4.12. Что является базисом линейной оболочки системы векторов и какова ее размерность?

4.13. Привести пример одномерного и двухмерного подпространств в пространстве: а) R^3 ; б) M_{23} ; в) P_3.

Типовой расчет №2

Теоретические упражнения

1. Доказать утверждения о связи решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений:

а) разность двух решений неоднородной системы является решением однородной системы;

б) сумма решений неоднородной и однородной систем является решением неоднородной системы;

в) общее решение неоднородной системы имеет вид $X = X_0 + X_ч$, где $X_ч$ – частное решение неоднородной системы, X_0 – общее решение однородной системы;

г*) каков геометрический смысл последнего утверждения для системы уравнений с тремя неизвестными?

2. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, причем единственный, многочлен $y = f(x)$ степени не больше 2, для которого $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена меньше 2, равна 1, равна 0?

3. Пусть A – прямоугольная матрица. Докажите, что $r(A)=1 \Leftrightarrow A = B\cdot C$, где B – вектор-столбец, C – вектор-строка ($r(A)$ – ранг матрицы A; B, C ненулевые).

4. Пусть A – прямоугольная матрица. Докажите, что всякое элементарное преобразование строк матрицы A можно представить в виде умножения матрицы A слева на некоторую матрицу X, а всякое элементарное преобразование столбцов матрицы A – в виде умножения матрицы A справа на некоторую матрицу Y.

5. Действие оператора $\hat{A}$ в n-мерном пространстве задается формулой преобразования координат векторов в некотором базисе:

$$\overline{y} = \hat{A}\overline{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\hat{A}$ – линейный оператор и найти его матрицу в этом базисе.

№вар.	Квадратичная форма
16	$-\frac{1}{2}x_1^2+5x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3$
17	$-3x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$
18	$-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$
19	$2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3$
20	$-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$
21	$10x_1^2+14x_2^2+7x_3^2-10x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_3-5\sqrt{2}x_2x_3$
22	$\frac{3}{2}x_1^2-5x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3-4x_2x_3$
23	$x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$
24	$2x_2^2-3x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2-4x_1x_3+4\sqrt{3}x_2x_3$
25	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
26	$x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$
27	$5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$
28	$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\frac{2}{3}x_1x_2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
29	$5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3$
30	$-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

№ вар.	11, 18	12, 19	13, 20	14, 21	15, 22
$\vec{e}_1$	1 0 −1	2 −1 0	1 0 2	−1 1 0	1 1 −1
$\vec{e}_2$	2 1 1	1 1 1	1 1 1	−2 1 1	1 1 1
$\vec{e}_3$	1 1 0	−1 0 1	−1 2 0	1 0 1	2 1 0

Задача 8. Задана квадратичная форма. а). Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, записав соответствующее преобразование переменных; б). Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием; в). Проверить закон инерции квадратичной формы на примерах преобразований, полученных в пунктах а), б).

№вар.	Квадратичная форма
1	$4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
2	$-2x_2x_3$
3	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
4	$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$
5	$-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
6	$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
7	$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
8	$3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$
9	$-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$
10	$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$
11	$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
12	$3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
13	$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$
14	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
15	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$

№ вар.	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	$\hat{A}$	B
11, 26	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
12, 27	$x + y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
13, 28	$x + y + 2u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1}XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
14, 29	$x + y + 2u - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
15, 30	$x + y - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 7. В пространстве V^3 геометрических векторов с обычным скалярным произведением векторы базиса $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ заданы координатами в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

а). Найдите матрицу Грама G_S скалярного произведения в этом базисе. Выпишите формулу для длины вектора через его координаты в базисе S.

б). Ортогонализуйте базис S. Сделайте проверку ортонормированности построенного базиса P двумя способами:

1. Выписав координаты векторов из P в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;
2. Убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S к базису P (по формуле $G_P = C^T \cdot G_S \cdot C$) приводит к единичной матрице.

