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ линейно независима, то её можно рассматривать как базис линейного пространства, тогда по критерию матрицы Грама $\det(G)>0$.

Обратное утверждение докажем методом от противного. Пусть $\det(G)\neq 0$ и система векторов $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ линейно зависима.

Если система векторов $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору

$$\alpha_1\vec{e}_1+\dots+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}, \qquad \exists\alpha_k\neq 0.$$

Будем скалярно умножать это равенство поочередно на $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$:

$$\begin{cases}\alpha_1(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\alpha_2(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+\dots+\alpha_n(\vec{e}_1,\vec{e}_n)=0\\ \alpha_1(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+\alpha_2(\vec{e}_2,\vec{e}_2)+\dots+\alpha_n(\vec{e}_2,\vec{e}_n)=0\\ \dots\\ \alpha_1(\vec{e}_n,\vec{e}_1)+\alpha_2(\vec{e}_n,\vec{e}_2)+\dots+\alpha_n(\vec{e}_n,\vec{e}_n)=0.\end{cases}$$

Получена система линейных однородных уравнений с нетривиальным решением $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Известно, что система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю. Определитель нашей системы есть определитель матрицы Грама. По предположению $\det(G)\neq 0$. Получили противоречие, следовательно векторы $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ линейно независимы.

Лекция 12. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

12.1. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $\mathbb{E}$ - евклидово пространство, рассмотрим произвольную систему векторов

$$\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}.$$

<u>Определение.</u> Система векторов называется ортогональной, если $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0, \ \forall\, i \neq j.$

<u>Определение.</u> Система векторов называется ортонормированной, если

$$\forall\, i,j \ \left(\vec{f}_i, \vec{f}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

<u>Утверждение.</u> Если система ненулевых векторов $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$ ортогональна, то система векторов $\left\{\frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}, \dots, \frac{\vec{f}_k}{\|\vec{f}_k\|}\right\}$ ортонормирована.

Действительно, $\left(\frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|}, \frac{\vec{f}_j}{\|\vec{f}_j\|}\right) = \frac{(\vec{f}_i, \vec{f}_j)}{\|\vec{f}_i\|\|\vec{f}_j\|} = \begin{cases} \frac{\|\vec{f}_i\|^2}{\|\vec{f}_i\|\|\vec{f}_i\|} = 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$

<u>Пример</u>. Если вектор $\vec{f} = \{1,2,2\}$, то нормированный вектор $\vec{g} = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|} =$

$$= \frac{\{1,2,2\}}{\sqrt{1+4+4}} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

<u>Теорема.</u> Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

<u>Доказательство методом от противного</u>. Пусть система векторов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ ортогональна и векторы линейно зависимы, значит существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору

$$c_1\vec{f}_1 + \ldots + c_k\vec{f}_k = \vec{0}.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\vec{f}_i, \forall i = 1,2, \dots k,$

$$c_1\left(\vec{f}_1, \vec{f}_i\right) + c_2\left(\vec{f}_2, \vec{f}_i\right) + \cdots + c_i\left(\vec{f}_i, \vec{f}_i\right) + \cdots + c_k\left(\vec{f}_k, \vec{f}_i\right) = \left(\vec{0}, \vec{f}_i\right) = 0,$$

или $c_i\left(\vec{f}_i, \vec{f}_i\right) = 0, \left(\vec{f}_i, \vec{f}_i\right) \neq 0 \Rightarrow c_i = 0, \forall i = 1,2, \dots k.$

Получено противоречие с тем, что линейная комбинация векторов нетривиальная Значит, система векторов линейно независима.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ некоторый базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, по нему построим ортонормированный базис.

1) возьмём $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$;

2) возьмём $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \lambda\vec{e}_1$ и потребуем, чтобы $(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$, тогда $(\vec{e}_2 - \lambda\vec{e}_1, \vec{f}_1) = 0$, раскрываем скобки, пользуясь линейностью скалярного произведения,

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_1) - \lambda\,(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0,$$

$$\lambda = \frac{(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{(\vec{e}_2, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)};$$

3) возьмём $\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \lambda_1\vec{f}_1 - \lambda_2\vec{f}_2$ и потребуем, чтобы $(\vec{f}_3, \vec{f}_1) = (\vec{f}_3, \vec{f}_2) = 0$, тогда

а) $(\vec{e}_3 - \lambda_1\vec{f}_1 - \lambda_2\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$ или $(\vec{e}_3, \vec{f}_1) - \lambda_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) - \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$,

но $(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$, поэтому $(\vec{e}_3, \vec{f}_1) - \lambda_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = 0$,

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{e}_3, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)},$$

б) $(\vec{e}_3 - \lambda_1\vec{f}_1 - \lambda_2\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 0$ или $(\vec{e}_3, \vec{f}_2) - \lambda_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) - \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 0$,

но $(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$, поэтому $(\vec{e}_3, \vec{f}_2) - \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 0$,

$$\lambda_2 = \frac{(\vec{e}_3, \vec{f}_2)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)};$$

аналогично на k-ом шаге возьмём

$$\vec{f}_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda'_i \vec{f}_i$$

и потребуем, чтобы $(\vec{f}_k, \vec{f}_1) = (\vec{f}_k, \vec{f}_2) = \cdots (\vec{f}_k, \vec{f}_{k-1}) = 0$,

откуда получим для $i = 1,2,3, \dots k-1$

$$\lambda'_i = \frac{(\vec{e}_k, \vec{f}_i)}{(\vec{f}_i, \vec{f}_i)}.$$

Для обоснования алгоритма нужно показать, что ни один из последовательно вычисляемых векторов $\vec{f}_k$ не является нулевым (иначе процесс оборвётся) и что все векторы попарно ортогональны.

Докажем с использованием метода математической индукции:

для $k = 2$: $(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$ по проведённому процессу ортогонализации и $\vec{f}_2 \neq \vec{0}$ так как $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \lambda\vec{e}_1$ и нетривиальная линейная комбинация базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не может равняться нулевому вектору;

пусть утверждение верно для k, докажем, что оно верно для $k + 1$

вектор $\vec{f}_{k+1}$ ортогонален векторам $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ по проведённому процессу ортогонализации;

в соответствии с процессом ортогонализации вектор $\vec{f}_{k+1}$ есть линейная комбинация вектора $\vec{e}_{k+1}$ и векторов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$

$$\vec{f}_{k+1} = \vec{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i'' \vec{f}_i,$$

а каждый вектор $\vec{f}_i$ $(i = 1,2, \dots, k)$ есть линейная комбинация базисных векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i$, поэтому вектор $\vec{f}_{k+1}$ есть линейная комбинация базисных векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k+1}$. Потому $\vec{f}_{k+1} \neq \vec{0}$ так как нетривиальная линейная комбинация базисных векторов не может равняться нулевому вектору.

