Oscillateur avec frottements solides
Pendule pesant

Univ. rennes 1 – prépa. agrégation de physique – A. Gellé

I - Rappel de la solution :

Pour un pendule pesant les constantes du mouvement sont :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad , \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad \theta_0 = \frac{C_0}{mgl}$$

Dans le cas d'un pendule pesant avec éventuellement plusieurs masses, il suffit de remplacer mgl par $\sum_i m_i g l_i$. Le moment d'inertie I est la sommes des moments d'inerties propres et du moments d'inertie des barycentres.

Équation du mouvement est :

$$x = -s x_0 + A_n \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{avec} \quad A(t) = A_0 - 2 x_0 n(t)$$

$$s = sign(\dot{x}) \quad \text{et} \quad \text{n(t) une fonction en escalier}$$

s est le signe de la vitesse et A une fonction qui décroît en marche d'escalier. On peut exprimer A et s en fonction du temps à l'aide des fonctions :

$$s = sign(\sin(\omega_0 + \phi)) \quad \text{et} \quad n(t) = A_0 - \left\lfloor \frac{\omega_0 t + \phi}{\pi} \right\rfloor$$

Il est possible d'utiliser ces fonctions dans latispro ou regressi pour ajuster la courbe. Sous Latispro, ces deux expression s'écrivent :

```
signe(sin(Temps*w0+phi))          int((Temps*w0+phi)/pi)
```

II - Montage de la manip

Pendulor + alimentation ±15 V + plaquette sysam

Ne pas utiliser l'alimentation de la plaquette sysam pour alimenter pendulor, car cette alimentation est très bruitée.

Conseil pour ajuster le nombre de périodes et l'importance des frottements

Le travail des forces de frottements sur une période ne dépend que de l'amplitude du mouvement (le chemin parcouru). L'amplitude décroît rapidement si ce travail est important par rapport à l'énergie mécanique du système. On peut donc jouer sur l'énergie de départ pour ajuster le nombre d'oscillations.

Pour avoir peu d'oscillations (et des frottements importants) utiliser une petite masse proche du centre de rotation. Pour avoir plus d'oscillations rajouter une masse loin de l'axe.

Fixer la manip

Placer des masses lourdes sur le pied de la manip pour l'immobiliser. Pour l'expérience avec de grandes oscillations ajouter un pied derrière le pendule. Ajouter une pince à l'aide d'une noix pour tenir au pendule (fixer la pince sur le pied du pendule juste sous l'axe de rotation) [schéma à faire]

Ajuster la fréquence d'acquisition

Bien ajuster le nombre de points par période. Il dépend de l'expérience que vous faites. Voir plus loin.

III - Étude du mouvement

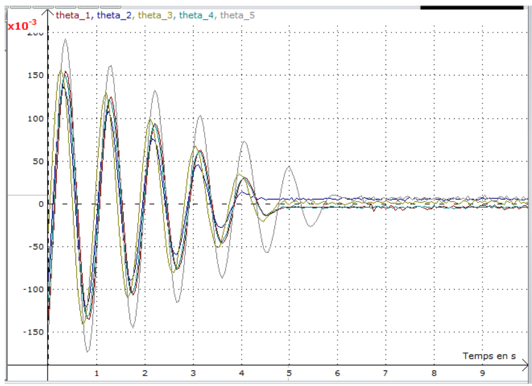
1) Mise en place

Utiliser de préférence une seule masse. L'effet des frottements doit être important si on veut observer la zone d'arrêt. Bien ajuster la fréquence d'échantillonnage. Il faut avoir suffisamment de points par période pour identifier les oscillations sinusoïdales. Mais, il ne faut pas en avoir trop car cela dégrade le calcul de la vitesse.

2) Étude de la périodes

Calculer ou mesurer toutes les composantes du moment d'inertie. Comparer à la valeur expérimentale de la période (avec les incertitudes). Discuter la validité de l'approximation du pendule simple.

