אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

אותות ומערכות תרגיל המטלב

חלק א' – מערכות

נתון האות הבא: $y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=20x[n]+10x[n-1]$

כאשר y[n] מוצא המערכת ו-x[n] כניסת המערכת. האותות דיסקרטיים.

לינאריות

נשים לב שאין צורך לכתוב את y[n] מפורשות, ונוכל להוכיח לינאריות עבור משוואת ההפרשים.

עבור כניסה x1[n] המוצא יהיה:

$$y1[n]-4y1[n-1]+4y1[n-2]=20x1[n]+10x1[n-1]$$

נכפול בסקלר α ונקבל:

$$1)\ \ \alpha y1[n]-4\alpha y1[n-1]+4\alpha y1[n-2]=20\alpha x1[n]+10\alpha x1[n-1]$$

באופן דומה עבור כניסה x2[n]:

$$y2[n]-4y2[n-1]+4y2[n-2]=20x2[n]+10x2[n-1]$$

נכפול בסקלר β ונקבל:

$$2)\ \ \beta y2[n]-4\beta y2[n-1]+4\beta y2[n-2]=20\beta x2[n]+10\beta x2[n-1]$$

נחבר את משוואות 1 ו-2, נקבל:

$$(\alpha y1[n]+\beta y2[n])-4(\alpha y1[n-1]+\beta y2[n-1])+4(\alpha y1[n-2]+\beta y2[n-2])$$
$$=20(\alpha x1[n]+\beta x2[n])+10(\alpha x1[n-1]+\beta x2[n-1])$$

נשים לב שתכונות הסופרפוזיציה מתקיימות, אם נסמן: $x3[n]=\alpha x1[n]+\beta x2[n]$ עבור כל n נקבל מהמשוואה למעלה:

$$y3[n]-4y3[n-1]+4y3[n-2]=20x3[n]+10x3[n-1]$$

כאשר:

$$y3[n]=\alpha y1[n]+\beta y2[n]$$

$$y3[n-1]=\alpha y1[n-1]+\beta y2[n-1]$$

$$y3[n-2]=\alpha y1[n-2]+\beta y2[n-2]$$

$$x3[n]=\alpha x1[n]+\beta x2[n]$$

$$x3[n-1]=\alpha x1[n-1]+\beta x2[n-1]$$

ז"א מצד אחד הראינו ש: $y3[n]=S\{\alpha x1[n]+\beta x2[n]\}$

מכיוון שהמשוואה האחרונה שקיבלנו היא בדיוק הגדרת המערכת S.

מצד שני הראינו ש: (לפי איך שהגדרנו את y3) ש: $y3[n]=\alpha y1[n]+\beta y2[n]=\alpha S\{x1[n]\}+\beta S\{x2[n]\}$

כלומר לסיכום הראינו ש: $S\{\alpha x1[n]+\beta x2[n]\}=\alpha S\{x1[n]\}+\beta S\{x2[n]\}$

ומכאן שהמערכת S לינארית.

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

<u>קבועה בזמן</u>:

עלינו להראות שהזזת האות בכניסה גוררת הזזת האות במוצא עבור כל n: $x[n] \overset{S}{\rightarrow} y[n] \leftrightarrow x[n-n0] \overset{S}{\rightarrow} y[n-n0]$

משוואת ההפרשים עבור כל n שלם:

$$\mathrm{y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=20x[n]+10x[n-1]}$$

נציב n=n-n0 במשוואת ההפרשים ונקבל:

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}-n0]-4\mathrm{y}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0-1]+4\mathrm{y}[\mathrm{n}-n0-2]=20\mathrm{x}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0]+10\mathrm{x}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0-1]$$

כמו כן עבור כניסה x[n-n0] שמוצאה הוא $\check{y}[n]=S\{x[n-n0]\}$ מתקבלת משוואת ההפרשים הבאה:

$$\check{y}[n]-4\check{y}[\mathrm{n}-1]+4\check{y}[\mathrm{n}-2]=20\mathrm{x}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0]+10\mathrm{x}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0-1]$$

שני הביטויים שקיבלנו נכונים עבור כל n ולכן נשוואה ביניהם:

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}-n0]-4\mathrm{y}[\mathrm{n}-\mathrm{n}0-1]+4\mathrm{y}[\mathrm{n}-n0-2]=\check{y}[n]-4\check{y}[\mathrm{n}-1]+4\check{y}[\mathrm{n}-2]$$

$$\Rightarrow y[n-n0]=S\{x[n-n0]\}$$

ולכן המערכת קבועה בזמן.

<u>LTI</u>:

הוכחנו כי המערכת לינארית וקבועה בזמן לפי הגדרה היא גם LTI.

<u>בעלת זיכרון</u>:

נבודד את המוצא y[n] ממשוואת ההפרשים:

$$\mathrm{y[n]=4y[n-1]-4y[n-2]+20x[n]+10x[n-1]}$$

נשים לב כי y[n] תלוי בפלטי העבר y[n-1] y[n-2] ובקלטי ההווה והעבר x[n] x[n-1] ולכן המערכת בעלת זיכרון.

<u>הפיכה</u>:

על ידי שימוש בתכונת ההזזה בזמן והלינאריות של התמרת Z ניתן לקבל את פונקציית התמסורת של המערכת כמנת הפולינומים האופייניים:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{20+10z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{20+10z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

את משוואת ההפרשים פותרים עבור התמרת Z החד-צדדית (סיבתית) ולכן עבור הקוטב ב-z=2 נקבל כי $roc_H=|z|>2$.

המערכת הפיכה אם קיימת $\mathrm{H}_i(z)$ כך שמתקיים: $\mathrm{H}_i(z)=\frac{1}{H(z)}$ ולכל |z|>2 מתקיים $H(z)\neq 0$.

לכן נאמר שעבור |z|>2 מתקיים $H(z)\cdot \mathrm{H}_i(z)=1$ ובמובן הזמן זה אומר ש: $h[n]*\mathrm{h}_i[n]=\delta[n]$

H(z) תתאפס כאשר המונה מתאפס. כלומר ב: $\mathrm{H(z)}=0 \Leftrightarrow 20+10z^{-1}=0 \Rightarrow z=-0.5$

נשים לב שהאפס שקיבלנו z=-0.5 לא שייך ל- roc_H כלומר קיבלנו שאכן לכל |z|>2 מתקיים

$H(z)\neq 0$ ולכן קיימת מערכת הופכית כזו והיא:

$$\mathrm{H}_i(z)=\frac{\tilde{Y}(z)}{\tilde{X}(z)}=\frac{1}{H(z)}=\frac{(1-2z^{-1})^2}{20+10z^{-1}}$$

כאשר משוואת ההפרשים של המערכת היא:

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

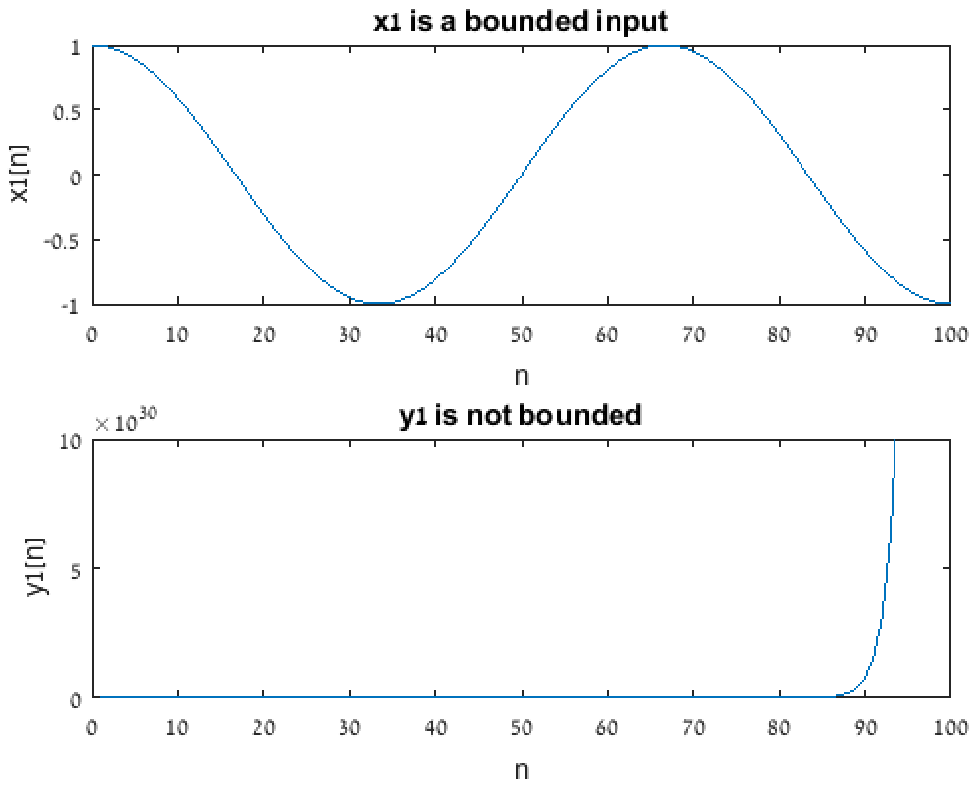
$$\tilde{x}[n]-4\tilde{x}[n-1]+4\tilde{x}[n-2]=20\tilde{y}[n]+10\tilde{y}[n-1]$$

