

# CT 系统参数标定及成像

## 摘要

本文针对 CT 系统参数标定及成像问题，建立了基于最小二乘法的 CT 系统标定模型，求解了 CT 系统的旋转中心坐标、探测器单元间距以及 X 射线的 180 个方向；建立了基于傅立叶变换的图像重建模型，求解了未知介质的吸收率分布；建立了基于滤波反投影法的图像重建模型，求解了噪声较大的未知介质的吸收率分布；设计了新型标定模板并建立了对应的标定模型，解决了改进标定精度和稳定性的问题。

针对问题一，建立了基于最小二乘法的 CT 系统标定模型，求解了 CT 系统的标定参数。首先，通过最小二乘法，将 180 组接收信息拟合成正弦函数，根据几何关系联立方程组求解出 180 个旋转角度，以及探测器单元间距  $d = 0.2758$ 。其次，通过最小二乘优化、变步长遍历搜索的方法，求得旋转中心为  $(-9.2513, 5.6783)$ 。最后，基于所得标定参数及已知模板的吸收率分布，求解标定模板的接收信息，进行残差分析，检验了标定模型的合理性。

针对问题二，建立了基于傅立叶变换的图像重建模型，求解了未知介质的吸收率分布。首先，依据 Radon 变换及中心切片定理，对投影数据进行一维傅立叶变换，得到定义在傅立叶空间的极坐标网格。其次，在频域上对投影进行积分，再次，直接通过二维傅立叶反变换得到重建图像，其中 10 处吸收率分别为 0.0000、0.0000、1.0060、0.0000、1.0081、0.0081、0.0000、0.1008、0.0081、0.0081。最后，对标定参数进行了灵敏度分析。

针对问题三，建立了基于滤波反投影法的图像重建模型，求解了噪声较大的未知介质的吸收率分布。首先，采用问题二的方法，发现重建图像噪声较大，改用滤波反投影算法去除重建图像的伪影。再次，选择中值滤波器进行滤波卷积，采用线性内插的方法进行插值，反投影累加后得到重建图像，其中 10 处吸收率分别为 2.0323、1.2863、2.0081、1.6370、2.0484、2.0081、0.0000、2.0343、1.5363、0.0403。最后，对标定参数进行了灵敏度分析。

针对问题四，设计了新型标定模板并建立了对应的标定模型，解决了改进标定精度和稳定性的问题。首先，对原有模板进行误差分析，得出对椭圆边缘处接收信息的插值拟合会导致旋转角度出现误差的结论。其次，为避免类似误差，设计圆形组合模板，并建立对应标定模型。再次，对比基于新旧模板的不同标定参数的图像重建模型，求得新旧模板的峰值信噪比分别为 50.3614、52.2537。最后，求解基于不同旋转角度个数的归一化均方距离，新模板重建图像精度趋于稳定的旋转次数小于旧模板，进而验证了基于新模板的标定模型精度更高，更稳定。

**关键词：**最小二乘法 Radon 变换 中心切片定理 滤波反投影法 峰值信噪比

## 一、问题重述

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下,利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像,由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示,平行入射的 X 射线垂直于探测器平面,每个探测器单元看成一个接收点,且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变,整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向,在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量,并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

CT 系统安装时往往存在误差,从而影响成像质量,因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定,即借助于已知结构的样品(称为模板)标定 CT 系统的参数,并据此对未知结构的样品进行成像。

请建立相应的数学模型和算法,解决以下问题:

(1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板,模板的几何信息如图 2 所示,相应的数据文件见附件 1,其中每一点的数值反映了该点的吸收强度,这里称为“吸收率”。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据这一模板及其接收信息,确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

(2) 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数,确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外,请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率,相应的数据文件见附件 4。

(3) 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数,给出该未知介质的相关信息。另外,请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

(4) 分析(1)中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型,以改进标定精度和稳定性,并说明理由。

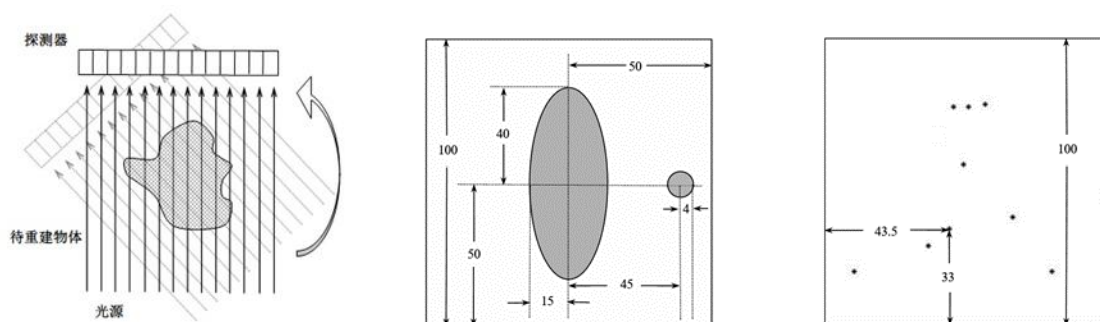


图 1 CT 系统示意图    图 2 模板示意图 (单位 mm)    图 3 10 个位置示意图

## 二、问题分析

问题整体思路较为清晰,层层递进。问题一是根据已知标定模板的吸收率及其接收信息对 CT 系统进行正向标定的问题。问题二、三建立在问题一求解的标定系数基础之上,是依据不同的接受信息对未知介质的吸收率分布进行反向重建

的问题。分析问题二、三在接受信息可发现问题三图像噪声偏大，故对问题三的求解大致思路与问题二类似，但需进行进一步的降噪处理。问题四需对原有标定模型进行精度和稳定性分析，并设计新的模板及标定模型，进而提高精度及稳定性，属于优化问题。

### 2.1 问题一的分析

首先，分析题目条件可知，均匀模板的吸收率分布及对应的接受信息已知，且模板质地均匀，故射线衰减公式中的对吸收率分布进行的线积分可简单变为介质厚度，故可对接收信息的表达式进行求解。

其次，要将离散在接受信息连续化，可考虑通过最小二乘法对其进行拟合，初步分析为两个近似正弦曲线，分别对应图中的椭圆和圆，其中正弦曲线与 X 轴相交的情况反应了平行光束与椭圆相切的两条切线距离的大小。由于两切线之间的距离与旋转中心<sup>[1]</sup>、旋转角度存在一定的几何关系，列出关系式，联立方程可解出各个旋转角度的值。