Astuce : comment peser la barre du pendule sans la détacher ?



3) Mise en de la zone d'arrêt

Vous pouvez observer la zone d'arrêt en effectuant plusieurs acquisitions à la suite. La position finale du pendule doit être différente à chaque fois.

4) Étude du mouvement

Convertir la tension EA0 en angle. Ajuster les oscillations par le modèle. Sous latispro ça s'écrit :

```
signe(sin(Temps*w0+phi))*x0+max(A0-2*x0*int((Temps*w0+phi)/pi);0)*cos(Temps*w0+phi)
    +theta0
```

Cette fonction n'est valable que lorsque l'oscillateur est en mouvement. La fonction max(A(t);0) évite que l'amplitude devienne négative après l'arrêt de l'oscillateur (ce qui ne fait pas joli sur le graph).

Il est préférable de rajouter une constante, car la position verticale est très difficile à mesurer précisément (même avec un étalonnage précis).

On peut tracer les courbes qui correspondent à la zone d'arrêt et aux amplitudes :

Dans la fenêtre d'ajustement cliquer « Copier le résultat vers le presse papier ». Puis coller dans la feuille de calcul (rajouter les commentaires // devant l'expression du fit). Pour tracer deux courbes constantes sous latispro, il faut partir d'une courbe qui va définir les valeurs de x (ici theta*0) :

```
theta1=theta*0+theta0+x0

theta2=theta*0+theta0-x0
```

Pour tracer des courbes qui utilisent explicitement les valeurs de x (ici le Temps), il faut d'abord recopier une courbe, puis faire le calcul :

```
thetamax=theta

thetamax=theta*0+signe(sin(Temps*w0+phi))*x0+max(A0-2*x0*int((Temps*w0+phi)/
    pi);0)+theta0

thetamin=theta

thetamin=signe(sin(Temps*w0+phi))*x0-max(A0-2*x0*int((Temps*w0+phi)/
    pi);0)+theta0+theta*0
```

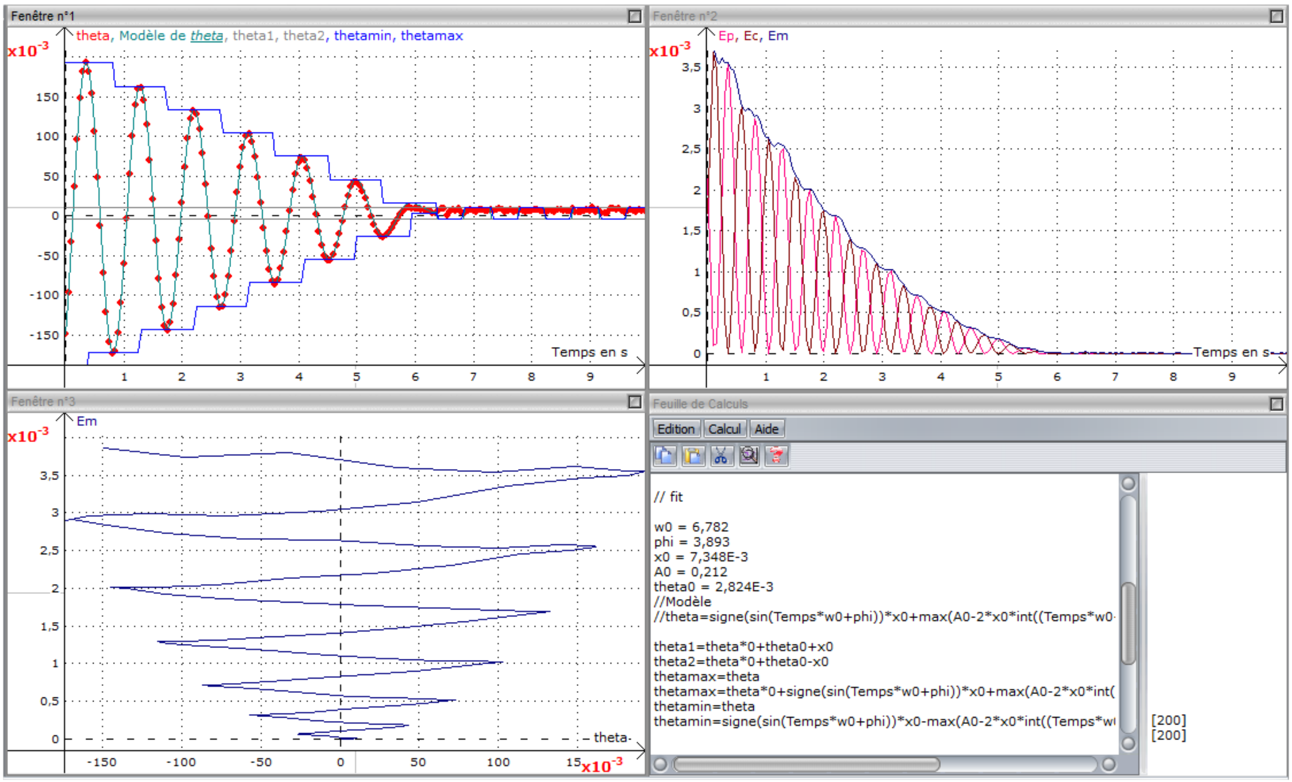
5) Portait de phase :