מכיוון שאנו פותרים משוואות הפרשים עבור התמרת Z החד צדדית הסיבתית, נקבל שעבור הקוטב הפשוט היחיד ב--=z 0.5 ה-roc_{Hi} הוא z|>0.5| אשר כולל את מעגל היחידה ולכן המערכת ההופכית יציבה. כמו כן המערכת ההופכית אכן סיבתית כי ה-roc_{Hi} שלה מצורת 'שמש'.

יציבות במובן BIBO:

הראינו ש: $roc_H=|z|>2$. ה-roc_H לא מכיל את מעגל היחידה 1=|z| ולכן המערכת לא יציבה. דוגמא נגדית מקוד המטלבה:

קלט: x[n]=cos(0.03πn) אשר היו אות חסום (אות ממשי).פלט: מתקבל מוצא שאינו חסום.



קוד:

```
n = 0:1:100;
x1 = cos(0.03*pi*n);
subplot(2,1,1)
plot(n,x1)
title('x1 is a bounded input');
xlabel('n');
ylabel('x1[n]');

y1(1:100)=0;
%Inital assignmets
y1(1)  = 0;
y1(2)= 0;

for n = 3:1:100
   y1(n)  = 4*y1(n-1)-4*y1(n-2)+20*x1(n)+10*x1(n-1);
end

n1 = 1:1:100;
subplot(2,1,2)
plot(n1,y1)
axis([0 100 0 10^31])
title('y1 is not bounded');
xlabel('n');
ylabel('y1[n]');
```

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

<u>סיבתית</u>:

נראה שהמערכת סיבתית אם התגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0.

ראינו שפונצקיית התמסורת של המערכת S היא:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{20+10z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{20+10z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}, roc_H=|z|>2$$

נסדר את הביטוי:

$$H(z)=10z\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}+5\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

ולכן לפי נוסחה של התמרה מוכרת שלמדנו:

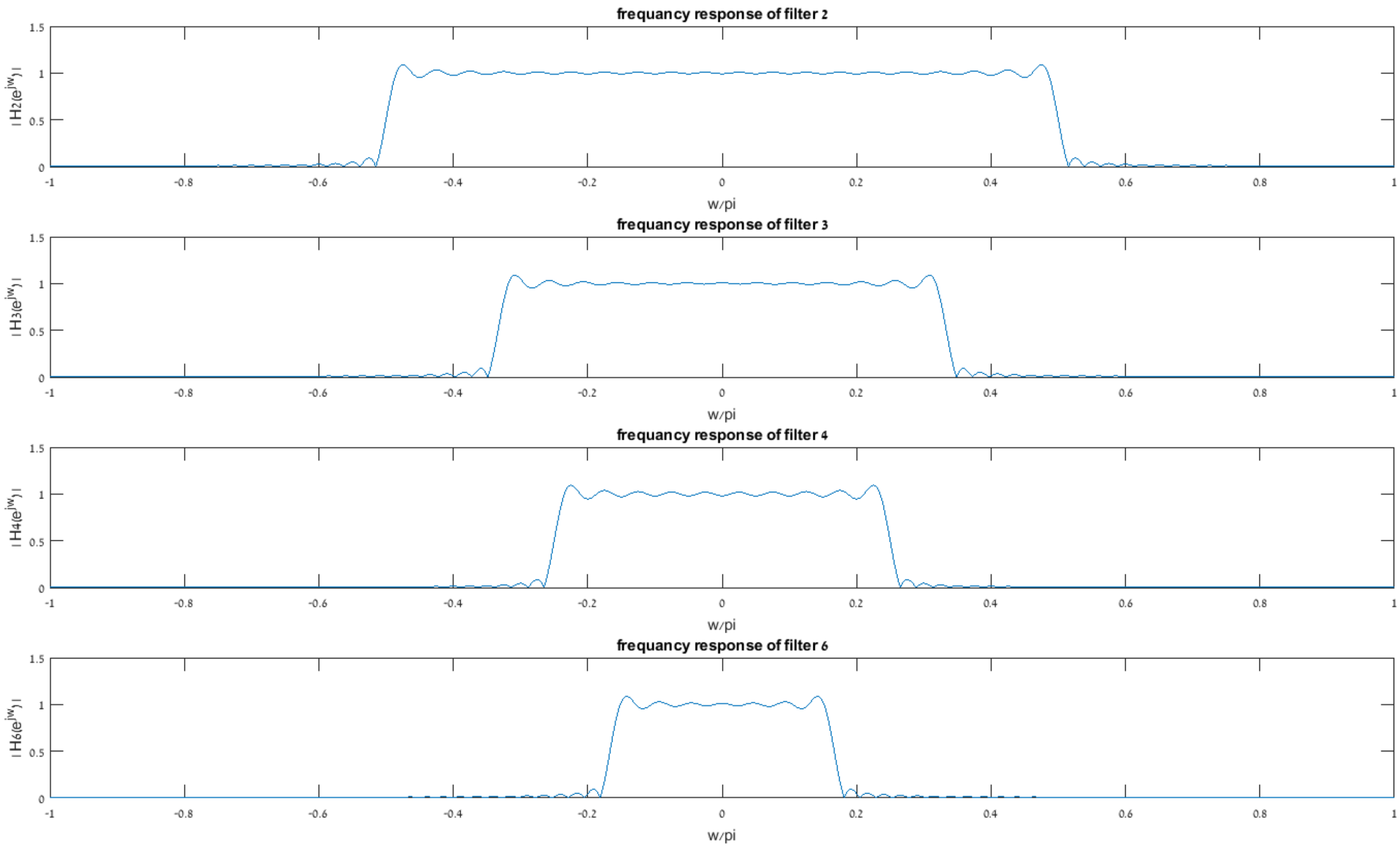
$$h[n]=5n2^n u[n]+10[n+1]2^{n+1}u[n+1]$$

נשים לב שאכן קיבלנו שהתגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0 ולכן המערכת סיבתית.

<u>חלק ב' – מסנן LPF</u>:

<u>סעיף 1 – הצגת המסננים</u>:

תגובת התדר של כל אחד מ-4 המסננים:



<u>קוד</u>:

```
%Load h2
load('LPF.mat')

w=linspace(-pi,pi,20001);
```

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

```
%Plot h2 frequancy response
h_2=fft(h2,20001);
subplot(4,1,1)
plot(w/pi,abs(fftshift(h_2)))
title('frequancy response of filter 2');
xlabel('w/pi');
ylabel('| H2(e^j^w) |');

%Plot h3 frequancy response
h_3=fft(h3,20001);
subplot(4,1,2)
plot(w/pi,abs(fftshift(h_3)))
title('frequancy response of filter 3');
xlabel('w/pi');
ylabel('| H3(e^j^w) |');

%Plot h4 frequancy response
h_4=fft(h4,20001);
subplot(4,1,3)
plot(w/pi,abs(fftshift(h_4)))
title('frequancy response of filter 4');
xlabel('w/pi');
ylabel('| H4(e^j^w) |');

%Plot h6 frequancy response
h_6=fft(h6,20001);
subplot(4,1,4)
plot(w/pi,abs(fftshift(h_6)))
title('frequancy response of filter 6');
xlabel('w/pi');
ylabel('| H6(e^j^w) |');
```