再次，基于上述拟合曲线及几何关系式，可求得多个探测器单元间距及旋转中心的坐标。针对探测器单元间距的求解，出于对使用信息完整性的考虑，可通过多次求解方程组，并对多个解取平均得到最终答案。针对旋转中心的求解，由于探测器中垂线衡过旋转中心，且旋转角度已求解得到，故可列出不同角度下中垂线的直线方程，两两联立即可求出旋转中心。出于保留信息完整性，同时避免算法过于复杂的考虑，故均匀抽取 30 组直线，得到元素个数为 345 的点集。可通过最小二乘优化<sup>[2]</sup>，建立各点到中心点距离平方和最小的目标函数，可通过变步长遍历搜索的方法，求解旋转中心。

最后，由于接受信息的表达式可被求解，且介质吸收率分布已知，故可对已知模板在接受信息进行模拟，可与题中所给条件进行比对，进行残差分析，即可检验模型的合理性。

### 2.2 问题二的分析

首先，分析题目条件可知，由于在第一问已对 CT 系统进行了标定，故可根据题中所给的接收信息，对图像进行重建。对图像重建的常用方法有傅里叶变换法、滤波反投影法，由于部分接收信息的拟合后的图像较为平滑，故采用算法较为简单的傅里叶变换法。

其次，在推导非均匀介质中衰减公式时，可对非均匀物体进行微元化考虑，进而对射线贯穿部分的吸收率分布进行线积分。可根据 Radon 变换<sup>[3]</sup>及中心切片定理<sup>[4]</sup>，得到多个角度下的投影后，通过投影反变换可求出被积函数即线衰减系数函数，从而得到对应的线衰减系数分布的图像，重建出问题二中非均匀物体的形状及在正方形托盘上的位置。

再次，为得到题中所要求的 10 个点的吸收率，需要得到吸收率与图像灰度值之间的关系。由于问题一中模板条件已知，运用问题二中的算法可重建出问题一中的模板图像，得到已知模板图像与重建模板图像之间的灰度值关系后再据此关系得问题三图像的 10 个吸收率。

最后，可针对三个不同标定参数，进行固定比率的修改，并计算参数修改后重建图像吸收率分布的变化率，可据此对各标定参数进行灵敏度分析。

### 2.3 问题三的分析

首先，问题三与问题二提供的条件并无二致，然而通过观察附件中的接收信息值，可发现数据在表格中的分布更加复杂，很可能导致运用问题二中的傅立叶变换算法重建出的图像质量不佳，故在问题三考虑采用更优的算法重建图像。通

过查阅文献可知，滤波反投影算法<sup>[5]</sup>可大大消除反投影重建算法的模糊现象，保证重建图像的边缘清晰和内部分布均匀，得到质量较好的重建图像。故可改用滤波反投影算法进行图像重建。

其次，滤波反投影算法的关键在于滤波函数的选取，在众多滤波函数中，中值滤波<sup>[6]</sup>对噪声的除噪作用较显著，能够较好地保护图像边缘，降低噪声。根据反投影算法，得到滤波后的投影数据便可对图像进行重建，但平行束投影的采集过程中，射线发射器和接收器是离散的，与此同时角度采样也是离散化的，故需要选用合适的插值方法对滤波后的投影数据进行处理。通过查阅文献可知，常用方法有线性内插和紧邻内插，线性内插更优，故可采用线性内插的方法。由此，可对投影数据进行反变换，进而得重建后的图像及吸收率分布。

最后，可针对三个不同标定参数，进行固定比率的修改，并计算参数修改后重建图像吸收率分布的变化率，可据此对各标定参数进行灵敏度分析。

## 2.4 问题四的分析

首先，分析题目可知，应先对原有模板进行误差分析，进而考虑新模板的设计方向。由于问题一中对椭圆边缘处的接收信息进行拟合时存在一定误差，故造成对射线旋转方向的求解产生了误差。为避免这一误差，可考虑设计组合圆模板对上述误差进行规避，通过设计特殊的圆心及半径，避免拟合，进而得到优化后的旋转角度。

其次，要对比基于新旧模板标定模型的优劣，可通过比对基于不同标定参数的图像重建模型的优劣来体现。根据题意，从精度及稳定性<sup>[7]</sup>两方面来考虑。

针对精度，可建立重建图像评价指标。一般指标有归一化均方距离、归一化平均绝对距离、峰值信噪比，由于三个指标互成正比或反比，故无需对各指标进行赋权，针对基于新旧标定参数的图像重建模型，可通过重建原有模板图形，计算各指标值，比对新模型的经度是否更高。

针对稳定性，由于重建模型的重建质量是关于旋转角度个数变化而变化的针对这一动态过程，模型的稳定性刻画了重建图像精度随旋转角度个数增加的变化趋势。故可通过均匀减少图像旋转角度个数，求解新旧图像重建模型的归一化均方距离。对上述散点图进行插值拟合，即可得到新旧图像重建模型的图像精度变化趋势，比对新旧模型的稳定点，即可比对新旧模型的稳定性。

最后，依据精度和稳定性两个评价指标，即可判定新模板及其对应标定模型的合理性。

## 三、 基本假设

1. 假设射线源中点与转台旋转中心连线垂直于探测器阵列；
2. 假设射线源的衰减仅与被介质吸收有关，并未产生散射；
3. 假设增益处理是线性增大的。

## 四、 符号说明

$I_0$ : 入射前的 X 射线强度；

$I$ : 衰减后的 X 射线强度；

$\mu$ : 线衰减系数；

$R$ : 模板的接收信息；

$d_1$ : 平行光束中与椭圆相切的两条射线之间的距离;  
 $d_2$ : 平行光束中与圆相切的两条射线之间的距离;  
 $o'$ : 旋转中心点的坐标;  
 $\theta_i$ : 某旋转角度下平行光与坐标轴 $x$ 的夹角。  
 $dis^2$ : 表示旋转中心与各交点的距离平方和。  
 $D_{imax}$ : 直线对椭圆的截距。  
 $Q$ : 为物体的投影。  
 $d_v$ : 归一化均方距离。  
 $d_r$ : 归一化平均绝对距离。  
 $PSNR$ : 峰值信噪比。

## 五、模型建立与求解

### 5.1 问题一的模型建立与求解

建立基于最小二乘法的 CT 系统标定模型,求解 CT 系统的标定参数。首先,通过最小二乘法,将 180 组接受信息拟合成正弦函数,根据几何关系联立方程组求解 180 个旋转角度及探测器单元间距。其次,通过最小二乘优化求得旋转中心为。最后,基于所得标定参数及已知模板的吸收率分布,求解标定模板的接收信息,进行残差分析,对标定模型进行检验。