Représenter le portait de phase. Comparer à celui d'un oscillateur. Identifier la zone d'arrêt les non linéarité.

6) Conservation de l'énergie :

Calculer les énergie potentiel, cinétique et mécanique.

Représenter E en fonction de x. (décroissance linéaire).



IV - Étude des non linéarités : variation de la période

1) Mise en place

Dans cette expérience on mesure la position des maximas afin d'en déduire la période. Il est plus rigoureux de calculer la position des maximas en détectant les instants où la vitesse s'annule. Malheureusement c'est plus compliqué sur LatisPro. On utilise donc la détection des maximas.

Il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup de périodes. Utiliser de préférence une petite masse proche de l'axe. Par contre il faut avoir beaucoup de points par période pour pouvoir bien situer la position des maximas (une centaine).

Réaliser des oscillation en partant d'un angle très grand (au moins 45°).

2) Mesure de la période

Le bruit gène énormément la détection des maximas. On peut utiliser la fonction lissage pour réduire le bruit.

```
theta_brut=(EA0-moy(EA0))/15*pi

theta=lissage(theta_brut;20)

theta_max=CreteMaxi(theta;0.1)
```

Le second terme de la fonction de lissage (voir la liste des fonctions) indique le degré de lissage (>2). Partir de 4 puis augmenter sa valeur pour faire disparaître le bruit.

La fonction CreteMaxi (voir la liste des fonctions) détecte les maxima supérieure à la valeur demandée (ici 0,1). On doit indiquer une valeur inférieure à la valeur du dernier maximum.

Deux maxima étant espacés d'une période T on peut récupérer la valeur de la période en utilisant la dérivée. On numérote les maxima de 0 à N, puis on dérive cette fonction. La valeur de la dérivée vaut 1/T :

```
num_max=theta_max*0+NumPoint

freq=deriv(num_max)

period=1/freq
```

