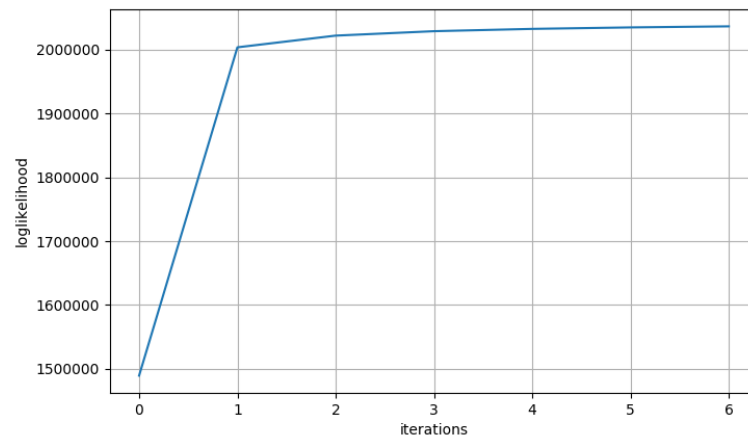


## APML EX 1

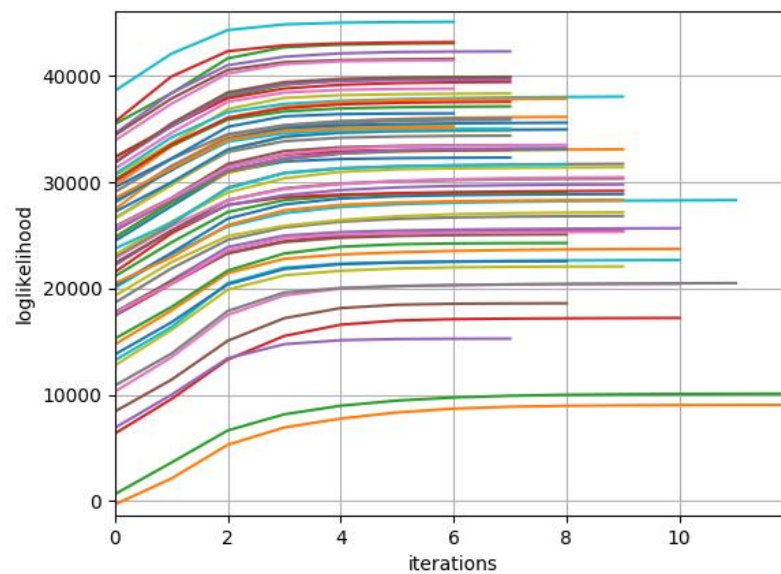
שאלה 1: בסוף הקובץ.

שאלה 2:

גרף עבור אלגוריתם הלימדה EM של מודל ה-GSM (ערך ה log-likelihood כפונקציה של מספר האיטרציות):



גרף עבור אלגוריתם הלימדה EM במודל ה-ICA (ערך ה log-likelihood כפונקציה של מספר האיטרציות): בגרף מוצגים ביחד כל עקומות הלימדה של d הערכים בווקטור S.



#### שאלה 4:

#### השוואה בין המודלים השונים:

תוצאות התיקונים עבור תמונה המורעשת ברעש גאוסייני בפקטורים של 0.01, 0.05, 0.1, 0.2

#### MVN:

ערכי log-likelihood :

1456598.15406 : train data

1436774.87541 : test data

ערכי MSE עבור 4 דרגות של רעש (עבור התמונה המורעשת ועבור התמונה לאחר תיקון)

| Noise | Noisy MSE         | Denoised MSE      |
|-------|-------------------|-------------------|
| 0.01  | 0.000100070767207 | e-057.22046227841 |
| 0.05  | 0.00249740149474  | 0.000550406546263 |
| 0.1   | 0.00999863999935  | 0.00102635534616  |
| 0.2   | 0.039994427379    | 0.00180253727032  |

זמן ריצה עבור תיקון של תמונה אחת ברזולוציה 1200X1600 : 9 sec

#### GSM: עבור k=10

ערכי log-likelihood :