<u>סעיף 2 – העברת תדרים נמוכים</u>:

אות הכניסה: $x[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$

<u>א'</u>

נבטא את x[n] ע"י סכום 2 קוסינוסים בעזרת הזהות הטריגונומטרית:

$$cosx \cdot cosy = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

לכן נקבל: $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$

נבצע התמרת פוריה בדידה ל-x[n], נשתמש בתכונת הלינאריות וניעזר בנוסחה:

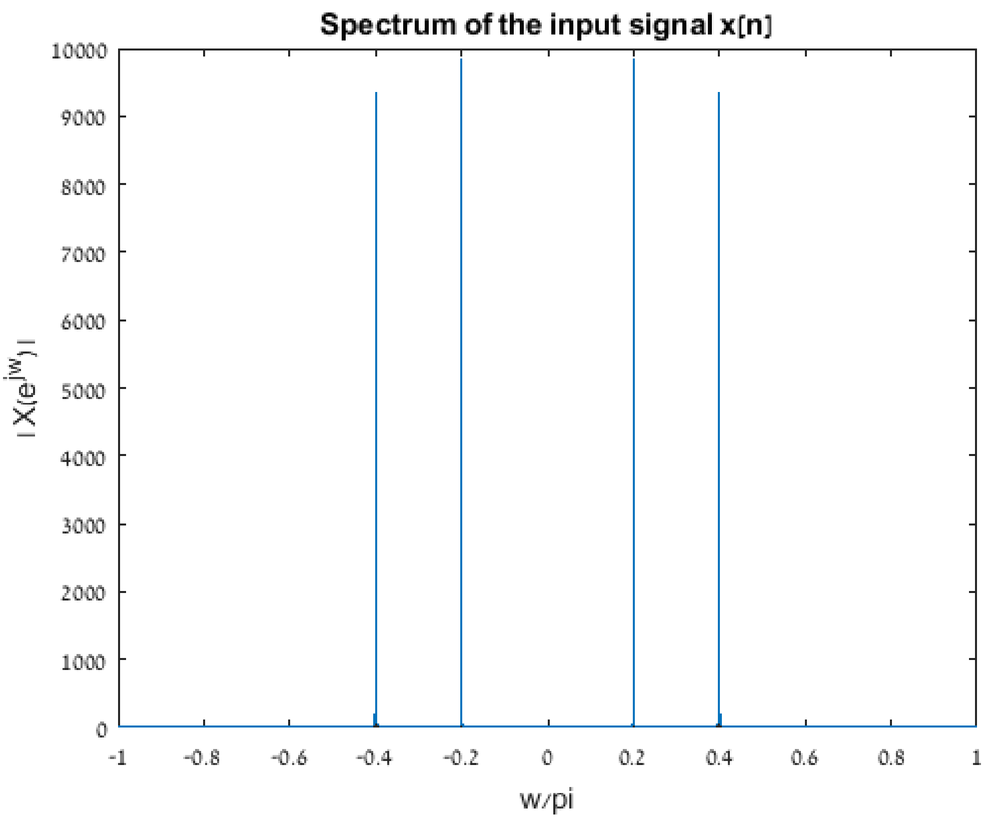
$$\mathcal{F}\{cos(w_0 n)\} = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta[w - w_0 - 2\pi l] + \delta[w + w_0 - 2\pi l]]$$

לכן ספקטרום אות הכניסה הוא:

$$X(e^{jw}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left[w - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right] + \delta\left[w + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right] + \delta\left[w - \frac{\pi}{5} - 2\pi l\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5} - 2\pi l\right]\right]$$

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

ב':



קוד:

```
n=-10000:1:10000;
x=2*cos((1/10)*pi*n).*cos((3/10)*pi*n);
%DTFT of x[n]
w =linspace(-pi,pi,20001);
X=fft(x,20001);
plot(w/pi,abs(fftshift(X)))
title('Spectrum of the input signal x[n]')
xlabel('w/pi');
ylabel('| X(e^j^w) |');
axis([-1 1 0 10^4])
```

ג':

נמצא באופן אנליטי את מוצא המסנן y[n] בהנחת מסננים אידיאליים:

נשתמש בתוכנת הקונבולוציה בזמן/מכפלה בתדר: $\mathrm{y[n]=x[n]*h[n]} \Leftrightarrow Y(e^{jw})=X(e^{jw})\cdot H(e^{jw})$

- מסנן h2[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

$$H_2(e^{jw})=\begin{cases}1, |w|\le \frac{\pi}{2}\\ 0, otherwise\end{cases}$$

$$Y_2(e^{jw})=X(e^{jw})\cdot H_2(e^{jw})=\pi\left[\delta\left[w-\frac{2\pi}{5}\right]+\delta\left[w+\frac{2\pi}{5}\right]+\delta\left[w-\frac{\pi}{5}\right]+\delta\left[w+\frac{\pi}{5}\right]\right]\cdot H_2(e^{jw})$$
$$=\pi\left[\delta\left[w-\frac{2\pi}{5}\right]+\delta\left[w+\frac{2\pi}{5}\right]+\delta\left[w-\frac{\pi}{5}\right]+\delta\left[w+\frac{\pi}{5}\right]\right]$$

התמרה הפוכה: $y2[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$.

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

- מסנן h3[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

$$H_3(e^{jw}) = \begin{cases} 1, |w| \le \frac{\pi}{3} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$Y_3(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H_3(e^{jw}) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w - \frac{\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5}\right]\right] \cdot H_3(e^{jw})$$
$$= \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5}\right]\right]$$

התמרה הפוכה: $y3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$

- מסנן h4[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

$$H_4(e^{jw}) = \begin{cases} 1, |w| \le \frac{\pi}{4} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$Y_4(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H_4(e^{jw}) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w - \frac{\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5}\right]\right] \cdot H_4(e^{jw})$$
$$= \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5}\right]\right]$$

התמרה הפוכה: $y4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$

- מסנן h6[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

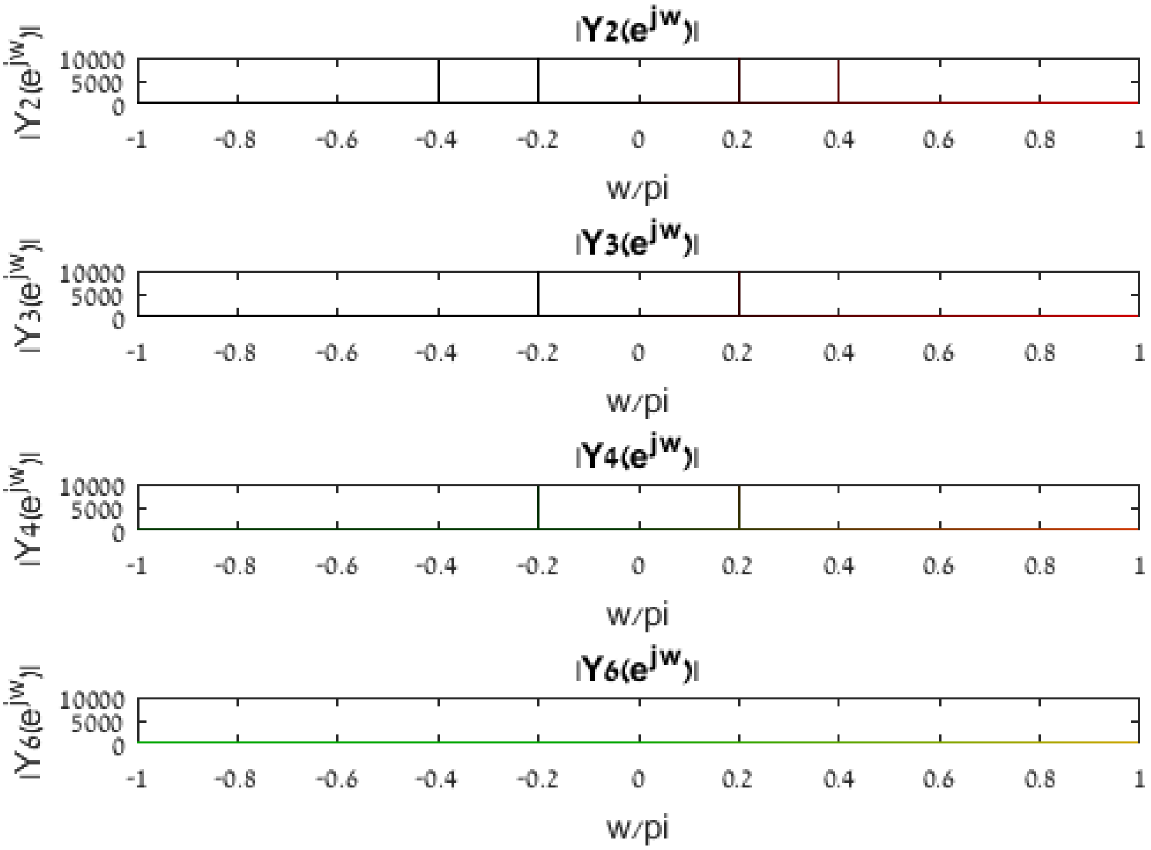
$$H_6(e^{jw}) = \begin{cases} 1, |w| \le \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

$$Y_6(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H_6(e^{jw}) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{2\pi}{5}\right] + \delta\left[w - \frac{\pi}{5}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{5}\right]\right] \cdot H_6(e^{jw}) = 0$$

התמרה הפוכה: $y6[n] = 0$.

