אותות ומערכות תרגיל המטלב

חלק א' – מערכות

נתון האות הבא:

כאשר y[n] מוצא המערכת ו-x[n] כניסת המערכת. האותות דיסקרטיים.

**לינאריות**

נשים לב שאין צורך לכתוב את y[n] מפורשות, ונוכל להוכיח לינאריות עבור משוואת ההפרשים.

עבור כניסה x1[n] המוצא יהיה:

נכפול בסקלר ונקבל:

באופן דומה עבור כניסה x2[n]:

נכפול בסקלר ונקבל:

נחבר את משוואות 1 ו-2, נקבל:

נשים לב שתכונות הסופרפוזיציה מתקיימות, אם נסמן: עבור כל n נקבל מהמשוואה למעלה:

כאשר:

ז"א מצד אחד הראינו ש:

מכיוון שהמשוואה האחרונה שקיבלנו היא בדיוק הגדרת המערכת S.

מצד שני הראינו ש: (לפי איך שהגדרנו את y3) ש:

כלומר לסיכום הראינו ש:

ומכאן שהמערכת S לינארית.

**קבועה בזמן:**

עלינו להראות שהזזת האות בכניסה גוררת הזזת האות במוצא עבור כל n:

משוואת ההפרשים עבור כל n שלם:

נציב n=n-n0 במשוואת ההפרשים ונקבל:

כמו כן עבור כניסה x[n-n0] שמוצאה הוא מתקבלת משוואת ההפרשים הבאה:

שני הביטויים שקיבלנו נכונים עבור כל n ולכן נשוואה ביניהם:

ולכן המערכת קבועה בזמן.

**LTI**:

הוכחנו כי המערכת לינארית וקבועה בזמן לפי הגדרה היא גם LTI.

**בעלת זיכרון**:

נבודד את המוצא y[n] ממשוואת ההפרשים:

נשים לב כי y[n] תלוי בפלטי העבר y[n-1] y[n-2] ובקלטי ההווה והעבר x[n] x[n-1] ולכן המערכת בעלת זיכרון.

**הפיכה**:

על ידי שימוש בתכונת ההזזה בזמן והלינאריות של התמרת Z ניתן לקבל את פונקציית התמסורת של המערכת כמנת הפולינומים האופיינים:

את משוואת ההפרשים פותרים עבור התמרת Z החד-צדדית (סיבתית) ולכן עבור הקוטב ב-z=2 נקבל כי .

המערכת הפיכה אם קיימת כך שמתקיים: ולכל |z|>2 מתקיים .

לכן נאמר שעבור |z|>2 מתקיים ובמובן הזמן זה אומר ש:

H(z) תתאפס כאשר המונה מתאפס. כלומר ב:

נשים לב שהאפס שקיבלנו z=-0.5 לא שייך ל- כלומר קיבלנו שאכן לכל |z|>2 מתקיים

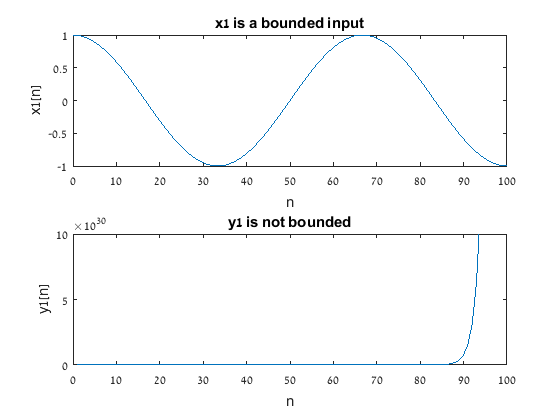
ולכן קיימת מערכת הופכית כזו והיא:

כאשר משוואת ההפרשים של המערכת היא:

מכיוון שאנו פותרים משוואות הפרשים עבור התמרת Z החד צדדית הסיבתית, נקבל שעבור הקוטב הפשוט היחיד ב-z=-0.5 ה- הוא |z|>0.5 אשר כולל את מעגל היחידה ולכן המערכת ההופכית יציבה. כמו כן המערכת ההופכית אכן סיבתית כי ה- שלה מצורת 'שמש'.

**יציבות במובן BIBO**:

הראינו ש: . ה- לא מכיל את מעגל היחידה |z|=1 ולכן המערכת לא יציבה. דוגמא נגדית מקוד המטלב:

קלט: x[n]=cos(0.03 אשר היו אות חסום (אות ממשי).פלט: מתקבל מוצא שאינו חסום.**

קוד:

n = 0:1:100;

x1 = cos(0.03\*pi\*n);

subplot(2,1,1)

plot(n,x1)

title('x1 is a bounded input');

xlabel('n');

ylabel('x1[n]');

y1(1:100)=0;

%Inital assignmets

y1(1) = 0;

y1(2)= 0;

for n = 3:1:100

y1(n) = 4\*y1(n-1)-4\*y1(n-2)+20\*x1(n)+10\*x1(n-1);

end

n1 = 1:1:100;

subplot(2,1,2)

plot(n1,y1)

axis([0 100 0 10^31])

title('y1 is not bounded');

xlabel('n');

ylabel('y1[n]');

**סיבתית**:

נראה שהמערכת סיבתית אם התגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0.

