

ONDES : PROPAGATION ET CONDITIONS AUX LIMITES

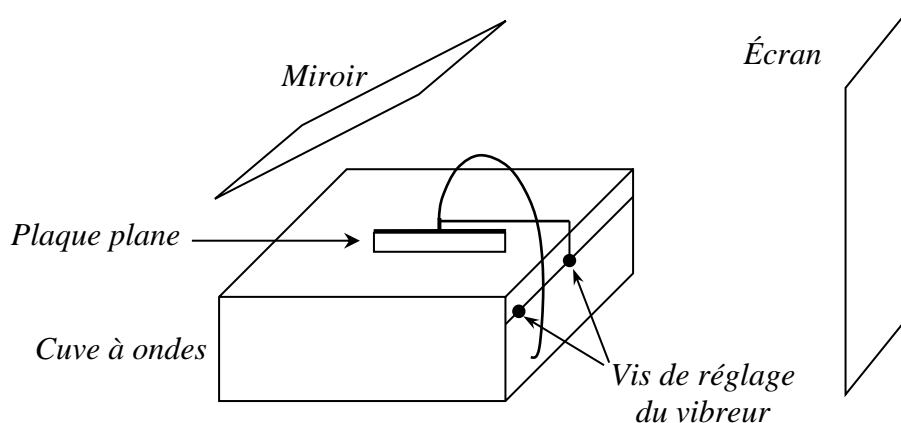
De nombreuses expériences dans différents domaines de la physique peuvent être abordées donc il faut faire des choix. On présente quelques manipulations mais il y en a d'autres. On peut s'intéresser par exemple au profil d'émission d'une source (cf. montage acoustique).

I PROPAGATION LIBRE : ETUDE DE QUELQUES CARACTERISTIQUES

I.1 Ondes planes - ondes sphériques

On peut mettre en évidence ces deux types de vibration avec une cuve à ondes.

I.1.1 Propagation par onde plane



On remplit la cuve avec une hauteur d'eau d'environ 1 cm et on l'éclaire de façon continue. On règle la plaque plane parallèlement à la surface de l'eau en la faisant juste affleurer sur cette surface. On règle la fréquence du vibreur suffisamment bas pour bien voir le phénomène de propagation et on ajuste son amplitude pour avoir des franges sombres et brillantes contrastées mais pas trop déformées.

Observations et mesure :

On voit les franges se déplacer → l'ébranlement généré par la lame vibrante est une onde plane progressive. On peut alors stroboscooper l'image en ajustant la fréquence de l'éclairage à celle du vibreur pour observer une figure stable. On voit alors que les lieux équiphasés sont des plans et on peut noter que l'amplitude de l'onde n'est pas trop atténuée en cours de propagation (à comparer avec l'onde sphérique ci-après). On peut mesurer la distance entre plusieurs raies brillantes lorsque l'image est bien stable et en déduire la distance entre deux raies successives. Cette distance est égale à λ si la fréquence de l'éclairage est égale à celle du vibreur ou un de ses sous multiples. Il faut bien entendu tenir compte du grossissement de l'image. On peut l'obtenir en plaçant à la surface de l'eau un objet transparent de dimension connue et en mesurant sa taille sur l'écran pour obtenir la longueur d'onde réelle. La vitesse de propagation de l'onde s'en déduit connaissant la fréquence du vibreur via la relation :

$$c = \lambda f$$

Remarque :

Il est important de bien comprendre le processus de formation de l'image sur l'écran. Les franges observées sur l'écran sont dues à un effet de lentille dû aux rides qui se forment à la surface de l'eau (cf. [1], p. 220). Pour observer une belle figure, il faut que l'eau mouille au mieux la lame et l'amplitude de vibration ne doit pas être trop importante pour que l'effet de focalisation de la lumière soit suffisamment délocalisé.

I.1.2 Onde sphérique

On reprend la manipulation précédente en remplaçant la plaque vibrante plane par une pointe. On observe encore un phénomène de propagation qu'il faut une nouvelle fois stroboscooper pour l'observer de manière stable. On peut remarquer la décroissance plus rapide de l'amplitude de l'onde avec la distance typique des ondes sphériques et noter qu'on tend vers une onde plane à grande distance.

I.2 Vitesse des ondesI.2.1 Ondes acoustiques

La mesure de la vitesse des ondes acoustiques peut se faire de différentes façons : par interférences avec un trombone de Koenig, à l'aide d'ondes stationnaires, avec des ondes ultrasonores, ... Se reporter au montage sur l'acoustique pour des idées de manipulation. On peut remarquer que la vitesse de la vitesse du son à deux fréquences très différentes est quasiment la même ce qui semble montrer que l'air est un milieu non dispersif pour les ondes sonores (il faudrait faire des mesures à plusieurs fréquences pour pouvoir l'affirmer sans ambiguïté).

Influence du milieu :

On peut montrer que la vitesse du son dépend du milieu dans lequel l'onde se propage. Des dispositifs spécifiques permettent la mesure de la vitesse du son dans l'eau avec des ultrasons. Une manipulation très simple permet aussi une mesure de vitesse dans une tige métallique (cf. montage acoustique).

Impédance caractéristique :

La vitesse dans un milieu permet, si on connaît sa masse volumique, le calcul de son impédance acoustique caractéristique¹ pour une onde progressive plane par la relation (cf. [2], p. 228) :

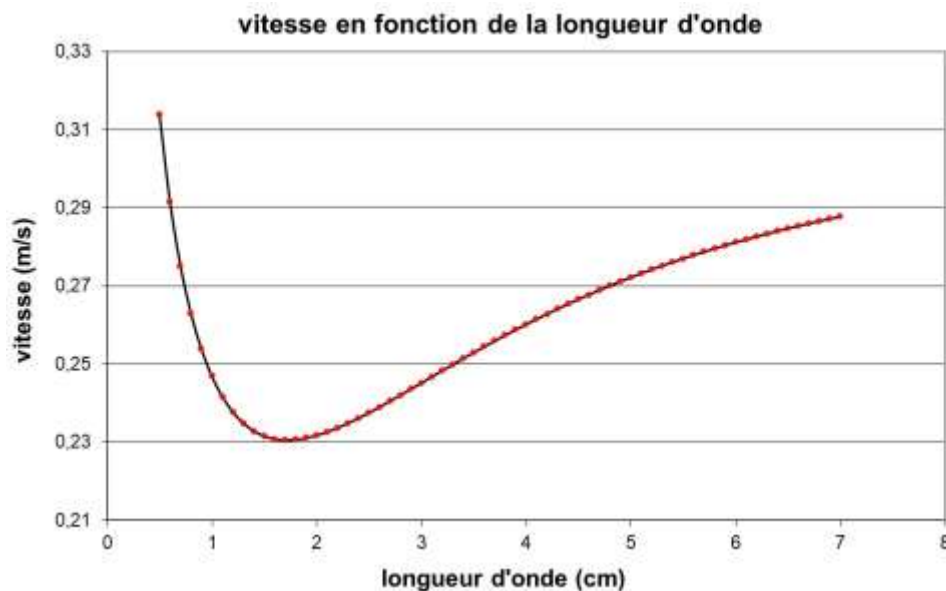
$$Z_{ac}(N.s.m^{-3}) = \rho.c$$

On peut faire ce calcul pour l'air ($\rho = 1,205 \text{ kg.m}^{-3}$ à 20 °C) et pour l'eau ($\rho = 998 \text{ kg.m}^{-3}$ à 20 °C). La différence d'impédance permet alors de comprendre pourquoi la transmission d'une onde sonore se fait mal entre ces deux milieux.

I.2.2 Ondes à la surface de l'eau

La propagation des ondes à la surface de l'eau dans une cuve à ondes est dispersive (cf. [6], p. 568 ou le montage surfaces et interfaces). La dépendance en fréquence de la vitesse à l'allure suivante (graphique tracé dans l'hypothèse d'une houle peu profonde avec une hauteur $h = 1 \text{ cm}$ typique pour une cuve à ondes) :

¹ Ne pas confondre impédance acoustique caractéristique, impédance acoustique et impédance mécanique (cf. [2]).



On peut mesurer la vitesse de propagation des ondes à deux longueurs d'ondes différentes pour mettre en évidence une modification de la vitesse mais c'est délicat avec les cuves à ondes courantes car on se situe souvent autour du point d'inflexion de la courbe avec leur gamme de fréquence. L'idéal est de pouvoir faire une mesure aux environs de 10 Hz et une autre vers 50-60 Hz pour avoir une différence notable (on peut utiliser un autre vibreur si celui de la cuve est trop limité en fréquence).

II INFLUENCE D'UN OBSTACLE SUR LA PROPAGATION

II.1 Phénomène de diffraction

II.1.1 En mécanique

On peut reprendre la manipulation du § I.1.1 et disposer les obstacles prévus à cet effet sur le front d'onde pour limiter latéralement la propagation. Ils doivent bien se raccorder aux parois latérales de la cuve pour éviter des transmissions partielles de l'onde sur les côtés qui perturberaient l'observation. On peut se reporter en [1], p. 222 pour les observations à effectuer. Il faut montrer l'influence du rapport a/λ sur le phénomène de diffraction.

II.1.2 En Acoustique

On peut aussi montrer le phénomène de diffraction avec des ultrasons à l'aide de dispositifs adaptés (consulter leur notice pour la manipulation).

II.1.3 En optique

C'est un phénomène classique en optique. Consulter la montage « Diffraction » pour l'expérience.

II.2 Ondes Stationnaires

Lorsqu'une onde progressive monochromatique est totalement réfléchi² par un obstacle, sa superposition avec l'onde régressive aboutit à une onde stationnaire. La forme générale décrivant ce type d'onde correspond au produit d'une fonction du temps par une fonction d'espace d'où, dans le cas d'un problème est à une dimension :

$$f(x, t) = u(x) \times v(t)$$

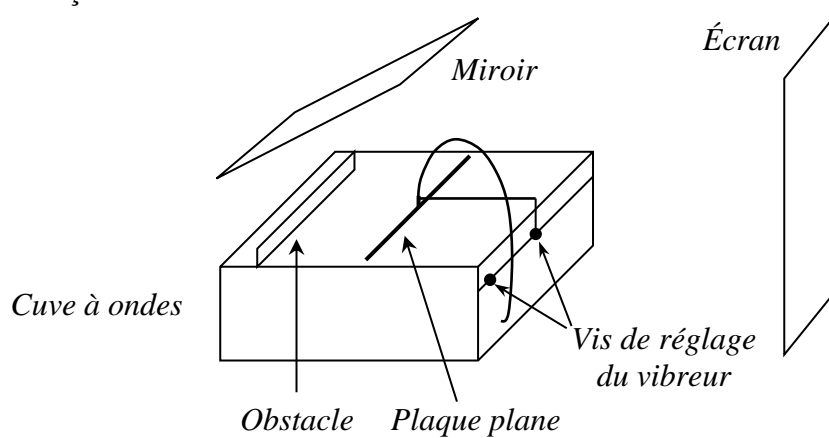
² Le cas d'une réflexion partielle est abordé dans la partie sur les ondes centimétriques.

II.2.1 Ondes à la surface de l'eau

[7] : p. 763

Montage :

On reprend le montage du § I.1.1. On place un obstacle plan en face du vibreur et on éclaire la cuve de façon continue.



Si on compare avec l'expérience du § I.1.1, on observe encore une succession de franges brillantes et sombres mais elles ne se déplacent pas donc l'onde résultante de l'addition des vibrations incidente et réfléchie est une onde stationnaire. On remarque aussi que la distance entre deux franges brillantes successives est deux fois plus petite qu'auparavant (on peut le vérifier quantitativement en mesurant l'interfrange dans les deux cas de figure) → la périodicité spatiale de l'onde stationnaire comparée à l'onde plane progressive vaut $\lambda/2$.

Interprétation :

On suppose que l'ébranlement généré par le vibreur à la surface de l'eau est une onde progressive de la forme $u_i = a \cos(\omega t - kx)$ avec $k = 2\pi/\lambda$ et $\omega = 2\pi/T$. Cette onde se réfléchit sur la paroi supposée parfaitement rigide et donne naissance à une onde régressive $u_r = a \cos(\omega t + kx)$. L'onde résultante vaut :

$$u_t = u_i + u_r = a[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] \quad \text{Soit} \quad \boxed{u_t = 2a \cos(kx) \cdot \cos(\omega t)}$$

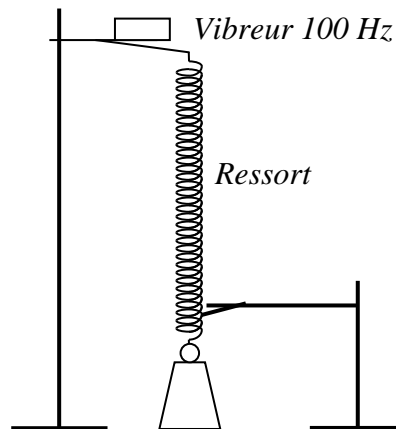
L'expression obtenue montre que toutes les tranches de fluide vibrent en phase avec une amplitude dépendant de l'abscisse x de la tranche considérée. Elle est maximale pour les positions telles que $kx = n\pi$, soit $x = n\lambda/2$. Elle est minimale pour les positions telles que $kx = (2n + 1)\pi/2$ soit $x = (2n + 1)\lambda/4$. Deux nœuds ou deux ventres consécutifs sont donc bien séparés par une distance de $\lambda/2$. Il est intéressant d'observer une figure animée du phénomène d'onde stationnaire et de le comparer à une onde progressive (on trouve facilement ce type d'animation sur internet).

