

Trilateración

Mauricio Gende

Ivana Molina

**mgende@fcaglp.unlp.edu.ar*

6 de junio de 2011

Índice

1. Introducción	1
2. Solución gráfica	2
3. Solución analítica	3
4. Solución iterativa	5
4.1. Resolución del caso sin errores de observación	7
4.2. Resolución de una situación realista	8
4.3. Cambio en los valores iniciales	8
4.4. Otro escenario en la distribución de los puntos de coordenadas conocidas	9
4.4.1. Visualización gráfica del DOP	11

1. Introducción

La trilateración es un método para obtener las coordenadas de un punto del que se ignora su posición a partir de la medición de distancias a puntos de

*Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Paseo del Bosque s/n, 1900 La Plata, Argentina

coordenadas conocidas a priori. Esta técnica es la base del posicionamiento de todos los sistemas GNSS.

La ecuación básica de observación en el plano es:

$$\rho = \sqrt{(x_e - x)^2 + (y_e - y)^2}$$

Donde ρ es la cantidad observada, (x_e, y_e) son las coordenadas conocidas y (x, y) las coordenadas que se ignoran. Como las incógnitas son dos el problema requiere un mínimo de dos ecuaciones. Así el problema queda planteado como:

$$\rho_1 = \sqrt{(x_{e1} - x)^2 + (y_{e1} - y)^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x_{e2} - x)^2 + (y_{e2} - y)^2}$$

En términos generales no podremos afirmar que con sólo dos ecuaciones la solución será única y por lo tanto es imprescindible una ecuación más para resolver el problema.

$$\rho_3 = \sqrt{(x_{e3} - x)^2 + (y_{e3} - y)^2}$$

2. Solución gráfica

Una solución sencilla que no requiere conocimientos matemáticos consiste en realizar un gráfico y deducir del mismo la respuesta. Así para el caso de tener los siguientes puntos de coordenadas conocidas:

punto	x	y
1	2	2
2	3	4
3	4	2

y las siguientes distancias desde el punto incógnita a cada uno de ellos:

segmento	distancia
punto 1 - punto desconocido	$\sqrt{2}$
punto 2 - punto desconocido	1
punto 3 - punto desconocido	$\sqrt{2}$

El problema se resuelve trazando los círculos con centro en cada punto conocido y radio igual a la distancia punto conocido - punto incógnita. Quedan representadas entonces todas las posibles posiciones del punto incógnita mediante circunferencias y una sola de ellas será la correcta: la intersección de todas las circunferencias.

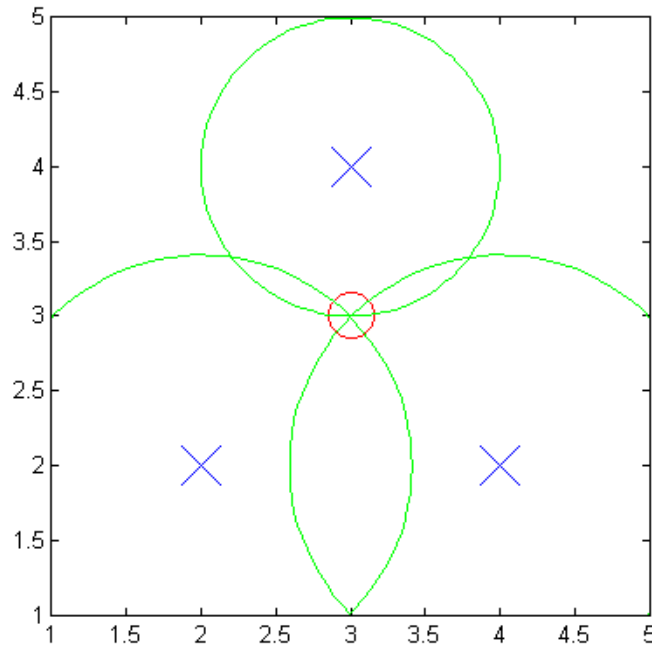


Figura 1: Solución gráfica del problema.

3. Solución analítica

Una posible resolución analítica vendrá dada por la solución de dos ecuaciones cuadráticas, cada una de las cuales tendrá dos raíces, habiendo una sola raíz común a ambas ecuaciones.

