

## פרויקט בקורס שדות אלקטרומגנטיים

### שאלה 1

א. תנאי השפה של הפוטנציאל החשמלי.

בציר x:

יש לנו תנאי שפה מסוג דריכלה על פי הנתונים:

$$\phi(x=0, y) = 0 \text{ V}$$

$$\phi(x=1, y) = 1 \text{ V}$$

בציר y:

נשים לב שעל השפות  $\{0 \leq x \leq 1, y=0 \text{ or } y=1\}$  לא זורם זרם עקב חוק שימור המטען. הבעיה סטטית ולכן יש לנו תנאי שפה נוימן:

$$\hat{n} \cdot J(x, y=0) = 0 \Rightarrow \sigma_0 E(x, y=0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi(x, y=0)}{\partial n} = 0$$

$$\hat{n} \cdot J(x, y=1) = 0 \Rightarrow \sigma_0 E(x, y=1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi(x, y=1)}{\partial n} = 0$$

כאשר  $\hat{n} = \hat{y}$ .

ב. מכיוון שיש לנו בעיית לפלס עם תנאי שפה קבועים שאינם תלויים במרחב, אין לנו מטענים נפחיים והבעיה ריבועית הפוטנציאל שפותר את משוואת לפלס הוא ספרבילי בקורדינטות  $x, y, z$ . מכיוון שהבעיה סימטרית בציר  $z$ , הפתרון הוא הפתרון הטריאלי:

$$\phi_z = 0$$

(באופן כללי מהסימטריה הפוטנציאל שתלוי ב- $z$  שווה לקבוע, אצלנו ספציפית מתאפס מכיוון שהפוטנציאל ב- $z$  אינסופי צריך להתאפס).

בציר y:

יש לנו בעיית נוימן:

$$\phi_y'(0) = 0$$

$$\phi_y'(1) = 0$$

כפי שלמדנו, פתרון של בעיית נוימן עם תמך של  $L=1$  מניב פתרון שהוא קומבינציה של :

$$y \in \{1, \cos(n\pi y)\}$$

זהו הציר שבו הבעיה הומוגנית, לכן בהכרח זהו הפתרון בציר זה (אפשר לנסות אחרת ולהשתכנע).

בציר x:

עבור  $\phi_x$  יש לנו בעיית דריכלה:

$$\phi_x(0) = 0$$

$$\phi_x(1) = 1$$

נחפש פתרון פרטי:

$$\phi_x(x) = Ax + B$$

נציב תנאי שפה:

$$\phi_x(0) = A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\phi_{x,p}(1) = A \cdot 1 = 1 \Rightarrow A = 1$$

ולכן:

$$\phi_{x,p}(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

עבור הפתרון ההומוגני אנחנו מחפשים פתרון שהוא אחת משתי צורות: לינארי או היפרבולי (כי אנחנו בבעיית לפלס וכבר יש לנו פתרון הרמוני).

פתרון לינארי:

$$\phi_x(0) = 0$$

$$\phi_x(1) = 0$$

$$\phi_x(x) = Ax + B$$

$$\phi_{x,0}(x) = 0$$

קיבלנו רק פתרון טריוויאלי. באופן דומה נקבל פתרון טריוויאלי לפתרון ההיפרבולי. מכאן שאנו נשארים עם:

$$\phi_x(x) = x + 0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\pi y) \cdot 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ולכן:

$$\phi(x, y, z) = x, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

וזה גם הפתרון שאנו רואים בסימולציית קווי גובה של פונקציית הפוטנציאל.