Вывод. В конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

12.2 Пример (типовой расчёт).

Ортогонализировать базис в V_3: $\vec{e}_1 = \{1, 1, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{1, 1, 2\}$ $\vec{e}_3 = \{2, 1, 1\}$.

Решение. Возьмём $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = \{1, 1, 1\}$. В соответствии с процессом ортогонализации в качестве вектора $\vec{f}_2$ возьмём

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \lambda \vec{f}_1,$$

где

$$\lambda = \frac{(\vec{e}_2, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \frac{1+1+2}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

тогда

$$\vec{f}_2 = \{1, 1, 2\} - \frac{4}{3}\{1, 1, 1\} = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

В качестве вектора $\vec{f}_3$ возьмём $\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \lambda_1 \vec{f}_1 - \lambda_2 \vec{f}_2$, тогда

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{e}_3, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \frac{4}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{(\vec{e}_3, \vec{f}_2)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}} = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{f}_3 = \{2, 1, 1\} - \frac{4}{3}\{1, 1, 1\} + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{12-8-1}{6}, \frac{6-8-1}{6}, \frac{6-8+2}{6}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Ортогональный базис

$$\vec{f}_1 = \{1, 1, 1\}, \qquad \vec{f}_2 = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad \vec{f}_3 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Ортонормируем полученный ортогональный базис

$$\vec{g}_1=\frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}=\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{3}},\vec{g}_2=\frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|}=\frac{\vec{e}_2-\frac{4}{3}\vec{e}_1}{\sqrt{\frac{6}{9}}}=-\frac{4}{\sqrt{6}}\vec{e}_1+\frac{3}{\sqrt{6}}\vec{e}_2.$$

$$\vec{g}_3=\frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|}=\frac{\vec{e}_3-\lambda_1\vec{f}_1-\lambda_2\vec{f}_2}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\vec{e}_3-\frac{4}{3}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\left(\vec{e}_2-\frac{4}{3}\vec{e}_1\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=$$

$$=\sqrt{2}\left(-2\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)=-2\sqrt{2}\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2+\sqrt{2}\vec{e}_3=-\frac{4}{\sqrt{2}}\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2+\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{e}_3.$$

Запишем матрицу перехода к ортонормированному базису

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Матрица Грама в базисе $<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3>$ имеет вид $G=\begin{pmatrix}3&4&4\\4&6&5\\4&5&6\end{pmatrix}$.

Вычислим матрицу Грама в ортонормированном базисе через матрицу перехода и покажем, что она будет равна единичной матрице

$$\tilde{G}=C^TGC=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 0\\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&4\\4&6&5\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Проверку ортонормированности базиса $<\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3>$ можно выполнить также другим способом, выписав координаты этих векторов и вычислив матрицу Грама непосредственно через скалярное произведение.

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \frac{\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \frac{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}.$$

Вычислим, например, $(\vec{g}_1, \vec{g}_1)$ и $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} = 0.$$

Аналогичными вычислениями получаем $(\vec{g}_2, \vec{g}_2) = (\vec{g}_3, \vec{g}_3) = 1$ и $(\vec{g}_1, \vec{g}_3) = (\vec{g}_2, \vec{g}_3) = 0$. Таким образом, базис $<\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3>$ ортонормированный.

Ортогональное дополнение для линейного подпространства

Рассмотрим $\mathbb{E}$ – евклидово пространство и $M \subseteq \mathbb{E}$ – линейное подпространство.

Определение. Ортогональным дополнением $M^{\perp}$ для линейного подпространства M называется множество векторов из $\mathbb{E}$, ортогональных любым векторам из M $\quad M^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{E}: (\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in M\}$.

Пример. В пространстве геометрических векторов V_3 выберем линейное подпространство векторов, параллельных оси OX $M = \{\text{векторы, параллельные оси } OX\}$,тогда ортогональным дополнением $M^{\perp}$ для линейного подпространства M будет множество векторов, параллельных плоскости ZOY $M^{\perp} = \{\text{векторы, параллельные плоскости } ZOY\}$.

Теорема. Ортогональное дополнение $M^{\perp}$ линейного подпространства M само является линейным подпространством в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ и

$M \cap M^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

Доказательство. Выберем произвольные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ из множества $M^{\perp}$, произвольные действительные числа λ, μ и произвольный вектор $\vec{y}$ из линейного подпространства M: $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M^{\perp}, \forall \lambda, \mu \in R, \forall \vec{y} \in M$ и рассмотрим скалярное произведение

$$(\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mu(\vec{x}_2, \vec{y}) = 0 + 0 = 0,$$

значит, вектор $\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2$ принадлежит $M^{\perp}$ и $M^{\perp}$ – линейное подпространство.

Докажем, что $M \cap M^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Пусть $\vec{x} \in M$ и $\vec{x} \in M^{\perp}$, это означает, что $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, из положительной определённости скалярного произведения следует, что $\vec{x} = \vec{0}$.

Теорема. Если евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с размерностью n выбрано линейное подпространство M с размерностью m, то размерность линейного подпространства $M^{\perp}$ равна $n - m$.

Доказательство. Пусть $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m>$ некоторый ортонормированный базис в линейном подпространстве M. Дополним этот базис до базиса пространства $\mathbb{E}$ $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \vec{e}_{m+2}, \dots, \vec{e}_n>$ и применим процесс ортогонализации, получим ортонормированный базис $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m, \vec{f}_{m+1}, \vec{f}_{m+2}, \dots, \vec{f}_n>$, причём $<\vec{f}_{m+1}, \vec{f}_{m+2}, \dots, \vec{f}_n>$ будет базисом в $M^{\perp}$ и размерность линейного подпространства $M^{\perp}$ равна

$$\dim(M^{\perp}) = n - m.$$

Следствие. Любой вектор евклидова пространства $\mathbb{E}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов из подпространств M и $M^{\perp}$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}, \ \ \vec{u} \in M, \vec{v} \in M^{\perp}.$$

Утверждение**.** Представление $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \in M, \vec{v} \in M^{\perp}$ единственное.