2058185.6173 : train data

2006112.4892 : test data

ערכי MSE עבור 4 דרגות של רעש (עבור התמונה המורעשת ועבור התמונה לאחר תיקון)

| Noise | Noisy MSE         | Denoised MSE      |
|-------|-------------------|-------------------|
| 0.01  | e-059.99025826854 | e-059.22326489794 |
| 0.05  | 0.00249890516924  | 0.000652770026805 |
| 0.1   | 0.0100044500893   | 0.00115847221713  |
| 0.2   | 0.0399758657957   | 0.00209655490277  |

זמן ריצה עבור תיקון של תמונה אחת ברזולוציה 1200X1600 : 146 sec

\*\*עבור k=4 הערכים רובם זהים אך עם זמן ריצה של 85sec

#### ICA : עבור k=10

ערכי log-likelihood :

1926015.17786 : train data

1859632.37394 : test data

ערכי MSE עבור 4 דרגות של רעש (עבור התמונה המורעשת ועבור התמונה לאחר תיקון)

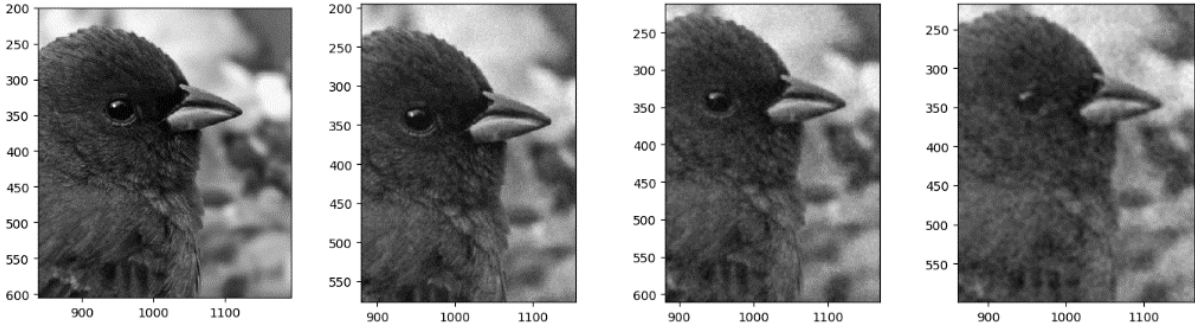
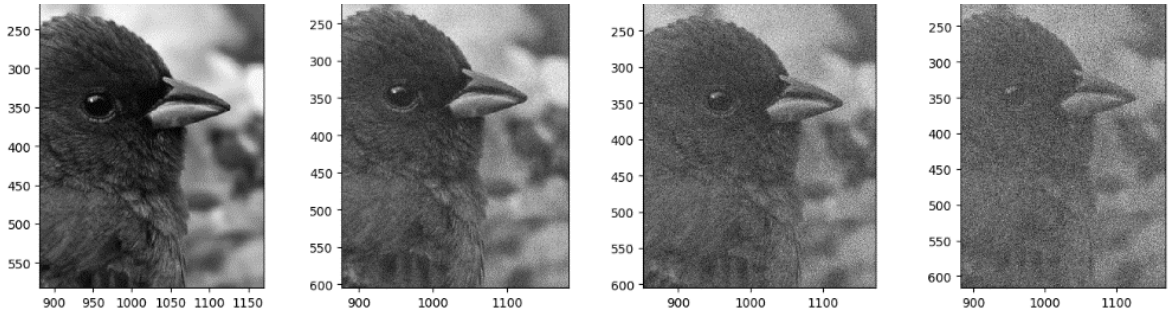
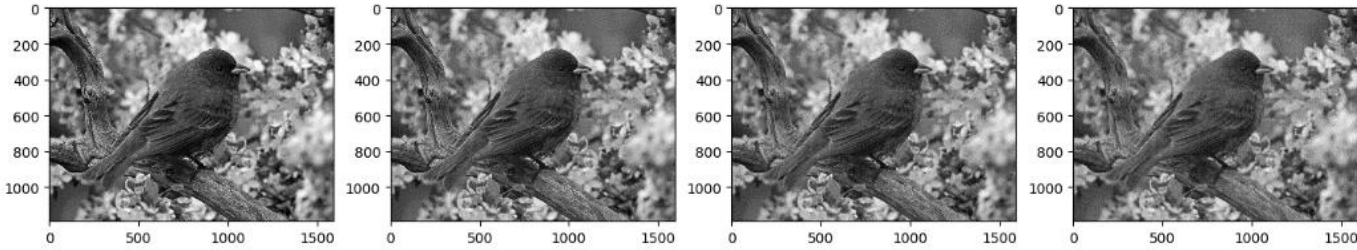
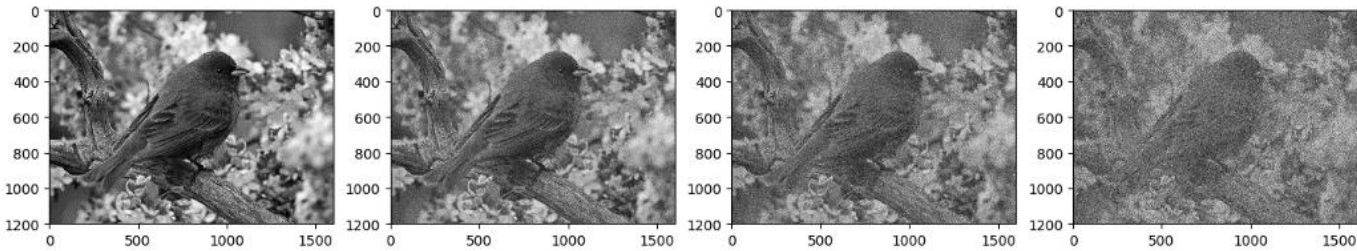
| Noise | Noisy MSE         | Denoised MSE      |
|-------|-------------------|-------------------|
| 0.01  | e-059.98582062679 | e-055.82117354938 |
| 0.05  | 0.00249919087367  | 0.000438675708342 |
| 0.1   | 0.0100096621231   | 0.00085828797285  |
| 0.2   | 0.0399345828297   | 0.00169217072463  |

