Generalized Poincaré-Hopf bifurcation and galloping instabilities in traveling waves

Benjamin Texier, Kevin Zumbrun

Indiana University

Plan

1. Combustion, ondes de détonations : phénomènes physiques.
2. Equations modèles.
3. Equations différentielles avec invariance de groupe : bifurcation de Poincaré-Hopf généralisée.
4. Application à des ondes progressives solutions d'EDP simples.

Instabilités pour des ondes de détonation

Mélange explosif gazeux dans un cylindre. Ondes de compression.

Instabilités :

1D : "galloping waves" : variations périodiques de la vitesse d'une onde de détonation sous l'effet de perturbations longitudinales,

3D : "spinning waves" : structure 3D complexe, hélicoidale.

But : Description mathématique des "galloping waves", pour des modèles simples.

Equations modèles

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= \partial_x(B(u)\partial_x u)) + kq\varphi(u)z, \\ \partial_t z &= \partial_x(D(u,z)\partial_x z) - k\varphi(u)z. \end{aligned}$$

z fraction massique de réactant non brûlé. φ fonction d'activation. B, D : coefficients de diffusion. q chaleur dégagée par la réaction, k taux de réaction.

Modèle complexe : $u = (\rho, \rho u, e)$ (Navier-Stokes).

Modèle simplifié : u scalaire (Majda, SIAM J. Appl. Math. 81), $B = 1$, $D = 0$.

Modèle intermédiaire : Navier-Stokes avec $B, D = 0$: pas de diffusion (Zeldovich-von Neumann-Doring 40).

Modèle simplifié de Majda

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= \partial_x^2 u + kq\varphi(u)z, \\ \partial_t z &= -k\varphi(u)z. \end{aligned}$$

Hypothèses : $f' > 0$, $f" > 0$, et

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & u \leq u_i, \\ > 0, & u \geq u^i. \end{cases}$$

Existence d'ondes progressives u_-, u_+, $s(u_+)$. Détonations : ondes de compression : $u_- > u_+$. Détonations fortes : choc de Lax :

$$f'(u_+) < s < f'(u_-).$$

Résultats antérieurs

- Stabilité nonlinéaire d'ondes de détonations fortes pour le modèle de Majda pour q petit (Liu-Ying, SIAM J. Math. Analysis 95).
- Indice de stabilité Γ (basé sur fonction d'Evans, Lyng-Zumbrun 03). Condition nécessaire pour stabilité spectrale :

$$\Gamma > 0.$$

  Vérifiée par le modèle de Majda.

Instabilités ?

Γ ne détecte que la parité du nombre de valeurs propres de partie réelle positive.

Position du problème

Sur un modéle simple (scalaire, une variable d'espace) : décrire les ondes galopantes comme une bifurcation de type Hopf autour d'une onde progressive de détonation.

Hypothèse sur le spectre de l'opérateur linéarisé autour de l'onde progressive : deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe imaginaire pur pour une valeur critique d'un petit paramètre.

Par ailleurs : invariance par translation : 0 est valeur propre.

Dessin spectral à compléter.

Stabilité d'ondes progressives

Réaction de convection-diffusion-réaction :

$$\partial_t \tilde{u} = \mathcal{F}(\varepsilon, \tilde{u}) = \partial_x^2 \tilde{u} + f(\varepsilon, \tilde{u}, \partial_x \tilde{u}). \tag{1}$$

$\bar{u}^\varepsilon(x)$ onde stationnaire :

$$\mathcal{F}(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Invariance de groupe : $\tilde{\Phi}_\alpha(v) := v(x - \alpha)$.

Linéarisation des équations autour de l'onde progressive :
$u := \tilde{u} - \bar{u}$, solution de

$$\partial_t(u, \varepsilon) + L(u, \varepsilon) = G(\bar{u}, u, \varepsilon). \tag{3}$$

L opérateur linéarisé autour de $\bar{u}$.

Quelles hypothèses spectrale pour L ? Bifurcation de Poincaré Hopf généralisée. Spectre essentiel ?