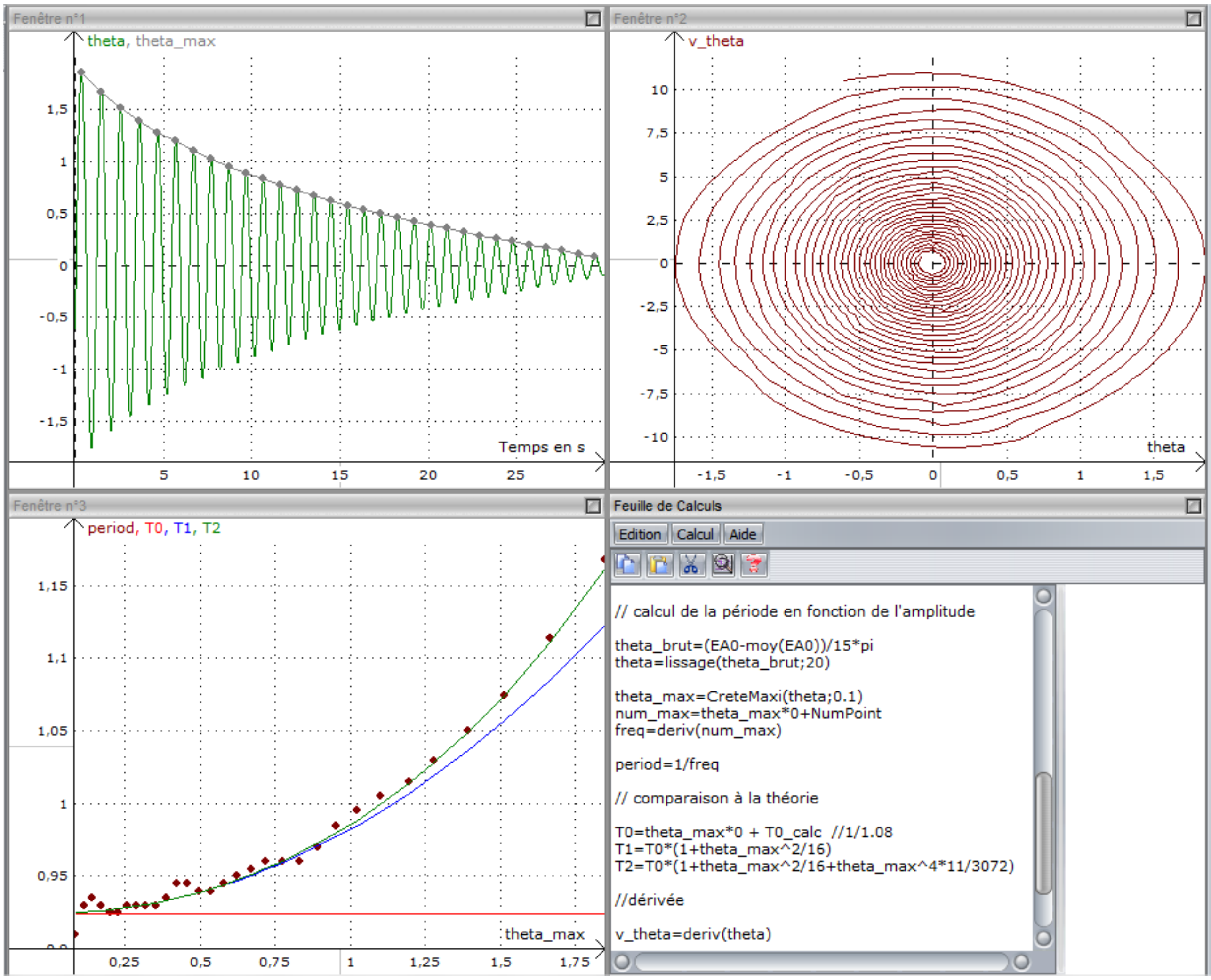
Comparer avec la formule théorique (voir la page wikipedia sur le pendule pesant ou le livre de l'ENS Lyon, Fruchard & co).

```
T2=T0*(1+theta_max^2/16+theta_max^4*11/3072)
```

A noter, que si vous avez calculé T0 au préalable, il n'y a aucune valeur ajustable. Dans le cas contraire, rentrer une valeur de T0 qui corresponde à votre mesure aux petits angles.

3) Espace des phases

Vous pouvez calculer la vitesse et représenter la trajectoire dans l'espace des phases. On observe une déformation de la trajectoire pour les grandes amplitudes.