Доказательство. Пусть существуют два представления вектора $\vec{x}$

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 \text{ и } \vec{x} = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \text{ где } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in M, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in M^{\perp}.$$

Вычтем из одного равенства другое

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \ \Rightarrow \ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2)$

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0.$$

Последнее скалярное произведение равно нулю, так как $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in M$ и $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in M^{\perp}$. Из равенства нулю скалярного произведения $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0$ следует, что $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$, значит, $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

Лекция 13. Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

13.1. Ортогональные матрицы

Определение. Квадратную матрицу A называют ортогональной, если она удовлетворяет условию

$$A^T \cdot A = E.$$

Примеры. 1) $A = E$ 2) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Свойства ортогональных матриц

1. Определитель ортогональной матрицы A равен ± 1: $\det A = \pm 1$.

Доказательство. $\det(A^T \cdot A) = \det\, A^T \cdot \det A = (\det A)^2$,

$$\det(A^T \cdot A) = \det E = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

2. Матрица, обратная к ортогональной матрице, совпадает с её транспонированной матрицей, то есть, если A – ортогональная матрица $\Rightarrow A^{-1} = A^T$.

Доказательство. $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$, рассмотрим

$$A^T \cdot A \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1},$$

$$A^T \cdot A \cdot A^{-1} = A^T \cdot E = A^T \Rightarrow A^{-1} = A^T.$$

3. Произведение ортогональной матрицы на транспонированную матрицу равно единичной матрице $A \cdot A^T = A \cdot A^{-1} = E$.

4. Транспонированная ортогональная матрица также будет ортогональной:

A – ортогональная матрица $\Rightarrow A^T$ – ортогональная матрица.

Доказательство. $(A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T = A \cdot A^{-1} = E$.

5. Произведение двух ортогональных матриц одного порядка является ортогональной: A, B – ортогональные матрицы $\Rightarrow AB$ – ортогональная матрица.

Доказательство. $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T E B = B^T B = E$.

6. Матрица, обратная к ортогональной матрице является ортогональной матрицей: A – ортогональная матрица $\Rightarrow A^{-1}$ – ортогональная матрица.

Доказательство. $\det A \neq 0 \;\Rightarrow \exists\, A^{-1}$ и $A^{-1} = A^T$, но A^T – ортогональная $\Rightarrow A^{-1}$ – ортогональная матрица.

13.2. Ортогональные операторы

Определение. Линейный опеератор $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, называется ортогональным оператором, если он сохраняет скалярное произведение

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (\vec{x}, \vec{y}), \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

Так как ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, следовательно, он сохраняет углы и длины векторов.

Примеры. 1) Поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ.

2) Оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве.

Теорема. Если линейный опеератор в евклидовом пространстве сохраняет норму (длину) вектора, то это ортогональный оператор.

Доказательство. Преобразуем скалярные произведения $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$ и $\left(\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}), \hat{A}(\vec{x} + \vec{y})\right)$. Соответственно получим

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2.$$

$$2\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = \left\|\hat{A}(\vec{x} + \vec{y})\right\|^2 - \left\|\hat{A}(\vec{x})\right\|^2 - \left\|\hat{A}(\vec{y})\right\|^2.$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

следовательно, $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (\vec{x}, \vec{y})$, то есть $\hat{A}$ - ортогональный оператор.

Свойства ортогональных операторов

1. Ортогональный оператор $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ обратим, то есть у всякого ортогонального оператора $\hat{A}$ существует обратный оператор $\hat{A}^{-1}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой: линейный оператор $\hat{A}$ обратим, если его ядро $\operatorname{Ker} \hat{A}$ состоит только из нулевого вектора и предположим, что существует ненулевой вектор $\vec{u}$ из ядра оператора $\exists\, \vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{u} \in \operatorname{Ker} \hat{A} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{E}: \hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$,Значит, $\hat{A}(\vec{u}) = \vec{0}$ и $\|\vec{u}\| = \left\|\hat{A}(\vec{u})\right\| = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = \vec{0}$. Получили противоречие, следовательно, ядро оператора $\hat{A}$ состоит только из нулевого вектора и оператор $\hat{A}$ обратим.

2. Обратный оператор к ортогональному оператору ортогонален.

Доказательство. Пусть $\hat{A}^{-1}$ –обратный оператор к ортогональному оператору $\hat{A}$. Выберем произвольные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ и рассмотрим действие обратного оператора на эти векторы

$$\hat{A}^{-1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \;\Leftrightarrow\; \hat{A}(\vec{x}_1) = \vec{x},$$
$$\hat{A}^{-1}(\vec{y}) = \vec{y}_1 \;\Leftrightarrow\; \hat{A}(\vec{y}_1) = \vec{y}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{A}^{-1}(\vec{x}),\, \hat{A}^{-1}(\vec{y})\right)$ и преобразуем его

$$\left(\hat{A}^{-1}(\vec{x}),\, \hat{A}^{-1}(\vec{y})\right) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \left(\hat{A}(\vec{x}_1), \hat{A}(\vec{y}_1)\right) = (\vec{x}, \vec{y}),$$

следовательно, $\hat{A}^{-1}$ - ортогональный оператор.

3. Если у ортогонального оператора $\hat{A}$ существуют собственные числа, то они могут равняться только ± 1.

Доказательство. Пусть у ортогонального оператора $\hat{A}$ существует собственное число λ

$$\hat{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}\,,$$

Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{x})\right)$

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{x})\right) = (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}),$$

так как $\hat{A}$ – ортогональный оператор, то

$$\lambda^2 = \frac{\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{x})\right)}{(\vec{x}, \vec{x})} = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm 1.$$

4. Ортогональный оператор $\hat{A}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Доказательство. Пусть $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ - ортонормированный базис, то есть

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{A}(\vec{e}_i), \hat{A}(\vec{e}_j)\right)$

$$\left(\hat{A}(\vec{e}_i), \hat{A}(\vec{e}_j)\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \delta_{ij}.$$

Ортогональная система векторов является линейно независимой, следовательно, $<\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)>$ - ортонормированный базис.

5. Если линейный оператор $\hat{A}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный, то этот оператор является ортогональным.

Доказательство. Пусть $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ - ортонормированный базис, рассмотрим произвольные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ и их разложения по базису

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n,\ \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$.