ראינו שפונצקיית התמסורת של המערכת S היא:

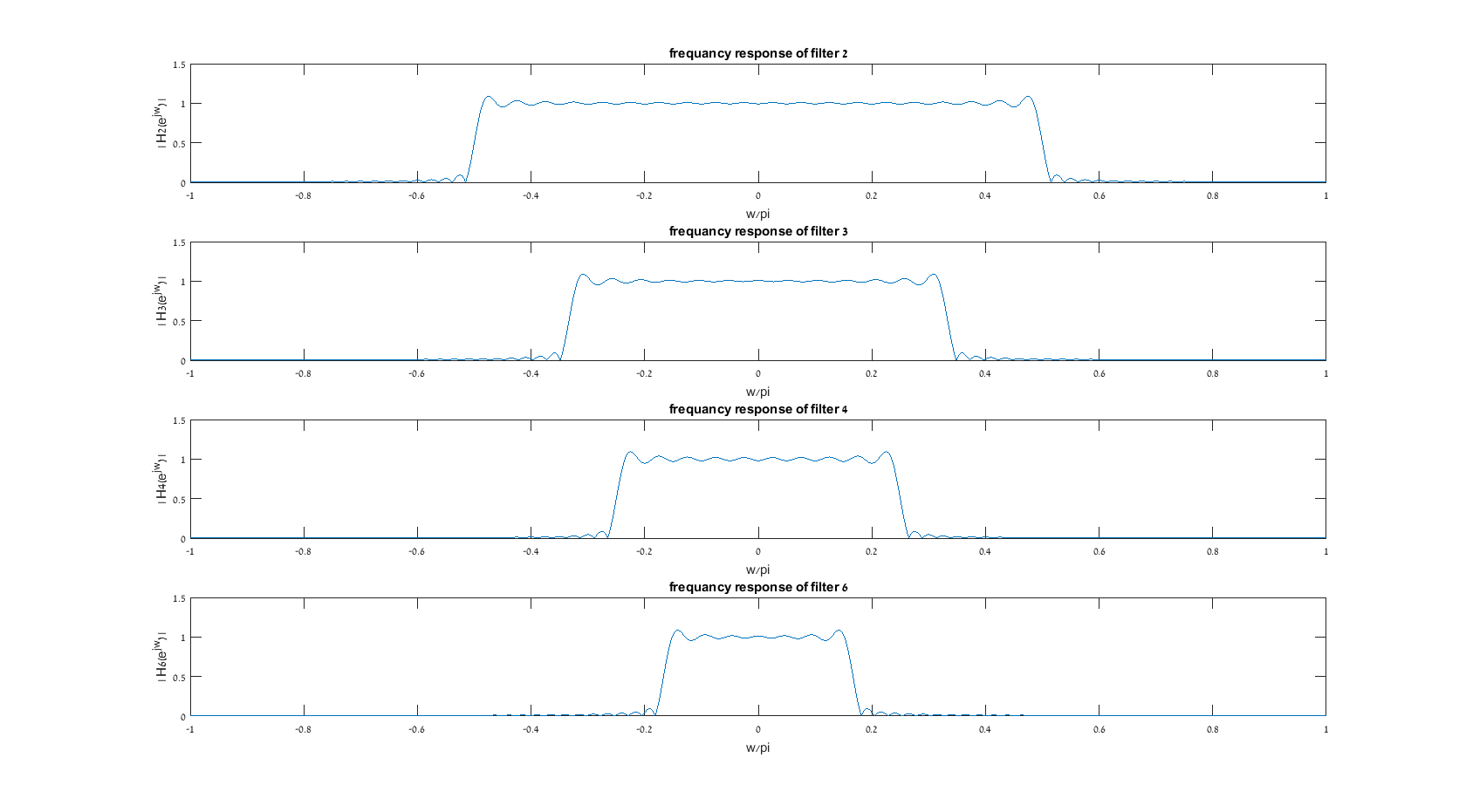
נסדר את הביטוי:

ולכן לפי נוסחה של התמרה מוכרת שלמדנו:

נשים לב שאכן קיבלנו שהתגובה להלם h[n] מקיימת h[n]=0 לכל n<0 ולכן המערכת סיבתית.