V - Étude des non linéarités : étude par TF

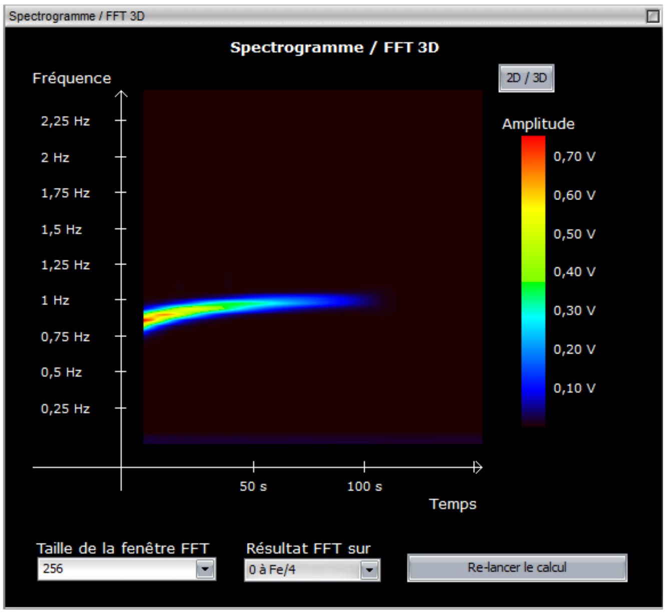
On peut réaliser une étude l'évolution de la fréquence en réalisant une FFT « glissante » (ou FFT dépendante du temps ou FFT 3D). On réalise la TF sur une portion (une fenêtre), puis on se décale en on recalcule la TF etc. [Schéma]. Latispro le fait très simplement.

1) Mise en place

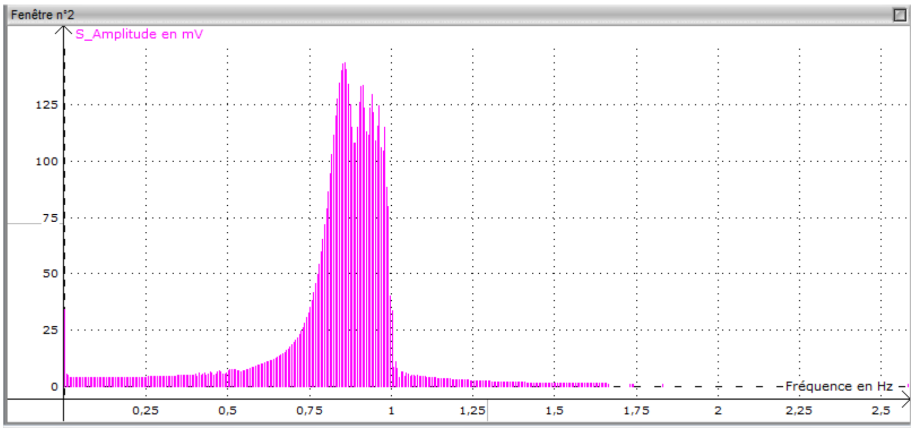
Pour ce calcul il faut avoir beaucoup de périodes afin d'avoir une bonne définition de la TF. Il faut donc avoir beaucoup d'énergie mécanique au départ. Rajouter une masse plus loin de l'axe. Bien fixer le pied. Il faut éviter de prendre trop de points par période, car la fenêtre de la FFT 3D est limitée à 256 points. 10 points par période est suffisant.

2) Calcul de la FFT3D

Dans calcul spécifique choisir FFT3D. Glisser votre courbe. Vous pouvez changer la taille de la fenêtre FFT pour améliorer la définition de la TF.