II.2.2 Corde de Melde

On peut se reporter aux montages sur la mesure des fréquences temporelles et sur la résonance pour la manipulation. Cette expérience permet une observation visuelle de l'onde stationnaire et de ses caractéristiques.

II.2.3 Avec un ressort

Cette manipulation simple à mettre en œuvre nécessite un ressort long et assez souple (longueur au repos d'environ 20 cm et constante de raideur $k \approx 4 \text{ N.m}^{-1}$ par exemple). Les caractéristiques typiques du mouvement de l'onde stationnaire sont faciles à montrer à une audience si on fait une projection agrandie du ressort.

Montage :

On alimente le vibreur électromagnétique avec un alternostat. La fréquence étant fixe, on recherche manuellement la résonance des ondes stationnaires en ajustant la longueur « active » du ressort ». Pour ce faire, on bloque avec la main une des spires situées en bas du ressort puis on remonte progressivement jusqu'à observer des vibrations notables dans le ressort. On bloque alors la spire qui donne le meilleur résultat à l'aide d'une pince pour observer les nœuds et les ventres de vibrations stationnaires dans le ressort. Les oscillations autour d'un nœud peuvent s'observer à l'aide d'un stroboscope réglé aux alentours de 6000 et 12000 éclairs par minutes (cela correspond à 100 Hz et 200 Hz). L'expérience est assez spectaculaire si on projette une portion du ressort à l'aide d'une webcam. Pour une exploitation et plus d'explications, se reporter à la référence [7], p. 764.

III REFLEXION / TRANSMISSION A UNE INTERFACE

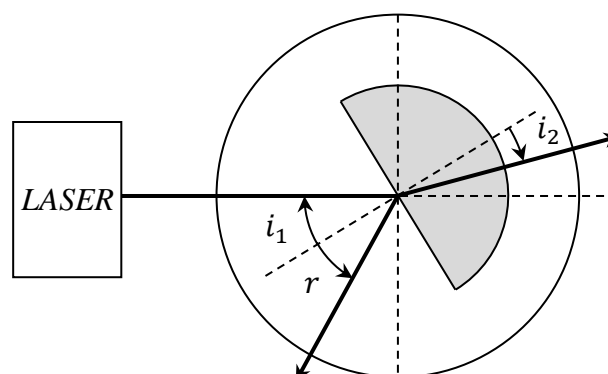
Le comportement de l'onde est alors régi par les lois de Snell Descartes rappelées ci-dessous. Leur étude est particulièrement simple en optique. De nombreux dispositifs pédagogiques plus ou moins similaires se servent d'un demi cylindre en plexiglas pour pouvoir étudier les deux cas de figure suivant les valeurs respectives de n_1 et n_2 . Par contre, le cas de l'onde évanescence ne peut pas être abordé car les longueurs d'onde optiques sont trop petites (se reporter en fin de topo pour une expérience possible avec des ondes centimétriques).

Loi 1 : les rayons incident, réfléchis et réfractés sont dans le plan d'incidence.

Loi 2 : les angles d'incidence et de réflexion (définis par rapport à la normale au point d'incidence) sont égaux en valeur mais de signe opposé ($i_1 = -r$)

Loi 3 : les angles d'incidence et de réfraction vérifient la relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ où n sont les indices des milieux.

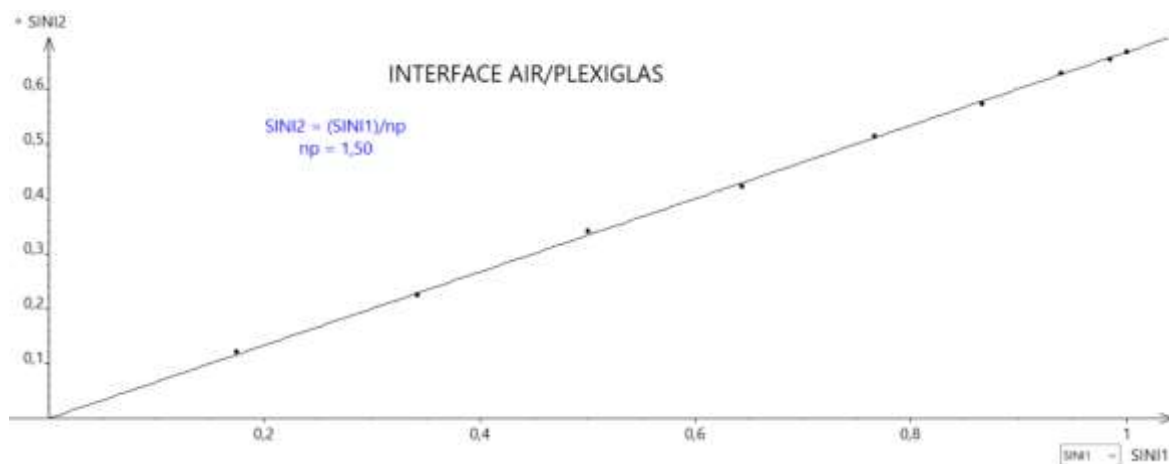
III.1 Milieu moins réfringent → milieu plus réfringent ($n_1 < n_2$)



Le faisceau laser doit passer au centre de rotation du plateau tournant. La face plate du demi-cylindre doit être orienté vers le Laser et son centre doit aussi coïncider avec l'axe de rotation du plateau. Dans ces conditions, seule la première interface air/plexiglas joue un rôle dans la déviation du faisceau puisqu'il arrive en incidence normale sur la deuxième interface et les trois angles i_1, r et i_2 sont clairement déterminés. On fait alors tourner le plateau pour i_1 compris entre 0 et 90°, on mesure r et i_2 et on vérifie la deuxième loi $i_1 = -r$. Pour la troisième loi, on peut remarquer que i_2 est systématiquement inférieur à i_1 et qu'il y a par conséquent toujours un rayon réfracté puisqu'on a ici, avec $n_{air} \approx 1$:

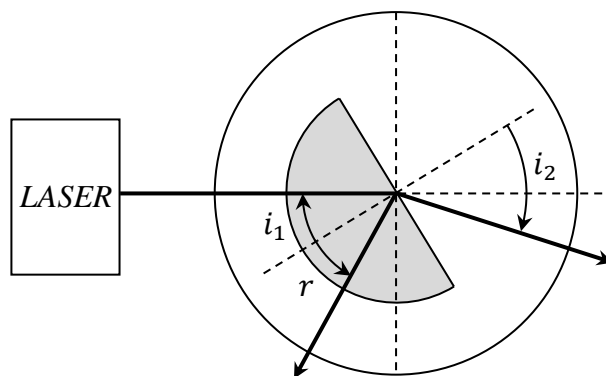
$$\sin i_2 = \frac{1}{n_p} \sin i_1$$

On peut alors tracer la courbe $\sin i_2 = f(\sin i_1)$ pour obtenir l'indice n_p du plexiglas :



III.2 Milieu plus réfringent → milieu moins réfringent ($n_1 > n_2$)

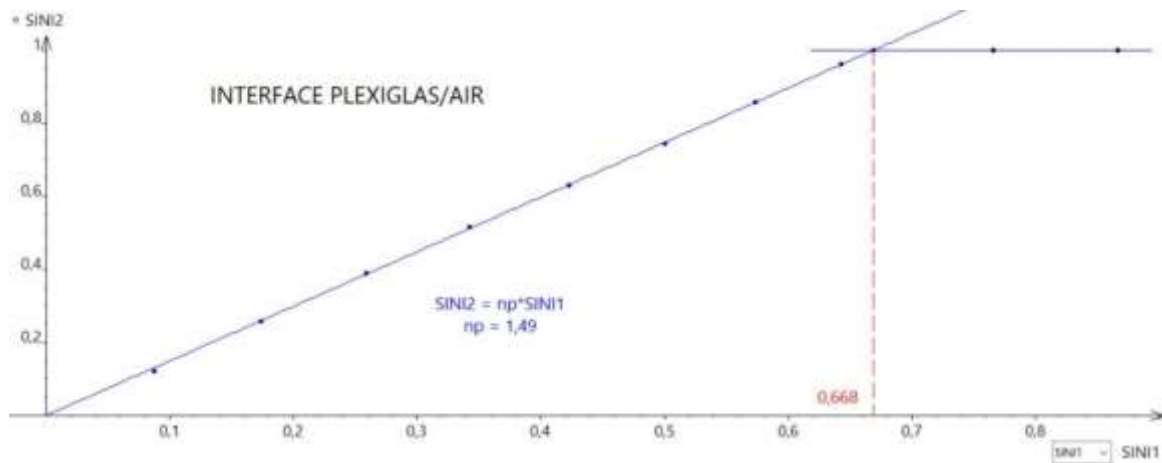
Pour cette étude, il suffit d'inverser le sens du demi-cylindre en respectant les mêmes précautions que précédemment.



Cette fois-ci, seule la deuxième interface plexiglas/air joue un rôle dans la déviation du faisceau car la première est attaquée en incidence normale. La loi sur la réflexion reste inchangée mais i_2 est maintenant systématiquement supérieur à i_1 et il y a par conséquent une limite au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté :

$$n_p \sin i_{1 \text{ limite}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad i_{1 \text{ limite}} = \arcsin\left(\frac{1}{n_p}\right)$$

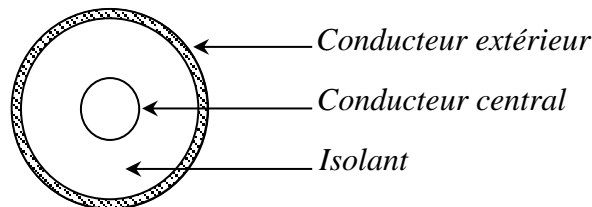
On peut estimer expérimentalement l'angle d'incidence pour lequel le rayon réfracté disparaît et comparer à la valeur théorique obtenue avec l'indice du plexiglas obtenue précédemment. Une autre solution consiste à tracer et exploiter la courbe $\sin i_2 = f(\sin i_1)$:



IV PROPAGATION DANS UN CABLE COAXIAL

[3], p. 250/254 ; [4], p. 258.

IV.1 Introduction



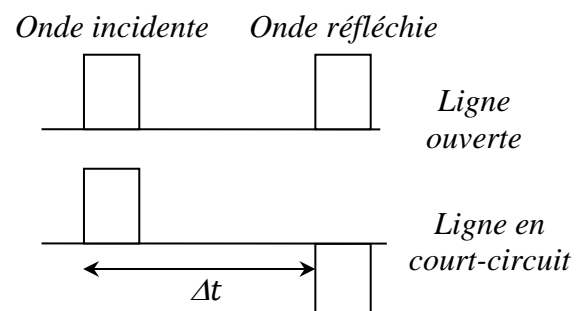
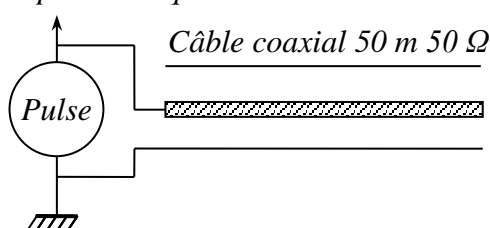
Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs séparés par un matériau isolant. Le conducteur extérieur sert de référence de potentiel en étant relié à la masse lorsque le câble est connecté. On a ainsi un effet de blindage vis à vis des champs électromagnétiques extérieurs perturbateurs. Lorsqu'on travaille en hautes fréquences et que la longueur du câble est grande devant la longueur d'onde, la tension et le courant (ou les champs électriques et magnétiques) varient le long du câble. Le mode de propagation dans les câbles coaxiaux est un mode TEM (Transversal Electric and Magnetic fields) : les champs \vec{E} et \vec{H} se trouvent dans des plans parallèles à la section du câble. Les phénomènes de propagation peuvent alors être facilement analysés à partir des concepts de tension et courant. Les résultats utilisés ci-après sont démontrés en annexe.

IV.2 Mesure de la vitesse de propagation du signal dans le câble

Le principe de la mesure consiste à injecter des impulsions dans le câble et observer la réflexion avec l'extrémité du câble en court-circuit ou en circuit ouvert. Les pulses doivent être très brefs (≈ 100 ns) pour éviter une superposition des signaux. On peut utiliser un générateur spécifique ou celui intégré dans certains oscilloscopes comme on l'a fait ici avec un Keysight DSO 2002.