חלק ב' – מסנן LPF:

סעיף 1 – הצגת המסננים:

תגובת התדר של כל אחד מ-4 המסננים:

קוד:

%Load h2

load('LPF.mat')

w=linspace(-pi,pi,20001);

%Plot h2 frequancy response

h\_2=fft(h2,20001);

subplot(4,1,1)

plot(w/pi,abs(fftshift(h\_2)))

title('frequancy response of filter 2');

xlabel('w/pi');

ylabel('| H2(e^j^w) |');

%Plot h3 frequancy response

h\_3=fft(h3,20001);

subplot(4,1,2)

plot(w/pi,abs(fftshift(h\_3)))

title('frequancy response of filter 3');

xlabel('w/pi');

ylabel('| H3(e^j^w) |');

%Plot h4 frequancy response

h\_4=fft(h4,20001);

subplot(4,1,3)

plot(w/pi,abs(fftshift(h\_4)))

title('frequancy response of filter 4');

xlabel('w/pi');

ylabel('| H4(e^j^w) |');

%Plot h6 frequancy response

h\_6=fft(h6,20001);

subplot(4,1,4)

plot(w/pi,abs(fftshift(h\_6)))

title('frequancy response of filter 6');

xlabel('w/pi');

ylabel('| H6(e^j^w) |');

סעיף 2 – העברת תדרים נמוכים:

אות הכניסה:

א'

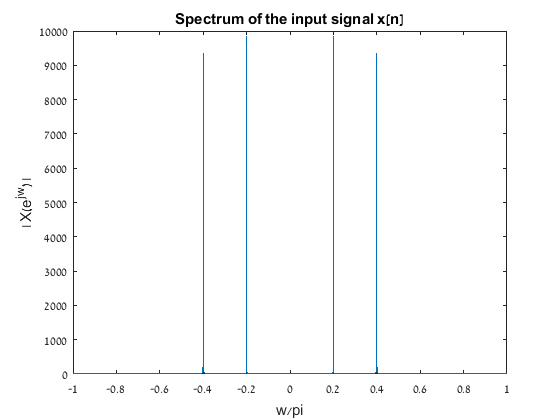
נבטא את x[n] ע"י סכום 2 קוסינוסים בעזרת הזהות הטריגונומטרית:

לכן נקבל:

נבצע התמרת פוריה בדידה ל-x[n], נשתמש בתכונת הלינאריות וניעזר בנוסחה:

לכן ספקטרום אות הכניסה הוא:

ב':



קוד:

n=-10000:1:10000;

x=2\*cos((1/10)\*pi\*n).\*cos((3/10)\*pi\*n);

%DTFT of x[n]

w =linspace(-pi,pi,20001);

X=fft(x,20001);

plot(w/pi,abs(fftshift(X)))

title('Spectrum of the input signal x[n]')

xlabel('w/pi');

ylabel('| X(e^j^w) |');

axis([-1 1 0 10^4])

ג':

נמצא באופן אנליטי את מוצא המסנן y[n] בהנחת מסננים אידיאליים:

נשתמש בתוכנת הקונבולוציה בזמן/מכפלה בתדר:

* מסנן h2[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

התמרה הפוכה: .

* מסנן h3[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

התמרה הפוכה:

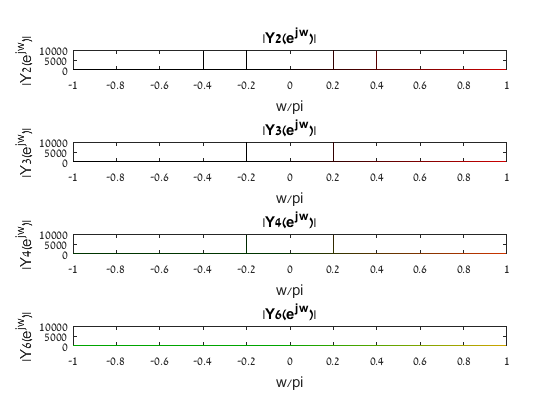
* מסנן h4[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

התמרה הפוכה:

* מסנן h6[n]: לפי הגדרת המסנן בשאלה ובהנחה שהוא אידיאלי:

התמרה הפוכה: .

ד':



קוד:

load LPF.mat

n=-10000:1:10000;

x=2\*cos((1/10)\*pi\*n).\*cos((3/10)\*pi\*n);

X=fft(x,20001);

%Plot output spectrum Y2

H2=fft(h2,20001);

Y2=X.\*H2;

w =linspace(-pi,pi,20001);

subplot(4,1,1)

plot(w/pi,abs(fftshift(Y2)))

title('|Y2(e^j^w)|');

xlabel('w/pi');

ylabel('|Y2(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y3

H3=fft(h3,20001);

Y3=X.\*H3;

subplot(4,1,2)

plot(w/pi,abs(fftshift(Y3)))

title('|Y3(e^j^w)|');

xlabel('w/pi');

ylabel('|Y3(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y4

H4=fft(h4,20001);

Y4=X.\*H4;

subplot(4,1,3)

plot(w/pi,abs(fftshift((Y4))))

title('|Y4(e^j^w)|');

xlabel('w/pi');

ylabel('|Y4(e^j^w)|');

%Plot output spectrum Y6

H6=fft(h6,20001);