Рассмотрим действие линейного оператора $\hat{A}$ на векторы $\vec{x}, \vec{y}$

$$\hat{A}(\vec{x}) = x_1\hat{A}(\vec{e}_1) + \dots + x_n\hat{A}(\vec{e}_n), \hat{A}(\vec{y}) = y_1\hat{A}(\vec{e}_1) + \dots + y_n\hat{A}(\vec{e}_n),$$

получили векторы с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ в ортонормированном базисе $<\hat{A}(\vec{e}_1), \dots, \hat{A}(\vec{e}_n)>$.

Рассмотрим скалярные произведения $(\vec{x}, \vec{y})$ и $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right)$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n, \left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

следовательно, $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (\vec{x}, \vec{y})$, то есть $\hat{A}$ - ортогональный оператор.

6. Линейный оператор $\hat{A}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ является ортогональным тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Доказательство. Пусть $\hat{A}$ - ортогональный оператор, тогда $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Пусть $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ - ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$.

Пусть A – матрица ортогонального оператора $\hat{A}$ в этом базисе и G - матрица Грама. Так как базис ортонормированный, то матрица Грама единичная

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем выражение для скалярного произведения $(\vec{x}, \vec{y})$ с помощью матрицы Грама и воспользуемся тем, что она единичная $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T G \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$.

Запишем выражение для скалярного произведения $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right)$ с помощью единичной матрицы Грама и матрица A ортогонального оператора $\hat{A}$

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (A\vec{x})^T G A\vec{y} = \vec{x}^T A^T A \vec{y}.$$

Итак, получено, что для любых $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ выполняется равенство

$$\vec{x}^T \vec{y} = \vec{x}^T A^T A \vec{y},$$

следовательно, $A^T A = E$ – единичная матрица, значит, A – ортогональная матрица.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть A – матрица линейного оператора $\hat{A}$ и она ортогональна в ортонормированном базисе, то есть $A^T A = E$. Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right)$ и выразим его через матрицу линейного оператора A и единичную матрицу Грама G

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \hat{A}(\vec{y})\right) = (A\vec{x})^T G A\vec{y} = \vec{x}^T A^T A \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}),$$

следовательно, $\hat{A}$ – ортогональный оператор.

7. Связь между матрицей Грама и матрицей ортогонального оператора в произвольном базисе. Если $\hat{A}$ – ортогональный оператор, то есть

$$(\vec{x},\vec{y}) = \left(\hat{A}(\vec{x}),\hat{A}(\vec{y})\right),$$

тогда в произвольном базисе $<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>$ матрица этого оператора есть A и матрица Грама есть G. Скалярное произведение в этом базисе запишется так

$$\vec{x}^T G\vec{y} = \vec{x}^T A^T GA\vec{y},$$

откуда получаем $G = A^T GA.$

<u>Задачи</u> 1. Линейный оператор $\hat{A}$ в ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Является ли оператор $\hat{A}$ ортогональным?

2. Ортогональный оператор $\hat{A}$ переводит векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ в векторы

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. Чему равен образ орта $\vec{k}$?

Ответ. Образ орта $\vec{k}$ есть вектор $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1,\vec{e}_2] = \begin{pmatrix} 1/\left(3\sqrt{2}\right) \\ -4/\left(3\sqrt{2}\right) \\ 1/\left(3\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$.

<u>Замечание.</u> При решении задач можно воспользоваться следующим свойством: если для квадратной матрицы A выполняется равенство $A^T A = E$, то столбцы этой матрицы попарно ортогональны и имеют единичную длину.

3. В некотором базисе заданы матрица Грама G и матрица A линейного оператора

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Является ли линейный оператор с матрицей A ортогональным?

$$G = A^T GA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = G,$$

Следовательно это ортогональный оператор.

4.В некотором базисе заданы матрица Грама G и матрица A линейного оператора

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли линейный оператор с матрицей A ортогональным?

$$G = A^T GA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq G,$$

Следовательно это не ортогональный оператор.

13.3. Матрицы перехода от одного базиса к другому в евклидовом пространстве

Теорема. В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

Доказательство. Рассмотрим два ортонормированных базиса $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ и $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$, пусть C – матрица перехода от $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ к $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$, то есть её столбцы – это координаты векторов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ в базисе $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$.

Обозначим G и $\tilde{G}$ – матрицы Грама в базисах $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ и $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$.

Эти матрицы единичные, так как базисы ортонормальные.

Если воспользоваться формулой преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису $\tilde{G} = C^T G C$ или $C^T C = E$, то есть C – ортогональная матрица.

Теорема. Пусть $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве размерности n. Утверждается, что любая ортогональная матрица размерности n является матрицей перехода к другому ортонормированному базису.

Доказательство. Так как $<\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n>$ – ортонормированный базис, то матрица Грама единичная $G = E$. Пусть C – ортогональная матрица, которая переводит базис в новый базис $<\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n>$. Рассмотрим матрицу Грама в новом базисе

$\tilde{G} = C^T G C = C^T C = E$, следовательно, новый базис ортонормированный.

Лекция 14. Сопряжённые операторы

14.1. Определение сопряженных операторов и примеры

Определение. Пусть в евклидовом пространстве действуют два линейных оператора: $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ и $\hat{A}^*: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Оператор $\hat{A}^*$ называется сопряженным к оператору $\hat{A}$, если

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}^*(\vec{y})\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

Примеры. 1. Оператор умножения на число: $\hat{A}(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$. $\alpha \in R$ – фиксированное число.
$\hat{A}^* = \hat{A}$. $\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = (\alpha\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \left(\vec{x}, \hat{A}(\vec{y})\right)$ $\forall \vec{y} \in \mathbb{E}$,

из определения сопряжённого оператора $\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}^*(\vec{y})\right)$ следует, что что $\hat{A} = \hat{A}^*$.

2. $\hat{A} = \hat{0}$ – нулевой оператор: $\hat{0}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$. $\hat{0}^* = \hat{0}$.

3. $\hat{A} = \hat{I}$ – тождественный оператор: $\hat{I}(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$. $\hat{I}^* = \hat{I}$.

4. Оператор векторного произведения: $\hat{A}(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}]$, $\forall \vec{x} \in V_3$, $\vec{a}$ – фиксированный вектор $\vec{a} \in V_3$.