זמן ריצה עבור תיקון של תמונה אחת ברזולוציה 1200X1600 : 271 sec

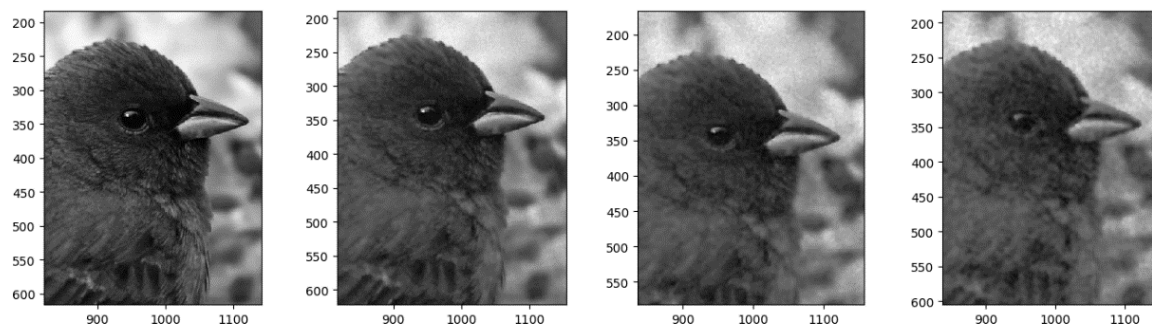
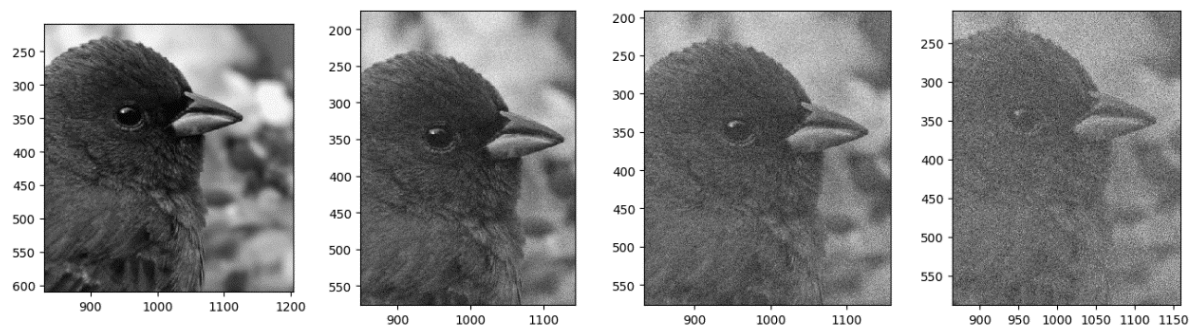
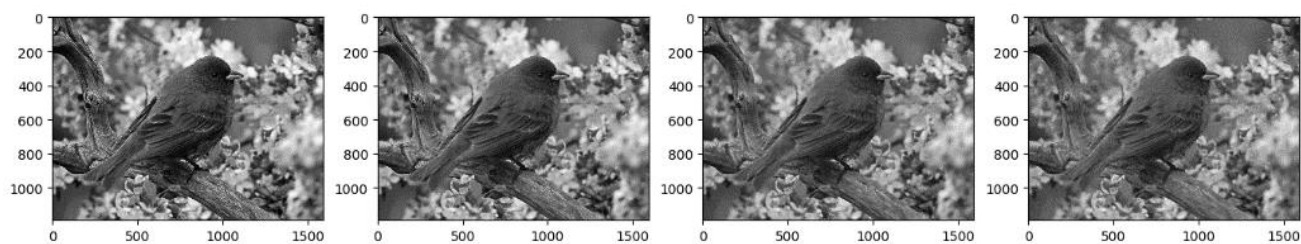
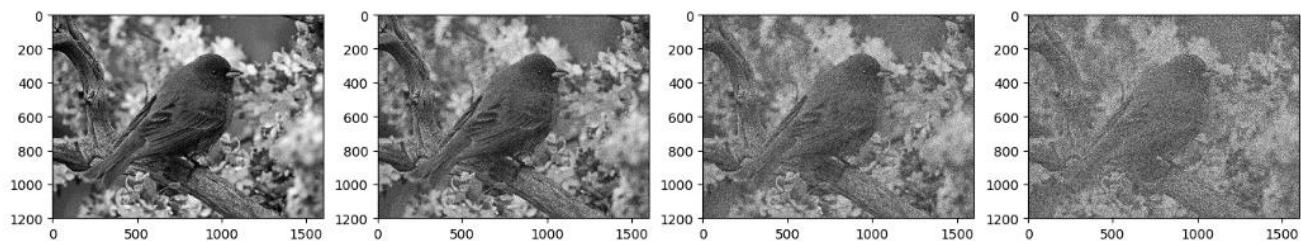
\*\*עבור k=4 הערכים רובם זהים אך עם זמן ריצה של 132sec

