

4.12. Что является базисом линейной оболочки системы векторов и какова ее размерность?

4.13. Привести пример одномерного и двумерного подпространств в пространстве: а) R^3 ; б) M_{23} ; в) P_3 .

Типовой расчет №2

Теоретические упражнения

1. Доказать утверждения о связи решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений:

а) разность двух решений неоднородной системы является решением однородной системы;

б) сумма решений неоднородной и однородной систем является решением неоднородной системы;

в) общее решение неоднородной системы имеет вид $X = X_0 + X_{\text{ч}}$, где $X_{\text{ч}}$ — частное решение неоднородной системы, X_0 — общее решение однородной системы;

г*) каков геометрический смысл последнего утверждения для системы уравнений с тремя неизвестными?

2. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, причем единственный, многочлен $y = f(x)$ степени не больше 2, для которого $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена меньше 2, равна 1, равна 0?

3. Пусть A — прямоугольная матрица. Докажите, что $\text{r}(A)=1 \Leftrightarrow A = B \cdot C$, где B — вектор-столбец, C — вектор-строка ($\text{r}(A)$ — ранг матрицы A ; B, C ненулевые).

4. Пусть A — прямоугольная матрица. Докажите, что всякое элементарное преобразование строк матрицы A можно представить в виде умножения матрицы A слева на некоторую матрицу X , а всякое элементарное преобразование столбцов матрицы A — в виде умножения матрицы A справа на некоторую матрицу Y .

5. Действие оператора \hat{A} в n -мерном пространстве задается формулой преобразования координат векторов в некотором базисе:

$$\bar{y} = \hat{A}\bar{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что \hat{A} — линейный оператор и найти его матрицу в этом базисе.

6. Пусть \hat{A} — линейный оператор. Доказать, что если $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ — линейно зависимая система, то система $\{\hat{A}\bar{x}_1, \dots, \hat{A}\bar{x}_n\}$ тоже линейно зависима. Верно ли обратное?

7. Доказать, что матрицы оператора в двух разных базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица оператора в одном базисе перестановочна с матрицей перехода от этого базиса ко второму.

8. Является ли оператор дифференцирования невырожденным в линейном пространстве L : а) $L = P_n$; б) $L = L[\cos t, \sin t]$?

9*. В пространстве всех многочленов заданы операторы \hat{A} и \hat{B} :

$$\hat{A}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1};$$

$$\hat{B}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^{n+1}.$$

Доказать линейность операторов и проверить, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$, $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{I}$.

10. Пусть \bar{x}, \bar{y} — собственные векторы оператора \hat{A} , отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

11. Матрица A удовлетворяет условию $A^2 = I$. Докажите, что всякая подобная ей матрица обладает тем же свойством. Что можно сказать о собственных числах матрицы A ? Приведите пример такой недиагональной матрицы.

12. Ненулевая матрица A удовлетворяет условию $A^2 = 0$. Показать, что любая подобная ей матрица удовлетворяет этому условию. Диагонализуема ли матрица A ? Каковы ее собственные значения? Привести пример такой матрицы.

13. Функция $B(\bar{x}, \bar{y})$ задается через координаты векторов в некотором базисе n -мерного пространства по формуле:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $B(\bar{x}, \bar{y})$ — билинейная форма; найти ее матрицу в этом базисе.

14. Доказать, что симметричная билинейная форма $B(\bar{x}, \bar{y})$ однозначно восстанавливается по порожденной ею квадратичной форме $\varphi(\bar{x})$ по формуле:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = [\varphi(\bar{x} + \bar{y}) - \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})]/2.$$

15. Доказать, что если ненулевые векторы евклидова пространства $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

16. Доказать, что в евклидовом пространстве справедливо неравенство треугольника: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$. Когда оно превращается в равенство?

17*. Доказать, что если \hat{A} — линейный оператор в n -мерном пространстве, имеющий n различных собственных значений, и $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то \hat{B} обладает базисом из собственных векторов.

18*. Пусть линейный оператор \hat{A} удовлетворяет условию $\hat{A}^2 - \hat{A} + \hat{I} = \hat{O}$. Доказать, что \hat{A} обратим, и выразить \hat{A}^{-1} через \hat{A} .

19*. Пусть C — невырожденная матрица. Доказать, что квадратичная форма, заданная в некотором базисе матрицей $B = C^T C$ (см. упр. 10), положительно определена.

20*. Пусть \hat{A} и \hat{B} — линейные операторы в конечномерном пространстве L такие, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$. Доказать, что \hat{A} обратим, и найти \hat{A}^{-1} . (Указание: вопрос сводится к аналогичному вопросу для квадратных матриц.) Верно ли аналогичное утверждение в бесконечномерном пространстве?