Remarques sur l'équation linéarisée

Invariance de groupe :

$$\Phi_\alpha u(t,x) := u(t,x+\alpha) + (\bar{u}^0(x+\alpha) - \bar{u}^0(x)).$$

0 est valeur propre :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tilde{u}}(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon)\partial_x \bar{u}^\varepsilon = 0.$$

Equation différentielle avec invariance de groupe

Equation $X' = F(X), X \in \mathbb{R}^n$, admettant une invariance de groupe (additif) Φ_α :

$$\Phi_\alpha(\Psi(t, t_0, X_0)) = \Psi(t, t_0, \Phi_\alpha(X_0)),$$

Ψ flot de l'équation. Hypothèse :

$$\frac{d\Phi_\alpha}{d\alpha}_{|\alpha=0} \neq 0.$$

Lemme 1 (TZ) *Il existe un difféo local T au voisinage de 0 tel que toute trajectoire X s'écrive $X = T(Y, \alpha)$, $Y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et*

$$Y'(t) = G(Y(t)), \quad \alpha'(t) = h(Y(t)).$$

P. Olver, Applications of Lie Groups to differential equations, Springer GTM 107.

Exemple

Equation linéaire $X' = AX$, trajectoires au voisinage de $(0, \ldots, 0, 1)$. Changement de variable

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \to (\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1).$$

Le groupe additif $\Phi_\alpha X = e^\alpha X$ laisse invariante l'équation.

Les équations pour

$$Y := (\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}) \quad \text{et } \alpha := -\ln x_n$$

sont découplées.

Vérification par un calcul explicite.

Bifurcation de Poincaré-Hopf dans $\mathbb{R}^2$

$X' = F(\varepsilon, X)$, $X \in \mathbb{R}^2$, $(\varepsilon, 0)$ droite de points critiques : $F(\varepsilon, 0) = 0$. Hypothèse : le spectre de $\partial_x F(\varepsilon, 0)$ composé de deux valeurs propres conjuguées $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\tau(\varepsilon)$, telles que

$$\gamma(0) = 0, \quad \tau(0) \neq 0, \quad (d\gamma)/(d\varepsilon)(0) > 0.$$

Théorème 1 (Poincaré-Andronov-Hopf) *For $a > 0$, assez petit, il existe une unique orbite périodique X_a non triviale de l'équation, de taille initiale a : $|X_a(0)| = a$, pour la valeur $\varepsilon(a)$ du paramètre. La fonction $a \mapsto \varepsilon(a)$ est C^1, le signe de $d\varepsilon/da$ détermine la stabilité de X_a.*

Hale, Koçak (Springer).

Bifurcation de Poincaré-Hopf dans $\mathbb{R}^n$

$X' = F(\varepsilon, X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $(\varepsilon, 0)$ droite de points critiques : $F(\varepsilon, 0) = 0$. Hypothèse : le spectre de $\partial_x F(\varepsilon, 0)$ contient deux valeurs propres conjuguées $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\tau(\varepsilon)$, telles que

$$\gamma(0) = 0, \quad \tau(0) \neq 0, \quad (d\gamma)/(d\varepsilon)(0) > 0,$$

et le reste du spectre est contenu dans le demi-plan $\{z, \Re z < 0\}$.

Théorème 2 (Poincaré-Andronov-Hopf) *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, il existe une unique orbite périodique avec donnée initiale X_0.*

De plus : stabilité (sur la variété $\Leftrightarrow$ sur $\mathbb{R}^n$) exprimée par une condition effectivement calculable ; les seules orbites périodiques sont celles décrites ci-dessus.

Preuve

a) Définition d'un flot réduit sur une variété centrale dans un voisinage de l'origine.

b) Propriétés spectrales du flot réduit : elles vérifient les hypothèses PAH $\mathbb{R}^2$.

c) Examen de la stabilité : sur la variété $\Leftrightarrow$ sur $\mathbb{R}^n$.

Marsden, McCraken (Springer).