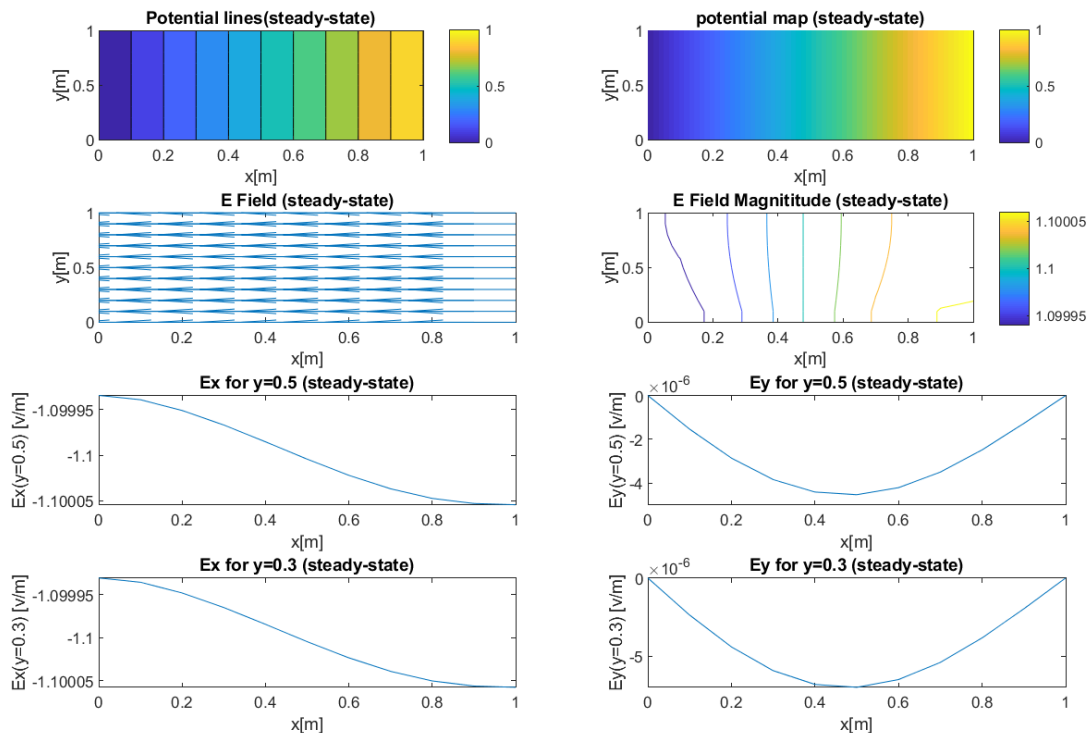
עוד דרך לפתרון היא מיחידות הפתרון של משוואת לפלס, שכן זהו פתרון שמקיים את תנאי השפה ולכן הוא הפתרון היחיד, אבל תמיד יפה וכיף להראות זאת בדרך האנליטית של פתרון מד"ח.

מכיוון שאנחנו במשטר אלקטרוסטטיקה, עבור השדה נצפה לקבל שדה אחיד בכיוון מנוגד לכיוון עליית הפוטנציאל:

$$E(x, y) = -1 \hat{x}$$

ג. דרך הפתרון הנומרי שלנו מתבססת על קירובי נגזרת מסוג קדמית ואחורית. ביצענו דיסקרטיזציה של המרחב ובנינו משוואות לחישוב הפוטנציאל ותנאי שפה לבעיה. ביצענו איטרציות להקטנת השגיאה עד לערך של  $10^{-6}$ , כאשר השגיאה חושבה לפי:  $error = \max\{|\phi_{n-1} - \phi_n|\}$ .

פתרון בעיית לפלס באופן נומרי מניב את התוצאה הבאה:



תוצאות עבור הפוטנציאל תואמות את החישוב האנליטי (להלן "התיאוריה").  
עבור השדה בקווים  $y=0.3, y=0.5$  עקב הרזולוציה שבחרנו הקווים לא 'נופלים' בדיוק על ערכי ה- $y$ , אלא על ערך ה- $y$  בשנת הקרוב ביותר. בגרפים אלו נבחנו שערכי  $E_y$  זניחים וערכי  $E_x$  בעלי ערך שלילי קבועים (בקירוב שווים ל-1 כמובן), כפי שאנו מצפים מהניתוח האנליטי.

נשים לב שקיבלנו עבור השדה ערך מוחלט בגודל 1 בקירוב, כמצופה מהניתוח האנליטי.