C'est qualitatif mais c'est très joli. On montre ainsi l'enrichissement en fréquence. Si on réalise maintenant la TF du signal total on obtient la somme de toutes ces fréquences :



A vérifier, mais sur ma version de LatisPro la FFT3D provoque des erreurs d'enregistrement. Bien enregistrer avant …

VI - Théorie :

Système et équations du problème :

On considère un système masse+ressort qui se déplace dans la direction x. Le mobile subit une force de frottement solide F_0 dans le sens opposé à la vitesse. Le PFD s'écrit :

$$m\ddot{x} = -kx - F_0 sign(\dot{x})$$

On note : m la masse, k la constante de raideur.

On peut aussi considérer un pendule de moment d'inertie I effectuant des oscillation de faible amplitude. Ce pendule est soumit à un couple de frottement solide $\vec{C}_0$ dans le sens opposé au vecteur rotation $\vec{\omega}$. Le TCI s'écrit :

$$I\ddot{\theta} = -mgl\theta - C_0 sign(\dot{\theta})$$

On note : m la masse total, l la distance entre centre de masse et le centre de la rotation. Dans les deux cas, PFD ou le TCI conduisent à la même équation. Par soucis de simplicité on utilisera le cas du ressort.

On remarque que l'équation est non linéaire à cause de la fonction $sign(\dot{x})$. Cependant tant que la vitesse ne change pas de signe cette fonction est une constante, et donc sur cette période, les équations redeviennent linéaires. Dans la suite on notera :

$$s = sign(\dot{x})$$

On peut donc déterminer une solution pour chaque intervalle de temps où la s est constant, puis « recoller » ces solutions pour trouver la solution générale. A chaque fois que s change de signe, l'accélération sera discontinue. Par contre la vitesse et la position, qui sont obtenues par intégration, doivent rester continues.

Étude du mouvement :

Si on considère donc que s est constant, le PFD s'écrit :

$$m\ddot{x} = -k\left(x + s\frac{F_0}{k}\right) \qquad \text{on notera :} \quad x_0 = \frac{F_0}{k}$$

On voit que l'équation correspond à un oscillateur non amorti, mais recentré en : - s x_0. De plus la pulsation de l'oscillateur est celle de l'oscillateur sans frottement (contrairement au cas des frottements fluides) :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Le mouvement est donc sinusoïdale et centré sur - s x_0. Prenons pour commencer s = 1. On peut fixer arbitrairement la phase pour t = 0, en faisant varier x comme le cosinus :

$$x = -x_0 + A_1\cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = -A_1\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

où A_1 est une amplitude (constante positive). On a supposer que la vitesse était positive, cette solution n'est donc valable que sur une demi période, pour $t \in [0; T_0/2]$.

Lorsque t = T_0/2, la vitesse change de signe. Le mouvement sera alors centré sur x_0. On peut donc réécrire :

$$x = x_0 + A_2\cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$$\dot{x} = -A_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_2)$$ (avec $0 \leq \varphi_2 < \pi$ sinon la vitesse ne change pas de signe)

Maintenant il faut s'assurer que x et sa dérivée sont continus en $t = T_0/2$ (c'est-à-dire pour $\omega_0 t = \pi$) :

$$-x_0 + A_1 \cos(\pi) = x_0 + A_2 \cos(\pi + \phi_2)$$

$$-A_1 \omega_0 \sin(\pi) = -A_2 \omega_0 \sin(\pi + \phi_2)$$

D'après la seconde équation, on voit que $\varphi_2 = 0$. La première équation donne la variation de l'amplitude :

$$A_2 = A_1 - 2x_0$$

Ainsi l'amplitude décroît de $2\ x_0$ à chaque demi période.

$$A_{n+1} = A_n - 2x_0$$ et donc $$A_n = A_0 - 2x_0 n$$

On peut donc écrire la solution comme une succession de sinusoïdes :

$$\boxed{x = -s x_0 + A(t) \cos(\omega_0 t)}$$

$$\boxed{A(t) = A_0 - 2x_0 n(t)}$$ où n(t) augment de 1 à chaque demi période