Типовой рассчёт № 4 · Вариант № 5

а) $A[p(t)] = p(t) - p(t+2)$

Д-ем, что это линейный оператор

$A[p(t)] = (at^3 + bt^2 + ct + d) - (e(t+2)^3 +$
$+ f(t+2)^2 + g(t+2) + h) =$
$= at^3 - e(t+2)^3 + bt^2 - f(t+2)^2 + ct - g(t+2) + d - h \in P_3$

Д-ем выполнение лин. свойств:

1) $A[p_1(t) + p_2(t)] = (p_1(t) + p_2(t)) -$
$- (p_1(t+2) + p_2(t+2)) = p_1(t) - p_1(t+2) +$
$+ p_2(t) - p_2(t+2) = A[p_1(t)] + A[p_2(t)]$

2) $A[\lambda p(t)] = \lambda p(t) - \lambda p(t+2) = \lambda(p(t) -$
$- p(t+2)) = \lambda A[p(t)]$

б) A в каноническом базисе $P_3$

$E = \{t^3, t^2, t, 1\}$

$A[1] = 1 - 3 = -2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A[p(t)] = t - (t+2) = 2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A[p^2(t)] = t^2 - (t^2+2)^2 = t^2 - t^2 - 4t + 4 = -4t + 4 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A[p^3(t)] = t^3 - (t+2)^3 = t^3 - t^3 - 6t^2 - 12t - 8 =$$

$$= -6t^2 - 12t - 8 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ -2 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

в) $A^{-1}$ не существует, т.к $\det A = 0$

г). найдём ядро оператора $A$:

$$\ker A = \{ p(t) \in P_3 : A[p(t)] = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ -2 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x_1 = 0 \\ -4x_2 - 12x_1 = 0 \\ -2x_4 + 2x_3 + 4x_2 - 8x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 = t \; ; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim t$$

$$\Rightarrow \ker A = \{ p(t) = t, t \in \mathbb{R}$$