№ вар.	1, 23	2, 24	3, 25	4, 26	5, 27
$\vec{e}_1$	1 −1 1	1 0 1	1 −1 0	1 0 2	0 −1 2
$\vec{e}_2$	2 1 0	1 1 −1	1 1 1	2 1 1	1 1 −1
$\vec{e}_3$	0 1 1	2 −1 0	1 0 2	1 1 0	2 0 1

№ вар.	6, 28	7, 29	8, 30	9, 16	10, 17
$\vec{e}_1$	1 1 −1	2 0 1	−1 1 1	2 0 1	1 1 0
$\vec{e}_2$	2 0 1	1 1 −1	1 1 −1	1 1 1	2 0 1
$\vec{e}_3$	1 1 2	1 2 1	2 0 1	−2 0 1	1 1 1

Задача 6. Оператор $\hat{A}$ действует на матрицы, образующие линейное подпространство M в пространстве матриц второго порядка.

а). Доказать, что $\hat{A}$ – линейный оператор в M.

б). Найти матрицу A оператора $\hat{A}$ в каком-нибудь базисе пространства M.

в). Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$ (напомним, что в этой задаче векторами являются матрицы).

г). Доказать, что $\hat{A}$ – оператор простого типа, описать его действие в собственном базисе.

№ вар.	$M=\left\{X=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\right\}$	$\hat{A}$	B
1, 16	$y=u$	$\hat{A}(X)=B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2, 17	$y=u$	$\hat{A}(X)=B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3, 18	$x+v=0$	$\hat{A}(X)=BX-XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4, 19	$x+v=0$	$\hat{A}(X)=BX-XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5, 20	$x+y+u+v=0$	$\hat{A}(X)=B^{-1}XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6, 21	$x-y+u+v=0$	$\hat{A}(X)=B^{-1}XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7, 22	$x+y-u-v=0$	$\hat{A}(X)=BX+XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
8, 23	$x-2y-u-v=0$	$\hat{A}(X)=BX+XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
9, 24	$y=u$	$\hat{A}(X)=B^T XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10, 25	$y=u$	$\hat{A}(X)=B^T XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11, 16	проектирование на ось $x = 2y = 2z$
12, 17	проектирование на плоскость $-x + y + z = 0$
13, 18	отражение относительно плоскости $-x + y + z = 0$
14, 19	поворот на 180° вокруг оси $x = -y = z$
15, 20	проектирование на плоскость $x + y - z = 0$

Задача 4. а). Доказать, что оператор $\hat{A}$ является линейным оператором в пространстве P_n многочленов степени не выше n.

б). Найти его матрицу в каноническом базисе.

в). Существует ли обратный оператор? Если да, найдите его матрицу.

г). Опишите ядро оператора $\hat{A}$, т. е. множество $Ker\hat{A} = \{p(t) \in P_n : (\hat{A}p)(t) \equiv 0\}$.

№ вар.	n	$(\hat{A}p)(t)$	№ вар.	n	$(\hat{A}p)(t)$
1, 22	2	$\frac{d}{dt}[(t+1)p(t)]$	9, 30	2	$(t+1)p(t+1) - tp(t)$
2, 23	2	$\frac{d}{dt}[tp(t+1)]$	10, 16	2	$\frac{d}{dt}[(t-2)p(t)]$
3, 24	3	$(t+1)\frac{dp(t)}{dt}$	11, 17	3	$\frac{d}{dt}\left[t\frac{dp(t)}{dt}\right]$
4, 25	3	$t\frac{dp(t+1)}{dt}$	12, 18	2	$\frac{d}{dt}[tp(t-2)]$
5, 26	3	$p(t) - p(t+2)$	13, 19	3	$t\frac{dp(t)}{dt} - p(t+1)$
6, 27	3	$3tp(t) - t^2\frac{dp(t)}{dt}$	14, 20	2	$(t-2)p(t-2) - tp(t)$
7, 28	2	$\frac{d}{dt}[tp(t)] + \frac{d^2p(t)}{dt^2}$	15, 21	2	$(2t+1)p(t) + t(1-t)\frac{dp(t)}{dt}$
8, 29	3	$6tp(t) - t^3\cdot\frac{d^2p(t)}{dt^2}$			

Задача 5. Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ из задачи 1 в каноническом базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\hat{A}$.