Практические задания

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для однородной системы уравнений.

№ вар.	Система уравнений	№ вар.	Система уравнений
1, 20	$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$ $3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0$ $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$ $3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0$	2, 21	$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$ $3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$ $4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$ $5x_1 - 10x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0$
3, 22	$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0$ $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0$ $9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0$ $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 = 0$	4, 23	$6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0$ $9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0$ $6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0$ $3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0$
5, 24	$x_1 - x_3 + x_5 = 0$ $x_2 - x_4 + x_6 = 0$ $x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0$ $x_1 - x_4 + x_5 = 0$	6, 25	$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0$ $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0$ $7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0$ $5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0$

7, 26	$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ $5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$ $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$ $7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0$	8, 27	$3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$ $2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0$ $x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0$ $5x_1 - x_2 - 11x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0$
9, 28	$7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$ $x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$ $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$ $5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$	10, 29	$x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0$ $5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$ $3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0$ $6x_1 + 18x_3 - x_4 + x_5 = 0$
11, 30	$6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0$ $-4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0$ $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0$	12, 16	$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ $4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0$ $3x_1 + 9x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$
13, 17	$x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0$ $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0$	14, 18	$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0$ $3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$ $2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$
15, 19	$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0$ $3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0$		

Задача 2*. Найти общее решение в зависимости от значения параметра λ . При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы?

№ вар.	Система уравнений	№ вар.	Система уравнений
1	$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$ $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1$ $8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$ $7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda$	2	$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3$ $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5$ $x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11$ $4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2$
3	$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$ $4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4$ $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7$	4	$\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1$

5	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ $4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$ $6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9$ $\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11$	6	$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ $6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$ $8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9$
7	$(1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda$ $x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2$	8	$(\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda$ $x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2$ $x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3$
9	$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$ $x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$	10	$(1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 1$
11	$\lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda$ $(\lambda + 3)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 2\lambda$ $3(\lambda + 1)x_1 + (\lambda + 1)x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 3$	12	$\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda$ $\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda - 1)x_3 = \lambda$ $(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 3)x_3 = 1$
13	$3\lambda x_1 + (2\lambda + 1)x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda$ $(2\lambda - 1)x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 = \lambda + 1$ $(4\lambda - 1)x_1 + 3\lambda x_2 + 2\lambda x_3 = 1$	14	$(5\lambda + 1)x_1 + 2\lambda x_2 + (4\lambda + 1)x_3 = 1 + \lambda$ $(4\lambda - 1)x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (4\lambda - 1)x_3 = -1$ $2(3\lambda + 1)x_1 + 2\lambda x_2 + (5\lambda + 2)x_3 = 2 - \lambda$
15	$(2\lambda + 1)x_1 - \lambda x_2 - (\lambda + 1)x_3 = 2\lambda$ $3\lambda x_1 - (2\lambda - 1)x_2 - (3\lambda - 1)x_3 = \lambda + 1$ $(\lambda + 2)x_1 - x_2 - 2\lambda x_3 = 2$	16	$3x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 3\lambda + 8$ $2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 - 2x_4 = -\lambda + 12$ $-7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 17x_4 = -7\lambda - 13$ $-5x_1 - x_2 + 11x_3 - 19x_4 = -5\lambda - 7$
17	$-4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 4\lambda - 1$ $-2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 17x_4 = 2\lambda - 5$ $2x_1 + x_2 + \lambda x_3 - 5x_4 = -4\lambda - 7$ $3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -3\lambda + 2$	18	$4x_1 + 2x_2 + 28x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda + 3$ $5x_1 - 2x_2 + 17x_3 + 29x_4 = 15\lambda + 18$ $-x_1 + x_2 - x_3 - 10x_4 = -3\lambda - 6$ $3x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 + 37x_4 = 8\lambda + 21$
19	$-5x_1 + x_2 + \lambda x_3 - 11x_4 = -8\lambda + 22$ $-x_1 + 2x_2 + 12x_3 + \lambda x_4 = -2\lambda + 4$ $7x_1 - 2x_2 + 13x_4 = 14\lambda - 23$ $3x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 6\lambda - 10$	20	$-x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 - 5x_4 = 4\lambda - 4$ $x_1 + 7x_2 - 17x_3 + 15x_4 = -3\lambda - 3$ $-4x_1 + x_2 - 19x_3 + \lambda x_4 = 12\lambda - 12$ $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -6\lambda + 5$
21	$x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 + 3x_4 = 3\lambda - 4$ $-x_1 + 4x_2 - 23x_3 - 10x_4 = -\lambda - 7$ $-3x_1 + 2x_2 - 29x_3 - 20x_4 = -3\lambda + 9$ $-x_1 - 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = -2\lambda + 7$	22	$-x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2\lambda + 25$ $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 13x_4 = -10\lambda + 1$ $-5x_1 - 2x_2 - 16x_3 + \lambda x_4 = 11\lambda - 32$ $2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 6x_4 = -6\lambda + 1$