IV.2.1 Première méthode

Oscilloscope numérique



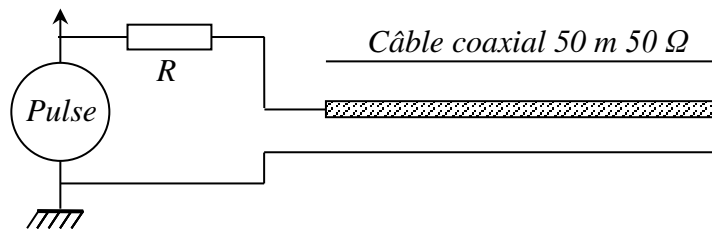
On commence par régler le générateur pour obtenir des pulses d'environ 100 ns. Lorsqu'on branche le câble coaxial, une onde réfléchie apparaît et s'inverse de sens quand on met l'extrémité du câble en court-circuit. Ces résultats s'expliquent avec le coefficient de réflexion introduit en annexe 1 :

$$\Gamma = \frac{Z - Z_C}{Z + Z_C}$$

L'impédance Z est infinie quand la ligne est ouverte d'où $\Gamma = +1$ et une réflexion sans inversion. Elle est nulle si la ligne est en court-circuit d'où $\Gamma = -1$. L'onde est totalement réfléchie mais en étant inversée cette fois-ci. On peut obtenir la vitesse de propagation v en mesurant le décalage entre les pulses. L'onde ayant parcourue 2 fois la longueur du câble avant d'être détectée à l'oscilloscope, on a $v = 2l/\Delta t$. Un exemple de résultat est donné dans le montage sur les effets capacitifs.

IV.2.2 Deuxième méthode

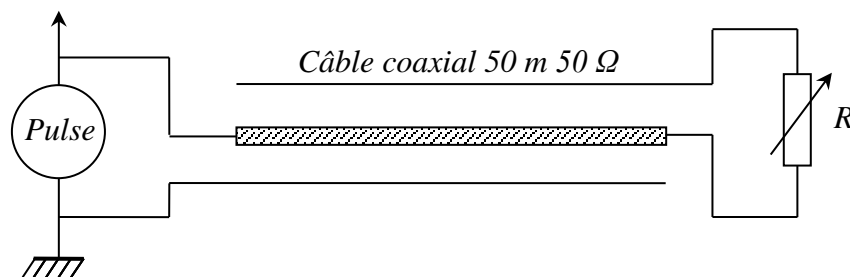
Oscilloscope numérique



Dans l'expérience précédente, l'impulsion de tension réfléchie est absorbée lorsque qu'elle arrive dans le GBF puisqu'il a une impédance interne identique à celle du câble coaxial. On peut envisager une variante en plaçant une résistance $R \times 100 \Omega$ entre le générateur et l'entrée du câble. Dans ce cas, l'impulsion de retour repart de nouveau dans le câble et on observe des réflexions multiples sans changement de signe puisque R est supérieure à l'impédance caractéristique du câble. On a $\Delta t = 2l/v$ entre chaque impulsion observée donc on peut augmenter la précision sur v en mesurant plusieurs allers et retours.

IV.3 Mesure de l'impédance caractéristique

Oscilloscope numérique



Cette fois ci, on place une résistance variable R en bout de ligne et on modifie sa valeur jusqu'à faire disparaître l'onde réfléchie. On a alors $R = Z_C = 50 \Omega$ dans notre exemple puisque $\Gamma = 0$. On peut noter que l'onde ne disparaît pas complètement si on utilise une boîte à décade pour R . Ce point est expliqué dans le montage sur les effets capacitif.

V PROPAGATION GUIDÉE DES ULTRASONS

Dans un tuyau cylindrique de diamètre $d = 2a$, le guidage d'une onde acoustique de longueur d'onde dans l'air libre λ peut s'effectuer suivant différents modes de propagation. Chacun de ces modes, notés nm , est caractérisé par une longueur d'onde guidée λ_g donnée par la relation (cf. annexe 2 pour les coefficients μ_{nm}) :

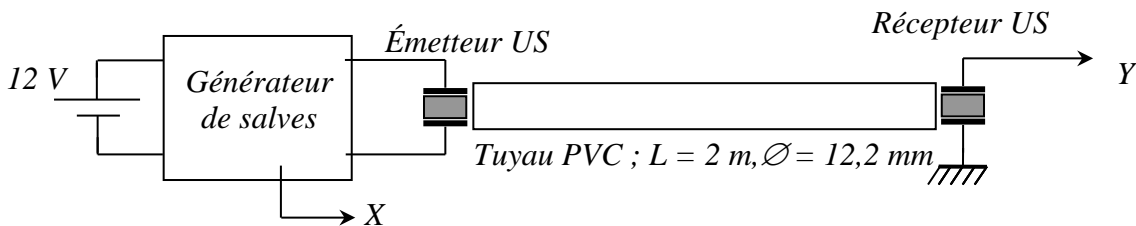
$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\mu_{nm}}{2\pi a}\right)^2$$

Et une vitesse de groupe qui peut être nettement inférieure à celle dans l'air donnée par :

$$v_g = c \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

Le nombre de modes susceptibles de se propager diminue avec le diamètre du tuyau. Seul le mode fondamental 01 peut se propager lorsque $d < 0,59\lambda$ (transmission monomode). La longueur d'onde dans l'air des cellules ultrasonores d'enseignement étant de l'ordre de 8,5 mm, on observe ce type de transmission si le diamètre du tuyau est inférieur à 5 mm.

V.1 Intérêt du guidage



On règle le générateur de salves pour produire 5 à 10 pulses et on observe l'amplitude du signal transmis Y avec et sans le tube. On doit récupérer un signal plus fort avec le tube (intérêt du guidage) et constater la présence d'au moins deux trains d'ondes si on augmente la sensibilité de la voie Y. On peut mesurer leur temps de parcours pour obtenir les vitesses de groupe de chaque mode mais il faut s'affranchir du temps de réponse du couple émetteur/récepteur et de l'intrication des deux paquets d'ondes. Pour s'affranchir au mieux de ces deux problèmes, on peut accoler le récepteur à l'émetteur et mesurer le décalage temporel t_d entre le début du premier pulse émis et le maximum du signal reçu. On mesure ensuite les temps de parcours des deux trains d'onde de la même façon et on les corrige de t_d pour calculer les vitesses de groupe. Les valeurs de v_g permettent alors d'en déduire les modes de propagation observés. On peut aussi regarder l'effet de l'inclinaison de l'émetteur par rapport à l'axe du tuyau et de la position latérale du récepteur sur l'intensité relative des modes.

Remarques :

Tous les modes susceptibles de se propager dans ce tuyau ne sont pas observés (celui dont la vitesse de groupe est proche du fondamental peut notamment être noyé dans la réponse de celui-ci). On peut aussi montrer la transmission monomode en utilisant un tube de verre de 4,5 mm de diamètre mais qu'on ne récupère pas plus de signal à cause de l'inadéquation entre le diamètre du tube et celui des blocs émetteur et récepteur.

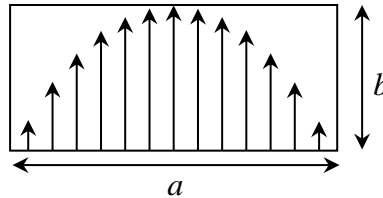
V.2 Influence du diamètre du guide

On reprend la manipulation précédente avec un tuyau de plus grand diamètre (20,7 mm à Rennes) et on identifie au mieux les modes observés. On peut encore regarder l'effet de l'inclinaison de l'émetteur par rapport à l'axe du tuyau sur l'intensité relative des modes de propagation ainsi que l'influence du déplacement du récepteur sur la section de sortie du tuyau. L'amplitude du mode fondamental L_{01} doit être \approx indépendante de la position du récepteur puisque sa propagation s'effectue selon une onde plane. Pour le deuxième paquet d'ondes, la densité d'énergie acoustique décroît lorsqu'on s'éloigne de l'axe du tuyau. Le nombre de modes observables est encore plus important si on augmente la taille du tuyau (34 mm de diamètre par exemple) et on doit constater qu'il est possible de transférer beaucoup plus d'énergie acoustique sur des modes autres que le fondamental suivant le positionnement de l'émetteur.

VI PROPAGATION GUIDÉE DES ONDES CENTIMÉTRIQUES

VI.1 Introduction

On utilise ici un dispositif pédagogique permettant l'étude de la propagation des ondes centimétriques dans un guide de section rectangulaire $a = 22,86 \text{ mm}$ et $b = 11 \text{ mm}$. Ces dimensions permettent la propagation monomode fondamentale TE_{10} . Le champ électrique dans une section transversale du guide a l'allure suivante :

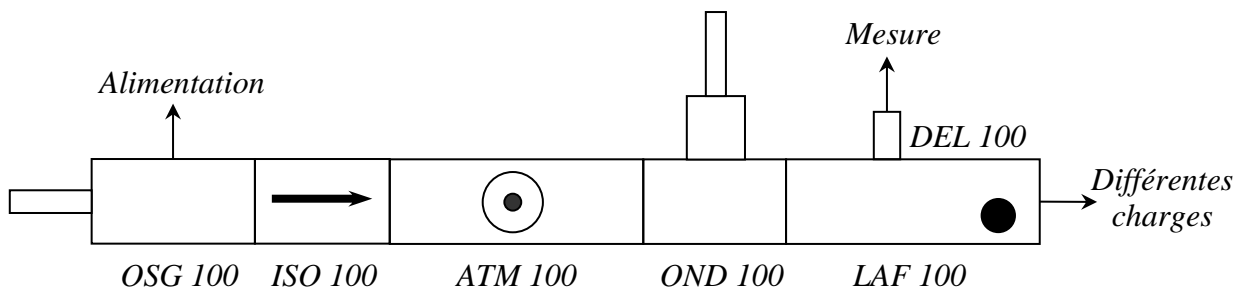


Et la longueur d'onde dans le guide est donnée par la relation suivante, avec $\lambda_0 = c/f$ la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}$$

VI.2 Etude du mode de propagation dans le guide

Le banc d'onde (Oritel/Chauvin Arnoux BDH R100) est extrêmement coûteux et les diodes d'émission et de détection sont très fragiles donc il doit être manipulé avec beaucoup de précautions.



On indique succinctement les caractéristiques des différents éléments du montage. On peut utiliser un oscilloscope numérique en mode Roll pour observer visuellement le signal détecté et rajouter éventuellement un millivoltmètre continu pour des mesures plus précises.

Source OSG 100 :

Cette partie comporte une diode Gunn insérée dans une cavité résonante. Ce n'est pas une diode au sens classique du terme (jonction PN). Son fonctionnement est basé sur un effet de volume se produisant dans un barreau d'Arséniure de Gallium (GaAs) de quelques μm d'épaisseur et présentant trois zones d'un même dopage N à des concentrations différentes ($N_{fort} - N_{faible} - N_{fort}$). L'application d'une différence de potentiel continue de valeur suffisante aux bornes du barreau fait entrer la diode dans une zone de résistance négative où le courant est formé d'impulsions dont la cadence $1/\tau$ est principalement fixée par le rapport entre la vitesse de migration des porteurs et la longueur du barreau. La diode est insérée dans une cavité résonante. Sa longueur peut être ajustée à l'aide d'un vernier pour modifier, dans une certaine gamme, la fréquence d'émission.

Alimentation :

Il faut une source de tension continue pouvant délivrer au moins 1 A avec un affichage du courant. On alimente la diode en augmente progressivement la tension en partant de zéro. L'intensité doit suivre l'évolution de la tension au début puis elle se met à diminuer à partir d'un

certain seuil (≈ 6 V sur le banc d'étude). On rentre alors dans la zone de résistance négative de la diode ou elle oscille et produit des ondes centimétriques. Si dépasse un peu de 9 V (*sans aller trop loin pour limiter les risques*), le courant se remet à augmenter et on sort de la zone d'oscillation du composant. On peut donc se fixer une tension d'environ 8 V pour alimenter la diode (*cette tension doit être baissée progressivement lorsqu'on éteint la source*).

Isolateur ISO 100 :

Ce bloc contient un isolateur à ferrite. Il laisse passer l'onde dans un seul sens et absorbe les éventuelles ondes réfléchies dans la ligne pour protéger l'oscillateur Gunn. *Il faut faire attention à le mettre dans le bon sens.*

Atténuateur ATM 100 :

Cet élément permet le contrôle de l'énergie transmise dans la ligne. L'atténuation est provoquée par l'insertion d'une lame métallique absorbante parallèle au petit côté du guide et placée au milieu de la section. Une courbe donne l'atténuation en dB en fonction de la lecture du vernier de contrôle de la lame.

Ondemètre OND 100 :

Il est constitué d'une cavité cylindrique dont la hauteur peut être modifiée à l'aide d'un vernier micrométrique. L'ondemètre absorbe une partie de l'énergie électromagnétique de l'onde lorsque sa fréquence propre de résonance est accordée à la longueur d'onde dans le guide. Cela se manifeste par une baisse plus ou moins forte du signal dans la ligne de mesure.