ד. חישוב הקיבול והמוליכות:

#### קיבול:

הקיבול קושר בין מטען לבין מתח, לכן על מנת לחשב את הקיבול נתחיל במציאת המטען המצטבר על גבי האלקטרודות.  
המטען על האלקטרודה הימנית שווה בערכו המוחלט למטען על האלקטרודה השמאלית לכן נוכל לבצע את החישוב עבור האלקטרודה הימנית בלי הגבלת הכלליות.  
כדי למצוא את המטען, ראשית נעזר בתנאי השפה עבור השדה האנכי לאלקטרודה:

$$\hat{n} \cdot [0 - \epsilon_0 E(x=1, y \in [Y_L, Y_H])] = \eta$$

כאשר  $\hat{n} = \hat{x}$ , ובקירוב ניתן להניח שהשדה מחוץ לגוף זניח לכן הוא שווה לאפס בנוסחה לעיל.  
 $\epsilon_0$  לא יכלול בחישוב משום שלפי הנחיות על הקיבול ליהיות מנורמל בגורם זה.

כדי למצוא את השדה האנכי לאלקטרודה, נבחר את רכיב ה- $x$  של השדה לאורך התחום  $(Y_L: Y_H)$  ונחשב ממוצע לערכים אלה כדי לקבל ערך יחיד. מיצוע נראה לנו כדבר המתאים לעשות מכיוון שהערכים שהתקבלו בקירוב קבועים ובנוסף תלויי רזולוציה כלומר תלויים בגודל יחידות השטח שבחרנו לעבוד איתן.

באופן זה נחלץ את צפיפות המטען  $\eta$  על גבי האלקטרודה.

כעת, נמצא את המטען הכולל  $Q$  (ליחידת אורך בכיוון  $z$ ) על ידי כן שנכפול את צפיפות המטען בשטח, שהוא מכפלת אורך האלקטרודה  $(YH - YL)$  ב-1 (ליחידת האורך המנורמלת שבחרנו בכיוון  $z$ ).  
לאחר שנמצא את המטען הכולל, נחלק אותו בהפרש המתחים  $\Delta V = 1 V$  לקבלת ערך הקיבול, שהרי לפי הגדרת הקיבול:

$$C = \frac{Q}{V}$$

התוצאה שהתקבלה היא:

$$C = 1.05$$

כאשר הקיבול חסר יחידות מכיוון שנרמלנו בקבוע  $\epsilon_0 \left[ \frac{F}{m} \right]$  ומכיוון שהוא מחולק ביחידת אורך.

מוליכות:

נמצא את המוליכות ב-3 שלבים:

1. נמצא את צפיפות הזרם בכיוון  $x$  לפי חוק אוהם:

$$J_x = \sigma \cdot E_x$$

כאשר  $\sigma$  היא המוליכות הנתונה בשאלה ו-  $E_x$  הוא השדה בכיוון  $x$ .

נעיר שאנחנו מעוניינים רק ברכיב הזרם בכיוון  $x$  מכיוון שמפל המתח הוא לאורך ציר  $x$ .

2. נמצא את הזרם הנראה על ידי האלקטרודה הימנית (הזרם שנראה על ידי האלקטרודה השמאלית זהה).

כדי למצוא את הזרם  $I$ , נסכום את ערכי צפיפות הזרם  $J_x$  בתחום  $[YL: YH]$  ונכפול כל איבר בסכימה בשטח, שהוא מכפלת המרווח בין השנתות בציר  $x$  ב-1 (ליחידת האורך המנורמלת שבחרנו בכיוון  $z$ ).

כלומר קיבלנו את הזרם ליחידת אורך בכיוון  $z$ .  $([I] = A/m)$

3. נעזר בנוסחה הקושרת בין המוליכות לבין הזרם והמתח - חוק אוהם:

$$\sigma = \frac{I}{V}$$

כאשר  $V=1 V$  הינו הפרש המתחים בין האלקטרודות.