Partiendo de las tres ecuaciones:

$$d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}$$

Elevando al cuadrado y restando la primera ecuación a la segunda ...

$$d_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2$$

$$d_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$d_1^2 - d_2^2 = -2x(x_1 - x_2) - 2y(y_1 - y_2) + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$$

$$\frac{(d_1^2 - d_2^2) - (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)}{-2} = x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2)$$

Y llamando

$$\frac{(d_1^2 - d_2^2) - (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)}{-2} = A$$

Queda

$$A = x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2)$$

De donde

$$\frac{A - x(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} = y$$

Reemplazando y en las ecuaciones

$$d_1^2 = (x - x_1)^2 + \left(\frac{A - x(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} - y_1 \right)^2$$

$$d_1^2 = (x - x_1)^2 + \left(\frac{A - x(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} \right)^2 - 2 \left(\frac{A - x(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} \right) y_1 + y_1^2$$

$$d_1^2 = (x - x_1)^2 + \frac{1}{(y_1 - y_2)^2} (A^2 - 2Ax(x_1 - x_2) + x^2(x_1 - x_2)) - 2 \left(\frac{A - x(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} \right) y_1 + y_1^2$$

Si llamamos

$$(y_1 - y_2) = \Delta y_{12}$$

$$(x_1 - x_2) = \Delta x_{12}$$

Entonces la solución queda:

$$x^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}} \right)^2 \right] + x \left[-2x_1 - 2A \frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}^2} - 2A \frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}} y_1 \right] + \left[\frac{A^2}{\Delta y_{12}^2} + y_1^2 - d_1^2 \right] = 0$$

Escribiendo

$$\alpha = \left[1 + \left(\frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}} \right)^2 \right]$$

$$\beta = -2 \left[x_1 + A \frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}^2} + A \frac{\Delta x_{12}}{\Delta y_{12}} y_1 \right]$$

$$\gamma = \left[\frac{A^2}{\Delta y_{12}^2} + y_1^2 - d_1^2 \right]$$

Las raíces quedan:

$$X_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$X_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Donde x debe ser X_1 o X_2

Si ahora realizamos los mismos pasos pero restando d_3 a d_1 y llamamos:

$$(y_1 - y_3) = \Delta y_{13}$$

$$(x_1 - x_3) = \Delta x_{13}$$

La nueva ecuación toma la forma

$$x^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}} \right)^2 \right] + x \left[-2x_1 - 2B \frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}^2} - 2B \frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}} y_1 \right] + \left[\frac{B^2}{\Delta y_{13}^2} + y_1^2 - d_1^2 \right] = 0$$

Con:

$$\alpha' = \left[1 + \left(\frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}} \right)^2 \right]$$

$$\beta' = -2 \left[x_1 + B \frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}^2} + B \frac{\Delta x_{13}}{\Delta y_{13}} y_1 \right]$$

$$\gamma' = \left[\frac{B^2}{\Delta y_{13}^2} + y_1^2 - d_1^2 \right]$$

Siendo las raíces:

$$X_3 = \frac{-\beta' + \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'}$$

$$X_4 = \frac{-\beta' - \sqrt{\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'}}{2\alpha'}$$

Alguna de ambas (X_3 o X_4) debe ser igual a alguna de las anteriores (X_1 o X_2) y por lo tanto la solución al problema.

4. Solución iterativa

Hay dos posibilidades que no hemos tenido en cuenta hasta el momento:

1. El hecho de que puedan existir más de tres ecuaciones.
2. El hecho de que las mediciones tengan error.

El segundo punto es sin dudas el más trascendente ya que todas las observaciones tienen error y por lo tanto será deseable tener en cuenta este hecho. Bajo esta nueva hipótesis las resoluciones anteriores cambian de la siguiente manera:

1. En el caso de la solución gráfica: Las circunferencias son ahora cintas circulares con un ancho no despreciable y las mismas no se cortan en un punto sino que existe un área común a las observaciones.
2. En el caso de la solución analítica: Habrá dos raíces con valores muy similares pero no idénticos.

Daremos ahora una solución que tiene en cuenta entonces la posibilidad de un sistema sobredimensionado, más ecuaciones que incógnitas, y de mediciones con errores de observación.