#### 5.1.1 模型的建立: 基于最小二乘法的 CT 系统标定模型

##### 5.1.1.1 X 射线强度衰减公式推导

###### 1. 均匀物体

射线在穿透物体时,射线光子与物体原子之间会产生相互作用,包括光电效应、康普顿效应、电子对效应、瑞利散射等,从而导致 X 射线强度发生衰减。示意图如下所示:

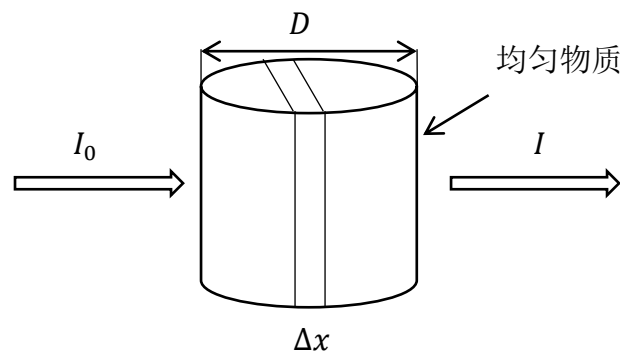


图 1.1 衰减示意图

其中,  $I_0$  为入射前的 X 射线强度;  $I$  为衰减后的 X 射线强度;  $\Delta x$  为物体厚度的变化量;  $D$  为物体在射线传播方向上的厚度。

由 Beer 定律可知,在单一均质材料中,很小的厚度范围内强度的衰减量与入射射线强度、穿透物体的厚度成正比

$$\Delta I = -\mu I \Delta x$$

其中负号表示穿透物体后 X 射线强度减弱,  $\mu$  表示线衰减系数,  $\Delta I$  表示强度衰减量。

经过一系列的推导即可得到射线衰减的基本定律，推导过程如下：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} &= -\mu \Delta x \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\mu dx \\ \Rightarrow \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} &= -\mu \int_0^x dx \\ \Rightarrow I &= I_0 e^{-\mu D}\end{aligned}$$

得到衰减后的射线强度表达式为

$$I = I_0 e^{-\mu D}$$

其中， $I_0$ 为入射前的 X 射线强度； $I$ 为衰减后的 X 射线强度； $D$ 为物体在射线传播方向上的厚度； $\mu$ 为线衰减系数。

## 2. 非均匀物体

对于非均匀物体，其内部各处衰减系数不相等，可将其分解成若干个微元计算，每一个微元都可看成均匀物体，满足上述衰减后的射线强度表达式，对厚度进行积分便可得非均匀物体的衰减公式为

$$I = I_0 e^{-\mu_1 \Delta x} e^{-\mu_2 \Delta x} e^{-\mu_3 \Delta x} \dots e^{-\mu_n \Delta x} = I_0 e^{-\sum_{n=1}^n \mu_n \Delta x}$$

将上式左右两边同除以 $I_0$ 后取自然对数后，让 $\Delta x$ 无限缩小得

$$Q = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \int_L \mu_n dx$$

通过积分得到的 $Q$ 值便为 X 射线穿透物体后的投影，当测量单元缩小以后，数值上等于 X 射线路径上线衰减系数的线积分，其中的 $L$ 为沿射线方向的直线。

### 5.1.1.2 模板接收信息 $R$ 的表达式

模板接收信息是在检测介质吸收衰减后的射线能量经过增益处理后得到的值，根据 Beer 定律得到衰减后的射线强度表达式，在此基础上进行增益处理即可得接收信息表达式。增益处理简而言之就是对原有数据进行放大处理，从而更容易观察数据隐含的规律信息。据此将模板的接收信息定义为 X 射线入射物体前后的强度衰减值与增益强度的乘积。

$$R = C_1(I_0 - I)$$

将 $I$ 的表达式代入上式，消去未知数 $I$ ，建立 $R$ 与已知变量的关系式为

$$R = C_1 I_0 (1 - e^{-\mu D})$$

其中 X 射线衰减前的能量强度 $I_0$ 可视为已知值， $C_1$ 为增益强度，对题目来说也可视为固定值，由附件一可知，对于问题一中的均匀物体来说， $\mu$ 为常数 1。从而对上式进一步处理得最终接收信息表达式为

$$R = C(1 - e^{-D})$$

其中， $R$ 为模板接受信息； $C=C_1 I_0$ ，为常数； $D$ 为物体在射线方向上的厚度。

### 5.1.1.3 X 射线 180 个方向

#### 1. 最小二乘法拟合 $R$ 的正弦函数

CT 系统在扫描过程中进行逆时针旋转 180 次，期间发射器和探测器的相对位置固定不变，所有的平行光束的旋转角度都相同，以某位置为起始位置，共可得到 180 个离散的旋转角度 $\theta_i$ 。由于旋转得到的信息为离散值，而旋转过程为一个连续过程，将离散数据进行拟合得到旋转过程的一个连续函数，据此才能进一步对问题进行求解。

已知一组数据，即平面上的 $n$ 个点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n, x_i$ 互不相同，寻求一个函数 $y = f(x)$ ，使 $f(x)$ 在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合得最

好。

在此利用线性最小二乘法拟合函数的方法，对附件二中的模板接受信息 $R$ 进行拟合。拟合基本思路为：

首先，令

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_m f_m(x)$$

其中， $f_k(x)$ 是事先选定的一组线性无关的函数； $a_k$ 是待定系数( $k = 1, 2, \dots, m$ )。

其次，根据最小二乘准则即让 $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 与 $f(x_i)$ 的距离 $\delta_i$ 的平方和最小进行拟合。

再次，确定系数 $a_k$ ：

记

$$J(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2$$

当 $J$ 达到最小时，利用极值的必要条件 $\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, (j = 1, \dots, m)$ ，可得到关于 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的线性方程组

$$\sum_{i=1}^n r_j(x_i) \left[ \sum_{k=1}^m a_k r_k(x_i) - y_i \right] = 0, j = 1, \dots, m$$

即

$$\sum_{k=1}^m a_k \left[ \sum_{i=1}^n r_j(x_i) r_k(x_i) \right] = \sum_{i=1}^n r_j(x_i) y_i, j = 1, \dots, m$$

记

$$R = \begin{bmatrix} r_1(x_1) & \cdots & r_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1(x_n) & \cdots & r_m(x_n) \end{bmatrix}$$

$$A = [a_1, \dots, a_m]^T, Y = [y_1, \dots, y_m]^T$$

上式可表示为

$$R^T R A = R^T Y$$

当 $\{r_1(x), \dots, r_m(x)\}$ 线性无关时， $R$ 列满秩， $R^T R$ 可逆，于是上式有唯一解

$$A = (R^T R)^{-1} R^T Y$$

最后，选取函数 $f_k(x)$ ：

面对一组数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，用线性最小二乘法作曲线拟合时，首要的也是关键的一步是恰当地选取 $f_1(x), \dots, f_m(x)$ 。