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

ד':



קוד:

```
load LPF.mat

n=-10000:1:10000;
x=2*cos((1/10)*pi*n).*cos((3/10)*pi*n);
X=fft(x,20001);

%Plot output spectrum Y2
H2=fft(h2,20001);
Y2=X.*H2;
w =linspace(-pi,pi,20001);
subplot(4,1,1)
plot(w/pi,abs(fftshift(Y2)))
title('|Y2(e^j^w)|');
xlabel('w/pi');
ylabel('|Y2(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y3
H3=fft(h3,20001);
Y3=X.*H3;
subplot(4,1,2)
plot(w/pi,abs(fftshift(Y3)))
title('|Y3(e^j^w)|');
xlabel('w/pi');
ylabel('|Y3(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y4
H4=fft(h4,20001);
Y4=X.*H4;
subplot(4,1,3)
plot(w/pi,abs(fftshift((Y4))))
title('|Y4(e^j^w)|');
xlabel('w/pi');
```

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

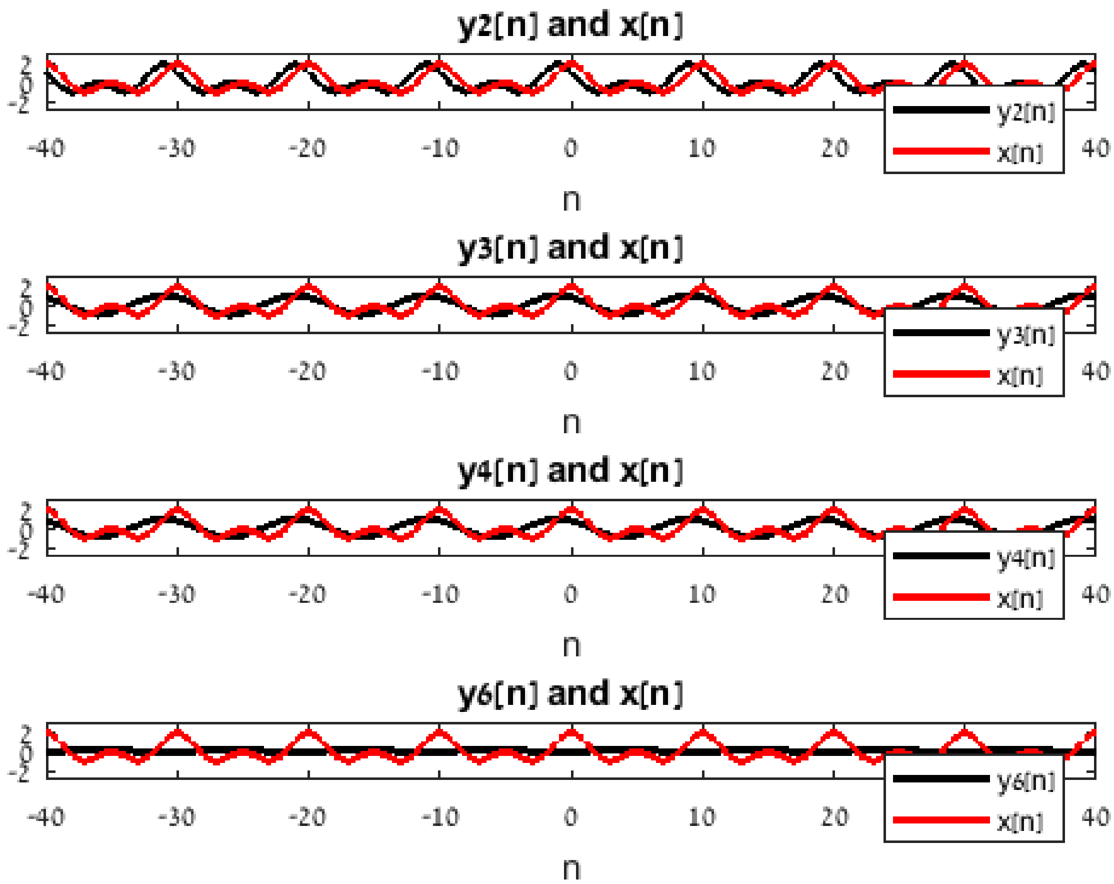
```
ylabel('|Y4(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y6
H6=fft(h6,20001);
Y6=X.*H6;
subplot(4,1,4)
plot(w/pi,abs(fftshift(Y6)))
axis([-1 1 0 10000])
title('|Y6(e^j^w)|');
xlabel('w/pi');
ylabel('|Y6(e^j^w)|');
```

הסבר לתוצאות שהתקבלו:

- מסנן ה-LPF h2[n] בעל תדר קיטעון ב-$\frac{\pi}{2}$ ולכן יסנן תדרים בתחום: $|w|>\frac{\pi}{2}$. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים $-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$. 4 התדרים האלה קטנים מ-$\frac{\pi}{2}$ ולכן לאחר המעבר במסנן 4 ההלמים יישארו.
- מסנן ה-LPF h3[n] בעל תדר קיטעון ב-$\frac{\pi}{3}$ ולכן יסנן תדרים בתחום: $|w|>\frac{\pi}{3}$. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים $-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$. 2 התדרים $-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$ נמצאים בתחום: $|w|\le\frac{\pi}{3}$ ולכן לאחר המעבר במסנן נקבל במוצא בתחום התדר 2 הלמים בלבד.
- מסנן ה-LPF h4[n] בעל תדר קיטעון ב-$\frac{\pi}{4}$ ולכן יסנן תדרים בתחום: $|w|>\frac{\pi}{4}$. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים $-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$. 2 התדרים $-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$ נמצאים בתחום: $|w|\le\frac{\pi}{4}$ ולכן לאחר המעבר במסנן נקבל במוצא בתחום התדר 2 הלמים בלבד.
- מסנן ה-LPF h6[n] בעל תדר קיטעון ב-$\frac{\pi}{6}$ ולכן יסנן תדרים בתחום: $|w|>\frac{\pi}{6}$. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים $-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5},-\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}$. כל התדרים נמצאים בתחום: $|w|>\frac{\pi}{6}$ ולכן לאחר המעבר במסנן לא נקבל הלמים, כלומר $Y_6(e^{jw})=0$.