Bifurcation de Poincaré-Hopf généralisée dans $\mathbb{R}^n$

Même situation spectrale qu'au théorème précédent. De plus :
– le noyau de $\partial_x F(\varepsilon, 0)$ est non trivial,
– invariance de groupe Φ_α,
– $(d\Phi_\alpha)/(d\alpha)(\alpha = 0)$ non nul et non transverse au noyau.

Théorème 3 (TZ) *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, l'orbite $t \to X(t)$ qui a pour donnée initiale X_0 est telle que*

$$t \to \Phi_{-\alpha(t)} X(t)$$

est périodique, avec $\alpha(t) = \alpha^0 t + \beta(t)$, $\alpha^0 \in \mathbb{R}$ et β périodique.

Preuve

a) Découplage des coordonnées transverses Y et longitudinales α par le Lemme 1 : $Y' = G(\varepsilon, Y)$, $\alpha' = h(\varepsilon, Y)$.

b) $\partial_x G(\varepsilon, 0)$ satisfait les hypothèses de PAH $\mathbb{R}^n$. Existence d'orbites périodiques.

c) Coordonnée longitudinale correspondante :

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t h(\varepsilon, Y(t'))\, dt' = \alpha^0 t + \beta(t).$$

d) Dans les variables de départ :

$$X(t) = \Phi_{\alpha(t)}(Y(t), 0).$$

Un résultat classique de stabilité

Théorème 4 *Soit $\bar{u}$ une onde progressive qui converge exponentiellement vers $u_\pm$ en $\pm\infty$. Si le spectre de $L(u_\pm)$ est strictement à gauche de l'axe imaginaire pur, et si $\bar{u}$ est monotone, alors $\bar{u}$ est orbitalement stable.*

Preuve : Spectre essentiel de $L(\bar{u}) \leftrightarrow$ spectre de $L(u_\pm)$. Monotonie de $\bar{u}$: 0 est la plus grande valeur propre.

Exemple : convection-diffusion

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = \partial_x^2 u,$$

Onde stationnaire $\bar{u}$. RH : $f(u_-) = f(u_+)$.

$$L(\bar{u})u = \partial_x^2 u - f'(u_\pm)\partial_x u.$$

$\sigma(L(u_\pm)) = \{-k^2 - if'(u_\pm)k,\, k \in \mathbb{R}\}$. Pas de trou spectral.

Normes à poids

Cadre précédent. Hypothèse : choc de Lax :

$$f'(u_+) < 0 < f'(u_-).$$

Alors il existe un poids $w > 0$, $w \to w_\pm$, $x \to \pm\infty$,
$w_- < 0$, $w_+ > 0$, tel que

$$v := e^{\int_0^x w} u,$$

et l'opérateur pour v a un trou spectral.

"Convection-enhanced stability". Sattinger (Adv. Math. 76).

Hypothèses

- Les états finaux u_-, u_+ de l'onde stationnaire sont strictement spectralement stables au sens des normes à poids.
- Deux valeurs propres complexes traversent l'axe imaginaire pur.

$$\|f\|_{L^2_\eta} := \|e^{\eta(1+|x|^2)} f(x)\|_{L^2}.$$

Résultat

Théorème 5 (TZ) *Sous les hypothèse précédentes, pour $a > 0$ assez petit et $C > 0$ assez grand, il existe une fonction C^1 $a \mapsto \varepsilon(a)$, et une famille de solutions*

$$u^a(t,x) = v^a(t, x - \alpha^a(t)), \quad \alpha^a(t) = \sigma^a t + \theta^a(t),$$

où $\sigma^a \in \mathbb{R}$ et θ^a est périodique, et

$$\|v(0) - \bar{u}^0\|_{H^2_\eta} = a, \quad \|v^a(t) - \bar{u}^0\|_{H^2_\eta} \leq Ca.$$

De plus : stabilité orbitale de v^a donné par le signe de $d\varepsilon/da$.

Preuve

a) Factorisation de la valeur propre 0 (réduction).

b) Construction d'une variété centrale (troncature, bornes sur le semi-groupe).

c) Bifurcation de Poincaré-Hopf sur la variété de dimension $2 + 1$.