תוצאות ויזואליות:

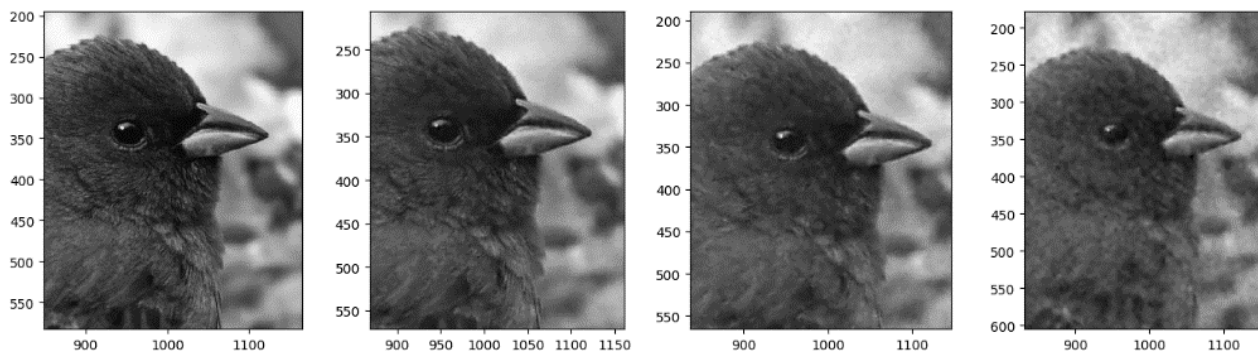
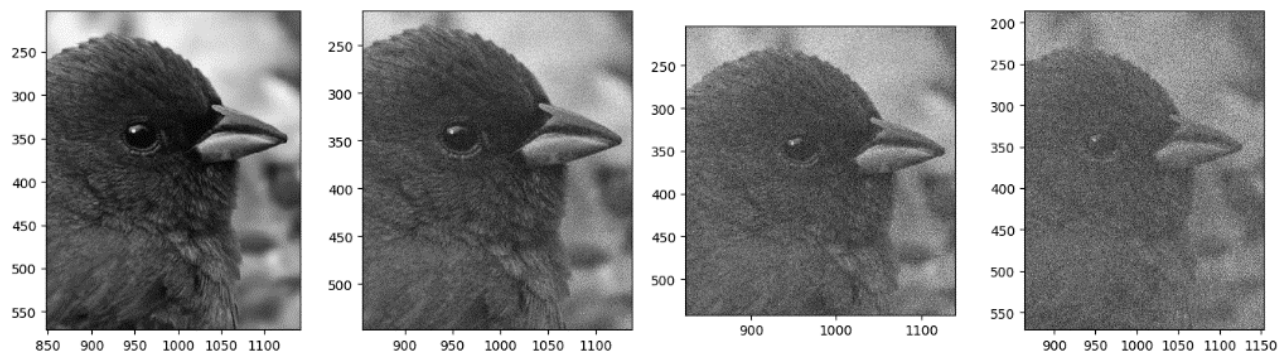
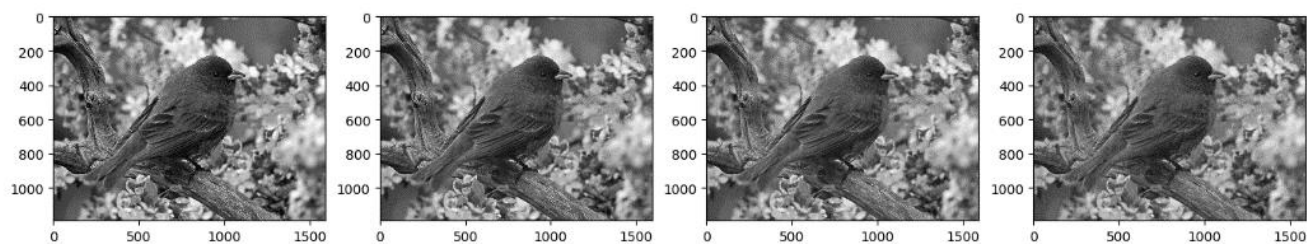
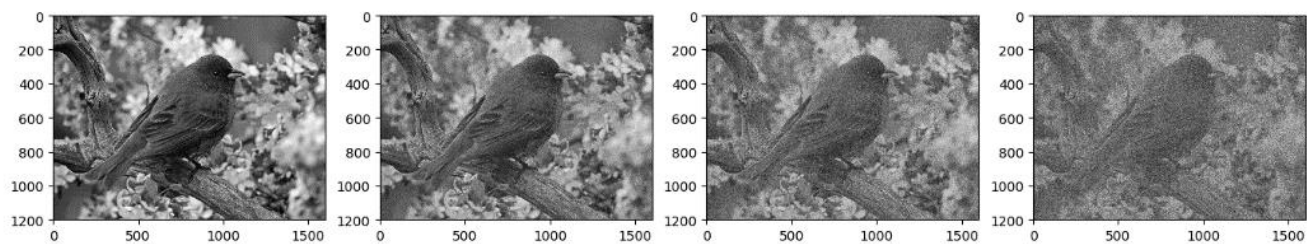
: MVN



GSM : עבור  $k=10$



k=10 : ICA



#### שאלה 4 המשך:

לדעתי המודל הטוב ביותר הוא  $MVN$ , על פניו נראה שעבור דרגת רעש סבירה למציאות כמו למשל השלישית שבחנו עם סייגמה של 0.1 ה- $MVN$  אינו רחוק ואף זהה ליכולת הניקוי של השניים האחרים. לאחר היכרות עם עולם עיבוד התמונה בקורס של שמואל פלג למדנו וראינו ויזואלית כי ערכי שגיאה  $MSE$  לאו דווקא תמיד משרתים אותנו וקובעים מה העין האנושית רואה, כמו כן תהליך הלמידה של ה- $MVN$  קצר יחסית לגודל ה- $data$  שהוא מקבל וכמעט שאינו מושפע ממנו בעוד שני המודלים האחרים מגדילים את זמן הלמידה והתיקון שלהם משמעותית כפונקציה של גודל ה- $data$  והתמונה עצמה. עוד ראינו בקורס כי שילוב של מודל מסויים כחלק מאלגוריתם ארוך יותר מחייב אותו להיות יעיל מבחינת זמני ריצה אחרת יהווה צוואר בקבוק במודל מה שיהפוך אותו ללא יעיל לא משנה כמה טובה התוצאה שהוא נותן.