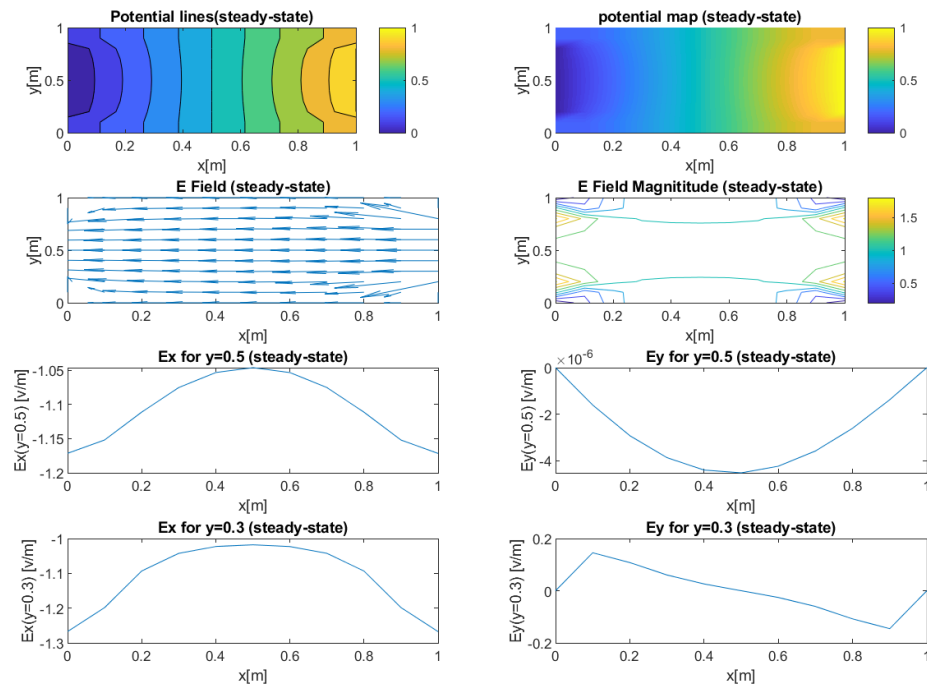
התוצאה שהתקבלה היא:

$$\sigma = 3.13 \left[ \frac{A}{V m} \right]$$

## שאלה 2

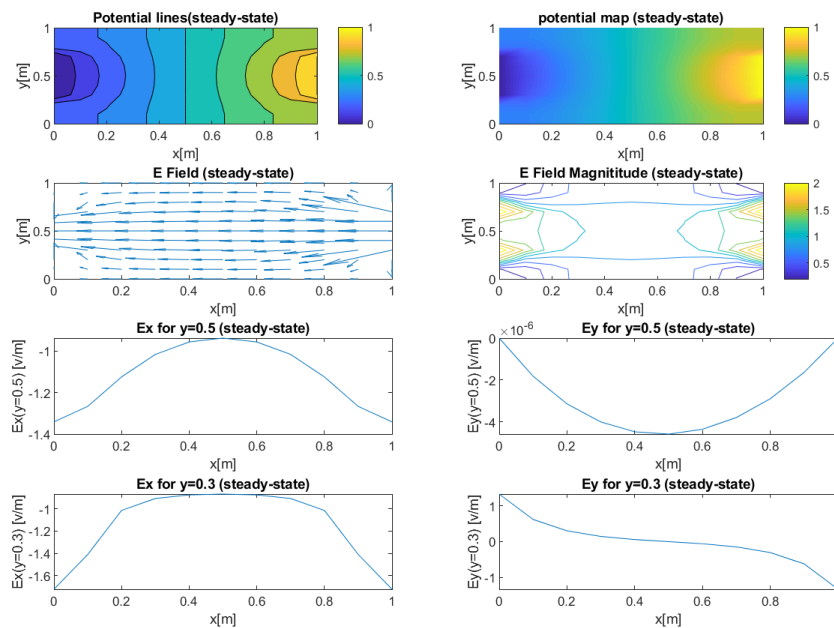
א) עבור  $[\gamma_L, \gamma_H] = [0.2, 0.8]$ :