23	$x_1 + 4x_2 - 17x_3 + x_4 = 3\lambda + 2$ $5x_1 + 6x_2 - 15x_3 - 9x_4 = 15\lambda - 4$ $-7x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 + 16x_4 = -18\lambda - 3$ $x_1 - x_2 + 8x_3 + \lambda x_4 = 2\lambda - 7$	24	$3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 11x_4 = -3\lambda - 6$ $-4x_1 - x_2 - 13x_3 + \lambda x_4 = 6\lambda + 19$ $-7x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 + 21x_4 = 5\lambda + 26$ $-3x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4 = 3\lambda + 15$
25	$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 4\lambda - 8$ $3x_1 - x_2 - 23x_3 + \lambda x_4 = 7\lambda$ $3x_1 + x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 6\lambda - 5$ $4x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 + 24x_4 = 11\lambda - 17$	26	$-x_1 + 3x_2 + 19x_3 - 13x_4 = \lambda - 9$ $2x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 12x_4 = -3\lambda + 8$ $x_1 + 5x_2 + 21x_3 + \lambda x_4 = \lambda + 7$ $3x_1 - 2x_2 - 22x_3 + 25x_4 = -3\lambda + 20$
27	$5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 15\lambda + 1$ $-3x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 - 3x_4 = -11\lambda - 4$ $-4x_1 - x_2 + 12x_3 + x_4 = -12\lambda + 9$ $-2x_1 - x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = -3\lambda + 4$	28	$16x_1 - 3x_2 - 8x_3 + \lambda x_4 = -12\lambda + 15$ $-6x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 5\lambda - 7$ $-x_1 + 2x_2 + 15x_3 - 11x_4 = \lambda + 4$ $-5x_1 + 4x_2 + 27x_3 - 19x_4 = 5\lambda + 2$
29	$3x_1 + 2x_2 + 30x_3 + \lambda x_4 = 5\lambda + 6$ $5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 19x_4 = 10\lambda - 25$ $-x_1 + x_2 + \lambda x_3 - 5x_4 = -3\lambda + 13$ $4x_1 - x_2 + 7x_3 + 14x_4 = 8\lambda - 17$	30	$-3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + \lambda x_4 = 9\lambda - 12$ $-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 4\lambda - 13$ $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = -12\lambda + 15$ $2x_1 - 3x_2 + \lambda x_3 - 2x_4 = -4\lambda - 8$

Задача 3. Линейный оператор $\hat{A}: V^3 \rightarrow V^3$ определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.

а). Найти матрицу оператора \hat{A} в подходящем базисе пространства V^3 , а затем в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; б). В какую точку трехмерного пространства переходит точка с координатами $(1, 0, 0)$ под действием отображения α ?

№ вар.	Отображение α
1, 21	отражение относительно плоскости $x + y + z = 0$
2, 22	поворот на 180° вокруг оси $x = y = z$
3, 23	проектирование на ось $x = y/2 = z$
4, 24	проектирование на плоскость $x + y + z = 0$
5, 25	отражение относительно плоскости $x + y - z = 0$
6, 26	поворот на 180° вокруг оси $x = y = -z$
7, 27	проектирование на ось $2x = 2y = -z$
8, 28	проектирование на плоскость $x - y + z = 0$
9, 29	отражение относительно плоскости $x - y + z = 0$
10, 30	поворот на 180° вокруг оси $-x = y = z$

11, 16	проектирование на ось $x = 2y = 2z$
12, 17	проектирование на плоскость $-x + y + z = 0$
13, 18	отражение относительно плоскости $-x + y + z = 0$
14, 19	поворот на 180° вокруг оси $x = -y = z$
15, 20	проектирование на плоскость $x + y - z = 0$

Задача 4. а). Доказать, что оператор \hat{A} является линейным оператором в пространстве P_n многочленов степени не выше n .

б). Найти его матрицу в каноническом базисе.

в). Существует ли обратный оператор? Если да, найдите его матрицу.

г). Опишите ядро оператора \hat{A} , т. е. множество $\text{Ker} \hat{A} = \{p(t) \in P_n : (\hat{A}p)(t) \equiv 0\}$.