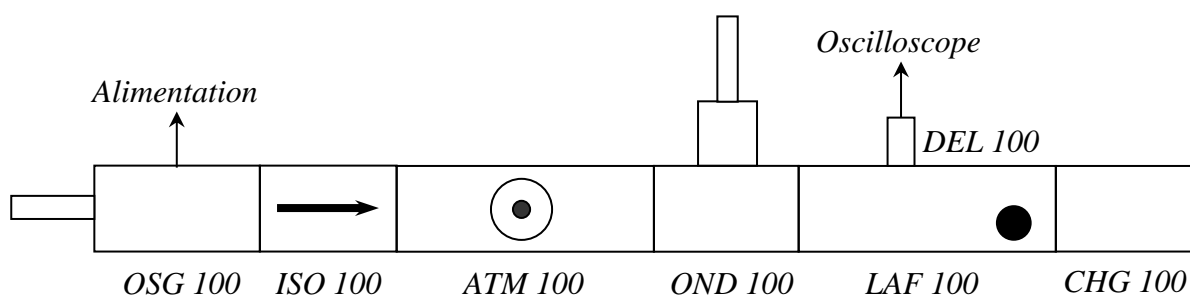
Ligne de mesure LAF 100 :

C'est une portion de guide fendue longitudinalement dans laquelle une sonde (antenne) prélève une partie de la puissance HF qui est ensuite détectée par une diode.

Détecteur DEL 100 :

Ce bloc contient une diode à jonction métal/semi-conducteur (diode Schottky) permettant la conversion du signal hyperfréquence en un signal continu. Elle a une réponse non linéaire qu'on peut considérer comme \approx quadratique lorsque le niveau détecté est faible. La tension V mesurée est alors \approx proportionnelle au carré du champ électrique dans le guide. ***Ce détecteur est très fragile. La tension a ses bornes ne doit pas dépasser 50 millivolts !***

VI.2.1 Mesure de la fréquence

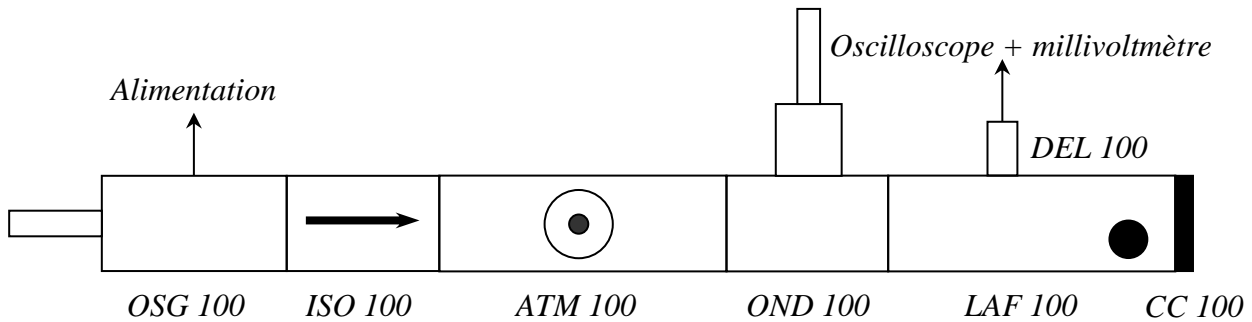


On termine la ligne de mesure par l'impédance adaptée CHG 100. Dans ces conditions, le signal est à peu près constant dans toute la ligne de mesure. *On règle l'atténuation au maximum sur le module ATM100 avant d'alimenter la diode pour protéger le détecteur.* On ajuste la fréquence d'émission à une valeur quelconque (l_{vernier} compris entre 6 et 14 mm), on lance l'émission puis on diminue l'atténuation jusqu'à observer un signal suffisant *mais inférieur à 50 mV*. On tourne alors le vernier de l'ondemètre jusqu'à observer une diminution sensible du signal détecté. On en déduit la fréquence émise compte tenu de la courbe d'étalonnage de l'ondemètre et la longueur d'onde λ_0 dans l'air libre :

$$\lambda_0 = c/f$$

Remarque :

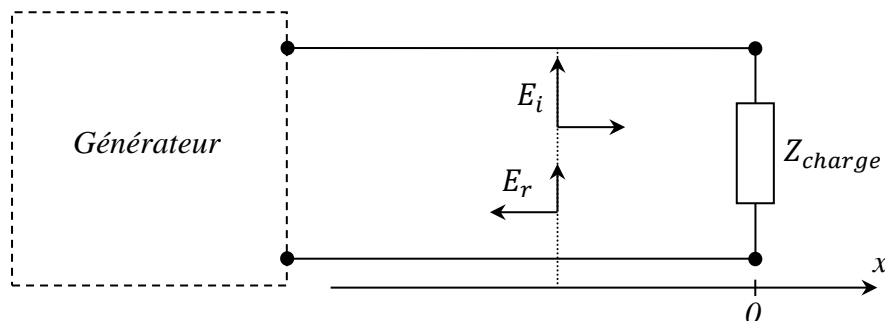
L'efficacité de l'ondemètre est plus ou moins bonne suivant la fréquence d'émission donc on peut modifier cette fréquence si on a du mal à observer une baisse du signal. D'autres dispositifs à ondes centimétriques (comme ceux de chez Philips) disposent d'un détecteur placé directement dans la cavité. On repère alors un maximum de signal quand la cavité est adaptée et l'observation est plus franche puisque le signal est très faible en dehors de l'accord.

VI.2.2 Longueur d'onde dans le guide

On revient à l'atténuation maximale. On remplace la charge adaptée par la plaque métallique CC100. L'onde incidente est alors pratiquement entièrement réfléchiée et il se forme un système d'ondes stationnaires dans le guide avec des minimums ou des maximums séparés de $\lambda_g/2$. On diminue progressivement l'atténuation tout en déplaçant la sonde de mesure pour trouver une position où le signal est maximum. On ajuste alors l'atténuation de façon à obtenir une amplitude suffisante mais sans dépasser 50 mV. On peut dorénavant étudier le système d'onde stationnaire en toute sécurité et mesurer λ_g en déplaçant la sonde de mesure le long de la ligne pour repérer la distance entre 3 minimums successifs. Cette longueur d'onde, inférieure à λ_0 , peut être comparée à celle calculée avec la formule donnée en introduction pour confirmer que la propagation se fait bien dans le mode TE_{10} .

VI.3 Mesure des caractéristiques d'une charge

Une charge quelconque placée en bout de ligne provoque une réflexion plus ou moins forte de l'onde incidente. Il s'établit alors un régime d'onde plus ou moins stationnaire dans le guide. Son étude permet d'en déduire l'impédance de la charge.

VI.3.1 PrérequisCoefficient de réflexion :

Il est défini, pour un plan de référence donné, par la relation :

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = |\Gamma| e^{j\theta}$$

Γ est relié à l'impédance caractéristique de la ligne Z_c et celle de la charge Z par la relation :

$$\Gamma = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = \frac{Z_r - 1}{Z_r + 1} \quad \text{avec} \quad Z_r = \frac{Z}{Z_c} \quad \text{impédance réduite}$$

La mesure de Γ permet donc le calcul de l'impédance réduite de la charge (c'est tout l'intérêt de cette impédance). Cette détermination s'effectue en étudiant le régime établi dans la ligne.

Champ électrique global :

$$E(x,t) = E_i e^{j(\omega t - kx)} + E_r e^{j(\omega t + kx)} = E_i [(1 + \Gamma - \Gamma) e^{j(\omega t - kx)} + \Gamma e^{j(\omega t + kx)}]$$

$$E(x,t) = \Gamma E_i [e^{j(\omega t - kx)} + e^{j(\omega t + kx)}] + (1 - \Gamma) E_i e^{j(\omega t - kx)}$$

$$E(x,t) = \Gamma E_i e^{j\omega t} [e^{-jkx} + e^{jkx}] + (1 - \Gamma) E_i e^{j(\omega t - kx)}$$

Soit :

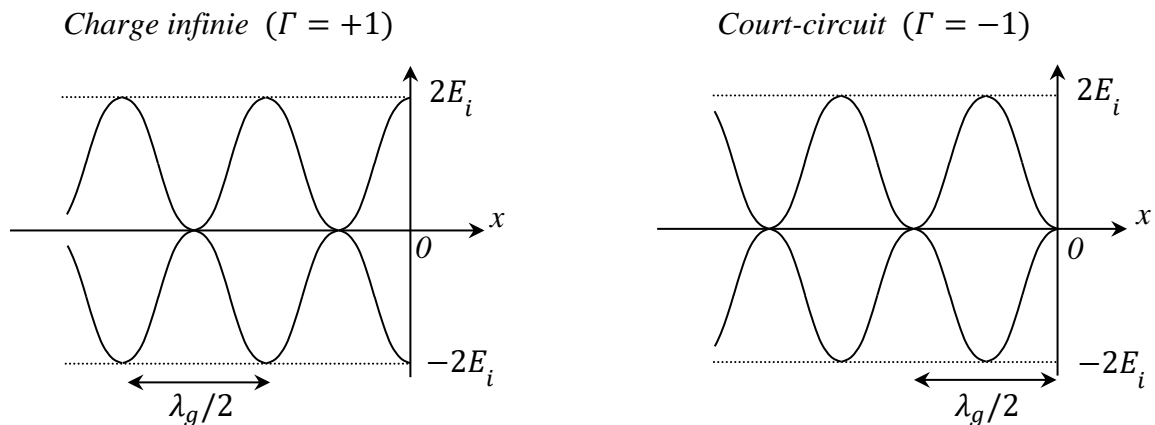
$$E(x,t) = 2\Gamma E_i \cos kx e^{j\omega t} + (1 - \Gamma) E_i e^{j(\omega t - kx)}$$

Le résultat correspond donc à la combinaison d'un champ stationnaire (le premier terme car les coordonnées de temps et d'espace sont découplées) et d'un champ progressif. Le champ est purement progressif et se propage avec une amplitude E_i constante dans tout le guide lorsque $\Gamma = 0$ (charge adaptée en bout de ligne). Le champ est totalement stationnaire si $\Gamma = +1$ (charge infinie). Il oscille alors dans le guide en faisant du surplace avec une modulation spatiale de son amplitude. Les maximums (qui valent $2E_i$) et les minimums (égaux à 0) sont séparés de $\lambda_g/2$, avec un premier maximum en $x = 0$. Si $\Gamma = -1$ (court-circuit en bout de ligne), on a, en reprenant l'équation qui précède la dernière :

$$E(x,t) = -E_i e^{j\omega t} [e^{-jkx} + e^{jkx}] + 2E_i e^{j(\omega t - kx)} = E_i e^{j\omega t} [-e^{-jkx} - e^{jkx} + 2e^{-jkx}]$$

$$E(x,t) = E_i e^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{jkx}] = -2jE_i e^{j\omega t} \sin kx = 2E_i \sin kx e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

On a de nouveau un champ stationnaire mais avec un premier minimum en $x = 0$.