Partimos de n ecuaciones de la forma

$$\rho_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

....

$$\rho_n = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

Si hacemos la siguiente aproximación por Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + O^2$$

y la aplicamos a la función distancia, despreciando el orden 2 nos queda:

$$\rho = \rho|_0 + \left. \frac{\delta \rho}{\delta x_r} \right|_0 dx_r + \left. \frac{\delta \rho}{\delta y_r} \right|_0 dy_r$$

$$\rho = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2} \Big|_0 +$$

$$\left. \frac{(x_r - x_s)}{\sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2}} \right|_0 dx_r +$$

$$\left. \frac{(y_r - y_s)}{\sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2}} \right|_0 dy_r$$

Para n ecuaciones tenemos

$$\rho_1 = \rho_1|_0 + \left. \frac{\delta \rho_1}{\delta x} \right|_0 dx_r + \left. \frac{\delta \rho_1}{\delta y} \right|_0 dy_r$$

$$\rho_2 = \rho_2|_0 + \left. \frac{\delta \rho_2}{\delta x} \right|_0 dx_r + \left. \frac{\delta \rho_2}{\delta y} \right|_0 dy_r$$

$$\rho_n = \rho_n|_0 + \left. \frac{\delta \rho_n}{\delta x} \right|_0 dx_r + \left. \frac{\delta \rho_n}{\delta y} \right|_0 dy_r$$

Escribiendo el sistema lineal en forma matricial queda:

$$\vec{\delta} = A d\vec{x}$$

Donde:

$$\vec{\delta}_{nx1} = \left(\begin{array}{c} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_n \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \rho_1 \\ \dots \\ \rho_n \end{array} \right) \Big|_0$$

$$A_{nx2} = \left(\begin{array}{cc} \left. \frac{\delta \rho_1}{\delta x_r} \right|_0 & \left. \frac{\delta \rho_1}{\delta y_r} \right|_0 \\ \left. \frac{\delta \rho_2}{\delta x_r} \right|_0 & \left. \frac{\delta \rho_2}{\delta y_r} \right|_0 \\ \left. \frac{\delta \rho_n}{\delta x_r} \right|_0 & \left. \frac{\delta \rho_n}{\delta y_r} \right|_0 \end{array} \right)$$

$$d\vec{x} = \left(\begin{array}{c} dx_r \\ dy_r \end{array} \right)$$

Para solucionarlo hacemos:

$$\vec{\delta} = A d\vec{x}$$

$$A^T \vec{\delta} = A^T A d\vec{x}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T \vec{\delta} = (A^T A)^{-1} (A^T A) d\vec{x}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T \vec{\delta} = d\vec{x}$$

Así se puede llegar a un valor $d\vec{x}$ que sumando a la estimación inicial nos dará un estimador de la incógnita

$$\vec{x} = \vec{x}|_0 + d\vec{x}$$

Iterando hasta cumplir la condición de que el valor de la corrección sea “insignificante”: $d\vec{x} < \epsilon$, donde *epsilon* es fijado por nosotros, llegamos a la solución.

4.1. Resolución del caso sin errores de observación

Para el caso ya visto de puntos de coordenadas conocidas:

punto	x	y
1	2	2
2	3	4
3	4	2

y de distancias determinadas sin error:

segmento	distancia
punto 1 - punto desconocido	$\sqrt{2}$
punto 2 - punto desconocido	1
punto 3 - punto desconocido	$\sqrt{2}$

Si partimos de los valores iniciales $x_0 = 4$ e $y_0 = 4$ tenemos las siguientes soluciones en función del número de iteración:

	x	y
Valor inicial	4.0000	4.0000
Iteración 1	3.6464	3.0607
Iteración 2	3.0761	3.0200
Iteración 3	2.9994	2.9993
Iteración 4	3.0000	3.0000
Iteración ...	3.0000	3.0000
Iteración enésima	3.0000	3.0000

Como se aprecia la solución es $x = 3$ e $y = 3$ y se llega a la misma luego de cuatro iteraciones.

4.2. Resolución de una situación realista

Si ahora tenemos distancias al punto incógnita pero medidas con un cierto error de observación:

segmento	distancia
punto 1 - punto desconocido	1.1500
punto 2 - punto desconocido	1.5842
punto 3 - punto desconocido	1.3642

Resolviendo el problema en forma iterativa partiendo nuevamente de los valores iniciales $x_0 = 4$ e $y_0 = 4$ tenemos las siguientes soluciones en función del número de iteración:

	x	y
Valor inicial	4.0000	4.0000
Iteración 1	3.6988	3.1330
Iteración 2	3.1157	3.0427
Iteración 3	2.8612	2.9645
Iteración 4	2.8252	2.9712
Iteración 5	2.8193	2.9726
Iteración 6	2.8183	2.9728
Iteración ...	2.8183	2.9728
Iteración enésima	2.8183	2.9728

Como se aprecia la solución es $x = 2,8183$ e $y = 2,9728$ y se llega a la misma luego de seis iteraciones. Está claro que nunca podremos llegar al valor que, en forma artificiosa, sabemos verdadero $x = 3$ e $y = 3$. Esto no es más que la consecuencia de observar las distancias con cierto error pero aún así el problema tiene solución.