Y6=X.\*H6;

subplot(4,1,4)

plot(w/pi,abs(fftshift(Y6)))

axis([-1 1 0 10000])

title('|Y6(e^j^w)|');

xlabel('w/pi');

ylabel('|Y6(e^j^w)|');

הסבר לתוצאות שהתקבלו:

* מסנן ה-LPF h2[n] בעל תדר קיטעון ב- ולכן יסנן תדרים בתחום: |w|>. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים . 4 התדרים האלה קטנים מ- ולכן לאחר המעבר במסנן 4 ההלמים יישארו.
* מסנן ה-LPF h3[n] בעל תדר קיטעון ב- ולכן יסנן תדרים בתחום: |w|>. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים . 2 התדרים נמצאים בתחום:

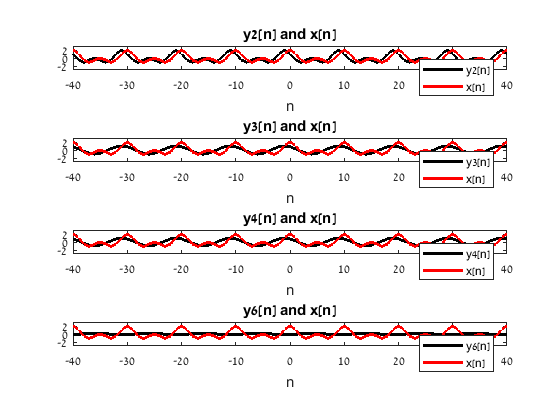
|w| ולכן לאחר המעבר במסנן נקבל במוצא בתחום התדר 2 הלמים בלבד.

* מסנן ה-LPF h4[n] בעל תדר קיטעון ב- ולכן יסנן תדרים בתחום: |w|>. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים . 2 התדרים נמצאים בתחום:

|w| ולכן לאחר המעבר במסנן נקבל במוצא בתחום התדר 2 הלמים בלבד.

* מסנן ה-LPF h6[n] בעל תדר קיטעון ב- ולכן יסנן תדרים בתחום: |w|>. עבור הכניסה הנתונה (סכום של שני קוסינוסים בזמן) קיבלנו בתדר 4 הלמים בתדרים .כל התדרים נמצאים בתחום:

|w| ולכן לאחר המעבר במסנן לא נקבל הלמים, כלומר *.*

ה':

קוד:

figure %for question 5

y2=ifft(Y2);

subplot(4,1,1)

plot(n,y2,'k',n,x,'r','LineWidth',2)

title('y2[n] and x[n]')

legend('y2[n]','x[n]')

xlabel('n');

axis([-40 40 -3 3])

y3=ifft(Y3);

subplot(4,1,2)

plot(n,y3,'k',n,x,'r','LineWidth',2)

title('y3[n] and x[n]')

legend('y3[n]','x[n]')

xlabel('n');

axis([-40 40 -3 3])

y4=ifft(Y4);

subplot(4,1,3)

plot(n,y4,'k',n,x,'r','LineWidth',2)

title('y4[n] and x[n]')

legend('y4[n]','x[n]')

xlabel('n');

axis([-40 40 -3 3])

y6=ifft(Y6);

subplot(4,1,4)

plot(n,y6,'k',n,x,'r','LineWidth',2)

title('y6[n] and x[n]')

legend('y6[n]','x[n]')

xlabel('n');

axis([-40 40 -3 3])

הסבר לתוצאות שהתקבלו:

* עבור x[n],y2[n]:

קיבלנו כי ולכן גם x[n]=y2[n] . *מכיל 4 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב סופרפוזיציה של 2 קוסינוסים. כתוצאה מכך הגרפים זהים (השחור והאדום), המוצא זהה לכניסה. כלומר: .*

* עבור x[n],y3[n]:

*מכיל 2 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב: . נשים לב שהגרף השחור אכן גרף של קוסינוס.*

* עבור x[n],y4[n]:

*מכיל 2 הלמים בתדר אשר בהתמרה ההפוכה בתחום הזמן מניב: . נשים לב שהגרף השחור אכן גרף של קוסינוס.*

* עבור x[n],y6[n]:

קיבלנו כי  *אשר אינו מכיל כלל הלמים בתדר. נשים לב כי הגרף השחור שהתקבל קרוב ל-0 מכיוון שהמסנן שקיבלנו אינו אידיאלי לחלוטין. לכן בתחום הזמן .*

חלק ג' - דגימה:

סעיף 1 – אותות חסומים סרט:

א':

* *, נבחין:* . לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחה:

במקרה שלנו B=, ולכן: , ולכן התדר המקסימלי הוא *. הזמן המקסימלי עבורו ניתן יהיה לשחזר את האות הדגוום x[n] יתקבל מתנאי נייקווייסט:*  ולכן: , כלומר Tmax=6

* *, נסמן: כלומר:* . כעת נשתמש בתכונת מכפלה בזמן/קונבולוציה בתדר ונקבל:

לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחה:

במקרה שלנו B=, ולכן: . כעת נשתמש בתכונה שקונבלוציה על שני מלבנים זהים היא משלוש. כאשר במקרה שלנו עבור המלבנים: לכן נקבל עבור המשלוש: גובה והמרחק מהראשית הוא |2a|=*. שיפוע הישר (בחלק המישור הימני): , מסימטריה של המשולש נקבל:*

ולכן התדר המקסימלי הוא *. הזמן המקסימלי עבורו ניתן יהיה לשחזר את האות הדגוום x[n] יתקבל מתנאי נייקווייסט:*  ולכן: . כלומר Tmax=6.