23	$x_1+4x_2-17x_3+x_4=3\lambda+2$ $5x_1+6x_2-15x_3-9x_4=15\lambda-4$ $-7x_1-5x_2+\lambda x_3+16x_4=-18\lambda-3$ $x_1-x_2+8x_3+\lambda x_4=2\lambda-7$	24	$3x_1+2x_2+16x_3+11x_4=-3\lambda-6$ $-4x_1-x_2-13x_3+\lambda x_4=6\lambda+19$ $-7x_1+2x_2+\lambda x_3+21x_4=5\lambda+26$ $-3x_1+x_2-x_3+10x_4=3\lambda+15$
25	$2x_1+3x_2+3x_3+14x_4=4\lambda-8$ $3x_1-x_2-23x_3+\lambda x_4=7\lambda$ $3x_1+x_2-13x_3+7x_4=6\lambda-5$ $4x_1+5x_2+\lambda x_3+24x_4=11\lambda-17$	26	$-x_1+3x_2+19x_3-13x_4=\lambda-9$ $2x_1+x_2+\lambda x_3+12x_4=-3\lambda+8$ $x_1+5x_2+21x_3+\lambda x_4=\lambda+7$ $3x_1-2x_2-22x_3+25x_4=-3\lambda+20$
27	$5x_1+3x_2-x_3+4x_4=15\lambda+1$ $-3x_1-2x_2+\lambda x_3-3x_4=-11\lambda-4$ $-4x_1-x_2+12x_3+x_4=-12\lambda+9$ $-2x_1-x_2+2x_3+\lambda x_4=-3\lambda+4$	28	$16x_1-3x_2-8x_3+\lambda x_4=-12\lambda+15$ $-6x_1+x_2+\lambda x_3=5\lambda-7$ $-x_1+2x_2+15x_3-11x_4=\lambda+4$ $-5x_1+4x_2+27x_3-19x_4=5\lambda+2$
29	$3x_1+2x_2+30x_3+\lambda x_4=5\lambda+6$ $5x_1-2x_2+2x_3+19x_4=10\lambda-25$ $-x_1+x_2+\lambda x_3-5x_4=-3\lambda+13$ $4x_1-x_2+7x_3+14x_4=8\lambda-17$	30	$-3x_1+5x_2-12x_3+\lambda x_4=9\lambda-12$ $-x_1+2x_2-5x_3+5x_4=4\lambda-13$ $3x_1-2x_2+3x_3+17x_4=-12\lambda+15$ $2x_1-3x_2+\lambda x_3-2x_4=-4\lambda-8$

Задача 3. Линейный оператор $\hat{A}:V^3\to V^3$ определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.

а). Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в подходящем базисе пространства V^3, а затем в каноническом базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$; б). В какую точку трехмерного пространства переходит точка с координатами (1, 0, 0) под действием отображения α?

№ вар.	Отображение α
1, 21	отражение относительно плоскости $x+y+z=0$
2, 22	поворот на 180° вокруг оси $x=y=z$
3, 23	проектирование на ось $x=y/2=z$
4, 24	проектирование на плоскость $x+y+z=0$
5, 25	отражение относительно плоскости $x+y-z=0$
6, 26	поворот на 180° вокруг оси $x=y=-z$
7, 27	проектирование на ось $2x=2y=-z$
8, 28	проектирование на плоскость $x-y+z=0$
9, 29	отражение относительно плоскости $x-y+z=0$
10, 30	поворот на 180° вокруг оси $-x=y=z$