Le champ est partiellement stationnaire et progressif si Γ est quelconque. On peut réécrire son expression pour mieux appréhender l'évolution de l'amplitude le long du guide :

$$E(x,t) = \Gamma E_i e^{j\omega t} [e^{-jkx} + e^{jkx}] + (1 - \Gamma) E_i e^{j(\omega t - kx)}$$

$$E(x,t) = E_i e^{j\omega t} [\Gamma e^{-jkx} + \Gamma e^{jkx} + (1 - \Gamma) e^{-jkx}] = E_i e^{j\omega t} [\Gamma e^{jkx} + e^{-jkx}]$$

$$E(x,t) = E_i e^{j(\omega t - kx)} [\Gamma e^{2jkx} + 1] = E_i e^{j(\omega t - kx)} [1 + |\Gamma| e^{j\theta} e^{2jkx}]$$

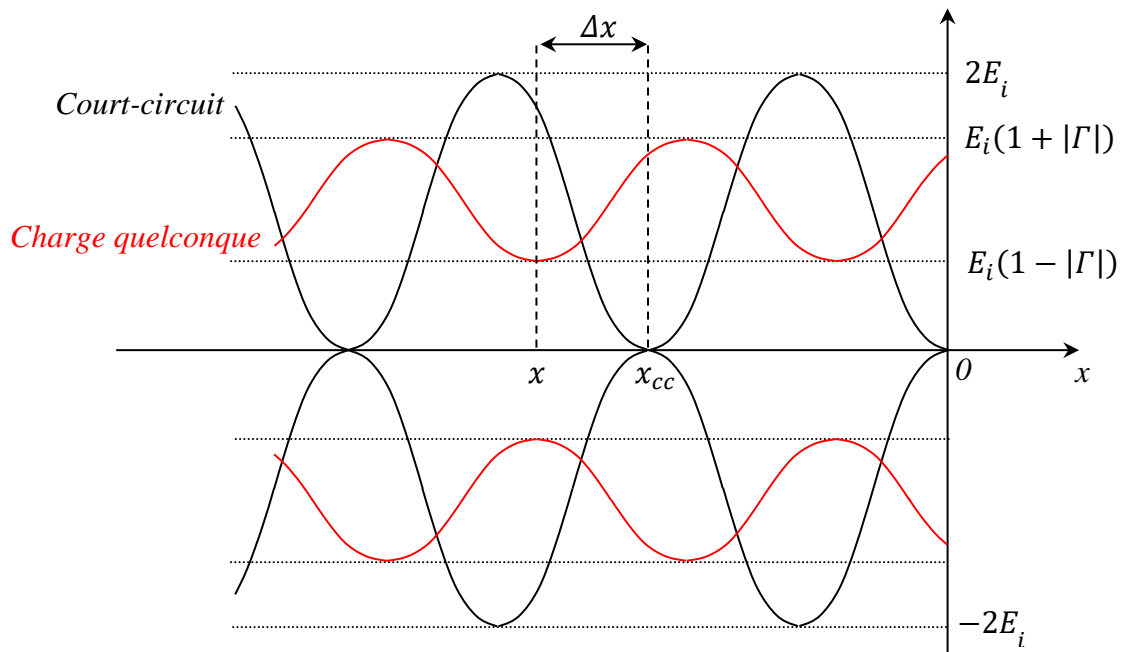
Soit :

$$E(x,t) = E_i [1 + |\Gamma| e^{j(\theta + 2kx)}] e^{j(\omega t - kx)}$$

On voit sous cette forme que l'amplitude du champ global est modulée spatialement par le terme $1 + |\Gamma| e^{j(\theta + 2kx)}$. Il passe par des maximums $E_i(1 + |\Gamma|)$ lorsque que $\theta + 2kx = 2p\pi$ et par des minimums $E_i(1 - |\Gamma|)$ quand $\theta + 2kx = (2p + 1)\pi$. Chaque type d'extrema est encore séparé de $\lambda/2$ mais l'ensemble est décalé à cause du terme de phase θ du coefficient de réflexion donc il n'y a pas de minimum ou de maximum en $x = 0$. Si on compare au cas d'une terminaison en court-circuit ($\Gamma = -1 \rightarrow \theta = \pi$), on a, pour un ordre donné :

$$\pi + 2kx_{cc} - (\theta + 2kx) = (2p + 1)\pi - (2p + 1)\pi = 0 = \pi - \theta + 2k(x_{cc} - x)$$

$$\rightarrow \Delta x = x_{cc} - x = \frac{\lambda_g}{4\pi} (\theta - \pi)$$



On conseille de rechercher une animation sur internet pour bien visualiser ce cas de figure et le comparer à une onde purement stationnaire ou progressive.

Rapport d'onde stationnaire (ROS) :

Le caractère plus ou moins stationnaire ou progressif en cas de réflexion quelconque est quantifié par ce rapport. Il correspond au quotient des amplitudes du champ aux ventres et aux nœuds :

$$ROS = \frac{|E_{max}|}{|E_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

Il évolue entre 1 lorsque $\Gamma = 0$ (pas d'onde réfléchie, onde purement progressive) et l'infini lorsque $|\Gamma| = 1$ (réflexion totale, onde parfaitement stationnaire).

VI.3.2 Mesure du ROS et exploitation

Sur un banc d'onde centimétrique, le ROS s'évalue de deux manières différentes suivant qu'il est fort ou faible.

ROS faible ; Mesure directe :

On peut considérer que le détecteur a une réponse quadratique lorsque les niveaux à mesurer sont peu différents. La tension V est alors proportionnelle au carré du champ électrique donc il suffit de repérer les valeurs V_{max} et V_{min} en déplaçant le détecteur dans la ligne de mesure pour obtenir la valeur du ROS par la relation :

$$ROS = \sqrt{\frac{V_{max}}{V_{min}}}$$

Cette méthode donne des résultats corrects pour des ROS inférieurs à ≈ 3 d'après le constructeur.

ROS élevé ; Mesure indirecte :

L'hypothèse d'une réponse quadratique n'est plus valide sur une grande dynamique de mesure donc la méthode précédente ne convient pas si le ROS est grand. Dans ce cas, on utilise un atténuateur calibré pour travailler à niveau détecté constant afin de s'affranchir de la loi de réponse du détecteur. On commence par rechercher un minimum dans la ligne. On ajuste le niveau de l'atténuateur ATM 100 pour obtenir un signal de mesure suffisant et on note la valeur G_1 de l'atténuation en dB à l'aide de la courbe d'étalonnage. On repère ensuite un maximum, on ajuste le niveau de l'atténuateur pour obtenir le même signal que précédemment et on note la nouvelle valeur G_2 de l'atténuation. On a alors :

$$G_2 - G_1 = 20 \log \left(\frac{V_{max}}{V_{min}} \right) = 20 \log ROS \quad \rightarrow \quad ROS = 10^{\frac{G_2 - G_1}{20}}$$

Coefficient de réflexion en amplitude :

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad \rightarrow \quad |\Gamma| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1}$$

Coefficient de réflexion en énergie :

L'énergie d'une onde électromagnétique étant proportionnelle à E^2 , la proportion d'énergie réfléchie est égale à $(E_r/E_i)^2 = |\Gamma|^2$ donc le coefficient de réflexion en énergie vaut :

$$\left(\frac{ROS - 1}{ROS + 1} \right)^2$$

Déphasage θ :

On met à profit le décalage des extrema quand on passe d'une charge quelconque à un court-circuit. On commence par repérer un minimum avec la charge étudiée. On la remplace ensuite par un court-circuit et on recherche de nouveau le minimum en se déplaçant vers la charge. On a alors, à $2p\pi$ près :

$$\Delta x = x_{cc} - x = \frac{\lambda_g}{4\pi} (\theta - \pi) \quad \rightarrow \quad \theta = \pi + 4\pi \frac{\Delta x}{\lambda_g}$$

Impédance réduite :

On connaît désormais $|\Gamma|$ et θ donc on peut calculer Z_r .

$$\Gamma = \frac{Z_r - 1}{Z_r + 1} \quad \text{d'où} \quad Z_r = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 + |\Gamma|e^{j\theta}}{1 - |\Gamma|e^{j\theta}}$$

$$Z_r = \frac{1 + |\Gamma|e^{j\theta}}{1 - |\Gamma|e^{j\theta}} \times \frac{1 - |\Gamma|e^{-j\theta}}{1 - |\Gamma|e^{-j\theta}} = \frac{1 - |\Gamma|^2 + |\Gamma|(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{1 + |\Gamma|^2 - |\Gamma|(e^{j\theta} + e^{-j\theta})} = \frac{1 - |\Gamma|^2 + 2j|\Gamma|\sin\theta}{1 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma|\cos\theta}$$

D'où :

$$Re[Z_r] = \frac{1 - |\Gamma|^2}{1 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma|\cos\theta}$$

$$Im[Z_r] = \frac{2|\Gamma|\sin\theta}{1 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma|\cos\theta}$$

VI.3.3 Manipulation

Il est possible d'étudier différentes terminaisons (charge adaptée CHG 100, cornet d'émission ANC 100/15 ou guide simplement ouvert en bout de ligne). La comparaison entre le cornet et le guide directement ouvert est intéressante car elle permet de montrer l'intérêt du cornet en tant qu'adaptateur d'impédance (maximum de puissance transférée).

Méthodes de mesures à employer :

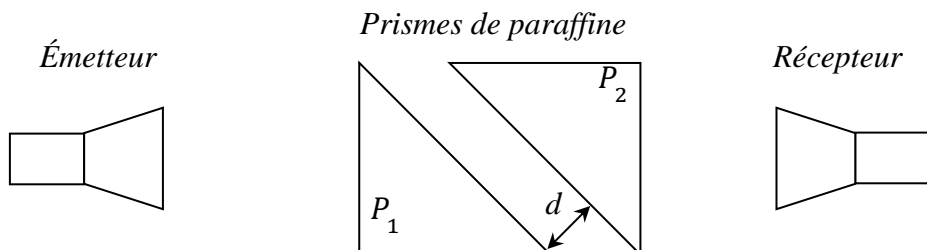
Les différences de niveau dans le guide sont faibles lorsque le ROS est proche de 1. La méthode de l'atténuateur calibré est alors peu précise puisqu'il est gradué en dB donc il faut privilégier une mesure directe avec la charge adaptée. La méthode de l'atténuateur est adaptée aux mesures de ROS élevé donc c'est celle qu'il faut utiliser avec la terminaison en court-circuit. On est dans une situation intermédiaire lorsque le guide est simplement ouvert ou raccordé à un cornet. Dans ce cas, on peut comparer les résultats obtenus avec les deux protocoles. Dans tous les cas, *il faut veiller à ne jamais dépasser la valeur maximum du signal que peut supporter la diode de détection* (il faut notamment remettre l'atténuateur à fond quand on change de terminaison).

VII ONDE EVANESCENTE, REFLEXION TOTALE FRUSTREE

On a vu au § III.2 qu'il peut y avoir réflexion totale lorsqu'une onde se réfracte sur un milieu moins réfringent. Le but ici est de montrer qu'il existe alors une onde évanescence dans le milieu émergent dont l'intensité décroît exponentiellement (on utilise pour cela la réflexion totale frustrée). Les ondes centimétriques sont particulièrement adaptées à cette étude car la longueur de pénétration de l'onde dans le deuxième milieu est de l'ordre de grandeur de λ .

VII.1 Montage

On couple un émetteur et un récepteur à des cornets³ pour travailler en propagation libre (*attention au branchement du dispositif à ondes centimétriques* ; cf. § VI.2). On intercale deux prismes en paraffine à base triangle isocèle rectangle sur le trajet de l'onde comme indiqué sur le schéma. Le prisme P_1 est attaqué en incidence normale donc l'angle d'incidence sur sa face inclinée en sortie (interface paraffine → air) vaut 45° :



VII.2 Manipulation

On commence avec uniquement le prisme P_1 . On doit constater que l'intensité transmise au récepteur est nulle, ce qui semble cohérent avec une réflexion totale sur

³ On peut en monter sur le banc Oritel (consulter la notice des cornets ANC 100 pour l'installation de l'ensemble).

la deuxième interface de P_1 . Si c'est le cas, il existe une onde évanescente dont la longueur de pénétration vaut (cf. annexe 3) :

$$l = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}} \rightarrow \boxed{l = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_{paraffine}^2 \sin^2 i_1 - 1}}}$$

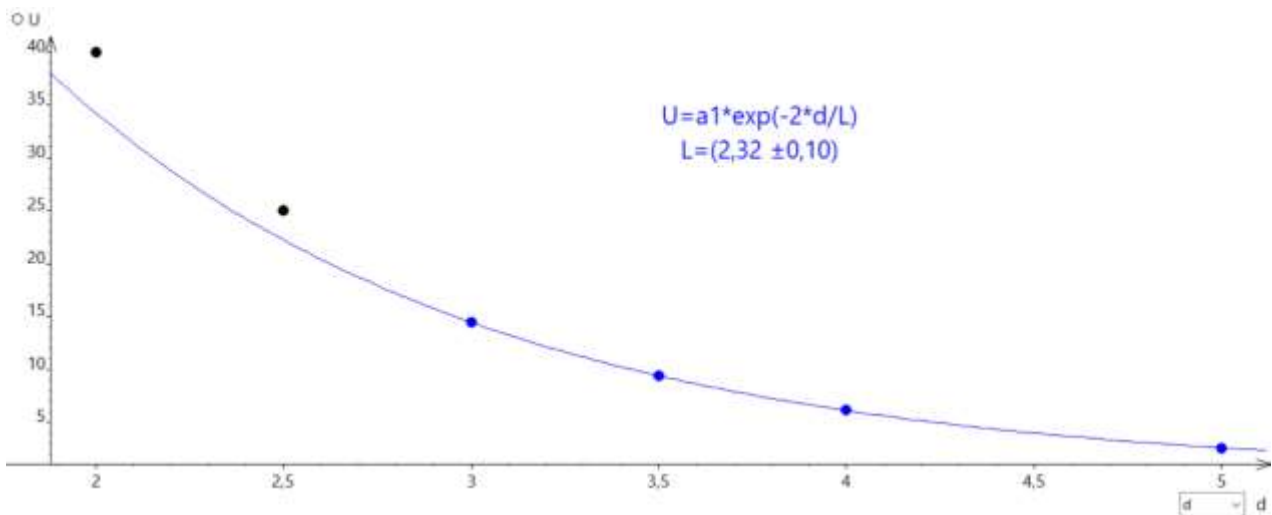
Pour mettre en évidence cette onde, on rajoute le prisme P_2 afin de frustrer la réflexion totale. On doit alors avoir un signal non nul sur le récepteur lorsque les deux prismes sont proches et on peut mesurer l'évolution de la tension en fonction de la distance d qui les sépare pour mettre en évidence la décroissance exponentielle. *La manipulation doit être soignée car la longueur de pénétration est très sensible à l'angle d'incidence et donc l'orientation des prismes.*

VII.3 Exploitation

Lorsque d est supérieur à l , le champ électrique transmis varie suivant la loi (cf. § VI de l'annexe 3) :

$$E_t = AE_1 e^{-\frac{d}{l}}$$

Si on suppose que le récepteur a une réponse quadratique, on doit récupérer une tension proportionnelle à $e^{-2d/l}$. Voici à titre indicatif le résultat d'une série de mesure :



On estime la valeur de l en effectuant une modélisation sur toutes les mesures puis on relance le fit en ne gardant que les points correspondants à la condition $d > l$. On obtient $l = 2,3 \text{ cm}$ avec cette expérience et cette valeur permet d'obtenir l'indice de la paraffine en inversant l'expression de la longueur de pénétration (la longueur d'onde λ_0 a été mesurée avec l'ondemètre) :

$$n_{paraffine} = \frac{1}{\sin i_1} \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2\pi l}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin 45} \sqrt{\left(\frac{3,26}{2\pi \times 2,3}\right)^2 + 1} = 1,45$$

Il faut noter qu'on est près de l'angle critique de réflexion totale avec cet indice :

$$i_{1c} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \approx \arcsin \frac{1}{1,45} \approx 43,6^\circ$$

La longueur de pénétration est donc relativement importante dans cette expérience (on n'est pas loin de la divergence).