* *.* לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחה:

לכן:

לכן התדר המקסימלי הוא *. נבחין שעבור מתקבל ולכן זהו מקרה גבולי של משפט נייקוויסט ונדרוש שייתקיים:*  ולכן: .

* *.* לחישוב FT של האות נשתמש בנוסחאות:

לכן:

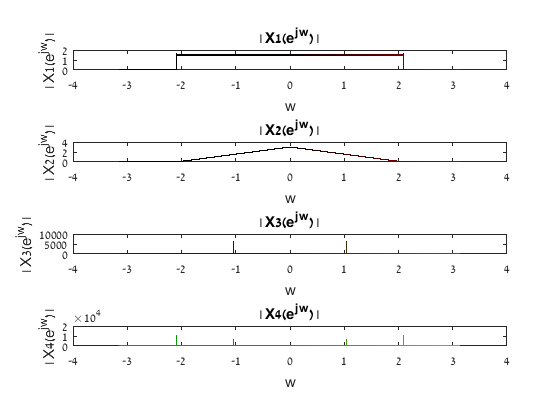
לכן התדר המקסימלי הוא *. נבחין שעבור מתקבל ולכן זהו מקרה גבולי של משפט נייקוויסט ונדרוש שייתקיים:*  ולכן: .

ב':

ביטויים לאות הדגום כתלות בזמן הדגימה T, נשתמש בנוסחה:

|  |  |
| --- | --- |
| T שיאפשר שיחזור | האות הדגום |
|  | x[n]=sinc(] |
|  | x[n]= |
|  |  |
|  |  |

ג':



קוד:

T1=4;

n = -10000:1:10000;

w = linspace(-pi,pi,20001);

x1=sinc(n\*4/6);

X1=fft(x1,20001);

subplot(4,1,1)

plot(w,abs(fftshift(X1)))

title('| X1(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X1(e^j^w) |');

x2=(sinc(n\*T1/12)).^2;

X2=fft(x2,20001);

subplot(4,1,2)

plot(w,abs(fftshift(X2)))

title('| X2(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X2(e^j^w) |');

x3=cos(pi\*n\*T1/12);

X3=fft(x3,20001);

subplot(4,1,3)

plot(w,abs(fftshift(X3)))

title('| X3(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X3(e^j^w) |');

x4=cos(pi\*n\*T1/12)+sin(pi\*n\*T1/6);

X4=fft(x4,20001);

subplot(4,1,4)

plot(w,abs(fftshift(X4)))

title('| X4(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X4(e^j^w) |');

הסבר:

* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T1=4 ונקבל: *. תנאי נייקוויסט מתקיים כי T16* אשר מתיישב עם *. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 w=), והגובה קטן פי 4. ז"א שגובה המלבן הוא 1.5 וקצוות המלבן בתדרים:*

.

* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T1=4 ונקבל:  
  *. תנאי נייקוויסט מתקיים כי T16* אשר מתיישב עם *. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 w=), והגובה קטן פי 4. ז"א שגובהו המקסימלי של המשולש הוא 3 וקצוות המשלוש בתדרים:* .
* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T1=4 ונקבל: *. תנאי נייקוויסט מתקיים כי T16* אשר מתיישב עם *. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 w=), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים:*

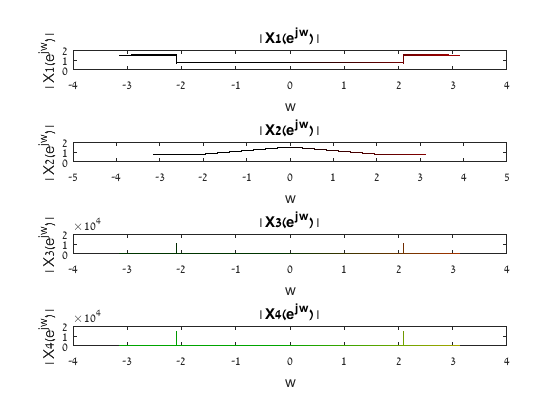
.

* עבור

*קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T1=4 ונקבל: *. תנאי נייקוויסט מתקיים כי T16* אשר מתיישב עם *. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 4 w=), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים:*

.