## 2. X 射线穿过物体的情况讨论

整个 CT 系统绕旋转中心逆时针旋转，以椭圆的中心为原点，沿短轴向右为 $x$ 轴正方向，沿长轴向上为 $y$ 轴正方向，建立直角坐标系，预测此旋转中心在原点附近。

当平行光束从起始一角度开始，旋转到某一角度时，存在 X 射线同时穿过两个物体，再旋转到另一角度时，不再存在同时穿过两个物体的 X 射线。以这两个角度为临界角，可将旋转过的角度分成三部分，分别对应没有射线同时穿过两物体、存在射线同时穿过两物体、没有射线同时穿过两物体的情况。此临界情况如下图所示：

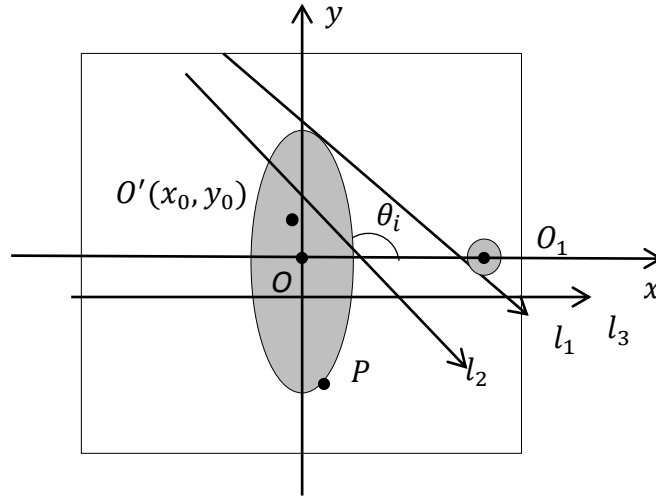


图 1.2 临界情况示意图

如图中所示， $l_1$ 同时与椭圆和圆相切，此时存在射线同时穿透两个物体，通过切线的斜率便可计算出临界角度 $\theta_i$ 。

设 $P(x_i, y_i)$ 为椭圆与射线的切点，根据椭圆公式可得该切线的方程表达式为

$$\frac{x_i x}{a^2} + \frac{y_i y}{b^2} = 1$$

由题圆心坐标为 $o_1(45,0)$ ，则根据点到直线的距离可列出 $o_1$ 到切线的距离方程

$$\frac{|45 \frac{x_i}{a^2} - 1|}{\sqrt{(\frac{x_i}{a^2})^2 + (\frac{y_i}{b^2})^2}} = r$$

式中， $a$ ， $b$ 分别为椭圆的横轴和纵轴， $r$ 为圆的半径， $x_1$ 为圆心横坐标，均为题中已知。则上式即为关于 $x_i, y_i$ 的二元方程。将该方程与椭圆方程进行联立便可求出切点 $P(x_i, y_i)$ ，将值代入切线方程便可求出该切线的斜率，对斜率值求反则可得旋转角度 $\theta_i$ 。

以该角度为临界角度，旋转角度大于该 $\theta_i$ 的满足没有射线同时穿过两物体的情况，小于 $\theta_i$ 的满足另一种情况。对两组情况进行讨论，分别拟合出两种情况下的正弦曲线，再根据变量之间的几何关系计算旋转角度。

#### (1) 不存在同时穿过两个物体的射线

在对离散数据进行拟合之后，可将题目中的离散射线看成连续射线，在平台旋转到某一角度时，总有两条射线分别与椭圆、圆相切，有一条射线经过旋转中心，为方便表示几何关系，将旋转中心 $O'$ 放置在第一象限内离中心较远的位置，

其中， $d$ 表示相邻两探测器之间的距离； $d_1$ 表示平行光束中与椭圆相切的两条射线之间的距离； $d_2$ 表示平行光束中与圆相切的两条射线之间的距离； $o'$ 表示旋转中心点的坐标； $\theta_i$ 表示某旋转角度下平行光与坐标轴 $x$ 的夹角。

在将离散数据拟合成连续函数后，预计得到两个正弦函数分别对应模板中的椭圆和圆，据此便可得到两个函数的周期  $T_1$ ， $T_2$ ，对应图中平行光束与模板相切的两条射线之间的距离 $d_1$ ， $d_2$ ，四者之间存在一定的比例关系如下

$$d_1 = d_2 \frac{T_1}{T_2}$$



由于椭圆的切线方程为

$$\frac{x_i x}{a^2} + \frac{y_i y}{b^2} = 1$$

其中,  $(x_i, y_i)$  为第  $i$  组平行射线与椭圆模板切点。

所以, 在已知切线与椭圆模板切点为  $(x_i, y_i)$  的情况下, 根据距离公式可得

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{b^2}\right)^2}}$$

又因切点  $(x_i, y_i)$  位于椭圆上, 故满足椭圆公式, 故联立方程组

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{b^2}\right)^2}} \\ \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

可求解切点  $(x_i, y_i)$ 。对于某旋转角度下平行光与坐标轴  $x$  的夹角  $\theta_i$ , 其正弦值可与椭圆的长短焦距及切点建立联系。

$$\tan \theta_i = -\frac{\frac{x_i}{a^2}}{\frac{y_i}{b^2}}$$

其中, 椭圆的信息题中已知, 代入数值后对上式求反函数可得  $\theta_i$  的表达式

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_i}{y_i}\right)$$

将已求得的切点坐标  $(x_i, y_i)$  代入可得旋转角度的大小。

#### (2) 存在射线同时穿过两个物体

当平板旋转到一定角度时, 会存在平行光束中的某些射线恰好既穿过椭圆, 又穿过圆的情况。某一旋转角度下, 平行光束中的  $X$  射线存在两种情况, 分别为同时穿过两个物体和只穿过其中的一个物体, 从而可列出两种正弦函数一般式

$$g_1 = c_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$$

$$g_2 = c_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + c_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2)$$

对于两种函数模型, 利用附件中的离散数据段, 分别运用最小二乘法模拟出函数表达式。进行与没有射线同时穿过两个物体的情况相同的处理方法, 得到  $\theta_i$  的表达式。