5	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases}$
7	$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} (\lambda+1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda \\ x_1 + (\lambda+1)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ (\lambda+3)x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda \\ (\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3\lambda x_1 + (2\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda \\ (2\lambda-1)x_1 + (2\lambda-1)x_2 + (\lambda-2)x_3 = \lambda+1 \\ (4\lambda-1)x_1 + 3\lambda x_2 + 2\lambda x_3 = 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} (5\lambda+1)x_1 + 2\lambda x_2 + (4\lambda+1)x_3 = 1+\lambda \\ (4\lambda-1)x_1 + (\lambda-1)x_2 + (4\lambda-1)x_3 = -1 \\ 2(3\lambda+1)x_1 + 2\lambda x_2 + (5\lambda+2)x_3 = 2-\lambda \end{cases}$
15	$\begin{cases} (2\lambda+1)x_1 - \lambda x_2 - (\lambda+1)x_3 = 2\lambda \\ 3\lambda x_1 - (2\lambda-1)x_2 - (3\lambda-1)x_3 = \lambda+1 \\ (\lambda+2)x_1 - x_2 - 2\lambda x_3 = 2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 3\lambda + 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 - 2x_4 = -\lambda + 12 \\ -7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 17x_4 = -7\lambda - 13 \\ -5x_1 - x_2 + 11x_3 - 19x_4 = -5\lambda - 7 \end{cases}$
17	$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 4\lambda - 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 17x_4 = 2\lambda - 5 \\ 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 - 5x_4 = -4\lambda - 7 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -3\lambda + 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 28x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda + 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 17x_3 + 29x_4 = 15\lambda + 18 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 10x_4 = -3\lambda - 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 + 37x_4 = 8\lambda + 21 \end{cases}$
19	$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + \lambda x_3 - 11x_4 = -8\lambda + 22 \\ -x_1 + 2x_2 + 12x_3 + \lambda x_4 = -2\lambda + 4 \\ 7x_1 - 2x_2 + 13x_4 = 14\lambda - 23 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 6\lambda - 10 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 - 5x_4 = 4\lambda - 4 \\ x_1 + 7x_2 - 17x_3 + 15x_4 = -3\lambda - 3 \\ -4x_1 + x_2 - 19x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda - 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -6\lambda + 5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 + 3x_4 = 3\lambda - 4 \\ -x_1 + 4x_2 - 23x_3 - 10x_4 = -\lambda - 7 \\ -3x_1 + 2x_2 - 29x_3 - 20x_4 = -3\lambda + 9 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = -2\lambda + 7 \end{cases}$	22	$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2\lambda + 25 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 13x_4 = -10\lambda + 1 \\ -5x_1 - 2x_2 - 16x_3 + \lambda x_4 = 11\lambda - 32 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 6x_4 = -6\lambda + 1 \end{cases}$

7, 26	$3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0$ $5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0$ $4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0$ $7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0$	8, 27	$3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0$ $2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$ $x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0$ $5x_1-x_2-11x_3-3x_4+3x_5=0$
9, 28	$7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0$ $x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0$ $2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0$ $5x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0$	10, 29	$x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0$ $5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0$ $3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0$ $6x_1+18x_3-x_4+x_5=0$
11, 30	$6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0$ $-4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0$ $2x_1+3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0$	12, 16	$2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0$ $x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0$ $4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0$ $3x_1+9x_2-x_3-3x_4=0$
13, 17	$x_1+x_2-3x_4-x_5=0$ $x_1-x_2+2x_3-x_4=0$ $4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0$ $2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0$	14, 18	$x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0$ $2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0$ $3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0$ $2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0$
15, 19	$x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0$ $2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0$ $x_1+x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0$ $3x_1-7x_2-2x_3+x_4-x_5=0$		

Задача 2*. Найти общее решение в зависимости от значения параметра λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы?

№ вар.	Система уравнений	№ вар.	Система уравнений
1	$5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3$ $4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1$ $8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9$ $7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda$	2	$3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3$ $2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5$ $x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11$ $4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2$
3	$2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2$ $4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4$ $4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4$ $2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7$	4	$\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1$ $x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1$ $x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1$ $x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1$

16. Доказать, что в евклидовом пространстве справедливо неравенство треугольника: $\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$. Когда оно превращается в равенство?