ד':

קוד:

T2=8;

n = -10000:1:10000;

w = linspace(-pi,pi,20001);

x1=sinc(n\*T2/6);

X1=fft(x1,20001);

subplot(4,1,1)

plot(w,abs(fftshift(X1)))

title('| X1(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X1(e^j^w) |');

x2=(sinc(n\*T2/12)).^2;

X2=fft(x2,20001);

subplot(4,1,2)

plot(w,abs(fftshift(X2)))

axis([-5 5 0 2])

title('| X2(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X2(e^j^w) |');

x3=cos(pi\*n\*T2/12);

X3=fft(x3,20001);

subplot(4,1,3)

plot(w,abs(fftshift(X3)))

title('| X3(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X3(e^j^w) |');

x4=cos(pi\*n\*T2/12)+sin(pi\*n\*T2/6);

X4=fft(x4,20001);

subplot(4,1,4)

plot(w,abs(fftshift(X4)))

title('| X4(e^j^w) |')

xlabel('w')

ylabel('| X4(e^j^w) |');

הסבר:

* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T2=8 ונקבל: *. תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי T1>6*. החפיפה תהה החל מתדר: *עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי8 w=), והגובה קטן פי 8. ז"א באיזורי החפיפה*

*גובה המלבן הוא סופרפוזיציה של שני המלבנים כלומר , באיזורים ללא חפיפה הגובה הוא של מלבן אחד 0.75*.

* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T2=8 ונקבל:

*. תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי T1>6*. החפיפה תהה החל מתדר:

*עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי8 w=), והגובה קטן פי 8. ז"א גובה המשלוש המקסימלי ב- , באיזורי החפיפה יש סופרפוזיציה בין שני המשלושים (בין שני קווים ישרים בעלי שיפועים מנוגדים) ולכן מתקבל קו ישר.*

* עבור  *קיבלנו כי:* כאשר *.* נציב T2=8 ונקבל: *תנאי נייקוויסט מתקיים כי T212* אשר מתיישב עם *. עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 8 w=), לכן ההלמים מתקבלים בתדרים:* .
* עבור

*קיבלנו כי:* נציב T2=8 ונקבל: *. תנאי נייקוויסט לא מתקיים כי T2>6*. החפיפה תהה החל מתדר:

*, עבור התמרת פוריה של האות הדגום ציר התדר גדל פי 8 w=). מכיוון שאנו מתסכלים רק על מחזר דגימה בודד*  נקבל רק את ההלמים ב- . נשים לב שההלמים שנוצרים מהשכפול תורמים במחזור הבודד רק את ההלם שנוצר מרכיב הסינוס בתדרים:

בהתאמה, כך שהם עולים על ההלמים של הקוסינוס המקורי, ולכן נקבל הלמים 'גבוהים יותר' מהמקוריים. נקבל רק הלמים ב: .

סעיף 2 – אותות לא חסומים סרט:

א':

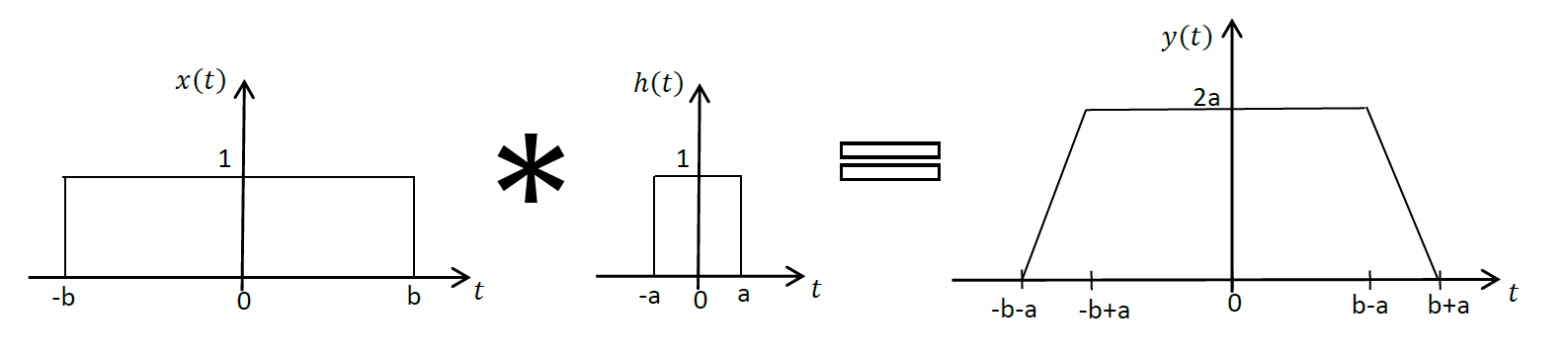
* , למציאת התמרת פוריה נשתמש בנוסחה:

*כאשר אצלנו T1=80, לכן נקבל: .*

* , למציאת התמרת פוריה נשתמש בנוסחה:

*כאשר אצלנו T=160, לכן נקבל: .*

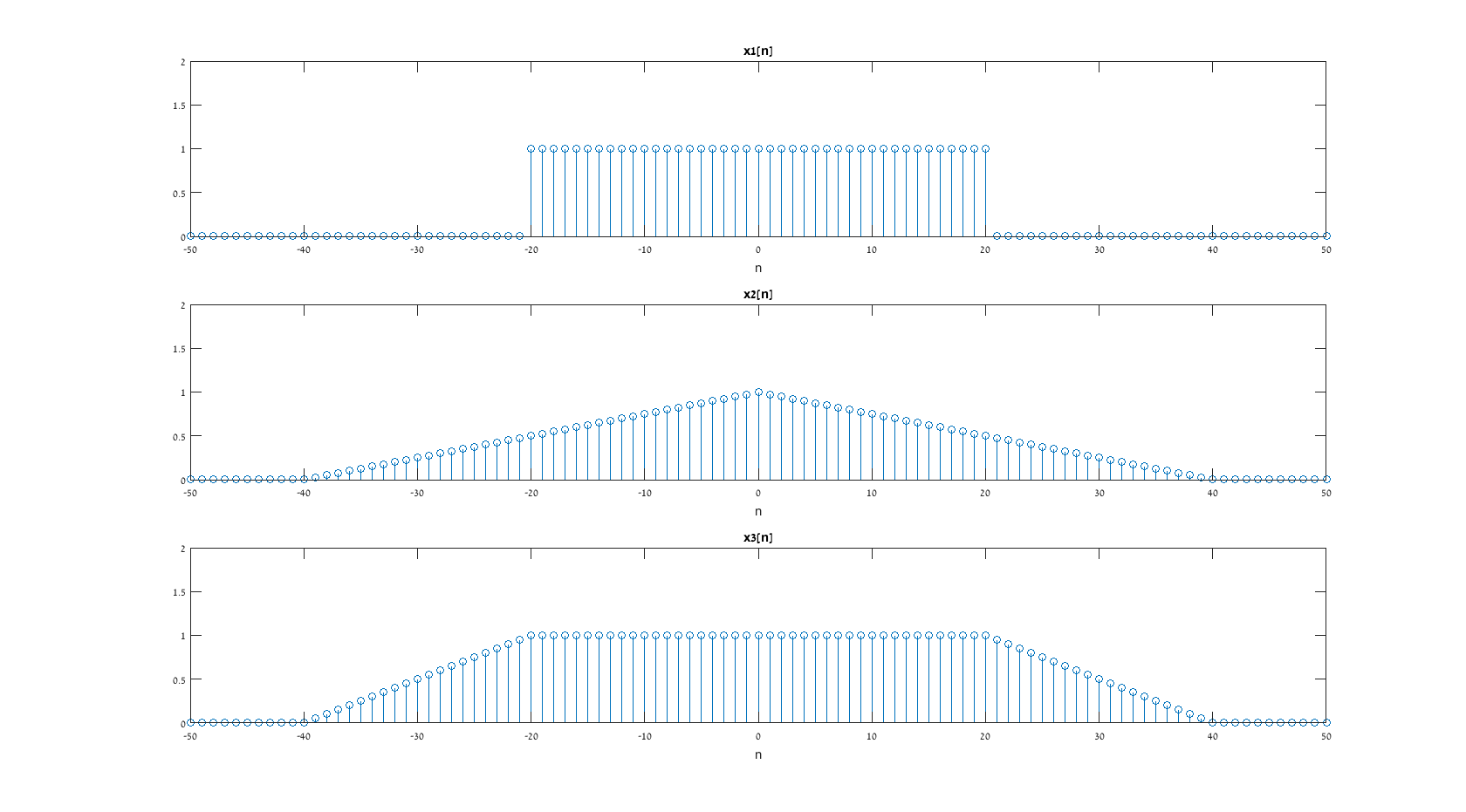
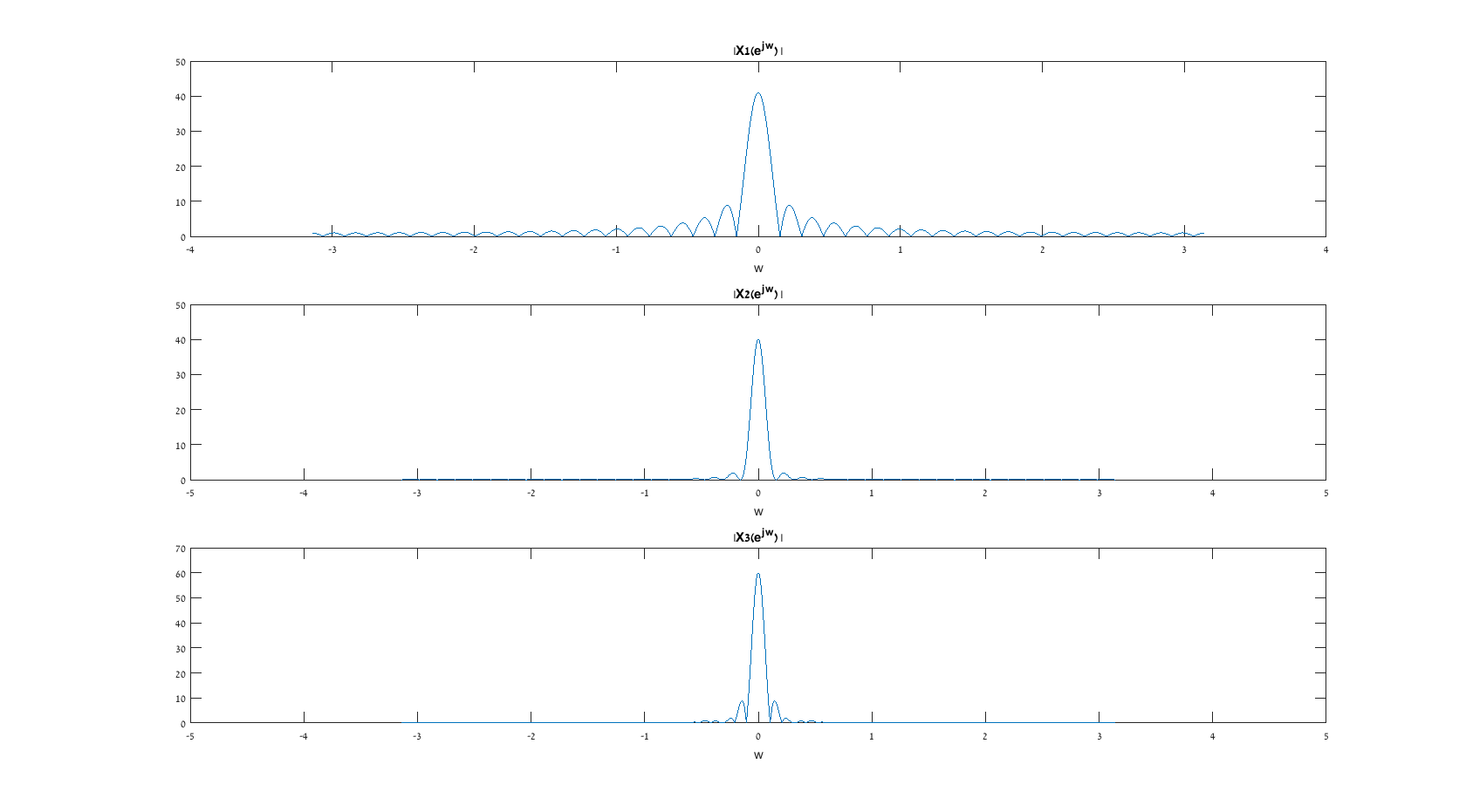
* *, נשים לב שהאות הוא טרפז בזמן שהוא קונבלוציה של שני מלבנים ברוחב שונה וגובה זהה בזמן. לפי הפיתוח שראינו בתרגול:*