Найдём сопряжённый оператор, воспользовавшись свойствами смешанного произведения

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = ([\vec{a}, \vec{x}], \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{a}, \vec{x}) =$$
$$= ([\vec{y}, \vec{a}], \vec{x}) = (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{a}]) =$$
$$= -(\vec{x}, [\vec{a}, \vec{y}]) = -\left(\vec{x}, \hat{A}^*(\vec{y})\right),$$

следовательно, $\hat{A}^* = -\hat{A}$.

14.2. Матрицы сопряженных операторов

Утвреждение. Пусть $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ линейный оператор в евклидовом пространстве. Тогда у него существует, причем единственный, сопряженный оператор $\hat{A}^*$. Матрица этого оператора совпадает с A^T в любом ортонормированном базисе пространства.

Доказательство. Докажем единственность сопряжённого оператора.

Пусть существуют два оператора для которых выполняются условия сопряжённости:

$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{B}(\vec{y})\right)$ и $\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{C}(\vec{y})\right)$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$, следовательно,

$\left(\vec{x}, \hat{B}(\vec{y})\right) = \left(\vec{x}, \hat{C}(\vec{y})\right)$ или $\left(\vec{x}, \hat{B}(\vec{y}) - \hat{C}(\vec{y})\right) = 0$.

Так как $\vec{x}$ – произвольный вектор, то возьмём $\vec{x} = \hat{B}(\vec{y}) - \hat{C}(\vec{y})$, и из последнего равенства получим $\left(\hat{B}(\vec{y}) - \hat{C}(\vec{y}), \hat{B}(\vec{y}) - \hat{C}(\vec{y})\right) = 0$,следовательно, $\hat{B}(\vec{y}) - \hat{C}(\vec{y}) = \vec{0}$, или

$\hat{B}(\vec{y}) = \hat{C}(\vec{y}), \forall \vec{y} \in \mathbb{E} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$.

Докажем, что A^T является матрицей $\hat{A}^*$ в ортонормированном базисе.

Рассмотрим некоторый линейный оператор $\hat{B}$, который имеет в ортонормированном базисе матрицу $B = A^T$ и покажем, что $\hat{B} = \hat{A}^*$.

Для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ в ортонормированном базисе рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}^T A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\vec{x}, \hat{B}(\vec{y})\right),$$

следовательно, оператор $\hat{B}$ есть сопряжённый оператор для оператора $\hat{A}$: $\hat{B} = \hat{A}^*$.

Свойства сопряженных операторов

1. Оператор, сопряжённый тождественному оператору, есть тождественный оператор: $\hat{I}^* = \hat{I}$. Это очевидно.

2. Дважды сопряжённый оператор есть сам оператор: $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}^*(\vec{y})\right) = \left(\hat{A}^*(\vec{y}), \vec{x}\right) = \left(\vec{y}, \left(\hat{A}^*\right)^*(\vec{x})\right) = \left(\left(\hat{A}^*\right)^*(\vec{x}), \vec{y}\right) \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E},$$

следовательно, $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

3. Свойства линейности сопряженных операторов $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$ и $\left(\alpha\hat{A}\right)^* = \alpha\hat{A}^*$ доказать самостоятельно.

4. Сопряжение композиции (произведения) операторов $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

$$\left(\left(\hat{A}\hat{B}\right)(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\hat{B}(\vec{x}), \hat{A}^*(\vec{y})\right) = \left(\vec{x}, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(\vec{y})\right)\right) = \left(\vec{x}, (\hat{B}^*\hat{A}^*)(\vec{y})\right).$$

5. Если $\hat{A}$ – невырожденный линейный оператор в евклидовом пространстве, то $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$.По определению $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$.

Рассмотрим $\left(\hat{A}\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^{-1}\right)^*\hat{A}^* = \hat{I}^* = \hat{I}$.

Рассмотрим так же $\left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^* = \hat{A}^*\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \hat{I}^* = \hat{I}$, следовательно, $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$.

6. Связь матрицы сопряженного оператора с матрицей Грама

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = (A\vec{x})^T G\vec{y} = \vec{x}^T A^T G\vec{y},$$

с другой стороны

$$\left(\vec{x}, \hat{A}^*(\vec{y})\right) = \vec{x}^T G A^* \vec{y} \Rightarrow A^T G = G A^* \Rightarrow A^* = G^{-1} A^T G.$$

<u>Пример 5.</u> Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $<\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'>$, где $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1, \vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, здесь $<\vec{e}_1, \vec{e}_2>$ - ортонормированный базис. Надо найти матрицу сопряженного оператора $\hat{A}^*$ в базисе $<\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'>$.

Найдём матрицу оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе:

$$A = C^{-1}A_{\text{орт}}C \Rightarrow A_{\text{орт}} = CAC^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^*_{\text{орт}} = A^T_{\text{орт}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -10 & -5 \end{pmatrix},$$

вернемся в исходный базис:

$$A^* = C^{-1}A^*_{\text{орт}}C =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 67 \\ -10 & -25 \end{pmatrix}.$$

Второй способ решения. $A^* = G^{-1}A^TG.$

Найдём матрицу Грама в базисе $\vec{e}_1' = \{1,0\}$, $\vec{e}_2' = \{2,1\}$ $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

вычислим обратную матрицу $\quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица сопряжённого оператора в базисе $<\vec{e}_1', \vec{e}_2'>$будет

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 67 \\ -10 & -25 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 6.</u> Пусть $C_{[a,b]}$ – линейное пространство функций $f(t)$ непрерывно дифференцируемых n раз на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка обращающихся в ноль вместе со своими производными: $f(t) = f'(t) = f''(t) = \cdots = f^{(n)}(t) = 0$ при $t = a$ и $t = b$. Определим скалярное произведение$(f,g) = \int_a^b f(t)\,g(t)dt$

и действие линейного оператора $\hat{A}$ на вектор евклидова пространства $\widehat{A}(f) = f'(t)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\hat{A}(f), g\right) = \int\limits_a^b f'(t)\,g(t)dt = \int\limits_a^b g(t)\,df(t) = g(t)f(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(t)\,dg(t) =$$

$$g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int\limits_a^b f(t)\,g'(t)dt = 0 - 0 - \left(f, \hat{A}(g)\right) = -\left(f, \hat{A}(g)\right).$$

Лекция 15. Самосопряжённые операторы

15.1. Определение сопряженных операторов и примеры

Определение. Оператор $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ в евклидовом пространстве называется самосопряженным оператором, если $\hat{A}^* = \hat{A}$, то есть

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}(\vec{y})\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

Примеры. 1. $\hat{A} = \hat{I}$ – тождественный оператор: $\hat{I}(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$.