17*. Доказать, что если $\hat{A}$ – линейный оператор в n-мерном пространстве, имеющий n различных собственных значений, и $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то $\hat{B}$ обладает базисом из собственных векторов.

18*. Пусть линейный оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 - \hat{A} + \hat{I} = \hat{0}$. Доказать, что $\hat{A}$ обратим, и выразить $\hat{A}^{-1}$ через $\hat{A}$.

19*. Пусть C – невырожденная матрица. Доказать, что квадратичная форма, заданная в некотором базисе матрицей $B = C^{\mathrm{T}}C$ (см. упр.10), положительно определена.

20*. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – линейные операторы в конечномерном пространстве L такие, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$. Доказать, что $\hat{A}$ обратим, и найти $\hat{A}^{-1}$. (Указание: вопрос сводится к аналогичному вопросу для квадратных матриц.) Верно ли аналогичное утверждение в бесконечномерном пространстве?

Практические задания

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для однородной системы уравнений.

№ вар.	Система уравнений	№ вар.	Система уравнений
1, 20	$x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0$ $3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0$ $4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0$ $3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0$	2, 21	$2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0$ $3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0$ $4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0$ $5x_1-10x_2+9x_3+5x_4=0$
3, 22	$3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0$ $6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0$ $9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0$ $3x_1+2x_2+4x_3+8x_4+8x_5=0$	4, 23	$6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0$ $9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0$ $6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0$ $3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0$
5, 24	$x_1-x_3+x_5=0$ $x_2-x_4+x_6=0$ $x_1-x_2+x_5-x_6=0$ $x_1-x_4+x_5=0$	6, 25	$5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0$ $2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0$ $7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0$ $5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0$

6. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор. Доказать, что если $\{\overline{x}_1,...,\overline{x}_n\}$ – линейно зависимая система, то система $\{\hat{A}\overline{x}_1,...,\hat{A}\overline{x}_n\}$ тоже линейно зависима. Верно ли обратное?

7. Доказать, что матрицы оператора в двух разных базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица оператора в одном базисе перестановочна с матрицей перехода от этого базиса ко второму.

8. Является ли оператор дифференцирования невырожденным в линейном пространстве L: а) $L = P_n$; б) $L = L[\cos t, \sin t]$?

9*. В пространстве всех многочленов заданы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1};$$

$$\hat{B}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_0 t + a_1 t^2 + \cdots + a_n t^{n+1}.$$

Доказать линейность операторов и проверить, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$, $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{I}$.

10. Пусть $\overline{x}, \overline{y}$ -- собственные векторы оператора $\hat{A}$, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

11. Матрица A удовлетворяет условию $A^2 = I$. Докажите, что всякая подобная ей матрица обладает тем же свойством. Что можно сказать о собственных числах матрицы A? Приведите пример такой недиагональной матрицы.

12. Ненулевая матрица A удовлетворяет условию $A^2 = 0$. Показать, что любая подобная ей матрица удовлетворяет этому условию. Диагонализуема ли матрица A? Каковы ее собственные значения? Привести пример такой матрицы.

13. Функция $B(\overline{x}, \overline{y})$ задается через координаты векторов в некотором базисе n-мерного пространства по формуле:

$$B(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1, ..., x_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $B(\overline{x}, \overline{y})$ – билинейная форма; найти ее матрицу в этом базисе.

14. Доказать, что симметричная билинейная форма $B(\overline{x}, \overline{y})$ однозначно восстанавливается по порожденной ею квадратичной форме $\varphi(\overline{x})$ по формуле: $B(\overline{x}, \overline{y}) = [\varphi(\overline{x} + \overline{y}) - \varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{y})]/2$.

15. Доказать, что если ненулевые векторы евклидова пространства $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.