Bibliographie :

- [1] : Quaranta I
- [2] : Faroux Renault : Mécanique des fluides et ondes mécaniques
- [3] : Quaranta III
- [4] : Quaranta IV
- [5] : BUP 742
- [6] : Bruhat : Mécanique (sixième édition)
- [7] : BUP 662
- [8] : Perez : Electromagnétisme, 4^{eme} édition

Pour les ondes centimétriques :

P.F. Combes : Ondes métriques et centimétriques, Dunod Université

P.F. Combes : Transmission en espace libre et sur les lignes, Dunod Université

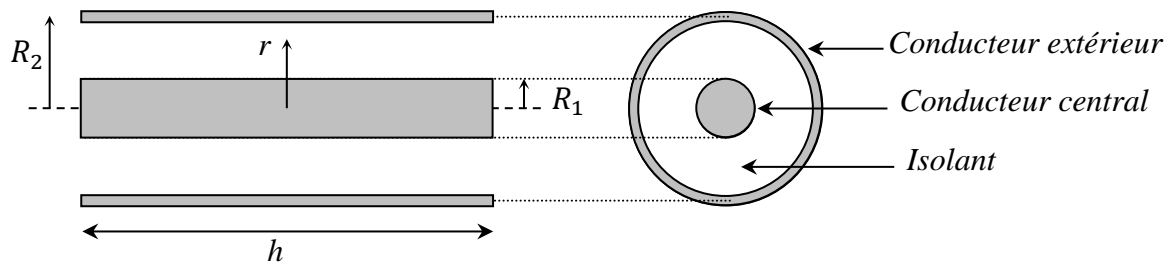
J. P. Mathieu : Vibrations et phénomène de propagation, tome 2, Masson

F. Gardiol : Traité d'électricité, tome 13, Hyperfréquences, Ed Georgi, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

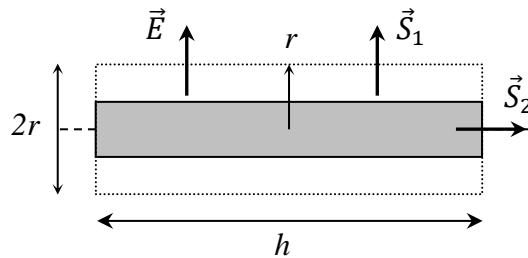
ANNEXE 1 : CABLE COAXIAL

I CAPACITE LINEIQUE DU CABLE

Le câble est constitué de 2 cylindres conducteurs, l'un creux de rayon R_2 , l'autre plein de rayon R_1 , de même axe, séparés par un isolant de permittivité ϵ_r .



Cette disposition a la structure d'un condensateur cylindrique. La capacité C d'un condensateur portant les charges $+Q/-Q$ sur les armatures portées respectivement aux potentiels V_1/V_2 est définie par $Q = C(V_1 - V_2)$. Pour déterminer l'expression de cette capacité, on détermine d'abord le champ électrique en un point M de l'isolant situé à une distance r du centre. \vec{E} est radial compte tenu de la symétrie du problème donc on applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r compris entre R_1 et R_2 et de longueur h :



Le flux à travers les bases du cylindre est nul (vecteurs champ et surface perpendiculaires). Sur la surface latérale on a :

$$2\pi r h E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0 \epsilon_r}$$

On exprime dans un deuxième temps la circulation du champ le long d'un rayon :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = V_1 - V_2 = \frac{Q}{C}$$

On obtient alors l'expression suivante pour la capacité linéique du câble :

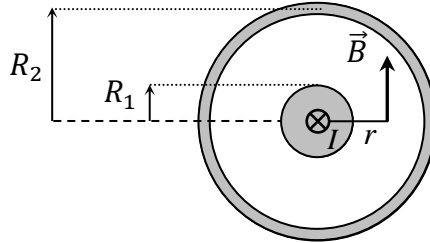
$$C_{lin} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}$$

AN :

On a typiquement $R_1 \approx 0,5 \text{ mm}$ et $R_2 \approx 1,5 \text{ mm}$ dans un câble coaxial. Le diélectrique le plus courant étant le polyéthylène de permittivité $\epsilon_r \approx 2,25$, l'ordre de grandeur pour la capacité linéique d'un câble est d'environ $100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

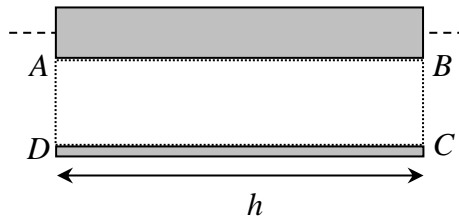
II INDUCTANCE PROPRE LINEIQUE DU CÂBLE

Les courants à haute fréquence qui se propagent dans un câble sont pratiquement surfaciques si le métal est très bon conducteur (effet de peau). On cherche dans un premier temps l'expression du champ magnétique créé par le fil central, parcouru par un courant I , en un point situé à la distance $R_1 < r < R_2$ du centre. Le champ magnétique est ortho radial par symétrie et ne dépend que de r . Son sens est obtenu à partir de la règle du bonhomme d'Ampère et son expression s'obtient à partir du théorème d'Ampère (circulation du champ sur un contour circulaire) :



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B r d\theta = \sum \mu_0 I_{\text{enlacés}} \rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le résultat s'applique pour $R_1 < r < R_2$. Si $r > R_2$, la somme des courants enlacés est nulle (I dans le conducteur central et $-I$ dans le conducteur extérieur) et le champ magnétique est nul à l'extérieur du câble. Pour calculer l'inductance propre du circuit, on calcule le flux du champ magnétique à travers le contour ABCD :



$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

L'inductance propre s'obtient par la relation $\Phi = LI$ donc le coefficient d'inductance propre linéique du câble vaut :

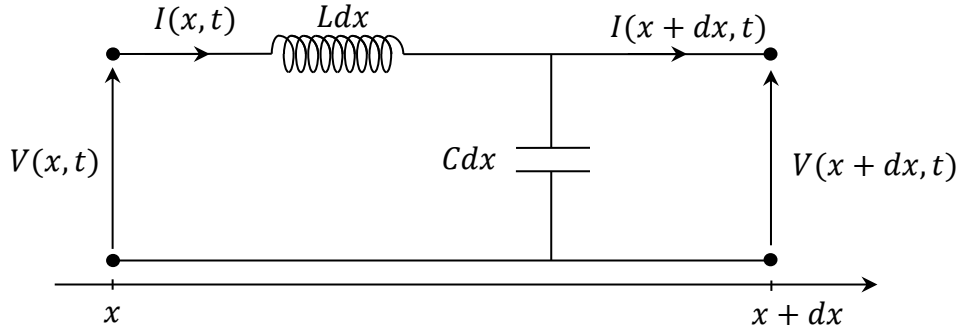
$$L_{\text{lin}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

AN :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} ; R_1 \approx 0,5 \text{ mm} ; R_2 \approx 1,5 \text{ mm} ; \varepsilon_r \approx 2,25 \rightarrow \boxed{L \approx 0,22 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}}$$

III EQUATION D'ONDE DANS LE CÂBLE

Si on néglige les pertes, un élément du câble coaxial de longueur dx peut être représenté par le schéma ci-dessous avec L et C les grandeurs linéiques) :



La loi des mailles donne :

$$V(x, t) = V(x + dx, t) + Ldx \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{V(x, t) - V(x + dx, t)}{dx} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) = I(x + dx, t) + Cdx \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

Soit de même :

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

On dérive les résultats précédents respectivement par rapport à x et à t :

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} \quad \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t \partial x} = -C \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2}$$

Soit, en combinant :

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = -LC \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2}$$

On trouve de même :

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} = -LC \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2}$$

On obtient l'équation de propagation classique dite des télégraphistes. La solution générale de cette équation est la combinaison d'une onde progressive et une onde régressive. La vitesse de propagation est donnée par la relation $c^2 = 1/LC$. On obtient avec les expressions de L et C trouvées précédemment :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

AN :

$$\epsilon_r \approx 2,25 \quad \rightarrow \quad \boxed{c \approx 2.10^8 \text{ m.s}^{-1}}$$

IV IMPEDANCE CARACTERISTIQUE DE LA LIGNE

On considère une onde sinusoïdale, progressive, de pulsation ω , se propageant le long du câble supposé très long. L'impédance caractéristique Z_C est celle qui annule le coefficient de réflexion en bout de ligne. Dans ce cas, on a un régime d'onde progressive dans le câble et l'impédance est constante dans toute la ligne et égale à l'impédance caractéristique ($Z(x) = Z_C$).

Calcul de l'impédance caractéristique :

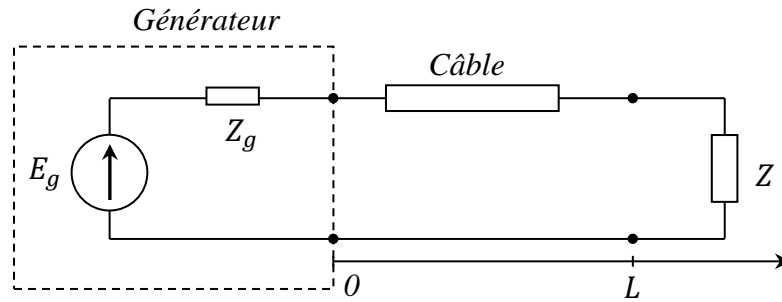
$$V(x, t) = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = V_0 \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$\text{Or } \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -\frac{\omega V_0}{LC} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow I(x, t) = \frac{V_0}{LC} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{Z_C = \frac{V(x, t)}{I(x, t)} = L \cdot C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Cette impédance est purement résistive et indépendante de la fréquence.

V CAS D'UNE TERMINAISON QUELCONQUE



Dans ce cas, il y a une réflexion en $x = L$ donc le courant en un point x de la ligne est de la forme :

$$I(x, t) = I_i(x, t) - I_r(x, t) \quad (1)$$

On a aussi (cf. ci-dessus) :

$$V_i(x, t) = Z_C I_i(x, t) \quad \text{et} \quad V_r(x, t) = Z_C I_r(x, t) \quad (2)$$

Et, en bout de ligne :

$$V(L, t) = V_i(L, t) + V_r(L, t) = Z I(L, t) \quad (3)$$

Avec (1) dans (3) :

$$V_i(L, t) + V_r(L, t) = Z [I_i(L, t) - I_r(L, t)]$$

Et (2) :

$$Z_C I_i(L, t) + Z_C I_r(L, t) = Z [I_i(L, t) - I_r(L, t)]$$

On en déduit le coefficient de réflexion :

$$\boxed{\Gamma = \frac{I_r(L, t)}{I_i(L, t)} = \frac{Z - Z_C}{Z + Z_C}}$$

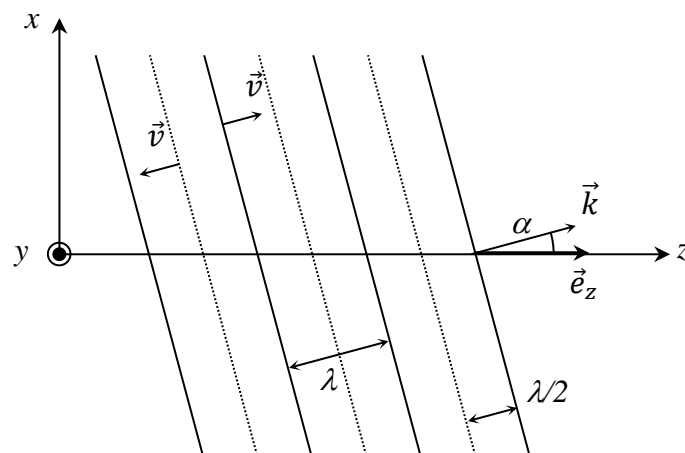
ANNEXE 2 : PROPAGATION GUIDÉE DES ONDES ACOUSTIQUES

I MODE FONDAMENTAL

Une onde acoustique plane peut se propager dans un tuyau cylindrique de section quelconque sans modification de sa structure ni de sa célérité si son vecteur d'onde \vec{k} est parallèle à l'axe du tuyau. En effet, la seule condition aux limites imposée par une paroi rigide est que le vecteur vitesse \vec{v} des particules soit parallèle à elle en son voisinage immédiat⁴. Or, cette condition est automatiquement remplie si \vec{k} est colinéaire à l'axe du tuyau puisque les ondes acoustiques sont longitudinales (vecteur vitesse des molécules colinéaires à \vec{k}). On appelle mode fondamental ce type de propagation particulier où l'énergie acoustique est répartie uniformément sur la section du tuyau et où la célérité c est celle des ondes se propageant à l'air libre.