$\left(\hat{I}(\vec{x}), \vec{y}\right) = (\vec{x}, \vec{y}) = \left(\vec{x}, \hat{I}(\vec{y})\right) \Rightarrow \hat{I}^* = \hat{I}$.

2. $\hat{A} = \hat{0}$ – нулевой оператор: $\hat{0}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$.

$\left(\hat{0}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{0}, \vec{y}\right) = 0 = \left(\vec{x}, \hat{0}(\vec{y})\right) \Rightarrow \hat{0}^* = \hat{0}$.

3. $\vec{x}, \vec{a} \in V_3$, $\hat{A}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}) \cdot \vec{a}$.

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left((\vec{x}, \vec{a}) \cdot \vec{a}, \vec{y}\right) = (\vec{x}, \vec{a}) \cdot (\vec{a}, \vec{y}) = (\vec{x}, (\vec{a}, \vec{y}) \cdot \vec{a}) = \left(\vec{x}, \hat{A}(\vec{y})\right) \Rightarrow \hat{A}^* = \hat{A}.$$

15.2. Матрицы самосопряженных операторов

Теорема. Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметричной ($A^T = A$). И наоборот, если в некотором ортонормированном базисе матрица линейного оператора симметричная, то этот оператор самосопряженный.

Доказательство. Пусть $\hat{A}$ – самосопряжённый оператор и A – его матрица в ортонормированном базисе. Известно, что матрица сопряжённого оператора в ортонормированном базисе есть A^T. Рассматриваемый оператор $\hat{A}$ самосопряжённый, то есть совпадает с сопряжённым $\hat{A} = \hat{A}^*$, следовательно и матрица оператора A в ортонормированном базисе совпадает с матрицей A^T сопряжённого оператора $A = A^T$.

Теорема. Все корни характеристического уравнения самосопряжённого оператора действительные.

Доказательство. Пусть A – матрица самосопряжённого оператора в некотором базисе и λ – один из корней характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Докажем, что λ – действительный корень, используя следующее свойство комплексных чисел: $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$, то есть $x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = 0$. Найдём собственный вектор X, отвечающий этому собственному значению

$$(A - \lambda E)X = \vec{0}.$$

Обозначим $\bar{X}$ – вектор, комплексно сопряжённый собственному вектору X. Рассмотрим выржение

$\bar{X}^T(A-\lambda E)X=0$ или $\bar{X}^T AX-\lambda\bar{X}^T X=0$,

отсюда получаем

$$\lambda=\frac{\bar{X}^T AX}{\bar{X}^T X}.$$

Знаменатель полученного выражения действительное число, так как $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\in R$. Чтобы убедиться, что λ действительное число, достаточно доказать, что $\bar{X}^T AX\in R$. Поскольку $\bar{X}^T AX$– это число, то его можно транспонировать

$\bar{X}^T AX=(\bar{X}^T AX)^T=X^T A^T\bar{X}=X^T A\bar{X}$, так как $A^T=A$.

Рассмотрим комплексно сопряжённое выражение

$\overline{\bar{X}^T AX}=X^T\bar{A}\bar{X}=X^T A\bar{X}$, так как A – действительная матрица.

Итак, $\bar{X}^T AX=\overline{\bar{X}^T AX}\Rightarrow\bar{X}^T AX\in R\Rightarrow\lambda\in R$.

Следствие. Если матрица A является симметричной, то все её собственные числа и собственные векторы действительные.

Следствие. Самосопряжённый оператор, действующий в евклидовом пространстве размерности n, имеет n действительных собственных значений с учётом кратности.

Следствие. Симметричная матрица размерности n имеет n действительных собственных значений с учётом кратности.

15.3. Собственные числа и собственные векторы самосопряженных операторов

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Рассмотрим два собственных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ с различными собственными значениями $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\hat{A}(\vec{x}_1)=\lambda_1\vec{x}_1$ и $\hat{A}(\vec{x}_2)=\lambda_2\vec{x}_2$.

$\hat{A}$ – самосопряжённый оператор, поэтому $\left(\hat{A}(\vec{x}_1),\vec{x}_2\right)=\left(\vec{x}_1,\hat{A}(\vec{x}_2)\right)$.

Выпишем выражения для перввого и второго скалярных произведений

$$\left(\hat{A}(\vec{x}_1),\vec{x}_2\right)=(\lambda_1\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\lambda_1(\vec{x}_1,\vec{x}_2),$$

$$\left(\vec{x}_1,\hat{A}(\vec{x}_2)\right)=(\vec{x}_1,\lambda_2\vec{x}_2)=\lambda_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$$

и приравняем их

$\lambda_1(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\lambda_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$, или $(\lambda_1-\lambda_2)(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=0$.

Так как $\lambda_1\neq\lambda_2$, то из последнего равенства следует, что $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=0$, следовательно $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ ортогональны.

Теорема. Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ самосопряженного оператора $\hat{A}$, действующего в n – мерном евклидовом пространстве, попарно различны, то существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид.

Доказательство. Так как собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны, то собственные векторы, которые им соответствуют, попарно ортогональны, следовательно, эти векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейно независимы и образуют базис. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид.

Замечание. Если среди корней характеристического многочлена есть кратные корни, то эта теорема неприменима. Однако, и в этом случае матрица оператора $\hat{A}$ будет иметь диагональный вид. На главной диагонали будут расположены собственные числа с учётом их кратности.

Теорема. Самосопряженный оператор $\hat{A}$ является оператором простого типа, то есть в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Рассмотрим $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве. Докажем методом математической индукции по размерности пространства, что существует ортонормированный базис из собственных векторов.

$n = 1, \dim\mathbb{E} = 1, \hat{A}(\vec{f}) = \lambda\vec{f} \in \mathbb{E}, \Rightarrow\ \vec{f} -$ собственный вектор, $\{\vec{f}\} -$ базис, ортонормированный базис будет

$$\vec{e} = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|},$$

$\{\vec{e}\} -$ искомый базис.