$[Y_L, Y_H] = [0.2, 0.8]$



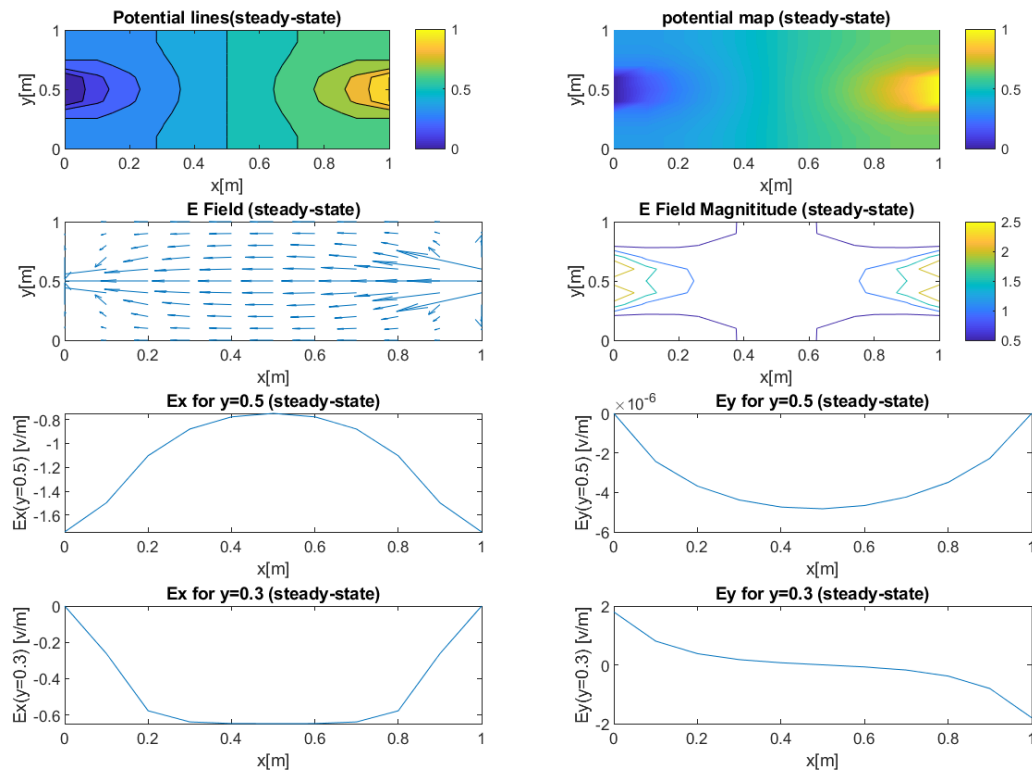
עבור  $[\gamma_L, \gamma_H] = [0.3, 0.7]$ :

$[Y_L, Y_H] = [0.3, 0.7]$



עבור  $[y_L, y_H] = [0.45, 0.55]$ :

$[Y_L, Y_H] = [0.45, 0.55]$



ב. נבחין בשדה החשמלי שהתקבל בכל אחד מהמצבים.

נשים לב שכיוון השדה אכן יוצאים מהאלקטרודה עם הפוטנציאל הגבוה לאלקטרודה עם הפוטנציאל הנמוך. כמו כן כאשר האלקטרודות ארוכות יותר (קרובות יותר לאורך של 1 שהיה בשאלה (1) קווי הפוטנציאל ישרים יותר בציר ה- $x$  והפתרון דומה יותר לפתרון שקיבלנו בשאלה 1. כאשר האלקטרודות קצרות יותר אנחנו מקבלים קווי שדה דומיננטיים יותר בציר ה- $y$  ככל שאנחנו מתרחקים ממרכז האלקטרודות.

אינטואיטיבית תופעה זאת יכולה ליהיות מוסברת על ידי העובדה שקווי השדה מתארים את המסלול בו ינועו מטענים מהאלקטרודה הימנית לשמאלית. ככל שהאלקטרודות קצרות יותר, מסלול המעבר של המטענים בין הלוחות איננו רק ישר לאורך ציר  $x$  כמו בשאלה (1) אלא שכעת, מעל ומתחת לאלקטרודות המטענים ינועו בצורה עקיפה ומעט עגולה כדי להגיע לפוטנציאל הנמוך, שהריי "יעדיפו" לנוע בחופשיות במקום להצטופף עם כל שאר המטענים העוברים בציר התנועה "הראשי"- האופקי בגבולות גבהי האלקטרודה.

ג. קיבול ומוליכות.

	$[yL, yH] = [0.2, 0.8]$	$[yL, yH] = [0.3, 0.7]$	$[yL, yH] = [0.45, 0.55]$
Capacity	0.77	0.6	0.19
Conductivity $[\frac{A}{V \cdot m}]$	2.7	2.28	1.7

תוצאות אלו מתיישבות עם התיאוריה.

כאשר המרווח בין האלקטרודות קטן, המטען הכולל שמצטבר עליהן קטן ולכן גם הקיבול.

המוליכות תלויה בזרם ש"רואה" האלקטרודה.

כפי שציינו באופן חישוב המוליכות, הזרם מחושב מתוך צפיפות הזרם.