<u>ה':</u>



אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

קוד:

```
figure %for question 5
y2=ifft(Y2);
subplot(4,1,1)
plot(n,y2,'k',n,x,'r','LineWidth',2)
title('y2[n] and x[n]')
legend('y2[n]','x[n]')
xlabel('n');
axis([-40 40 -3 3])

y3=ifft(Y3);
subplot(4,1,2)
plot(n,y3,'k',n,x,'r','LineWidth',2)
title('y3[n] and x[n]')
legend('y3[n]','x[n]')
xlabel('n');
axis([-40 40 -3 3])

y4=ifft(Y4);
subplot(4,1,3)
plot(n,y4,'k',n,x,'r','LineWidth',2)
title('y4[n] and x[n]')
legend('y4[n]','x[n]')
xlabel('n');
axis([-40 40 -3 3])

y6=ifft(Y6);
subplot(4,1,4)
plot(n,y6,'k',n,x,'r','LineWidth',2)
title('y6[n] and x[n]')
legend('y6[n]','x[n]')
xlabel('n');
axis([-40 40 -3 3])
```

הסבר לתוצאות שהתקבלו:

- עבור x[n],y2[n]:
קיבלנו כי $X(e^{jw}) = Y_2(e^{jw})$ ולכן גם x[n]=y2[n] . $Y_2(e^{jw})$ מכיל 4 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב סופרפוזיציה של 2 קוסינוסים. כתוצאה מכך הגרפים זהים (השחור והאדום), המוצא זהה לכניסה. כלומר: $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) = y2[n]$.
- עבור x[n],y3[n]:
$Y_2(e^{jw})$ מכיל 2 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב: $y3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$. נשים לב שהגרף השחור אכן גרף של קוסינוס.
- עבור x[n],y4[n]:
$Y_2(e^{jw})$ מכיל 2 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב: $y4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$. נשים לב שהגרף השחור אכן גרף של קוסינוס.
- עבור x[n],y6[n]:
קיבלנו כי $Y_6(e^{jw}) = 0$ אשר אינו מכיל כלל הלמים בתדר. נשים לב כי הגרף השחור שהתקבל קרוב ל-0 מכיוון שהמסנן שקיבלנו אינו אידיאלי לחלוטין. לכן בתחום הזמן $y6[n] \approx 0$.

חלק ג' - דגימה:

סעיף 1 – אותות חסומים סרט:

א':

- $x_c(t) = sinc(\frac{t}{6})$, נבחין: $x_c(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6}\, sinc\left(\frac{t}{6}\right)$. לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחה:

$$\frac{B}{\pi} sinc(\frac{Bt}{\pi}) = \begin{cases} 1, |\Omega| < B \\ 0, otherwise \end{cases}$$

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

במקרה שלנו B=$\frac{\pi}{6}$, ולכן: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 6, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$, ולכן התדר המקסימלי הוא $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. הזמן המקסימלי עבורו ניתן יהיה לשחזר את האות הדגוום *x[n]* יתקבל מתנאי נייקווייסט: $\frac{2\pi}{Ts} \geq 2\Omega_m$ ולכן: $Ts \leq 6$ [זמן], כלומר Tmax=6[זמן]

- $x_c(t) = sinc^2(\frac{t}{12})$, נסמן: $\widetilde{x_c}(t) = sinc(\frac{t}{12})$ כלומר: $x_c(t) = \widetilde{x_c}(t) \cdot \widetilde{x_c}(t)$. כעת נשתמש בתכונת מכפלה בזמן/קונבולוציה בתדר ונקבל:

$$\mathcal{F}\{\widetilde{x_c}(t) \cdot \widetilde{x_c}(t)\} = \frac{1}{2\pi}\widetilde{X_c}(j\Omega) * \widetilde{X_c}(j\Omega)$$

לחישוב FT של האות $\widetilde{x_c}(t)$ נשתמש בנוסחה: $\frac{B}{\pi}sinc(\frac{Bt}{\pi}) = \begin{cases} 1, |\Omega| < B \\ 0, otherwise \end{cases}$

במקרה שלנו B=$\frac{\pi}{12}$, ולכן: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 12, |\Omega| < \frac{\pi}{12} \\ 0, otherwise \end{cases}$. כעת נשתמש בתכונה שקונבלוציה על שני מלבנים זהים היא משלוש. כאשר במקרה שלנו עבור המלבנים: $a = \frac{\pi}{12}, b = 12$ לכן נקבל עבור המשלוש: גובה $2ab^2 = 24\pi$ והמרחק מהראשית הוא |2a|=$\frac{\pi}{6}$. שיפוע הישר (בחלק המישור הימני): $slope = \frac{24\pi - 0}{0 - \frac{\pi}{6}} = -144$, מסימטריה של המשולש נקבל:

$$x_c(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi}\begin{cases} 24 - 144\Omega, 0 < \Omega \leq \frac{\pi}{6} \\ 24 + 144\Omega, -\frac{\pi}{6} \leq \Omega \leq 0 \\ 0, otherwise \end{cases} = \begin{cases} 12 - \frac{72}{\pi}|\Omega|, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

ולכן התדר המקסימלי הוא $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. הזמן המקסימלי עבורו ניתן יהיה לשחזר את האות הדגוום *x[n]* יתקבל מתנאי נייקווייסט: $\frac{2\pi}{Ts} \geq 2\Omega_m$ ולכן: $Ts \leq 6$ [זמן]. כלומר Tmax=6[זמן].

- $x_c(t) = cos(\frac{\pi t}{12})$. לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחה:

$$\mathcal{F}\{\cos(\Omega_0 t)\} = \pi[\delta[w - w_0] + \delta[w + w_0]]$$

לכן:

$$\mathcal{F}\{x_c(t)\} = \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta[w + \frac{\pi}{12}]\right]$$

לכן התדר המקסימלי הוא $\Omega_m = \frac{\pi}{12}$. נבחין שעבור $\Omega_m = \pm\frac{\pi}{12}$ מתקבל $X_c(j\Omega) \neq 0$ ולכן זהו מקרה גבולי של משפט נייקוויסט ונדרוש שייתקיים: $\frac{2\pi}{Ts} > 2\Omega_m$ ולכן: $Ts < 12$ [זמן].

- $x_c(t) = cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחאות:

$$\mathcal{F}\{\cos(\Omega_0 t)\} = \pi[\delta[w - w_0] + \delta[w + w_0]]$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\Omega_0 t)\} = \frac{\pi}{j}[\delta[w - w_0] - \delta[w + w_0]]$$

לכן:

$$X_c(j\Omega) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta[w + \frac{\pi}{12}]\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{6}\right] - \delta[w + \frac{\pi}{6}]\right]$$

לכן התדר המקסימלי הוא $\Omega_m = \max\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right\} = \frac{\pi}{6}$. נבחין שעבור $\Omega_m = \pm\frac{\pi}{6}$ מתקבל $X_c(j\Omega) \neq 0$ ולכן זהו מקרה גבולי של משפט נייקוויסט ונדרוש שייתקיים: $\frac{2\pi}{Ts} > 2\Omega_m$ ולכן: $Ts < 6$ [זמן].

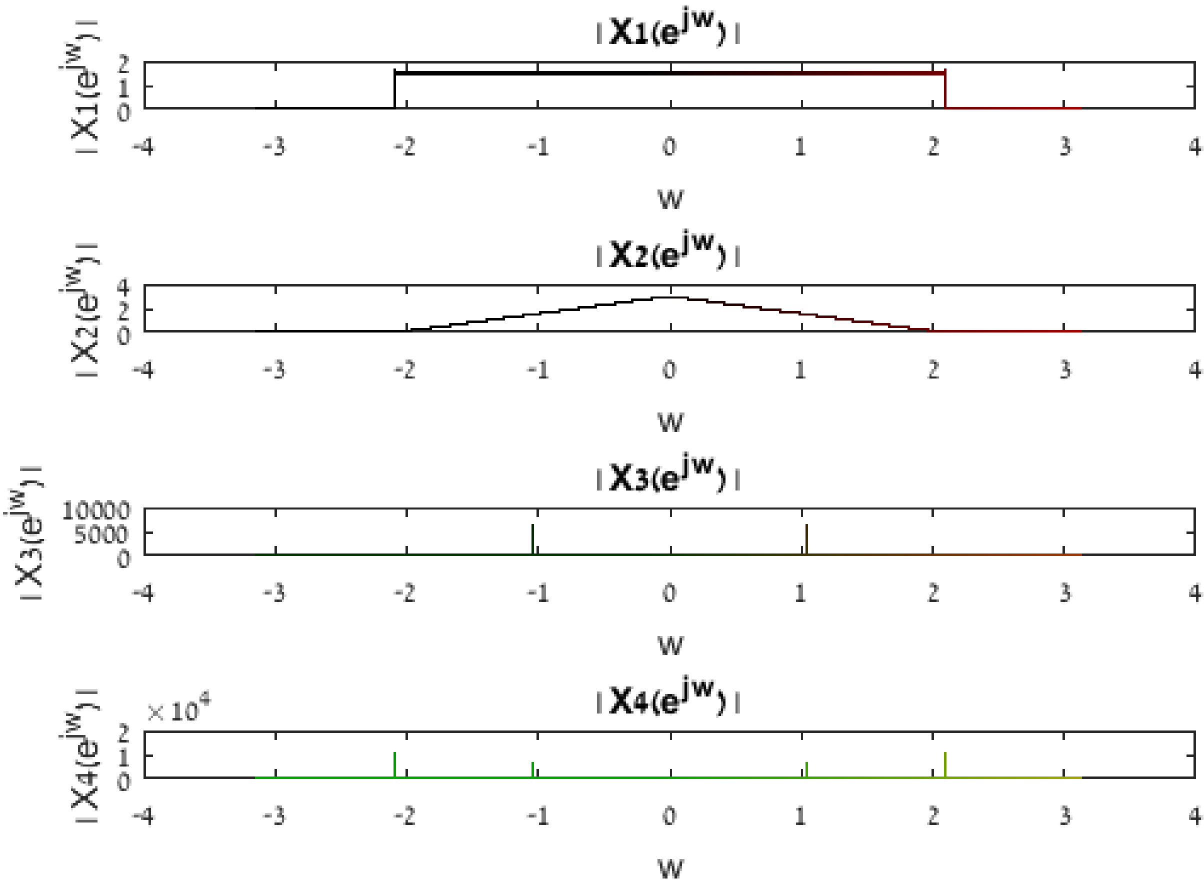
אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