Пусть утверждение теоремы верно для пространства размерности $n - 1$, проверим, будет ли оно верно для размерности n.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

По основной теореме алгебры это уравнение имеет хотя бы один корень λ_1, для симметричной матрицы $\lambda_1 \in R$ – действительный корень. Найдём $\vec{f}_1$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1, пронормируем этот вектор

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{E}$ ортогональное дополнение к векору $\vec{e}_1$

$$\mathbb{E}_1^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{E}: (\vec{e}_1, \vec{x}) = 0\}.$$

$\mathbb{E}_1^{\perp}$ – евклидово пространство:

$$(\vec{e}_1, \vec{x}+\vec{y}) = 0, \qquad (\vec{e}_1, \alpha\vec{x}) = 0, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_1^{\perp}, \qquad \forall \alpha \in R.$$

По свойству ортогонального дополнения

$\dim \mathbb{E}_1^{\perp} = n-1$.

Докажем, что $\hat{A}: \mathbb{E}_1^{\perp} \to \mathbb{E}_1^{\perp}$.

Рассмотрим некоторый базис в пространстве $\mathbb{E}$, включающий в себя вектор $\vec{e}_1$: $< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n >$ и применим к нему процесс ортогонализации. В результате получим ортонормированный базис всего пространства$< \vec{e}_1, \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \dots, \vec{e}_n{}' >$. Докажем, что $< \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \dots, \vec{e}_n{}' >$ – базис в $\mathbb{E}_1^{\perp}$.

Убедимся, что $\vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \dots, \vec{e}_n{}' \in \mathbb{E}_1^{\perp}$. Возьмём $\forall \vec{y} \in \mathbb{E}_1^{\perp}$, тогда $(\vec{e}_1, \vec{y}) = 0$. Разложим вектор $\vec{y}$ по базису всего пространства

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2{}' + y_3\vec{e}_3{}' + \dots + y_n\vec{e}_n{}'$$

и рассмотрим

$$0 = (\vec{e}_1, \vec{y}) = (\vec{e}_1, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2{}' + y_3\vec{e}_3{}' + \dots + y_n\vec{e}_n{}') =$$
$$= y_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + y_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2{}') + y_3(\vec{e}_1, \vec{e}_3{}') + \dots + y_n(\vec{e}_1, \vec{e}_n{}').$$

В последнем равенстве все скалярные произведения, кроме первого, равны нулю, так как базис $< \vec{e}_1, \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \dots, \vec{e}_n{}' >$ ортонормированный. Поэтому

$$y_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y_1 = 0,$$

следовательно,

$$\vec{y} = y_2\vec{e}_2{}' + y_3\vec{e}_3{}' + \dots + y_n\vec{e}_n{}'$$

и $< \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \dots, \vec{e}_n{}' >$ – базис в $\mathbb{E}_1^{\perp}$.

Докажем, что $\forall \vec{y} \in \mathbb{E}_1^{\perp}$ образ этого вектора также принадлежит пространству $\mathbb{E}_1^{\perp}$: $\hat{A}(\vec{y}) \in \mathbb{E}_1^{\perp}$. Рассмотрим

$$\left(\vec{e}_1, \hat{A}(\vec{y})\right) = \left(\hat{A}(\vec{y}), \vec{e}_1\right) = \left(\vec{y}, \hat{A}(\vec{e}_1)\right) = (\vec{y}, \lambda_1\vec{e}_1) = \lambda_1(\vec{e}_1, \vec{y}) = 0,$$

следовательно, $\hat{A}(\vec{y}) \in \mathbb{E}_1^{\perp}$.

Поэтому $\hat{A}$ можно рассматривать как линейный оператор $\hat{A}: \mathbb{E}_1^{\perp} \to \mathbb{E}_1^{\perp}$. Размерность подпространства $\mathbb{E}_1^{\perp}$ есть $n-1$ и по предположению индукции в $\mathbb{E}_1^{\perp}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов самосопряжённого оператора $\hat{A}$. Если этот базис дополнить вектором $\vec{e}_1$, то получим ортонормированный базис всего пространства $\mathbb{E}$, состоящий из собственных векторов самосопряжённого оператора $\hat{A}$.

Следствие для квадратичных форм. Матрица квадратичной формы симметрична $B = B^T$, поэтому квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования (переход к ортонормированному базису из собственных векторов матрицы).

Лекция 16. Обзорная

16.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Неоднородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

СЛАУ с нулевыми правыми частями называется системой линейных однородных алгебраических уравнений. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Замечание. Если $X_{\text{частн}}$ – какое-либо частное решение неоднородной СЛАУ, то $Y = X_{\text{частн}} + X_{\text{одн}}$ – общее решение этой системы уравнений.

Теорема Кронекера-Капелли

1. Для того, чтобы СЛАУ являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы, то есть
$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_B$
2. Для того, чтобы СЛАУ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы и был равен числу неизвестных, то есть
$\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}A_B = n.$
3. Для того, чтобы СЛАУ имела бесконечное множество решений, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу матрицы системы и был меньше числа неизвестных, то есть
$\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}A_B < n.$

Решаем систему методом Гаусса, приводим её к верхнетреугольному или диагональному виду. Минор $r \times r$, стоящий в верхнем левом углу полученной матрицы $\tilde{A}$, называется базисным, а неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$, входящие в базисный минор, называются базисными неизвестными. Остальные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ называются свободными.

Фундаментальная система решений ФСР $= \{E_1, E_2\}$ – базис в пространстве решений M однородной системы уравнений. Размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных
$\operatorname{dim}M = n - r.$

16.2. Линейные операторы. Образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора

Определение. Отображение $\hat{A}: L \to L$ называют линейным оператором, если

1) $\hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2),\ \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L,$

2) $\hat{A}(\lambda \vec{x}) = \lambda \hat{A}(\vec{x}),\ \forall \vec{x} \in L, \forall \lambda \in R.$

Пусть линейный оператор $\hat{A}$ действует в линейном пространстве $\hat{A}: L \to L$ и $E = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ – некоторый базис в L.

Найдём образы базисных векторов

$$\hat{A}(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, \hat{A}(\vec{e}_2) = \vec{f}_2, \dots, \hat{A}(\vec{e}_n) = \vec{f}_n,$$

Разложим полученные векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ по базису и запишем координаты в столбец

$$\hat{A}(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \sim \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(\vec{e}_2) = \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \sim \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$\hat{A}(\vec{e}_n) = \vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n \sim \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из координат $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Эту матицу называют матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе E

Определение. Матрица A называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе E, если её столбцами являются координаты образов базисных векторов.