#### 5.1.1.4 探测器单元之间的距离 $d$

通过对附件二各列数据插值可得 180 组图像, 反映针对某一固定角度, 各探测器收到的接受信息。将各探测器编号数记为  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 512$ )。将  $R_i$  关于  $N_i$  的散点图进行插值拟合, 可得当角度固定为  $\theta_i$  时,  $R$  关于  $N$  的连续曲线, 令  $R = 0$  可得相应  $N$ 。由于探测器间距固定为  $d$ , 故针对每一固定角度  $\theta_i$ , 可得

$$d_i = \frac{d'}{|N_1 - N_2|}$$

其中  $d'$  代表针对固定角度, 将射线连续化后, 与椭圆相切的两条切线的距离。由于针对每一角度可求得不同  $d$  值, 出于不忽略大部分信息的考虑, 可对  $d$  取平均值

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{180} d_i}{180}$$

由此求出探测单元之间的距离。

#### 5.1.1.5 CT 系统旋转中心坐标 $O'(x_0, y_0)$

假设旋转中心过探测器平面的垂足为探测器正中，通过分析椭圆与射线的几何关系可得，穿过原点的射线对椭圆的截距最长，故可建立探测器中垂线的直线方程为

$$\cos \theta_i \times y = \sin \theta_i \times x + (N_i - 256.5) \times d$$

各直线原则上交于一点，即旋转中心，由于探测角度存在的求解存在一定误差，故存在多个位置临近的交点，出于不忽略大部分信息的考虑，可建立单目标优化模型，目标函数为

$$\min \text{dis}^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2$$

其中， $x_i, y_i$ 表示各交点横纵坐标， $\text{dis}^2$ 表示旋转中心与各交点的距离平方和。即将问题转化为对离散点集中心点的求解。

### 5.1.2 模型的求解

#### 5.1.2.1 对 X 射线 180 个方向的求解

##### 1. 计算临界旋转角度

当平行光束旋转到存在一条射线同时与椭圆和圆相切时，处于临界情况。此切线的斜率便为所求的临界旋转角度。以切线与椭圆的切点 $P(x_i, y_i)$ 为切入点，已知圆的圆心坐标 $O_1(45, 0)$ ，对于圆点到切线的距离公式，代入已知值后得

$$\frac{|45 \frac{x_i}{15^2} - 1|}{\sqrt{(\frac{x_i}{15^2})^2 + (\frac{y_i}{40^2})^2}} = 4$$

化简后得关于 $x_i, y_i$ 的二元方程，此外 $P(x_i, y_i)$ 处于椭圆上，满足椭圆方程式

$$\frac{x_i^2}{15^2} + \frac{y_i^2}{40^2} = 1$$

两式联立得切点P的坐标值为 $(x_i, y_i) = (5.6852, \pm 37.0157), (4.3832, \pm 38.2541)$ 共四种情况。再将坐标值代入角度求解公式

$$\theta_i = \tan^{-1}(-(\frac{8}{3})^2 \frac{x_i}{y_i})$$

可相应得到四种情况的旋转角度值如下图所示：

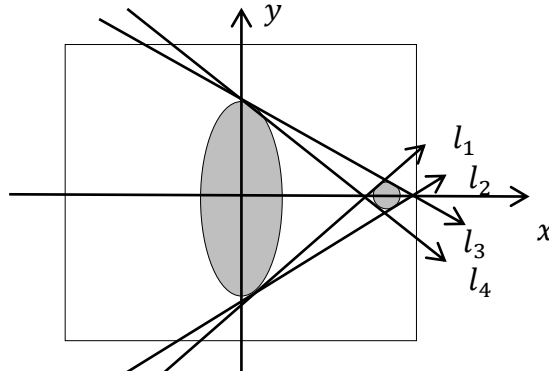


图 1.4 射线相切的四种情况

对于切线 $l_1$ 对应的情形，前一旋转角度下所有射线或穿透椭圆，或穿透圆，不存在同时穿透，后一旋转角度下存在同时穿透的情况，符合分界需求；切线 $l_2$ 对应的情形，前一旋转角度和后一旋转角度均存在同时穿透的情况，不符合分界需求； $l_3, l_4$ 分别为 $l_1, l_2$ 的对称情形，分析方法类似，故应舍去 $l_2, l_3$ 对应的旋转角度，

## 2. 最小二乘法拟合曲线求解

运用多项式拟合方法，如果取 $\{f_1(x), \dots, f_{m+1}(x)\} = \{1, x, \dots, x^m\}$ ，即用  $m$  次多项式拟合给定数据，直接运用 Matlab 中的系统函数

$$a = \text{polyfit}(x_0, y_0, m)$$

其中，输入参数 $x_0, y_0$ 为要拟合的数据； $m$ 为拟合多项式的次数。

输出参数 $a$ 为拟合多项式 $y = a(1)x^2 + a(2)x + a(3)$ 的系数向量 $a = [a(1), \dots, a(m), a(m+1)]$ 。

多项式在 $x$ 处的值 $y$ 可用下面的函数计算

$$y = \text{polyval}(a, x)$$

通过上述步骤，对 180 组接收信息进行拟合，选取其中一组进行说明。得到某一组拟合曲线的正弦函数为：

$$y_1 = 13.9401(0.0392x + 4.3521) + 71.4196$$

$$y_2 = 2.3111(0.1799x + 5.3430) + 10.8210$$

其中， $y_1, y_2$ 分别对应椭圆和圆，据此可知两个正弦函数的角速度值，并求出对应的周期 $T_1, T_2$ 分别为 25.5102s, 5.5586 s。将求出的 $T_1, T_2$ 值代入式

$$d_1 = d_2 \frac{T_1}{T_2}, \text{ 其中, } d_2 \text{ 已知为 } 4\text{mm}, \text{ 可求出 } d_1 \text{ 为 } 18.3573\text{mm}.$$

将 $d_1$ 值代入距离公式后，一并代入椭圆的长短轴值 $a = 40, b = 15$ ，与切点满足的椭圆方程联立得

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{40}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{15}\right)^2}} = 18.3573 \\ \frac{x_i^2}{40^2} + \frac{y_i^2}{15^2} = 1 \end{cases}$$

解上述方程得切点 $(x_i, y_i)$ 为(11.7471, -24.8738)。根据模型建立中的角度求解公式

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(-\left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{x_i}{y_i}\right)$$

便可进一步求得旋转角度 $\theta_i$ 为60.2854°。

根据上述求解过程，求出 180 个旋转角度，其中的前 30 个和后 30 个旋转角度如下表所示，其余角度见附录。

表 1.1 前 30 个旋转角度（单位：度）

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
-60.2854	-59.0199	-58.7037	-57.7553	-56.4893	-55.5374
$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$
-54.5825	-53.6235	-52.6597	-51.3652	-50.3862	-49.7291
$\theta_{13}$	$\theta_{14}$	$\theta_{15}$	$\theta_{16}$	$\theta_{17}$	$\theta_{18}$
-48.7360	-47.7724	-46.2154	-45.5465	-44.2154	-43.3375
$\theta_{19}$	$\theta_{20}$	$\theta_{21}$	$\theta_{22}$	$\theta_{23}$	$\theta_{24}$