№ вар.	n	$(\hat{A}p)(t)$	№ вар.	n	$(\hat{A}p)(t)$
1, 22	2	$\frac{d}{dt}[(t+1)p(t)]$	9, 30	2	$(t+1)p(t+1) - tp(t)$
2, 23	2	$\frac{d}{dt}[tp(t+1)]$	10, 16	2	$\frac{d}{dt}[(t-2)p(t)]$
3, 24	3	$(t+1)\frac{dp(t)}{dt}$	11, 17	3	$\frac{d}{dt}\left[t\frac{dp(t)}{dt}\right]$
4, 25	3	$t\frac{dp(t+1)}{dt}$	12, 18	2	$\frac{d}{dt}[tp(t-2)]$
5, 26	3	$p(t) - p(t+2)$	13, 19	3	$t\frac{dp(t)}{dt} - p(t+1)$
6, 27	3	$3tp(t) - t^2\frac{dp(t)}{dt}$	14, 20	2	$(t-2)p(t-2) - tp(t)$
7, 28	2	$\frac{d}{dt}[tp(t)] + \frac{d^2p(t)}{dt^2}$	15, 21	2	$(2t+1)p(t) + t(1-t)\frac{dp(t)}{dt}$
8, 29	3	$6tp(t) - t^3\frac{d^2p(t)}{dt^2}$			

Задача 5. Пусть A – матрица оператора \hat{A} из задачи 1 в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A . Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора \hat{A} .

Задача 6. Оператор \hat{A} действует на матрицы, образующие линейное подпространство M в пространстве матриц второго порядка.

а). Доказать, что \hat{A} – линейный оператор в M .

б). Найти матрицу A оператора \hat{A} в каком-нибудь базисе пространства M .

в). Найти собственные значения и собственные векторы оператора \hat{A} (напомним, что в этой задаче векторами являются матрицы).

г). Доказать, что \hat{A} – оператор простого типа, описать его действие в собственном базисе.

№ вар.	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	\hat{A}	B
1, 16	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2, 17	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3, 18	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = B X - X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4, 19	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = B X - X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5, 20	$x + y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1} X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6, 21	$x - y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1} X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7, 22	$x + y - u - v = 0$	$\hat{A}(X) = B X + X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
8, 23	$x - 2y - u - v = 0$	$\hat{A}(X) = B X + X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
9, 24	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10, 25	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

№ вар.	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	\hat{A}	B
11, 26	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
12, 27	$x + y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
13, 28	$x + y + 2u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1}XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
14, 29	$x + y + 2u - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
15, 30	$x + y - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 7. В пространстве V^3 геометрических векторов с обычным скалярным произведением векторы базиса $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ заданы координатами в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

- Найдите матрицу Грама G_S скалярного произведения в этом базисе. Выпишите формулу для длины вектора через его координаты в базисе S .
- Ортогонализируйте базис S . Сделайте проверку ортонормированности построенного базиса P двумя способами:
 - Выписав координаты векторов из P в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;
 - Убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S к базису P (по формуле $G_P = C^T \cdot G_S \cdot C$) приводит к единичной матрице.

№ вар.	1, 23	2, 24	3, 25	4, 26	5, 27
\vec{e}_1	1 -1 1	1 0 1	1 -1 0	1 0 2	0 -1 2
\vec{e}_2	2 1 0	1 1 -1	1 1 1	2 1 1	1 1 -1
\vec{e}_3	0 1 1	2 -1 0	1 0 2	1 1 0	2 0 1

№ вар.	6, 28	7, 29	8, 30	9, 16	10, 17
\vec{e}_1	1 1 -1	2 0 1	-1 1 1	2 0 1	1 1 0
\vec{e}_2	2 0 1	1 1 -1	1 1 -1	1 1 1	2 0 1
\vec{e}_3	1 1 2	1 2 1	2 0 1	-2 0 1	1 1 1

№ вар.	11, 18	12, 19	13, 20	14, 21	15, 22
\vec{e}_1	1 0 -1	2 -1 0	1 0 2	-1 1 0	1 1 -1
\vec{e}_2	2 1 1	1 1 1	1 1 1	-2 1 1	1 1 1
\vec{e}_3	1 1 0	-1 0 1	-1 2 0	1 0 1	2 1 0

Задача 8. Задана квадратичная форма. а). Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, записав соответствующее преобразование переменных; б). Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием; в). Проверить закон инерции квадратичной формы на примерах преобразований, полученных в пунктах а), б).

№вар.	Квадратичная форма
1	$4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
2	$-2x_2x_3$
3	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
4	$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$
5	$-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
6	$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
7	$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
8	$3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$
9	$-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$
10	$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$
11	$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
12	$3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
13	$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$
14	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
15	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$

№вар.	Квадратичная форма
16	$-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$
17	$-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$
18	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
19	$2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$
20	$-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
21	$10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$
22	$\frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$
23	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$
24	$2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$
25	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
26	$x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$
27	$5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$
28	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$
29	$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$
30	$-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$