אותות ומערכות תרגיל המטלב

נתון האות הבא:

כאשר y[n] מוצא המערכת ו-x[n] כניסת המערכת. האותות דיסקרטיים.

לינאריות

נשים לב שאין צורך לכתוב את y[n] מפורשות, ונוכל להוכיח לינאריות עבור משוואת ההפרשים.

עבור כניסה x1[n] המוצא יהיה:

𝑦1[𝑛]−4𝑦1[𝑛−1]+4𝑦1[𝑛−2]=20𝑥1[𝑛]+10𝑥1[𝑛−1]

נכפול בסקלר ונקבל:

באופן דומה עבור כניסה x2[n]:

נכפול בסקלר ונקבל:

נחבר את משוואות 1 ו-2, נקבל:

נשים לב שתכונות הסופרפוזיציה מתקיימות, אם נסמן: עבור כל n נקבל מהמשוואה למעלה:

כאשר:

ז"א מצד אחד הראינו ש:

מכיוון שהמשוואה האחרונה שקיבלנו היא בדיוק הגדרת המערכת S.

מצד שני הראינו ש: (לפי איך שהגדרנו את y3) ש:

כלומר לסיכום הראינו ש:

ומכאן שהמערכת S לינארית.

קבועה בזמן:

עלינו להראות שהזזת האות בכניסה גוררת הזזת האות במוצא עבור כל n:

הוכחה –

משוואת ההפרשים עבור כל n שלם:

נציב n=n-n0 במשוואת ההפרשים ונקבל:

כמו כן עבור כניסה x[n-n0] שמוצאה הוא מתקבלת משוואת ההפרשים הבאה:

שני הביטויים שקיבלנו נכונים עבור כל n ולכן נשוואה ביניהם:

ולכן המערכת קבועה בזמן.

LTI: הוכחנו כי המערכת לינארית וקבועה בזמן לפי הגדרה היא גם LTI.

בעלת זיכרון:

נבודד את המוצא y[n] ממשוואת ההפרשים:

נשים לב כי y[n] תלוי בפלטי העבר y[n-1] y[n-2] ובקלטי ההווה והעבר x[n] x[n-1] בלבד לכן המערכת בעלת זיכרון.

הפיכה:

על ידי שימוש בתכונת ההזזה בזמן והלינאריות של התמרת Z ניתן לקבל את פונקציית התמסורת של המערכת כמנת הפולינומים האופיינים:

את משוואת ההפרשים פותרים עבור התמרת Z החד-צדדית(סיבתית) ולכן עבור הקוטב בz=2 נקבל כי rocH:|z|>2

המערכת הפיכה אם קיימת Hi(Z) כך שמתקיים: .

לכל |z|>2 מתקיים . לכן נאמר שעבור |z|>2 מתקיים ובמובן הזמן זה אומר ש:

H(z) תתאפס כאשר המונה מתאפס. כלומר ב:

נשים לב שהאפס שקיבלנו z=-0.5 לא שייך ל- rocH כלומר קיבלנו שאכן לכל |z|>2 מתקיים

ולכן קיימת מערכת הופכית כזו והיא:

כאשר משוואת ההפרשים של המערכת היא:

מכיוון שאנו פותרים משוואות הפרשים עבור התמרת Z החד צדדית הסיבתית, נקבל שעבור הקוטב הפשוט היחיד ב-z=-0.5 ה-rocHi הוא |z|>0.5 אשר כולל את מעגל היחידה ולכן המערכת ההופכית יציבה.

כמו כן המערכת ההופכית אכן סיבתית כי הrocHi שלה מצורת 'שמש'.

יציבות במובן BIBO:

הראינו ש: RocH: |z|>2. ה=ROCH לא מכיל את מעגל היחידה |z|=1 ולכן המערכת לא יציבה. דוגמא נגדית בקוד הפייתון/מטלב.

סיבתית:

נראה שהמערכת סיבתית אם התגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0.

ראינו שפונצקיית התמסורת של המערכת S היא:

נסדר את הביטוי:

ולכן לפי נוסחה של התמרה מוכרת שלמדנו:

בגלל פונקציית המדרגה נשים לב שאכן קיבלנו שהתגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0 ולכן המערכת סיבתית.