לכאורה אפשר לחשוב שהזרם יגדל ככל שהאלקטרודות צרות יותר, שהרי לפי התוצאות, רכיב ה-X של השדה בגבולות האלקטרודה גדל ככל שהלוחות מתקצרים ← צפיפות הזרם שרואה האלקטרודה גדלה.

אבל רוחב האלקטרודה בא לידי ביטוי בחישוב הזרם הכולל ובעל השפעה רבה יותר על זרם מאשר השינויים בערכי צפיפות הזרם.

לכן הזרם קטן עם הקטנת הלוחות מה שגורם למוליכות לקטון.

### שאלה 3

א. תנאי השפה החדשים:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot [J_{\sigma_0} - J_{\sigma_1}]_{x=xL} &= 0 \\ (-\hat{x})[\sigma_0 E_{\sigma_0} - \sigma_1 E_{\sigma_1}]_{x=xL} &= 0 \\ \sigma_0 E_{x,\sigma_0}(x=xL) &= \sigma_1 E_{x,\sigma_1}(x=xL)\end{aligned}$$

אך מתקיים הקשר:  $E = -\nabla\Phi$

נבצע נגזרת אחורית ונגזרת קדמית בהתאמה לשדה (לפי איזור מוליכות 0 ואיזור מוליכות 1):

נקבל:

$$\sigma_0 \left[ \frac{\phi(x=xL, y) - \phi(x=xL-1, y)}{\Delta x} \right] = \sigma_1 \left[ \frac{\phi(x=xL+1, y) - \phi(x=xL, y)}{\Delta x} \right]$$

לאחר מסאג' אלגברי נקבל:

$$\phi(x=xL, y) = \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1} [\sigma_0 \phi(xL-1, y) + \sigma_1 \phi(xL+1, y)]$$

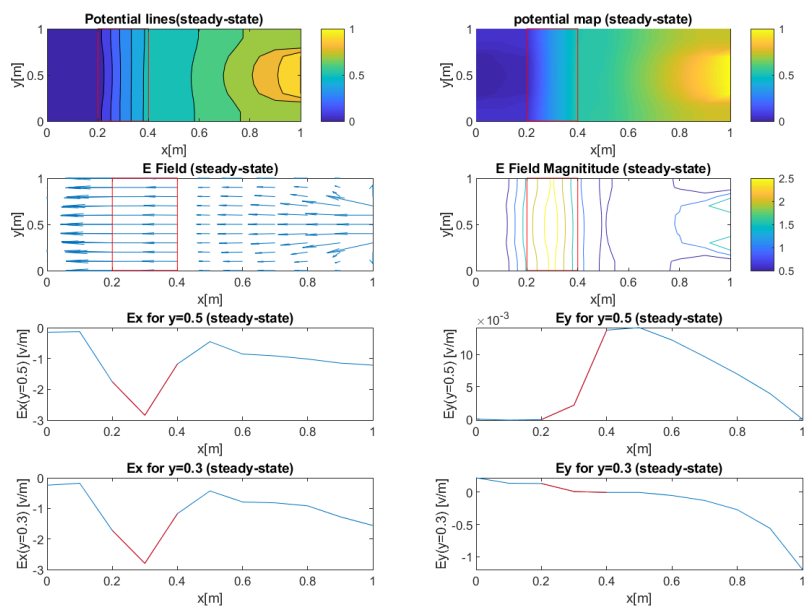
ובאופן דומה עבור השפה הימנית xH:

$$\phi(x = xH, y) = \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1} [\sigma_0 \phi(xH + 1, y) + \sigma_1 \phi(xH - 1, y)]$$

ב. להלן הגרפים שהתקבלו עבור שלושת ערכי הסיגמא:

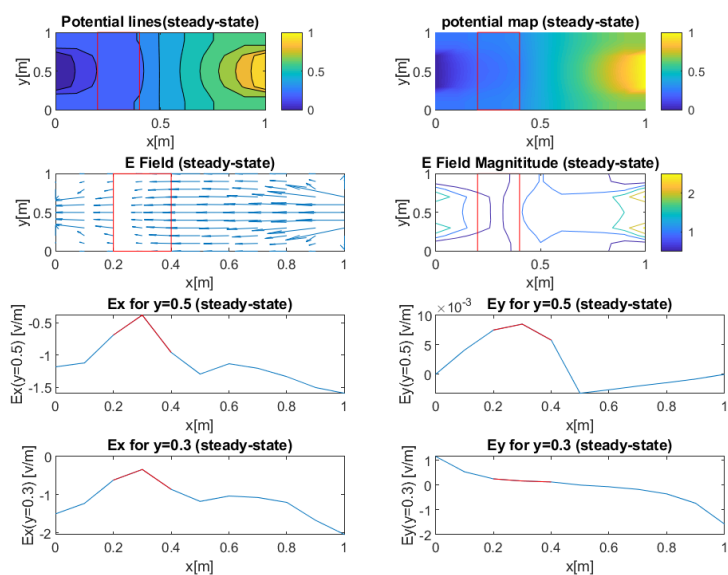
עבור  $\sigma_1 = 0.1$ :

sigma1 = 0.1[S/m]



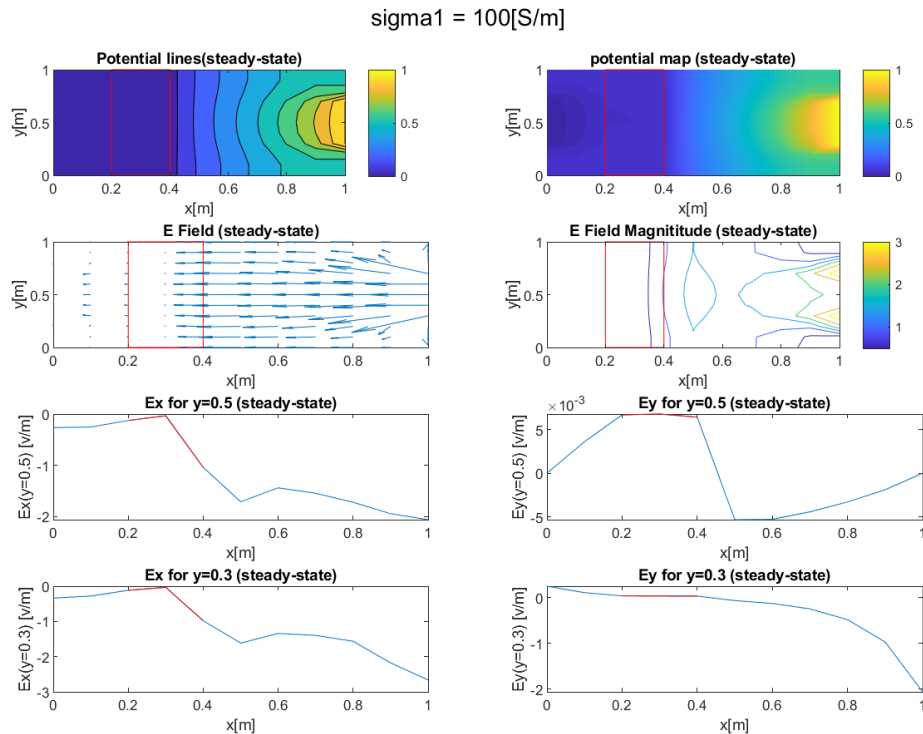
עבור  $\sigma_1 = 10$ :

sigma1 = 10[S/m]





עבור  $\sigma_1 = 100$ :



כאשר רצועת החומר החדש מסומנת באדום בגרפים.

ג. עם הכנסת הרצועה נשברה הסימטריה של הבעיה.  
כפי שראינו עבור בשפה יש קפיצה בערכי השדה החשמלי הנובעת מחוק אוהם:

$$\sigma_0 E_{x,\sigma_0}(x = xL) = \sigma_1 E_{x,\sigma_1}(x = xL)$$

כלומר כאשר  $\sigma_1 > \sigma_0$ , אנו נקבל ירידה בערך המוחלט של השדה בכיוון x של השדה שבתוך הרצועה (ולחיפך עבור  $\sigma_1 < \sigma_0$ ).

**הסבר פיזיקלי נוסף עבור המקרה של  $\sigma_1 = 0.1$ :**

המוליכות של הרצועה קטנה ממוליכות החומר החיצוני.

כתוצאה מכך, נוצר "פקק" של מטענים על שפת הרצועה.