ב':

ביטויים לאות הדגום כתלות בזמן הדגימה T, נשתמש בנוסחה: $x[n] = X_c(t = nT)$

T שיאפשר שיחזור	האות הדגום
$Ts \leq 6$	x[n]=sinc($\frac{nT}{6}$]
$Ts \leq 6$	x[n]= $sinc^2(\frac{nT}{12})$
$Ts < 12$	$x[n] = cos(\frac{\pi nT}{12})$
$Ts < 6$	$x[n] = cos\left(\frac{\pi nT}{12}\right) + sin(\frac{\pi nT}{6})$

ג':



קוד:

```
T1=4;
n = -10000:1:10000;
w = linspace(-pi,pi,20001);

x1=sinc(n*4/6);
X1=fft(x1,20001);
subplot(4,1,1)
plot(w,abs(fftshift(X1)))
title('| X1(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X1(e^j^w) |');
```

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

```
x2=(sinc(n*T1/12)).^2;
X2=fft(x2,20001);
subplot(4,1,2)
plot(w,abs(fftshift(X2)))
title('| X2(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X2(e^j^w) |');

x3=cos(pi*n*T1/12);
X3=fft(x3,20001);
subplot(4,1,3)
plot(w,abs(fftshift(X3)))
title('| X3(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X3(e^j^w) |');

x4=cos(pi*n*T1/12)+sin(pi*n*T1/6);
X4=fft(x4,20001);
subplot(4,1,4)
plot(w,abs(fftshift(X4)))
title('| X4(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X4(e^j^w) |');
```

הסבר:

- עבור $x_c(t) = sinc(\frac{t}{6})$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 6, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. נציב T1=4 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. תנאי נייקוויסט מתקיים כי $T1\leq 6$ אשר מתיישב עם $\Omega_s = \frac{\pi}{2} \geq 2\Omega_m = \frac{\pi}{3}$. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 ($w=\Omega T$), והגובה קטן פי 4. ז"א שגובה המלבן הוא 1.5 וקצוות המלבן בתדרים: $w = |\frac{2\pi}{3}| \approx \pm 2.09$.

- עבור $x_c(t) = sinc^2(\frac{t}{12})$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 12 - \frac{72}{\pi}|\Omega|, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. נציב T1=4 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. תנאי נייקוויסט מתקיים כי $T1\leq 6$ אשר מתיישב עם $\Omega_s = \frac{\pi}{2} \geq 2\Omega_m = \frac{\pi}{3}$. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 ($w=\Omega T$), והגובה קטן פי 4. ז"א שגובהו המקסימלי של המשולש הוא 3 וקצוות המשולש בתדרים: $w = |\frac{2\pi}{3}| \approx \pm 2.09$.

- עבור $x_c(t) = cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{12}\right]\right]$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{12}$. נציב T1=4 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. תנאי נייקוויסט מתקיים כי $T1\leq 6$ אשר מתיישב עם $\Omega_s = \frac{\pi}{2} \geq 2\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 ($w=\Omega T$), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים: $w = |\frac{\pi}{3}| \approx \pm 1.04$.

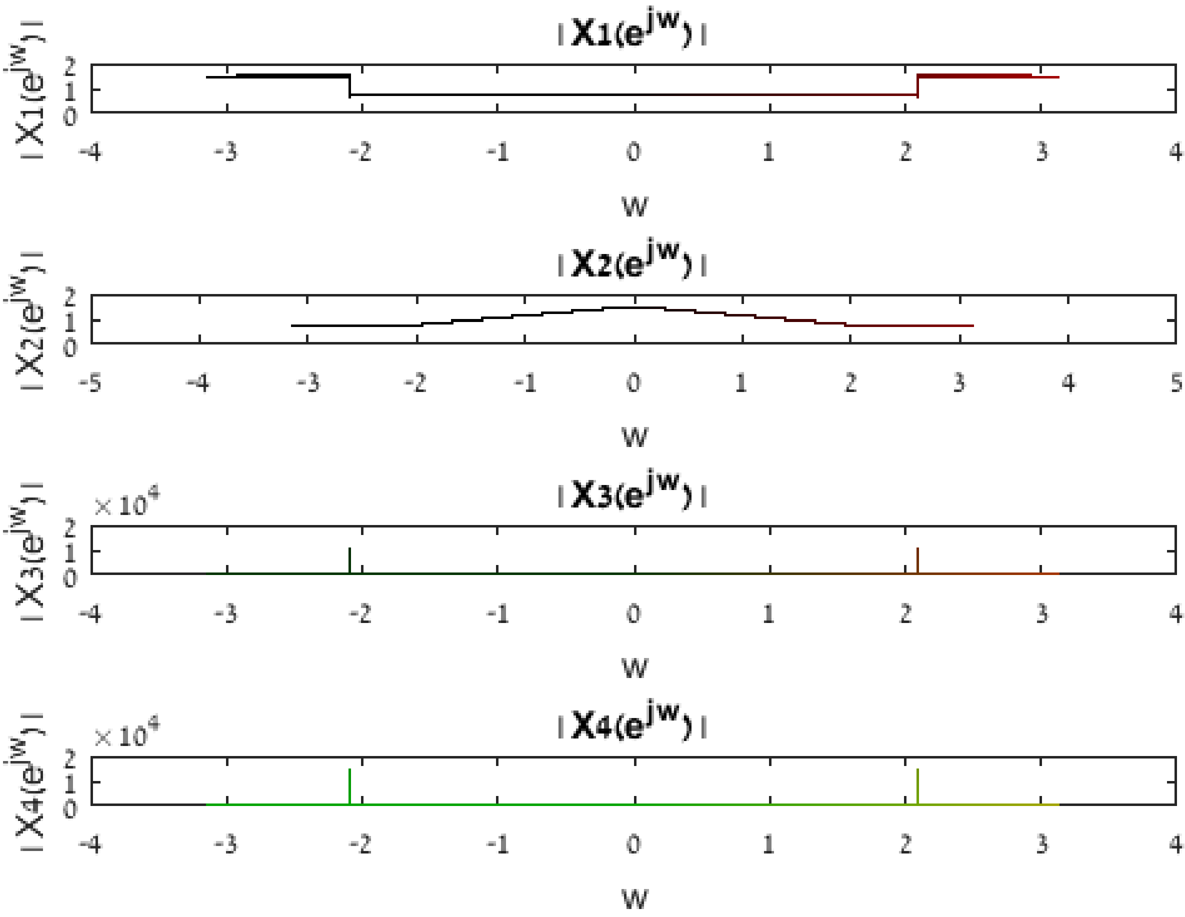
- עבור $x_c(t) = cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

קיבלנו כי: $X_c(j\Omega) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{12}\right]\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{6}\right] - \delta\left[w + \frac{\pi}{6}\right]\right]$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. נציב T1=4 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. תנאי נייקוויסט מתקיים כי $T1\leq 6$ אשר מתיישב עם $\Omega_s = \frac{\pi}{2} \geq 2\Omega_m = \frac{\pi}{3}$. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 ($w=\Omega T$), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים:

$w1 = |\frac{\pi}{3}| \approx \pm 1.04, w2 = |\frac{2\pi}{3}| \approx \pm 2.09$.