כמובן שניתן עוד לחדד את שני המודלים האחרים ולתת יותר גמישות בבחירת הגאומטריה מה שיביא כפי שנראה לעלייה בזמן הלמידה שהוא אינו תמיד קריטי וניתן לסבול אותו, כמו כן סביר שנקבל גם  $MSE$  נמוך משמעותית משל ה- $MVN$  אך עדיין ה- $MVN$  ינצח בזמני הריצה מבחינת זמן התיקון ויביא לתוצאה שנראית טוב לעין האנושית – אלו שני קריטריונים מנצחים בעולם עיבוד התמונה.



# APML EX1

1c p/n

$$E[l(\xi, \theta)] = \sum_i^N \sum_y^K c_{i,y} \log(\pi_y N(x_i; \mu_y, \Sigma_y)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial E[l]}{\partial \pi_y} = \sum_i^N c_{i,y} \frac{1}{\pi_y} = \lambda$$

$$\pi_y = \frac{\sum_i^N c_{i,y}}{\lambda}$$

$$\sum_y^K \pi_y = 1 \Rightarrow \sum_y^K \frac{\sum_i^N c_{i,y}}{\lambda} = 1$$

$$1 = \frac{\sum_y^K \sum_i^N c_{i,y}}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \sum_y^K \sum_i^N c_{i,y}$$

$$\sum_y^K c_{i,y} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\sum_i^N 1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = N$$

$$\pi_y = \frac{\sum_i^N c_{i,y}}{N}$$

$$E[l(\xi, \theta)] = \sum_i^N \sum_y^K c_{i,y} \log(\pi_y N(x_i; 0, r^2 \Sigma)) \quad (2)$$

$\log(N(x_i; 0, r^2 \Sigma))$ : log of normal distribution

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi r^2 \Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^T (r^2 \Sigma)^{-1} x_i\right)\right)$$

$$= -\log\left(\sqrt{(2\pi)^d (r^2)^d \det(\Sigma)}\right) - \frac{1}{2} \frac{x_i^T \Sigma^{-1} x_i}{r^2}$$

$$\frac{\partial E[l]}{\partial r^2} = \frac{-d/2}{r^2} + \left(\frac{1}{2} x_i^T \Sigma^{-1} x_i\right) \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2(-d) + x_i^T \Sigma^{-1} x_i = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{x_i^T \Sigma^{-1} x_i}{d}$$

$$\Rightarrow \bar{r}_y^2 = \frac{\sum_i^N c_{i,y} \cdot x_i^T \Sigma^{-1} x_i}{d \sum_i^N c_{i,y}}$$



$V_y$ ,  $T_{iy} = \frac{1}{R}$ ,  $M_y = \mu$ , EM  $\rightarrow$   $\Delta H$   $\rightarrow$   $\Delta S$  GMM (3)

$$C(y) = \frac{\pi y \cdot N(x_1, \mu_y, \Sigma_y)}{\sum_{j=1}^K \pi_j \cdot N(x_i, \mu_j, \Sigma_j)} = \frac{1/K}{1} = \frac{1}{K}$$

$$\overline{C}_{1,y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_{i,y} = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{K}$$

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^N c_{iy} x_i}{\sum_{i=1}^N c_{iy}} = \frac{\frac{1}{K} \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N/K} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \mu$$

$$\Sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^N c_{iy} (x_i - \mu_x)(x_i - \mu_x)^T}{\sum_{i=1}^N c_{iy}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)(x_i - \mu)^T}{\frac{1}{N}} = \Sigma$$