4.3. Cambio en los valores iniciales

Ahora es válido preguntarnos que pasaría si los valores iniciales fueran distintos y eventualmente peores, es decir más lejanos respecto del de la solución. Tomemos por ejemplo el caso $x_0 = 27$ e $y_0 = 17$ Ahora las sucesivas iteraciones darán las siguientes soluciones:

	x	y
Valor inicial	25.0000	17.0000
Iteración 1	3.1271	4.9163
Iteración 2	3.1983	3.8929
Iteración 3	3.4023	3.0273
Iteración 4	2.9437	2.9700
Iteración 5	2.8193	2.9726
Iteración 6	2.8183	2.9728
Iteración ...	2.8183	2.9728
Iteración enésima	2.8183	2.9728

Vemos que el problema también converge y al mismo valor que en el caso anterior, de lo que deducimos que el punto de arranque no es un parámetro crítico para la resolución de este problema.

4.4. Otro escenario en la distribución de los puntos de coordenadas conocidas

¿Qué pasará ahora si la distribución espacial de los puntos de coordenadas conocidas fuera distinta a la anterior? Particularmente que pasará cuando no exista una buena distribución, es decir, cuando existan direcciones en el espacio respecto de las cuales los puntos conocidos puedan estar cuasi alineados.

Intuitivamente podemos deducir que no es bueno ya que sobre alguna dirección habrá mucha menos información o en forma equivalente la matriz a invertir tendrá un mal condicionamiento.

Tomenos el siguiente juego de puntos de coordenadas conocidas alineados en forma paralela con el eje X:

punto	x	y
1	1.5	3
2	2	3
3	4	3

Las distancias observadas **que poseen errores de magnitud idéntica al caso anterior** están en la siguiente tabla:

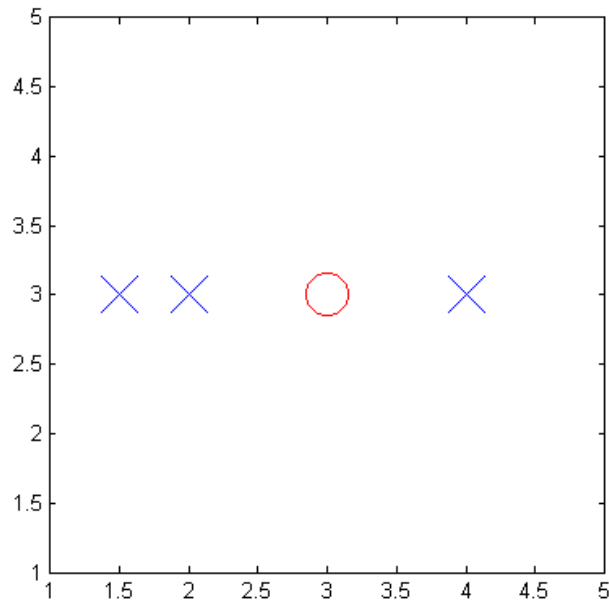


Figura 2: Caso mal condicionado.

segmento	distancia
punto 1 - punto desconocido	1.6500
punto 2 - punto desconocido	1.1700
punto 3 - punto desconocido	0.9500

Resolviendo el problema en forma iterativa, donde partimos del valor inicial $x_0 = 4$ e $y_0 = 4$ tenemos las siguientes soluciones en función del número de iteración:

	x	y
Valor inicial	4.0000	4.0000
Iteración 1	2.8675	3.9474
Iteración 2	3.1748	3.4976
Iteración 3	3.1130	3.3691
Iteración 4	3.1153	3.3476
Iteración 5	3.1153	3.3470
Iteración ...	3.1153	3.3470
Iteración enésima	3.1153	3.3470