-42.3768	-41.4255	-40.6624	-39.5123	-38.4162	-37.3984
$\theta_{25}$	$\theta_{26}$	$\theta_{27}$	$\theta_{28}$	$\theta_{29}$	$\theta_{30}$
-36.3452	-35.3875	-34.2154	-33.5462	-32.4231	-31.4025

从表中可看出，旋转角度之间的差值大约为 1 度，在图 1.2 所定义的坐标轴下，平行光束方向与  $x$  轴正方向夹角为  $-60.2854$  度的位置为旋转起始位置，之后沿逆时针方向每次旋转 1 度左右，最后位置为平行光束方向与  $x$  轴正方向夹角为  $120.7631$  度，大致与起始方向在一条直线上。

#### 5.1.2.2 对探测器单元之间的距离 $d$ 的求解

通过与上文类似的插值可得，当旋转角度固定为  $\theta_i$  时， $R$  关于  $N$  的连续曲线，令  $R = 0$  得相应  $N$ 。代入下式

$$d_i = \frac{d'}{|N_1 - N_2|}$$

可得对应第  $i$  个旋转角度的探测器单元距离  $d_i$ ，出于对篇幅的考虑，罗列前 12 个值如下表所示。

表 1.2 前 12 个探测器单元距离

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
0.2849	0.2815	0.2813	0.2815	0.280	0.2821
$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$
0.2772	0.2773	0.2759	0.2739	0.2734	0.2769

对  $d$  取平均值

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{180} d_i}{180}$$

由此求出探测单元之间的距离  $d = 0.2758$ 。

#### 5.1.2.3 对 CT 系统旋转中心坐标 $O'(x_0, y_0)$ 的求解

##### 1. 最小二乘优化

出于不忽略大部分信息，但避免算法过于复杂的考虑，从 180 个旋转角度中等距选取 30 个旋转角度，即考虑第  $6i + 1 (i = 0, 1, \dots, 29)$  个旋转角度的相关信息。列出各直线方程

$$\cos \theta_i \times y = \sin \theta_i \times x + (N_i - 256.5) \times d$$

将各直线方程两两联立，求解二元一次方程组，解得直线的交点，得到含有 435 个元素的点集。

建立的单目标优化模型为

$$\min dis^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2$$

由于旋转中心应为点集的中心点，故旋转中心的横坐标应大于各点横坐标的最小值，小于各点横坐标的最大值，纵坐标同理，故给出约束条件

$$s.t \begin{cases} -9.7 < x < -8.3 \\ 5.2 < y < 6.4 \end{cases}$$

通过 Matlab 编写程序对模型进行求解。

##### 2. 遍历搜索

###### (1) 确定搜索范围

由上述求解可得旋转中心的横坐标范围应在区间  $(-9.7, -8.3)$  内，纵坐标范围应在区间  $(5.2, 6.4)$  内，对此，确定横纵坐标的大致范围，以 0.1 为步长为搜

索步长进行遍历，找出使目标函数值最小的旋转中心坐标为(-9.2,5.5)。

#### (2) 改进搜索范围和搜索步长

在(1)所得结果的基础上，将横坐标的搜索区间改为(-9.5,-8.5)，将横坐标的搜索区间改为(4.5,5.5)，以 0.01 为搜索步长进行遍历，进一步得到更优的搜索结果。再重复两次，将结果精确到 4 位小数，结果为(-9.2513,5.6783)。

### 5.1.3 模型的检验与分析

#### 5.1.3.1 对接收信息系数的求解

在不存在贯穿椭圆和圆的情况下，根据椭圆几何性质，一组平行线中，过椭圆中心点即坐标系原点的直线对椭圆的截距最大。当射线不同时穿透椭圆和圆时满足该情况。设此时椭圆与射线的交点为 $(x_i, y_i)$ ，射线与 $x$ 轴正方向夹角为 $\theta_i$ ，两者之间满足下列关系

$$\begin{cases} x_i = a \cos \theta_i = 15 \cos \theta_i \\ y_i = b \sin \theta_i = 40 \sin \theta_i \end{cases}$$

根据椭圆对称性，此时直线对椭圆的截距 $D_{imax}$ 为

$$\begin{aligned} D_{imax} &= 2\sqrt{(a \cos \theta_i)^2 + (b \sin \theta_i)^2} \\ &= 2\sqrt{(15 \cos \theta_i)^2 + (40 \sin \theta_i)^2} \end{aligned}$$

问题一模型建立时得到接收信息的表达式为

$$R = C(1 - e^{-D})$$

易从表达式中得出， $R$ 与 $D$ 正相关，则当 $D$ 最大时， $R$ 同时达到最大值，对应模型求解时拟合出的正弦曲线峰值，此时

$$\begin{aligned} R_{imax} &= C_i(1 - e^{-D_{imax}}) \\ C_i &= \frac{R_{imax}}{1 - e^{-D_{imax}}} \end{aligned}$$

在射线旋转过程中，选取若干个易于求解的 $C_i$ 值，对 $C_i$ 求平均值作为系数 $C$ 的值

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{n}$$

得 $C = 1805.4128$ ，代入接收信息求解公式中得

$$R = C(1 - e^{-D}) = 1805.4128(1 - e^{-D})$$

其中 $D$ 为射线传透物体时的截距，与夹角 $\theta_i$ 存在几何关系，据此可得到理论上的 $R$ 值大小，将其与附件中的对应原始值比较并求方差，得误差为0.043%。