1.  $C_i, \pi_i, M_i, I_i$  - פרמטרים  
 2.  $G$  - פונקציה  
 3.  $\alpha$  - קבוע  
 4.  $\beta$  - קבוע  
 5.  $\gamma$  - קבוע  
 6.  $\delta$  - קבוע  
 7.  $\epsilon$  - קבוע  
 8.  $\zeta$  - קבוע  
 9.  $\eta$  - קבוע  
 10.  $\theta$  - קבוע  
 11.  $\iota$  - קבוע  
 12.  $\kappa$  - קבוע  
 13.  $\lambda$  - קבוע  
 14.  $\mu$  - קבוע  
 15.  $\nu$  - קבוע  
 16.  $\xi$  - קבוע  
 17.  $\omicron$  - קבוע  
 18.  $\pi$  - קבוע  
 19.  $\rho$  - קבוע  
 20.  $\sigma$  - קבוע  
 21.  $\tau$  - קבוע  
 22.  $\upsilon$  - קבוע  
 23.  $\phi$  - קבוע  
 24.  $\chi$  - קבוע  
 25.  $\psi$  - קבוע  
 26.  $\omega$  - קבוע  
 27.  $\varphi$  - קבוע  
 28.  $\eta$  - קבוע  
 29.  $\theta$  - קבוע  
 30.  $\iota$  - קבוע  
 31.  $\kappa$  - קבוע  
 32.  $\lambda$  - קבוע  
 33.  $\mu$  - קבוע  
 34.  $\nu$  - קבוע  
 35.  $\xi$  - קבוע  
 36.  $\omicron$  - קבוע  
 37.  $\pi$  - קבוע  
 38.  $\rho$  - קבוע  
 39.  $\sigma$  - קבוע  
 40.  $\tau$  - קבוע  
 41.  $\upsilon$  - קבוע  
 42.  $\phi$  - קבוע  
 43.  $\chi$  - קבוע  
 44.  $\psi$  - קבוע  
 45.  $\omega$  - קבוע  
 46.  $\varphi$  - קבוע  
 47.  $\eta$  - קבוע  
 48.  $\theta$  - קבוע  
 49.  $\iota$  - קבוע  
 50.  $\kappa$  - קבוע  
 51.  $\lambda$  - קבוע  
 52.  $\mu$  - קבוע  
 53.  $\nu$  - קבוע  
 54.  $\xi$  - קבוע  
 55.  $\omicron$  - קבוע  
 56.  $\pi$  - קבוע  
 57.  $\rho$  - קבוע  
 58.  $\sigma$  - קבוע  
 59.  $\tau$  - קבוע  
 60.  $\upsilon$  - קבוע  
 61.  $\phi$  - קבוע  
 62.  $\chi$  - קבוע  
 63.  $\psi$  - קבוע  
 64.  $\omega$  - קבוע  
 65.  $\varphi$  - קבוע  
 66.  $\eta$  - קבוע  
 67.  $\theta$  - קבוע  
 68.  $\iota$  - קבוע  
 69.  $\kappa$  - קבוע  
 70.  $\lambda$  - קבוע  
 71.  $\mu$  - קבוע  
 72.  $\nu$  - קבוע  
 73.  $\xi$  - קבוע  
 74.  $\omicron$  - קבוע  
 75.  $\pi$  - קבוע  
 76.  $\rho$  - קבוע  
 77.  $\sigma$  - קבוע  
 78.  $\tau$  - קבוע  
 79.  $\upsilon$  - קבוע  
 80.  $\phi$  - קבוע  
 81.  $\chi$  - קבוע  
 82.  $\psi$  - קבוע  
 83.  $\omega$  - קבוע  
 84.  $\varphi$  - קבוע  
 85.  $\eta$  - קבוע  
 86.  $\theta$  - קבוע  
 87.  $\iota$  - קבוע  
 88.  $\kappa$  - קבוע  
 89.  $\lambda$  - קבוע  
 90.  $\mu$  - קבוע  
 91.  $\nu$  - קבוע  
 92.  $\xi$  - קבוע  
 93.  $\omicron$  - קבוע  
 94.  $\pi$  - קבוע  
 95.  $\rho$  - קבוע  
 96.  $\sigma$  - קבוע  
 97.  $\tau$  - קבוע  
 98.  $\upsilon$  - קבוע  
 99.  $\phi$  - קבוע  
 100.  $\chi$  - קבוע  
 101.  $\psi$  - קבוע  
 102.  $\omega$  - קבוע  
 103.  $\varphi$  - קבוע  
 104.  $\eta$  - קבוע  
 105.  $\theta$  - קבוע  