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

ב':



קוד:

```
T2=8;
n = -10000:1:10000;
w = linspace(-pi,pi,20001);

x1=sinc(n*T2/6);
X1=fft(x1,20001);
subplot(4,1,1)
plot(w,abs(fftshift(X1)))
title('| X1(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X1(e^j^w) |');

x2=(sinc(n*T2/12)).^2;
X2=fft(x2,20001);
subplot(4,1,2)
plot(w,abs(fftshift(X2)))
axis([-5 5 0 2])
title('| X2(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X2(e^j^w) |');

x3=cos(pi*n*T2/12);
X3=fft(x3,20001);
subplot(4,1,3)
plot(w,abs(fftshift(X3)))
title('| X3(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X3(e^j^w) |');

x4=cos(pi*n*T2/12)+sin(pi*n*T2/6);
X4=fft(x4,20001);
subplot(4,1,4)
plot(w,abs(fftshift(X4)))
```

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

```
title('| X4(e^j^w) |')
xlabel('w')
ylabel('| X4(e^j^w) |');
```

הסבר:

- עבור $x_c(t) = sinc(\frac{t}{6})$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 6, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. נציב T2=8 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.
תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי *T2>6*. החפיפה תהה החל מתדר: $w = \pm(\Omega_s - \Omega_m)T2 = \pm\frac{2\pi}{3} \approx 2.09$ עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי8 (w=ΩT), והגובה קטן פי 8. ז"א באיזורי החפיפה $\frac{2\pi}{3} \le |w| \le \pi$ גובה המלבן הוא סופרפוזיציה של שני המלבנים כלומר $2 * \left(\frac{6}{8}\right) = 1.5$, באיזורים ללא חפיפה $|w| < \frac{2\pi}{3}$ הגובה הוא של מלבן אחד 0.75.
- עבור $x_c(t) = sinc^2(\frac{t}{12})$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \begin{cases} 12 - \frac{72}{\pi}|\Omega|, |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0, otherwise \end{cases}$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. נציב T2=8 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי *T2>6*. החפיפה תהה החל מתדר: $w = \pm(\Omega_s - \Omega_m)T2 = \pm\frac{2\pi}{3} \approx 2.09$ עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי8 (w=ΩT), והגובה קטן פי 8. ז"א גובה המשלוש המקסימלי ב- $\left(\frac{12}{8}\right) = 1.5$, באיזורי החפיפה יש סופרפוזיציה בין שני המשלושים (בין שני קווים ישרים בעלי שיפועים מנוגדים) ולכן מתקבל קו ישר.
- עבור $x_c(t) = cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ קיבלנו כי: $x_c(t) \xrightarrow{FT} \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{12}\right]\right]$ כאשר $\Omega_m = \frac{\pi}{12}$. נציב T2=8 ונקבל: תנאי נייקוויסט מתקיים כי *T2≤12* אשר מתיישב עם $\Omega_s = \frac{\pi}{4} \ge 2\Omega_m = \frac{\pi}{6}$. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 8 (w=ΩT), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים: $w = \Omega_m * T2 = |8 * \frac{\pi}{12}| \approx \pm 2.09$.
- עבור $x_c(t) = cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

קיבלנו כי: $X_c(j\Omega) = \pi\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{12}\right] + \delta\left[w + \frac{\pi}{12}\right]\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta\left[w - \frac{\pi}{6}\right] - \delta\left[w + \frac{\pi}{6}\right]\right]$ נציב T2=8 ונקבל: $\Omega_s = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי *T2>6*. החפיפה תהה החל מתדר:

$w = \pm(\Omega_s - \Omega_m)T2 = \pm\frac{2\pi}{3} \approx 2.09$, עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 8 (w=ΩT).
מכיוון שאנו מתסכלים רק על מחזור דגימה בודד $|w| \le \pi$ נקבל רק את ההלמים ב- $w = \pm\frac{2\pi}{3}$. נשים לב שההלמים שנוצרים מהשכפול תורמים במחזור הבודד רק את ההלם שנוצר מרכיב הסינוס בתדרים:

$w = \pm\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \pm\frac{2\pi}{3}$ בהתאמה, כך שהם עולים על ההלמים של הקוסינוס המקורי, ולכן נקבל הלמים 'גבוהים יותר' מהמקוריים. נקבל רק הלמים ב: $w = |\frac{2\pi}{3}| \approx \pm 2.09$.

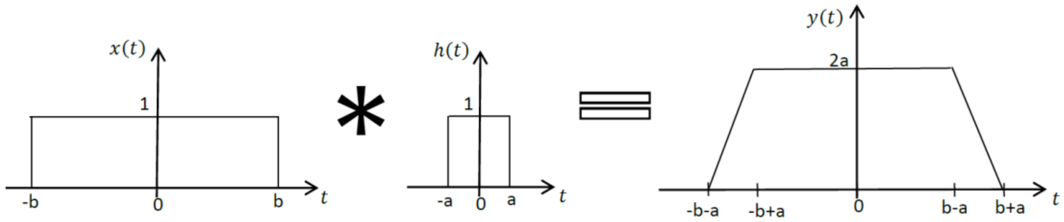
<u>סעיף 2 – אותות לא חסומים סרט:</u>

<u>א':</u>

- $x_c(t) = \begin{cases} 1, |t| \le 80 \\ 0, otherwise \end{cases}$, למציאת התמרת פוריה נשתמש בנוסחה:
$x_c(t) = \begin{cases} 1, |t| \le T1 \\ 0, otherwise \end{cases} \overset{FT}{\Rightarrow} 2T1sinc\left(\frac{\Omega T1}{\pi}\right)$ כאשר אצלנו *T1=80*, לכן נקבל: $X_c(j\Omega) = 160sinc\left(\frac{80\Omega}{\pi}\right)$.
- $x_c(t) = \begin{cases} 1, -\frac{|t|}{160} & |t| \le 160 \\ 0, otherwise \end{cases}$, למציאת התמרת פוריה נשתמש בנוסחה:
$x_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, |t| \le T \\ 0, otherwise \end{cases} \overset{FT}{\Rightarrow} Tsinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$ כאשר אצלנו *T=160*, לכן נקבל: $X_c(j\Omega) = 160sinc^2\left(\frac{80\Omega}{\pi}\right)$.

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

- $x_c(t)=\begin{cases}1, |t|\le 80\\ 2-\frac{|t|}{80}, 80\le |t|\le 160\\ 0, otherwise\end{cases}$, נשים לב שהאות הוא טרפז בזמן שהוא קונבלוציה של שני מלבנים ברוחב שונה וגובה זהה בזמן. לפי הפיתוח שראינו בתרגול:



נמצא את a,b ממערכת המשוואות: a+b=160, b-a=80 , הפתרון הוא: a=40,b=120. האות שלנו בנוי מקונבולוציה של:

$x_2(t)=\begin{cases}1, |t|\le 120\\ 0, otherwise\end{cases}$, $x_1(t)=\begin{cases}1, |t|\le 40\\ 0, otherwise\end{cases}$, ולכן בשימוש בנוסחה $x_c(t)=\begin{cases}1, |t|\le T1\\ 0, otherwise\end{cases} \overset{FT}{\Rightarrow} 2T1sinc\left(\frac{\Omega T1}{\pi}\right)$

ובתכונת קונבולוציה בזמן/מכפלה בתדר נקבל: $X'_c(j\Omega)=240sinc\left(\frac{120\Omega}{\pi}\right)\cdot 80sinc\left(\frac{40\Omega}{\pi}\right)$. מכיוון שגובה הטרפז שלנו הוא 1 ולא 80, יש לחלק בפקטור 80: $X_c(j\Omega)=240sinc\left(\frac{120\Omega}{\pi}\right)\cdot sinc\left(\frac{40\Omega}{\pi}\right)$.