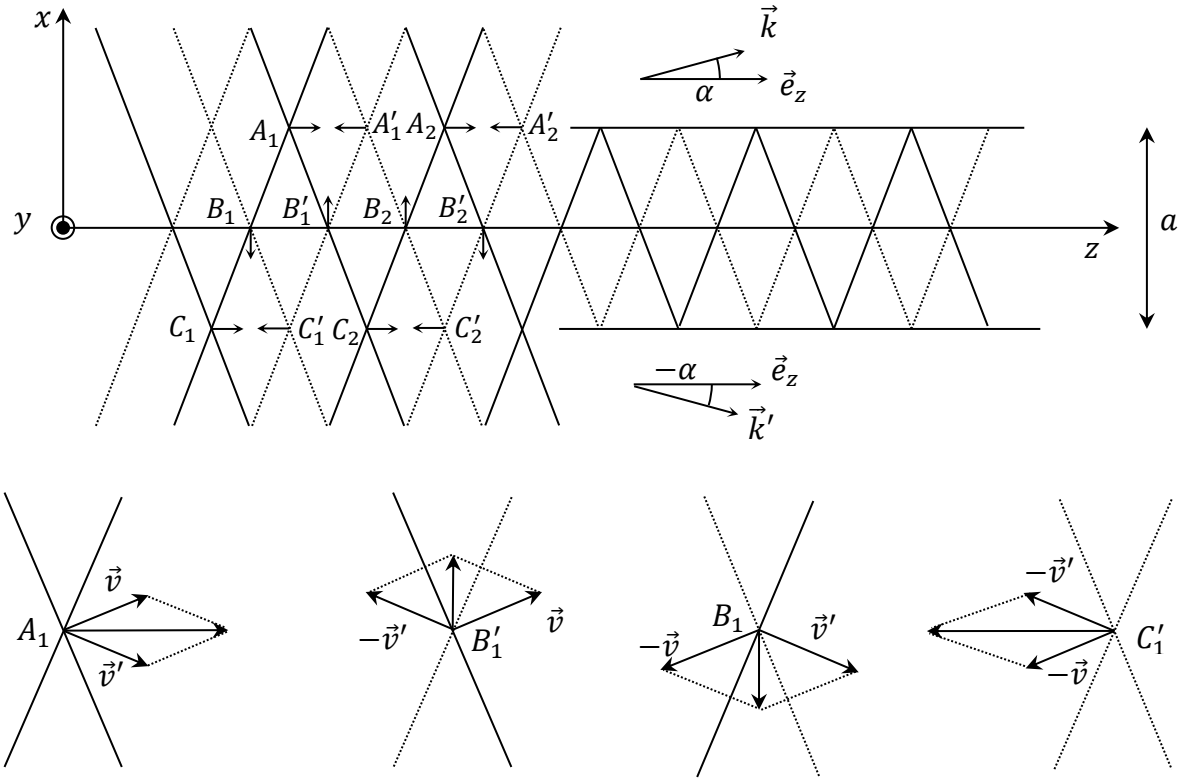
II AUTRES MODES

On considère une onde acoustique plane se propageant dans l'air avec un vecteur d'onde \vec{k} parallèle au plan O, x, z et faisant un angle α avec le vecteur unitaire \vec{e}_z de l'axe z . Représentons, à un instant t donné, les plans d'ondes correspondants à une norme maximale du vecteur vitesse \vec{v} des particules d'air. Ces plans sont distants de $\lambda/2$, avec \vec{v} dans le sens de \vec{k} pour les uns (traits pleins sur le schéma), et dans le sens opposé à \vec{k} pour les autres (traits pointillés) :



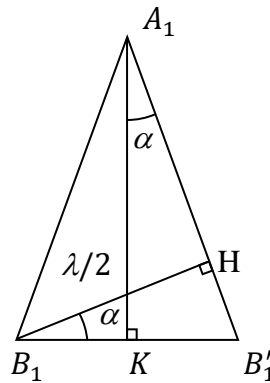
Supposons qu'une deuxième onde acoustique de même type se propage avec un vecteur d'onde \vec{k}' symétrique à \vec{k} par rapport au plan O, y, z . Représentons, comme précédemment à l'instant t , les deux séries de plans d'onde où \vec{v} a une norme maximale et déterminons les vecteurs vitesses des particules soumises à la superposition des deux ondes. On constate alors sur les figures suivantes que les particules d'air aux points A_1, A'_1, A_2, A'_2 et C_1, C'_1, C_2, C'_2 , ... ont une vitesse parallèle à Oz , tandis que celles aux points B_1, B'_1, B_2, B'_2 , ... en ont une suivant Ox . Ce comportement se conserve en cours de propagation, les séries de points A, B et C se déplaçant juste vers la droite. Par conséquent, toutes les particules d'air situées dans le plan Oyz ont des vitesses dirigées selon Ox , et toutes celles situées dans les plans parallèles à Oyz et contenant respectivement les points A_1, A'_1, \dots et C_1, C'_1, \dots ont des vitesses dirigées selon Oz :

⁴ Les particules devraient traverser la paroi ou il y aurait création d'un vide dans le cas contraire.



III GUIDAGE DE L'ONDE PAR DEUX PAROIS PARALLELES

Une paroi rigide imposant au vecteur vitesse des molécules d'être parallèle à elle en son voisinage immédiat, on peut mettre deux plans parallèles à Oyz au niveau des séries de points A et C sans que cela ne change rien puisque la condition y est réalisée. Notons a la plus petite distance séparant les deux parois qui auront dès lors pour effet de guider l'onde composite précédente. A l'intérieur de l'espace ainsi délimité, les 2 ondes planes se réfléchissent sur les parois sans changer la situation initialement envisagée car on obtient toujours, en tout point, la superposition de 2 ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k} et \vec{k}' symétriques par rapport au plan Oyz . On a alors une situation vibratoire (un mode) se propageant selon Oz et caractérisé par la longueur d'onde guidée λ_g telle que $\lambda_g/2 = A_1A'_1 = B_1B'_1 = C_1C'_1 = \dots$ Considérons alors le schéma suivant représentant l'agrandissement d'un un détail de la figure précédente. La distance B_1H est celle qui sépare deux plans d'onde dont les états vibratoires sont en opposition de phase :



On a :

$$B_1H = \frac{\lambda}{2} = B_1B'_1 \cos \alpha = \frac{\lambda_g}{2} \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \alpha}}$$

On a aussi $A_1 K = a/2$, d'où :

$$a = 2A_1 K = 2 \frac{KB'_1}{\tan \alpha} = 2 \frac{B_1 B'_1}{\tan \alpha} = \frac{\lambda / \cos \alpha}{\tan \alpha} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a = \frac{\lambda}{\sin \alpha}}$$

La combinaison des deux résultats précédents conduit à la relation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4a^2}}$$

Le guidage de l'onde composite par les deux plans parallèles à Oyz situés en $x = a/2$ et $x = -a/2$ fait apparaître une longueur d'onde guidée λ_g supérieure à λ . Le calcul fait avec la plus petite distance possible pour a peut se généraliser au cas d'un écartement multiple de a avec un entier positif m . La distance a entre les deux parois planes rigides destinées à guider l'onde peut donc être choisie de manière à vérifier la relation $a = m\lambda / \sin \alpha$ qui conduit à :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{m^2}{4a^2}}$$

IV CAS D'UN GUIDE RECTANGULAIRE

On peut ajouter deux autres parois parallèles à Oxz formant avec les deux premières un guide rectangulaire sans modifier l'onde résultante étudiée précédemment. En effet, les vecteurs d'ondes \vec{k} et \vec{k}' initiaux sont parallèles à Oxz et les vecteurs vitesses des particules gazeuses sont en tout point parallèles à Oxz donc les conditions aux limites imposées par ces nouvelles parois sont satisfaites par avance. Si on généralise au cas d'une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}(k_x; k_y; k_z)$ quelconque, on peut montrer qu'il est possible de former une onde composite satisfaisant aux conditions aux limites d'un guide de section rectangulaire de côtés a et b et d'axe Oz , en lui associant 3 ondes de vecteurs d'onde $(-k_x; k_y; k_z)$, $(k_x; -k_y; k_z)$, $(-k_x; -k_y; k_z)$. La longueur d'onde de l'onde guidée vérifie alors la relation suivante où m et n sont des entiers positifs :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2} \right)}$$

Remarque :

On a $\lambda_g = \lambda$ lorsque $m = n = 0$, soit le mode fondamental se propageant à la vitesse de l'onde en propagation libre. Si l'un des deux entiers m ou n est nul, l'onde composite se propageant dans le guide peut être considérée comme la superposition de deux ondes planes et uniformes de vecteurs d'ondes \vec{k} et \vec{k}' parallèles à Oxz ou à Oxy (cas étudié au § III).

V CAS D'UN GUIDE DE SECTION CIRCULAIRE

Dans le cas où le guide utilisé a une section circulaire de rayon a , l'étude simplifiée précédente ne peut plus être conduite. Les résultats essentiels sont cependant conservés : la longueur d'onde λ_g de l'onde guidée est encore liée à la longueur d'onde λ à l'air libre par la relation :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\mu_{nm}}{2\pi a} \right)^2}$$

Où μ_{nm} est la valeur de la variable r pour laquelle la fonction de Bessel J d'ordre n admet son $m^{\text{ième}}$ maximum. Ainsi, la fonction de Bessel d'ordre zéro $J_0(r)$, admet un premier maximum pour $r = \mu_{01} = 0$. On a alors à $\lambda_g = \lambda$, soit le mode fondamental d'onde plane déjà évoqué. Ce mode est souvent noté L_{01} (L parce qu'il s'agit d'une onde longitudinale, 01 parce qu'on s'intéresse à la fonction de Bessel d'ordre 0 dont il s'agit du premier maximum). Dans le cas général, on parle d'un mode nm .

VI CELERITE DES ONDES GUIDEES

Le guidage d'une onde acoustique fait apparaître une longueur d'onde guidée λ_g reliée à λ et à un terme dépendant des caractéristiques transversales du guide. On peut regarder la conséquence sur le module du vecteur d'onde correspondant à la propagation guidée dans le cas d'un guide circulaire :

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \rightarrow k_g^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} = 4\pi^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\mu_{nm}}{2\pi a} \right)^2 \right]$$

Or, $\omega = 2\pi c/\lambda$, d'où :

$$k_g^2 = 4\pi^2 \left[\frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} - \left(\frac{\mu_{nm}}{2\pi a} \right)^2 \right] \rightarrow \boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_{nm}^2}{a^2}}$$

On voit qu'il n'y a pas de proportionnalité entre k_g et ω donc la propagation guidée s'accompagne de dispersion. La vitesse de groupe v_g d'une onde composite est alors donnée par la relation :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g}$$

Qu'on peut développer en dérivant la relation obtenue pour k_g^2 :

$$k_g dk_g = \frac{\omega d\omega}{c^2} \rightarrow v_g = c^2 \frac{k_g}{\omega} = c \frac{c}{\omega} k_g$$

D'où :

$$\boxed{v_g = c \frac{\lambda}{\lambda_g}}$$

A l'exception du mode fondamental, λ_g est toujours supérieure à λ donc la célérité des ondes guidées est toujours inférieure à la célérité des ondes se propageant à l'air libre.