 106.  $\iota$  - קבוע  
 107.  $\kappa$  - קבוע  
 108.  $\lambda$  - קבוע  
 109.  $\mu$  - קבוע  
 110.  $\nu$  - קבוע  
 111.  $\xi$  - קבוע  
 112.  $\omicron$  - קבוע  
 113.  $\pi$  - קבוע  
 114.  $\rho$  - קבוע  
 115.  $\sigma$  - קבוע  
 116.  $\tau$  - קבוע  
 117.  $\upsilon$  - קבוע  
 118.  $\phi$  - קבוע  
 119.  $\chi$  - קבוע  
 120.  $\psi$  - קבוע  
 121.  $\omega$  - קבוע  
 122.  $\varphi$  - קבוע  
 123.  $\eta$  - קבוע  
 124.  $\theta$  - קבוע  
 125.  $\iota$  - קבוע  
 126.  $\kappa$  - קבוע  
 127.  $\lambda$  - קבוע  
 128.  $\mu$  - קבוע  
 129.  $\nu$  - קבוע  
 130.  $\xi$  - קבוע  
 131.  $\omicron$  - קבוע  
 132.  $\pi$  - קבוע  
 133.  $\rho$  - קבוע  
 134.  $\sigma$  - קבוע  
 135.  $\tau$  - קבוע  
 136.  $\upsilon$  - קבוע  
 137.  $\phi$  - קבוע  
 138.  $\chi$  - קבוע  
 139.  $\psi$  - קבוע  
 140.  $\omega$  - קבוע  
 141.  $\varphi$  - קבוע  
 142.  $\eta$  - קבוע  
 143.  $\theta$  - קבוע  
 144.  $\iota$  - קבוע  
 145.  $\kappa$  - קבוע  
 146.  $\lambda$  - קבוע  
 147.  $\mu$  - קבוע  
 148.  $\nu$  - קבוע  
 149.  $\xi$  - קבוע  
 150.  $\omicron$  - קבוע  
 151.  $\pi$  - קבוע  
 152.  $\rho$  - קבוע  
 153.  $\sigma$  - קבוע  
 154.  $\tau$  - קבוע  
 155.  $\upsilon$  - קבוע  
 156.  $\phi$  - קבוע  
 157.  $\chi$  - קבוע  
 158.  $\psi$  - קבוע  
 159.  $\omega$  - קבוע  
 160.  $\varphi$  - קבוע  
 161.  $\eta$  - קבוע  
 162.  $\theta$  - קבוע  
 163.  $\iota$  - קבוע  
 164.  $\kappa$  - קבוע  
 165.  $\lambda$  - קבוע  
 166.  $\mu$  - קבוע  
 167.  $\nu$  - קבוע  
 168.  $\xi$  - קבוע  
 169.  $\omicron$  - קבוע  
 170.  $\pi$  - קבוע  
 171.  $\rho$  - קבוע  
 172.  $\sigma$  - קבוע  
 173.  $\tau$  - קבוע  
 174.  $\upsilon$  - קבוע  
 175.  $\phi$  - קבוע  
 176.  $\chi$  - קבוע  
 177.  $\psi$  - קבוע  
 178.  $\omega$  - קבוע  
 179.  $\varphi$  - קבוע  
 180.  $\eta$  - קבוע  
 181.  $\theta$  - קבוע  
 182.  $\iota$  - קבוע  
 183.  $\kappa$  - קבוע  
 184.  $\lambda$  - קבוע  
 185.  $\mu$  - קבוע  
 186.  $\nu$  - קבוע  
 187.  $\xi$  - קבוע  
 188.  $\omicron$  - קבוע  
 189.  $\pi$  - קבוע  
 190.  $\rho$  - קבוע  
 191.  $\sigma$  - קבוע  
 192.  $\tau$  - קבוע  
 193.  $\upsilon$  - קבוע  
 194.  $\phi$  - קבוע  
 195.  $\chi$  - קבוע  
 196.  $\psi$  - קבוע  
 197.  $\omega$  - קבוע  
 198.  $\varphi$  - קבוע  
 199.  $\eta$  - קבוע  
 200.  $\theta$  - קבוע  
 201.  $\iota$  - קבוע  
 202.  $\kappa$  - קבוע  
 203.  $\lambda$  - קבוע  
 204.  $\mu$  - קבוע  
 205.  $\nu$  - קבוע  
 206.  $\xi$  - קבוע  
 207.  $\omicron$  - קבוע  
 208.