**נמצא את a,b ממערכת המשוואות: a+b=160,a-b=80 , הפתרון הוא: a=40,b=120. האות שלנו בנוי מקונבולוציה של:

, ולכן בשימוש בנוסחה ובתכונת קונבולוציה בזמן/מכפלה בתדר נקבל: *.* מכיוון שגובה הטרפז שלנו הוא 1 ולא 80, יש לחלק בפקטור 80:*.*

ב':

ביטויים לאות הדגום כתלות בזמן הדגימה T, נשתמש בנוסחה:

ג':

קוד:

n = -10000:1:10000;

T = 4;

x1 = linspace(0,0,20001);

x2 = linspace(0,0,20001);

x3 = linspace(0,0,20001);

for n1=-10000:1:10000

if(abs(n1\*T)<=80)

x1(n1+10001)=1;

x3(n1+10001)=1;

end

if(abs(n1\*T)<=160)

x2(n1+10001)=1-(abs(T\*n1)/160);

end

if(abs(n1\*T)>80 && abs(n1\*T)<=160)

x3(n1+10001)=2-abs(T\*n1)/80;

end

end

subplot(3,1,1);

stem(n,x1);

title('x1[n]')

xlabel('n')

axis([-50 50 0 2]);

subplot(3,1,2);

stem(n,x2);

title('x2[n]')

xlabel('n')

axis([-50 50 0 2]);

subplot(3,1,3);

stem(n,x3);

title('x3[n]')

xlabel('n')

axis([-50 50 0 2]);

figure

w = linspace(-pi,pi,20001);

X1=fft(x1,20001);

subplot(3,1,1)

plot(w,abs(fftshift(X1)))

title('|X1(e^j^w) |')

xlabel('w');

X2=fft(x2,20001);

subplot(3,1,2)

plot(w,abs(fftshift(X2)))

title('|X2(e^j^w) |')

xlabel('w')

axis([-5 5 0 50]);

X3=fft(x3,20001);

subplot(3,1,3)

plot(w,abs(fftshift(X3)))

title('|X3(e^j^w) |')

xlabel('w')

axis([-5 5 0 70]);