#### 5.1.3.2 对接收信息系数的求解

由于接受信息的表达式已被求解，根据题中所给介质吸收率分布，故可直接通过介质厚度表示衰减信息。依据几何关系可得厚度

$$D = 2\sqrt{(15 \cos \theta_i)^2 + (40 \sin \theta_i)^2}$$

据此对已知模板的接受信息进行模拟，与附件 2 进行比对，进行残差分析，分析结果如下图所示。

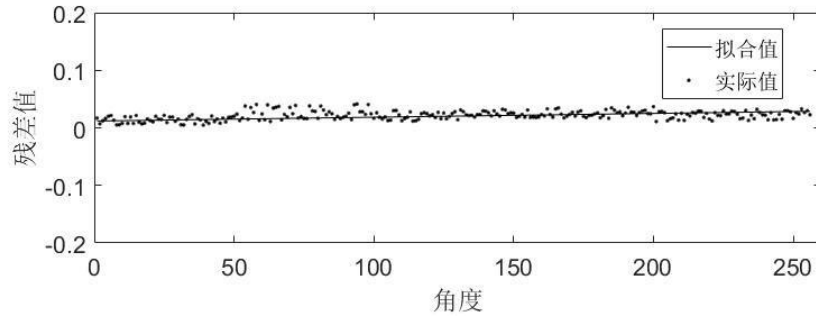


图 1.5 残差分析

由图可知残差值在 0.02 左右，可见残差值较小，模型较为合理。

#### 5.1.4 问题结论

探测器单元间距  $d = 0.2758$ ，旋转中心为  $(-9.2513, 5.6783)$ ，其各别旋转角度为下表：

表 1.3 前 30 个旋转角度（单位：度）

$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
-60.2854	-59.0199	-58.7037	-57.7553	-56.4893	-55.5374
$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$
-54.5825	-53.6235	-52.6597	-51.3652	-50.3862	-49.7291
$\theta_{13}$	$\theta_{14}$	$\theta_{15}$	$\theta_{16}$	$\theta_{17}$	$\theta_{18}$
-48.7360	-47.7724	-46.2154	-45.5465	-44.2154	-43.3375
$\theta_{19}$	$\theta_{20}$	$\theta_{21}$	$\theta_{22}$	$\theta_{23}$	$\theta_{24}$
-42.3768	-41.4255	-40.6624	-39.5123	-38.4162	-37.3984
$\theta_{25}$	$\theta_{26}$	$\theta_{27}$	$\theta_{28}$	$\theta_{29}$	$\theta_{30}$
-36.3452	-35.3875	-34.2154	-33.5462	-32.4231	-31.4025

表 1.4 后 30 个旋转角度（单位：度）

$\theta_{91}$	$\theta_{92}$	$\theta_{93}$	$\theta_{94}$	$\theta_{95}$	$\theta_{96}$
91.5727	92.4531	93.5727	94.5727	95.5264	96.7444
$\theta_{97}$	$\theta_{98}$	$\theta_{99}$	$\theta_{100}$	$\theta_{101}$	$\theta_{102}$
97.7180	98.5570	99.3080	100.6357	101.2376	102.3536
$\theta_{103}$	$\theta_{104}$	$\theta_{105}$	$\theta_{106}$	$\theta_{107}$	$\theta_{108}$
103.3812	104.3428	105.6922	106.3813	107.3639	108.5473
$\theta_{109}$	$\theta_{110}$	$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{113}$	$\theta_{114}$
109.4508	110.7850	111.2570	112.5549	113.5864	114.5999
$\theta_{115}$	$\theta_{116}$	$\theta_{117}$	$\theta_{118}$	$\theta_{119}$	$\theta_{120}$
115.5984	116.5845	117.3865	118.5281	119.4892	120.7631

从表中可看出，旋转角度之间的差值大约为 1 度，在图 1.2 所定义的坐标轴下，平行光束方向与  $x$  轴正方向夹角为 -60.2854 度的位置为旋转起始位置，之后沿逆时针方向每次旋转 1 度左右，定义平行光束旋转至坐标系第三、四象限时角度为负，最后位置为平行光束方向与  $x$  轴正方向夹角为 120.7631 度，大致与起始方向在一条直线上。

## 5.2 问题二的模型建立与求解

建立基于傅立叶变换的图像重建模型，对未知介质的吸收率分布进行求解。

首先，依据 Radon 变换及中心切片定理，对投影数据进行一维傅里叶变换，得到定义在傅里叶空间的极坐标网格。其次，在频域上对投影进行积分，再次，直接通过二维傅里叶反变换得到重建图像，得到所求的 10 个点的吸收率。最后，对标定参数进行了灵敏度分析。

### 5.2.1 模型的建立：基于傅立叶变换的图像重建模型

#### 5.2.1.1 Radon 变换及其逆变换

在问题一的模型建立中，对模板接收信息值给出了数学理论依据，引入了不均匀物体中的 X 射线衰减公式，对于物体的某一切片平面，其中线衰减系数的分布情况基本对应物体密度和形状信息，并将其与 X 射线穿透物体的投影建立了联系，根据此公式，若能得到多个角度下的投影，通过投影反求被积函数便可得到关于  $\mu$  分布的图像，进而得到密度分布图像，便可重建图像。投影公式如下所示：

$$Q = \int_L \mu_n dx$$

其中， $Q$  为物体的投影，等于线衰减系数的分布函数在射线所在直线上的线积分，通过第一问的分析，探测器接收信息是对物体投影值进行增益后得到的，二者分布情况一致，都与物体密度有关。

Radon 定理证明了衰减系数的二维分布函数由其定义域内所有线积分完全确定。Radon 变换各参数之间的几何关系如图 2.1 所示。

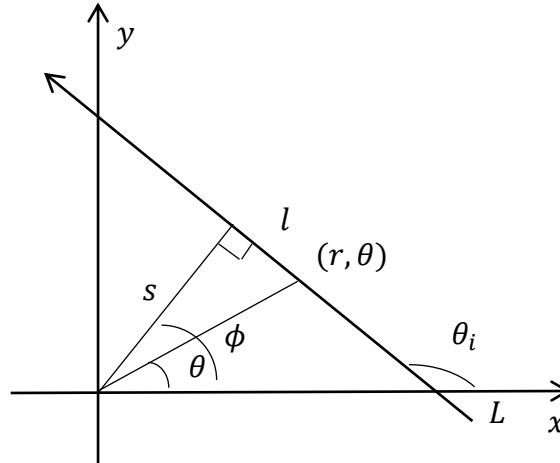


图 2.1 Radon 变换参数几何示意图

则此二维分布函数  $\mu(x, y) = \hat{\mu}(r, \phi)$  沿直线  $L$  的线积分为：

$$Q = \int_L \mu(x, y) dl = \int_L \hat{\mu}(r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(\sqrt{s^2 + l^2}, \theta + \tan^{-1} \frac{l}{s}) dl$$

上式为 Radon 变换，其中  $L$  为 X 射线所在直线， $\theta_i$  为射线与 x 轴正方向之间的夹角，点  $(r, \theta)$  为直线上一点的极坐标，原点到直线的垂直距离为  $s$ ，此垂线与 x 轴正方向之间的夹角为  $\phi$ ，易从图中分析出  $\phi$  与  $\theta_i$  满足下列关系：

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + \phi$$

则代入上式后对其求反变化得 Radon 反变换为

$$\hat{\mu}\left(r, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r \cos\left(\theta_i - \frac{\pi}{2} - \theta\right) - s} \frac{\partial q}{\partial s} ds d\theta$$