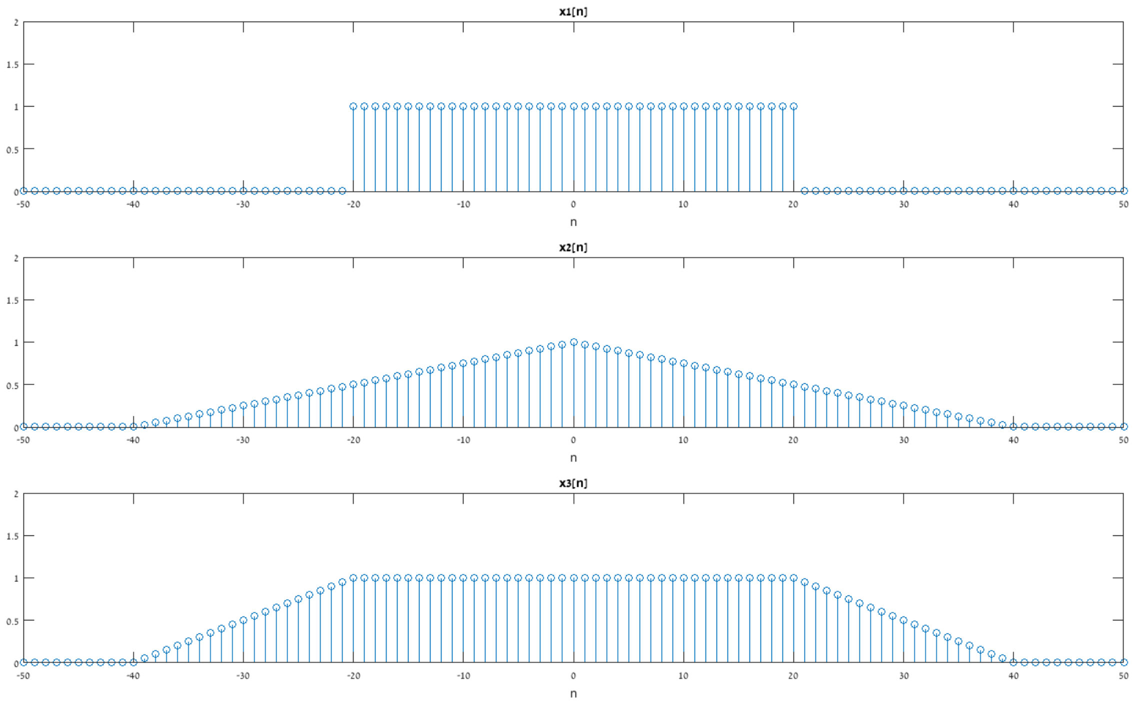
<u>ב':</u>

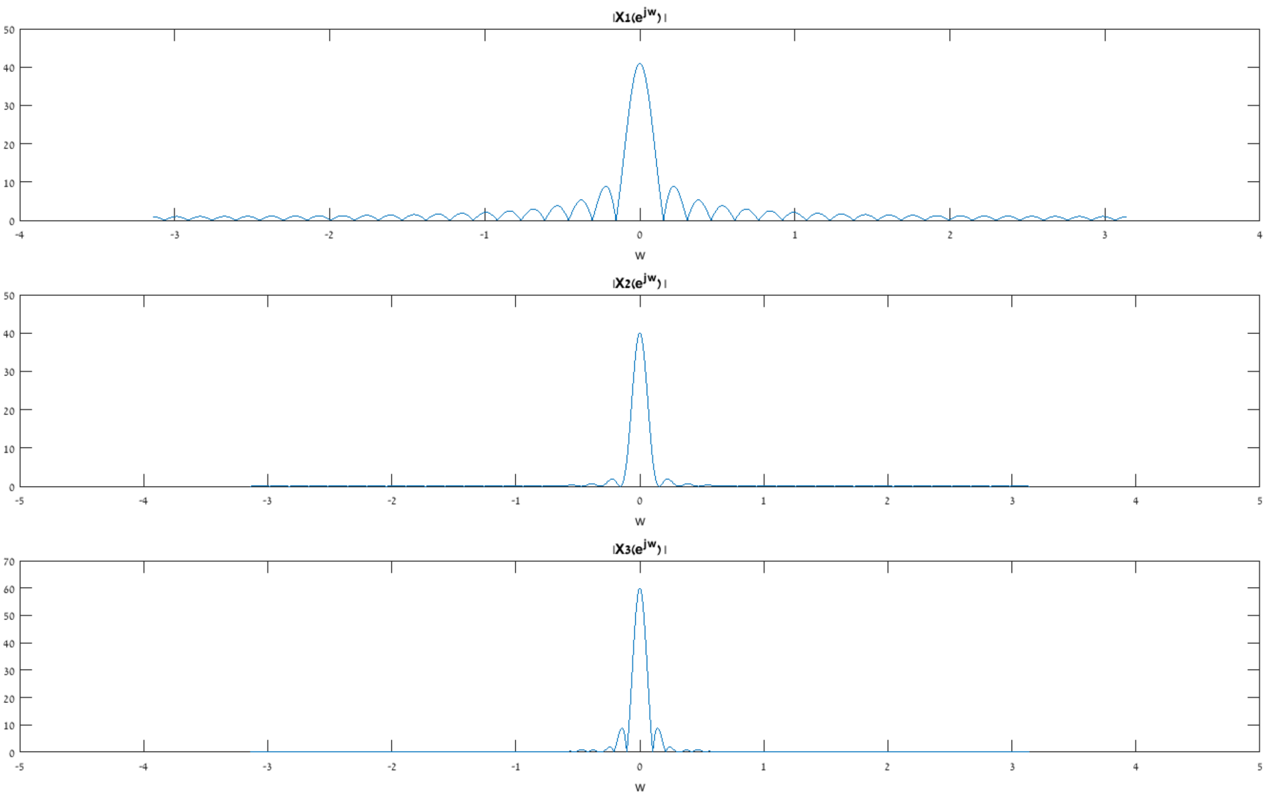
ביטויים לאות הדגום כתלות בזמן הדגימה T, נשתמש בנוסחה: $x[n]=X_c(t=nT)$

- $x[n]=x_c(t=nT)=\begin{cases}1, |nT|\le 80\\ 0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}1, |n|\le \frac{80}{T}\\ 0, otherwise\end{cases}$
- $x[n]=x_c(t=nT)=\begin{cases}1,-\frac{|nT|}{160}\ |nT|\le 160\\ 0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}1,-\frac{|nT|}{160}\ |n|\le \frac{160}{T}\\ 0, otherwise\end{cases}$
- $x[n]=x_c(t=nT)=\begin{cases}1, |nT|\le 80\\ 2-\frac{|nT|}{80}, 80\le |nT|\le 160\\ 0, otherwise\end{cases}=\begin{cases}1, |n|\le \frac{80}{T}\\ 2-\frac{|nT|}{80}, \frac{80}{T}\le |n|\le \frac{160}{T}\\ 0, otherwise\end{cases}$

אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

ג':





אור בהרי 204356315
דניאל קאשי 311120430

קוד:

```
n = -10000:1:10000;
T = 4;

x1 = linspace(0,0,20001);
x2 = linspace(0,0,20001);
x3 = linspace(0,0,20001);

for n1=-10000:1:10000
    if(abs(n1*T)<=80)
        x1(n1+10001)=1;
        x3(n1+10001)=1;
    end
    if(abs(n1*T)<=160)
        x2(n1+10001)=1-(abs(T*n1)/160);
    end
    if(abs(n1*T)>80 && abs(n1*T)<=160)
        x3(n1+10001)=2-abs(T*n1)/80;
    end
end
subplot(3,1,1);
stem(n,x1);
title('x1[n]')
xlabel('n')
axis([-50 50 0 2]);
subplot(3,1,2);
stem(n,x2);
title('x2[n]')
xlabel('n')
axis([-50 50 0 2]);
subplot(3,1,3);
stem(n,x3);
title('x3[n]')
xlabel('n')
axis([-50 50 0 2]);

figure
w = linspace(-pi,pi,20001);
X1=fft(x1,20001);

subplot(3,1,1)
plot(w,abs(fftshift(X1)))
title('|X1(e^j^w) |')
xlabel('w');

X2=fft(x2,20001);
subplot(3,1,2)
plot(w,abs(fftshift(X2)))
title('|X2(e^j^w) |')
xlabel('w')
axis([-5 5 0 50]);

X3=fft(x3,20001);
subplot(3,1,3)
plot(w,abs(fftshift(X3)))
title('|X3(e^j^w) |')
xlabel('w')
axis([-5 5 0 70]);
```