Como se aprecia la solución converge a $x = 3,1153$ e $y = 3,3470$ y se

llega a la misma luego de cinco iteraciones. Notamos que en primer lugar a pesar de que las observaciones fueron generadas en forma artificial y se les introdujo un error controlado e igual al del caso de la sección 4.3 el problema converge a valores diferentes. No solo eso, sino que sabiendo que el valor verdadero de la solución es $x = 3$ e $y = 3$ y comparando las soluciones de las secciones 4.3 y 4.4 notamos que:

1. En el eje x la solución 4.3 es peor que la solución 4.4 siendo los errores relativos respectivos 6 % y 4 %, es decir comparables.
2. Pero en el eje y la solución 4.4 es peor que la solución 4.3 siendo los errores relativos respectivos del 1 % y 12 %, es decir un orden de magnitud mayor para el caso 4.4

Si recordamos que las distancias tenían los errores de igual magnitud en los casos 4.3 y 4.4 podemos ver hasta que punto juega un rol trascendente en el error de las coordenadas incógnitas la interrelación entre las ubicaciones espaciales de los datos. Esta información está en la matriz $A^T A$, en ella no hay información sobre las observaciones, que está en $\vec{\delta}$, sino sobre la geometría del problema.

La dilución de la precisión (DOP) es un parámetro que indica lo buena o mala que es la geometría de los datos del problema y se lo calcula a partir de los elementos diagonales de la matriz $A^T A$ como $\sqrt{(a_{11}^2 + a_{22}^2)}$

4.4.1. Visualización gráfica del DOP

Una manera sencilla de visualizar gráficamente el aporte de la geometría al error en la posición es mediante la comparación de los casos bien y mal condicionados. Tendremos en cada uno intersecciones de cintas en forma de circunferencias, donde el ancho de la cinta representa el error de la medición, su incerteza. La solución del problema estará confinada a la región donde las cintas se corten en forma simultánea. La figura 3 muestra cuatro cuadros, los dos de arriba corresponden a la situación mal y bien condicionada respectivamente, los dos de abajo no son otra cosa que una versión aumentada de los mismos en la zona de interés.

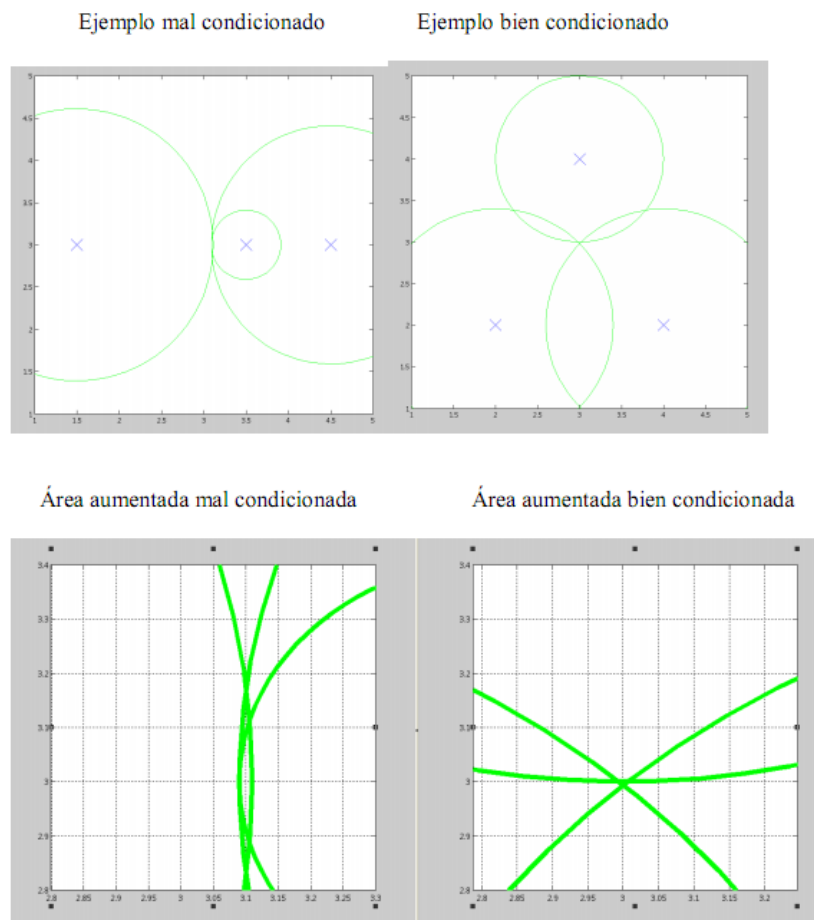


Figura 3: Dilución de la precisión.