VI.1 Valeurs des μ_{nm}

Le tableau suivant dresse la suite des valeurs μ_{nm} de la variable r pour lesquelles les premières fonctions de Bessel admettent des maxima :

Ordre n de la fonction	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}	μ_{n4}
0	0	3,83	7,01	10,2
1	1,84	5,33	8,54	
2	3,05	6,71	9,97	
3	4,20	8,01		
4	5,32	9,28		
5	6,42			
6	7,50			

On peut alors calculer les modes de propagation possibles pour un tuyau de diamètre d donné (ceux qu'on propose correspondent à des tuyaux présents à Rennes) pour des ultra-sons produits avec les émetteurs d'enseignements ($f = 40 \text{ kHz}$; $\lambda = 8,5 \text{ mm}$) à partir de la relation :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\mu_{nm}}{\pi d}\right)^2$$

Et calculer la vitesse de groupe v_g .

VI.2 Tuyau de 4,5 mm de diamètre

Aucun mode autre que le fondamental ne peut s'y propager car la plus petite valeur μ_{nm} en dehors de μ_{01} est $\mu_{11} = 1,84$ et aboutit déjà à une valeur négative pour λ_g . La seule célérité observée est celle des ondes libres soit 340 m/s dans les conditions habituelles de pression et de températures. On peut en conclure que pour qu'une onde acoustique de longueur d'onde λ à l'air libre puisse se propager un tuyau cylindrique de diamètre d selon un autre mode que le fondamental L_{01} , il faut avoir :

$$\lambda < \lambda_c = \frac{\pi d}{\mu_{11}} \rightarrow \boxed{d > 0,59\lambda}$$

VI.3 Tuyau de 12,2 mm de diamètre

On trouve quatre modes autres que le fondamental.

Mode nm	$\lambda_g \text{ (mm)}$	$v_g \text{ (ms}^{-1}\text{)}$
02	16,1	179
11	9,3	310
21	11,5	251
31	23,4	124

VI.4 Tuyau de 20,7 mm de diamètre

Mode nm	$\lambda_g \text{ (mm)}$	$v_g \text{ (ms}^{-1}\text{)}$	Mode nm	$\lambda_g \text{ (mm)}$	$v_g \text{ (ms}^{-1}\text{)}$
11	8,8	330	61	43	67,1
21	9,3	312	02	9,8	295
31	10,2	284	12	11,8	244
41	11,8	244	22	17,7	163
51	15,6	185	13	21,2	136

VI.5 Tuyau de 34 mm de diamètre

On trouve les modes suivants et ce ne sont pas les seuls :

Mode	λ_g	v_g	Mode	λ_g	v_g	Mode	λ_g	v_g	Mode	λ_g	v_g
11	8.59	336.4	51	9.89	292.3	12	9.39	307.9	03	10.24	282.2
21	8.76	329.8	61	10.59	272.8	22	10.05	287.5	13	11.59	249.4
31	9.02	302.4	71	11.63	248.4	32	11.03	262	23	13.96	207
41	9.38	308	02	8.92	323.8	42	12.61	229.2	04	14.55	198.6

Bibliographie : BUP n° 742

ANNEXE 3 : ONDE EVANESCENTE ET REFLEXION TOTALE FRUSTREE

I ONDE PLANE AMORTIE

On considère une onde plane $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ de vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{U}_x + k_y \vec{U}_y + k_z \vec{U}_z$ avec k_x, k_y et k_z des nombres complexes. On montre facilement que :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{k} \wedge \vec{E} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E}$$

Pour trouver la relation de dispersion, on utilise les lois de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. La première s'écrit (à un facteur i près) $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$, ce qui définit le champ \vec{B} . La seconde loi s'écrit $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \varepsilon \mu \vec{E}$. En combinant les deux relations et en posant $\varepsilon \mu = n^2/c^2$, on obtient :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{B}) = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{B}$$

On peut ensuite montrer que cette relation se réduit à :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$$

Il faut faire attention à la nature complexe des termes de gauches. Si on prend par exemple une onde évanescente de la forme $k_y = k_r$ (réel) et $k_x = i/l$ (imaginaire pur), ce qui correspond à une onde selon y amortie dans la direction x :

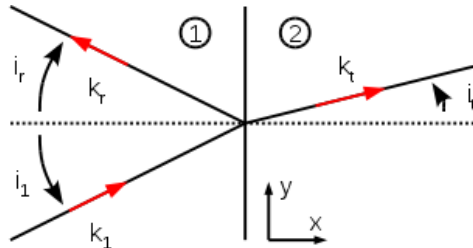
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_r y - \omega t)} e^{-x/l}$$

On obtient :

$$k_r^2 - \frac{1}{l^2} = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$$

On a donc une partie réelle du vecteur d'onde k_r plus grande que si le vecteur d'onde k était réel.

II REFLEXION ET REFRACTION SUR UN DIOPTRE



On considère une onde partiellement réfléchiée et diffractée par un dioptré séparant deux milieux LHI d'indices différents, comme décrit sur le schéma. La condition de continuité de \vec{E} sur le dioptré s'écrit :

$$\vec{E}_0^1 e^{i(\vec{k}_1 \vec{p} - \omega_1 t)} + \vec{E}_0^r e^{i(\vec{k}_r \vec{p} - \omega_r t)} = \vec{E}_0^t e^{i(\vec{k}_t \vec{p} - \omega_t t)}$$

Où on note $\vec{p} = y\vec{U}_y + z\vec{U}_z$ un point du dioptré. La relation étant vérifiée à tout instant t , les fréquences doivent être identiques (on peut donc les simplifier). De plus, la relation étant vérifiée pour toute valeur de y et z , cela impose (puisque k_1 est dans le plan $\{x, y\}$) :

$$k_{1,y} = k_{r,y} = k_{t,y} \quad \text{et} \quad k_{1,z} = k_{r,z} = k_{t,z} = 0$$

Dans le cas où les vecteurs d'ondes sont réels, on peut réécrire la première équation en fonction des angles :

$$k_1 \sin i_1 = k_r \sin i_r = k_t \sin i_t$$

III LOIS DE SNELL DESCARTES ET ANGLE CRITIQUE

L'onde incidente étant réelle, il

en va de même pour l'onde réfléchie qui vérifie alors :

$$k_r^2 = k_i^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2}$$

On en déduit $i_r = -i_1$ et si l'onde réfractée est réelle, elle doit vérifier :

$$k_t^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}$$

En utilisant les relations de dispersion et de continuité on obtient après simplification $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_t$. Cette relation n'est vérifiée que si $\sin i_t < 1$, donc si $n_2 < n_1$, elle n'est vraie que pour des angles incidents inférieurs à $i_{1c} = \arcsin(n_1/n_2)$.

IV REFLEXION TOTALE ET ONDE EVANESCENTE

Dans le cas contraire $i_1 > i_{1c}$, on considère une onde réfractée complexe. La relation de continuité impose toujours :

$$k_{t,y} = k_{1,y} = k_1 \sin i_1 = \frac{n_1 \omega}{c} \sin i_1$$

Exceptée que la relation de dispersion peut maintenant être vérifiée en rajoutant une composante $k_{t,x} = i/l$ imaginaire pure :

$$k_{t,y}^2 - \frac{1}{l^2} = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}$$

Ou encore, en remplaçant $k_{t,y}$ par son expression :

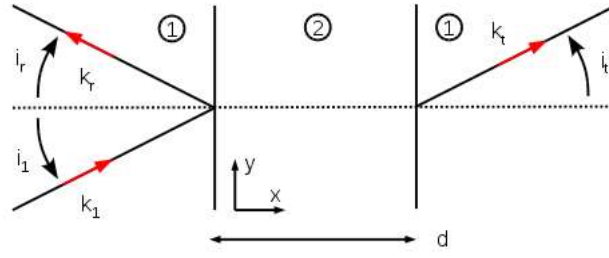
$$\frac{1}{l^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2)$$

l est bien sur la longueur de pénétration et l'onde sera qualifiée d'évanescence. En utilisant le fait que $c/\omega = \lambda_0/2\pi$, on peut mettre son expression sous la forme :

$$l = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}}$$

On remarquera que lorsque i_1 se rapproche de la valeur critique (par valeur supérieure), la valeur de l diverge. Pour observer correctement l'onde évanescence, il faut donc être suffisamment proche de l'angle critique pour que la longueur l soit observable.

V REFLEXION TOTALE FRUSTREE



On considère maintenant deux dioptries parallèles, l'angle incident étant supérieur à l'angle critique. Le milieu intermédiaire contient deux ondes amorties. La première est décroissante et la seconde, issue de la réflexion sur le second dioptre, est croissante :

$$\vec{E}_0^e e^{i(k_{e,y} - \omega t)} e^{-x/l} + \vec{E}_0'^e e^{i(k'_{e,y} - \omega t)} e^{x/l}$$

Pour satisfaire aux conditions de continuité la composante des vecteurs d'onde selon y doit être égale à $k_{1,y}$. Ces derniers peuvent donc s'écrire :

$$\vec{k}_e = \frac{i}{l} \vec{U}_x + k_{1,y} \vec{U}_y \quad \text{et} \quad \vec{k}'_e = -\frac{i}{l} \vec{U}_x + k_{1,y} \vec{U}_y$$

La valeur de l est imposée par la relation de dispersion et reste inchangée. Par ailleurs les mêmes conditions de continuité imposent $k_{t,y} = k_{1,y}$ et les relations de dispersion $k_t = k_1$. On en déduit $\vec{k}_t = \vec{k}_1$.

VI COEFFICIENT DE TRANSMISSION POUR $\vec{E} // \vec{U}_z$

Pour obtenir le coefficient de transmission, il faut calculer le champ E_t et donc utiliser les relations de continuité pour \vec{E} et \vec{B} en $x = 0$ et $x = d$. Si le champ \vec{E} est parallèle à \vec{U}_z , les relations de continuité sont triviales :

$$E_0^1 + E_0^r = E_0^e + E_0'^e$$

$$E_0^t = E_0^e e^{-d/l} + E_0'^e e^{d/l}$$

On calcule ensuite le champ \vec{B} en utilisant la relation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} = \frac{E}{\omega} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit ensuite les équations de continuité pour les deux composantes non nulles de \vec{B} . Comme la valeur de k_y est identique pour toutes les ondes, la composante de \vec{B} selon x donne des équations identiques à celles obtenues pour \vec{E} . Par contre la continuité de la composante de \vec{B} selon y impose :

$$k_{1,x} (E_0^1 - E_0^r) = \frac{i}{l} (E_0^e - E_0'^e)$$

$$k_{1,x} E_0^t = \frac{i}{l} (E_0^e e^{-\frac{d}{l}} - E_0'^e e^{\frac{d}{l}})$$

Il faut ensuite résoudre ce système de 4 équations linéaire pour obtenir \vec{E}_t en fonction de \vec{E}_1 . Après quelques lignes de calcul on obtient (avec $\alpha = k_{1,x} l$) :

$$\vec{E}_t = \frac{2\alpha}{2\alpha \cosh\left(\frac{d}{l}\right) + i(\alpha^2 - 1)\sinh\left(\frac{d}{l}\right)} \vec{E}_1$$

On s'intéresse ici au coefficient de transmission (et non au déphasage). Ce coefficient est égal à la norme τ de \vec{E}_t/\vec{E}_1 :

$$\tau = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 \cosh^2\left(\frac{d}{l}\right) + (\alpha^2 - 1)^2 \sinh^2\left(\frac{d}{l}\right)}}$$

Ce coefficient a une forme un peu compliquée, mais on peut aisément le simplifier en remarquant que $\sinh x$ et $\cosh x$ tendent très rapidement vers $0,5e^x$. En fait, on peut raisonnablement faire cette approximation dès que $x > 1$ (et non pas $x \gg 1$). Donc :

$$\tau \approx \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1} e^{-\frac{d}{l}} \quad \text{si } d > l$$

Expérimentalement on observera donc pour $d \geq l$ un champ électrique transmis dont l'intensité est de la forme :

$$E_t = AE_1 e^{-\frac{d}{l}}$$

VII COEFFICIENT DE TRANSMISSION POUR $\vec{B} // \vec{U}_z$

Dans le cas où \vec{E} est dans le plan $\{x, y\}$, \vec{B} est selon z . Il est plus simple dans ce cas de commencer par écrire la continuité du champ \vec{B} , puis celle de \vec{E} en utilisant la relation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} B_0^i + B_0^r &= B_0^e + B_0'^e \\ B_0^t &= B_0^e e^{-d/l} + B_0'^e e^{d/l} \\ \frac{k_{1,x}}{n_1^2} (B_0^i - B_0^r) &= \frac{i}{ln_2^2} (B_0^e - B_0'^e) \\ \frac{k_{1,x}}{n_1^2} B_0^t &= \frac{i}{ln_2^2} \left(B_0^e e^{-\frac{d}{l}} - B_0'^e e^{\frac{d}{l}} \right) \end{aligned}$$

Ces équations sont quasi-identiques à celles trouvées précédemment. On montre facilement que le coefficient de transmission du champ \vec{B} est égal à τ , à condition de remplacer α par :

$$\alpha' = k_{1,x} l \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2$$

On obtient ensuite immédiatement le coefficient de transmission de \vec{E} en remarquant que :

$$\frac{E_t}{E_1} = \frac{1}{\alpha'} \frac{B_t}{B_1}$$