Определение. Образом (*Image*) линейного оператора $\hat{A}$ называется множество элементов линейного пространства L, имеющих прообраз

$$\mathrm{Im}\hat{A} = \{\vec{y} \in L : \exists \vec{x} \in L : \hat{A}(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Определение. Ядром (*Kernel*) линейного оператора $\hat{A}$ называется множество элементов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}$:

$$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{x} \in L : \hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

Определение. Рангом линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность его образа $\mathrm{rg}\hat{A} = \dim(\mathrm{Im}\hat{A})$.

Определение. Дефектом линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность его ядра $\mathrm{def}\hat{A} = \dim(\mathrm{Ker}\hat{A})$.

16.3. Собственные значения линейного оператора. Линейный оператор простого типа

Определение. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}: L \to L$. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором оператора $\hat{A}$, соотвествующим собственному значению λ

$\hat{A}(\vec{u}\,) = \lambda\vec{u}\,,\ \vec{u}\ \neq \vec{0}$.

Чтобы найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, перейдём к матричной записи. Если A – матрица линейного оператора, то уравнение в матричной форме имеет вид

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \text{ или } A\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{0}.$$

Далее преобразуем это выражение $A\vec{u} - \lambda E\vec{u} = \vec{0}$ или $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$.

Последнее выражение есть однородная система линейных алгебраических уравнений для координат вектора $\vec{u}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет ненулевое решение $\vec{u} \neq \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rg}(A - \lambda E) < n$, что эквивалентно $\det(A - \lambda E) = 0$.

Таким образом, для нахождения собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ решается характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, где A – матрица оператора.

Определение. Многочлен $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом.

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L размерности n, называется оператором простого типа (диагонализируемым), если существует такой базис $<\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n>$, в котором матрица A этого оператора имеет диагональный вид.

Достаточное условие существования оператора простого типа. Если у линейного оператора $\hat{A}$ существует n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то соответствующие им собственные векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ образуют базис в линейном пространстве L и матрица линейного оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. Условие различия собственных значений $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j)$ оператора не является необходимым, чтобы он был оператором простого типа.

16.4. Квадратичные формы. Канонический вид (метод Лагранжа)

Определение. Квадратичной формой на линейном пространстве L называется следующая числовая функция векторного аргумента $\vec{x} \in L$

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{– матрица квадратичной формы,}$$

B – симметричная матрица, то есть $b_{ij} = b_{ji},\ \forall i, j = 1,2,3 \dots, n$.

Определение: Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в линейном пространстве L называется положительно определенной, если для $\forall \vec{x} \in L,\ \vec{x} \neq \vec{0},\ \varphi(\vec{x}) > 0$.

Определение: Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в линейном пространстве L называется отрицательно определенной, если для $\forall \vec{x} \in L,\ \vec{x} \neq \vec{0},\ \varphi(\vec{x}) < 0$.

Теорема. Если квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ положительно определена, то во всяком представлении её в виде

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

все b_{ii} будут положительными, то есть $b_{ii} > 0,\ \forall i = 1,2, \dots, n$.

Критерий Сильвестра

Рассмотрим матрицу квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ и обозначим}$$

$$M_1 = b_{11}, M_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \dots, M_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1k} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}, k = 1,2, \dots n$$

гланые миноры матрицы B.

Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительными.

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы $M_1 < 0;\ M_2 > 0;\ M_3 < 0$ и т.д.

Определение. Квадратичная форма

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2,$$

у которой все коэффициенты при произведениях различных переменных равны нулю, называется квадратичной формой канонического вида.

16.5. Скалярное произведение. Евклидово пространство

Определение: Скалярным произведением векторов из линейного пространства $\mathbb{E}$ называется числовая функция двух векторых аргументов $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to R$, обозначаемая $(\vec{x}, \vec{y})$ и обладающая свойствами:

1). Симметрии $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$.

Линейность по первому аргументу

2). $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{E}$.

3). $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in R$.

4). Положительная определённость $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{E}$,

при этом $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \ \vec{x} = \vec{0}$.

Для базиса $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n>$ в евклидовом пространстве определим матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \ldots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \ldots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix},$$

элементами которой являются скалярные произведения базисных векторов.

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов евклидова пространства модуль их скалярного произведения не превышает произведения их норм (длин)

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$$

Пусть $\mathbb{E}$ - евклидово пространство, рассмотрим произвольную систему векторов

$$\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k\}.$$

Определение. Система векторов называется ортогональной, если $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0, \ \forall\, i \neq j$.

Определение. Система векторов называется ортонормированной, если

$$\forall\, i, j \ \left(\vec{f}_i, \vec{f}_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Утверждение. Если система ненулевых векторов $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k\}$ ортогональна, то система векторов $\left\{\frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}, \ldots, \frac{\vec{f}_k}{\|\vec{f}_k\|}\right\}$ ортонормирована.

Замечание. В ортонормированном базисе матрица Грама является единичной $G = E$.

16.6. Самосопряжённые операторы

<u>Определение.</u> Оператор $\hat{A}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ в евклидовом пространстве называется самосопряженным оператором, если $\hat{A}^* = \hat{A}$, то есть

$$\left(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}(\vec{y})\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}.$$

<u>Теорема.</u> Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметричной $(A^T = A)$. И наоборот, если в некотором ортонормированном базисе матрица линейного оператора симметричная, то этот оператор самосопряженный.

<u>Теорема.</u> Все корни характеристического уравнения самосопряжённого оператора действительные.

<u>Следствие.</u> Если матрица A является симметричной, то все её собственные числа и собственные векторы действительные.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1). Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебник.–Санкт-Петербург: Лань, 2020.-448 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/126146

2). Горлач Б.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебник.–Санкт-Петербург: Лань, 2021.-300 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/99103

3). Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Электронный ресурс]: учебное пособие.–Санкт-Петербург: Лань, 2019.-476 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/114701

Дополнительная литература

1). Лившиц К.И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: Санкт-Петербург: Лань, 2017.-508 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/93697

2). Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс]: учебник.–Санкт-Петербург: Лань, 2019.-476 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/114701

3). Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс]: учебное пособие.–Санкт-Петербург: Лань, 2019.-496 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/122183

4). Карчевский Е.М., Карчевский М.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебное пособие.–Санкт-Петербург: Лань, 2018.-424 с.–Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/109505