ה"פקק" נוצר מכך שעד הגעתם לרצועה יכלו לנוע בקלות (יחסית לרצועה) ובהגעתם לרצועה: מצד אחד מתקשים לעבור דרכה לעבר האלקטרודה השלילית, שהרי המוליכות נמוכה, ומצד שני, לא יכולים לחזור לאלקטרודה החיובית שהרי השדה הכיוון הנגדי. ולכן נוצרת הצטברות על דפנות הרצועה.

למעשה קיבלנו מעיין קבל בתוך הקבל.

השדה והפוטנציאל בתוך הקבל המשני דומה בהתנהגותו לשדה ולפוטנציאל בין האלקטרודות בשאלה הראשונה. זאת מכיוון שפילוג המטען המצטבר על גבולות הרצועה בקירוב אחיד, כלומר אינו מצטבר רק בתחום  $y \in [Y_L, Y_H]$  אלא על כל הדופן מאפס עד אחד, בדיוק כמו בשאלה הראשונה.

### הסבר פיזיקלי נוסף עבור המקרים של $\sigma_1 = 100$ :

ככל שערכו של  $\sigma_1$  הרצואה הופכת לחומר מוליך טוב יותר, ועבור ערך מספיק גבוהה (לדוגמא 100) ההתנהגות של החומר מתקרבת לזו של מוליך מושלם.

כפי שלמדנו הפוטנציאל במצב היציב בתוך מוליך מושלם הינו קבוע ושווה לפוטנציאל על שפתויו.

תופעה זו מסבירה את הממצעים עבור המקרה של  $\sigma_1 = 100$ . הפוטנציאל ברצועה קבוע ובקושי ניתן לראות את השינוי של הפוטנציאל סביב האלקטרודה המוארקת (השמאלית). כלומר מכיוון שהרצועה בקירוב מתנהגת כמוליך מושלם, תנאי השפה אילצו את המתח השואף לאפסי "להתקדם" אל הגבול הימני של הרצואה. ולכן מפל המתח בין הגבול הימני של הרצואה לבין האלקטרודה השמאלית נמוך מאוד מה שגורם לשדה לקטון באופן משמעותי.

### ד. מוליכות וקיבול:

	$\sigma_1 = \sigma_0 = 3$	$\sigma_1 = 0.1 \left[\frac{S}{m}\right]$	$\sigma_1 = 10 \left[\frac{S}{m}\right]$	$\sigma_1 = 100 \left[\frac{S}{m}\right]$
Capacity	0.6	0.55	0.72	0.94
Conductivity $\left[\frac{A}{Vm}\right]$	2.28	2.1	2.7	3.5
הסבר עבור הקיבול		המוליכות תלויה במטען המצטבר על האלקטרודות. כתוצאה מהקטנת המוליכות ברצועה, השדה האנכי לאלקטרודות נחלש (ניתן לראות מגרף האמלפיטודה של השדה) $\Leftarrow$ פחות מטען מצטבר ולכן הקיבול קטן יותר	המוליכות תלויה במטען המצטבר על האלקטרודות. כתוצאה מהגדלת המוליכות ברצועה, השדה האנכי לאלקטרודות התחזק (ניתן לראות מגרף האמלפיטודה של השדה) $\Leftarrow$ יותר מטען מצטבר ולכן הקיבול גדול יותר	בדיוק אותו הסבר כמו עבור $\sigma_1 = 10$ כאשר במקרה זה השדה חזק אף יותר
הסבר עבור המוליכות		המוליכות תלויה בזרם, אשר תלוי ישירות בשדה כפי שהסברנו בדרך חישובו. כאמור, השדה בגבולות האלקטרודות נחלש $\Leftarrow$ הזרם נחלש $\Leftarrow$ המוליכות הנראת על ידי האלקטרודות קטנה.	המוליכות תלויה בזרם, אשר תלוי ישירות בשדה כפי שהסברנו בדרך חישובו. כאמור, השדה בגבולות האלקטרודות התחזק $\Leftarrow$ הזרם התחזק $\Leftarrow$ המוליכות הנראת על ידי האלקטרודות גדלה.	בדיוק אותו הסבר כמו עבור $\sigma_1 = 10$ כאשר במקרה זה השדה חזק אף יותר