### 5.2.1.2 傅立叶中心切片定理

上述 Radon 变换是用一维线积分来描述投影与密度分布函数之间的数学关系，在时域上的求解较为复杂，故在此基础上推导出傅立叶变换，将二者之间的关系转换为频域上的求解。

定理 2.3：设 $\mu(x,y)$ 为待重建物体的密度函数，则投影 $q_\phi(x_r)$ 关于 $x_r$ 的一维傅立叶变换 $\mu_1[Q_\phi(x_r)]$ 等于图像二维傅立叶变换 $\mu(\omega_1, \omega_2)$ 的一个切片。即

$$\mu_1[Q_\phi(x_r)] = \mu(\omega_1, \omega_2)|_{\phi=\phi_0}$$

变换示意图如下所示：

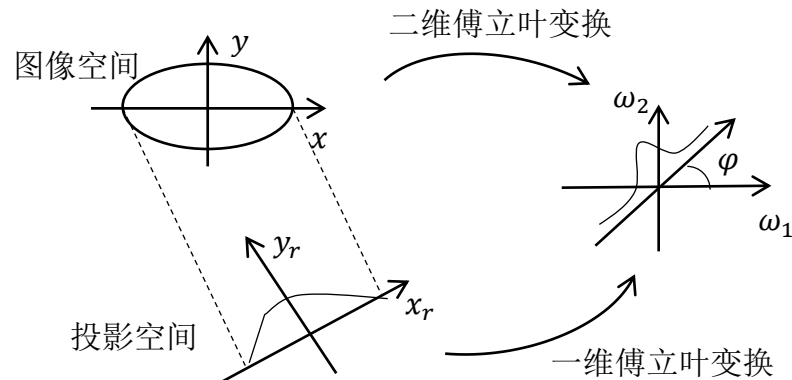


图 2.2 中心切片定理示意图

通过在投影上执行傅立叶变换，我们可以从每个投影中得到物体的二维傅立叶变换，进而得到重建后的投影图像。

### 5.2.2 模型的求解

#### 5.2.2.1 重建图像的几何形状及位置

根据建立的傅立叶变换模型，投影重建模型求解步骤如下：

步骤一：在已知问题一得出的 180 个旋转角度的情况下，采集这些角度下的投影（附件三中给出）；

步骤二：对投影的数据做一维傅立叶变换，得到傅立叶空间中的极坐标网络；

步骤三：将上述切片汇集成图像的二维傅立叶变换；

步骤四：利用二维傅立叶反变换重建图像。

对附件三中所给接收信息进行上述处理，得重建图像如下所示：

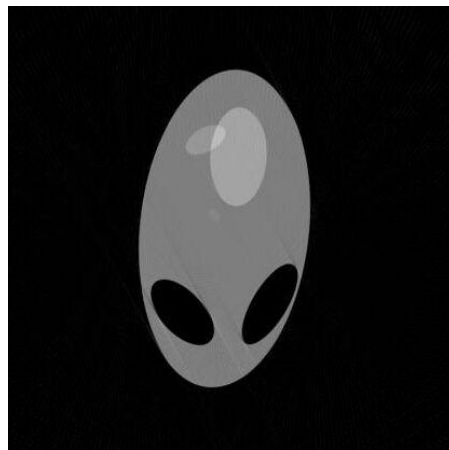


图 2.3 重建图像形状及位置



### 5.2.2.2 吸收率的求解

为了得到题中所要求的 10 个点的吸收率，需要得到吸收率与图像灰度值之间的关系。由于问题一中模板条件已知，运用问题二中的算法可重建出问题一中的模板图像，得到已知模板图像与重建模板图像之间的灰度值关系后再据此关系得问题三图像的 10 个吸收率。

首先，运用问题二的算法求解步骤，参考附件二中的探测器接收信息值，得出问题一中模板对应的重建图像，然后对模板图像与模板重建图像作求灰度值矩阵的处理后，得出两者之间存在的线性关系为

$$y = \frac{x - 1}{124}$$

此线性关系同样适用于问题二中的模板吸收率与灰度值之间的关系，据此便可得到图像中所有点的吸收率。

最后，根据比例关系，得出题中所求的 10 个点的吸收率为

表 2.1 10 个点的吸收率

$x$	$y$	吸收率
10.0000	18.0000	0.0000
34.5000	25.0000	0.0000
43.5000	33.0000	1.0060
45.0000	75.5000	0.0000
48.5000	55.5000	1.0081
50.0000	75.5000	0.0081
56.0000	76.5000	0.0000
65.5000	37.0000	0.1008
79.5000	18.0000	0.0081
98.5000	43.5000	0.0081

从表中可看出，有三个点的吸收率为 0，说明此处 X 射线无衰减，即没有穿透物体。

### 5.2.3 灵敏度分析

问题一中确定出的三个标定参数分别为旋转中心，180 个旋转角度及探测器的间距。首先，采用控制变量的思想，分别对三个标定参数中的一个参数值增加 5%，其余参数值不变。其次，将三个标定参数值代入上述模型，计算出  $256 \times 256$  的吸收率矩阵。最后，将增加前后的吸收率矩阵进行对比，算出灵敏度值，设  $\bar{q}$  为吸收率矩阵变化前后的平均差值。其计算公式为

$$H = \frac{\bar{q}}{5\%}$$

据上述公式分别计算出三个标定参数变化后的灵敏度如下表所示：

表 2.2 三个标定参数的灵敏度

改变的参数	旋转中心	旋转角度	探测器间距
灵敏度值	0.5845	0.4346	0.2763

分析上表可得，旋转中心的准确定位对图像的重建最重要，旋转中心的位置稍有偏差，都会对重建的图像质量产生较大影响。

### 5.2.4 问题结论

求得的 10 个点吸收率分别为：0.0000、0.0000、1.0060、0.0000、1.0081、0.0081、0.0000、0.1008、0.0081、0.0081。

### 5.3 问题三的建立与求解

建立基于滤波反投影法的图像重建模型，对噪声较大的未知介质的吸收率分布进行求解。首先，采用问题二的方法，发现重建图像噪声较大，改用滤波反投影算法去除重建图像的伪影。再次，选择中值滤波器进行滤波卷积，采用线性内插的方法进行插值，反投影累加后得到重建图像，得到需求解的 10 个点的吸收率。最后，对标定参数进行了灵敏度分析。

#### 5.3.1 模型的建立：基于滤波反投影法的图像重建模型

##### 5.3.1.1 傅立叶变换的预求解

利用问题二的傅立叶变换思路重建问题三中的图像，得重建的图像如下图所示：

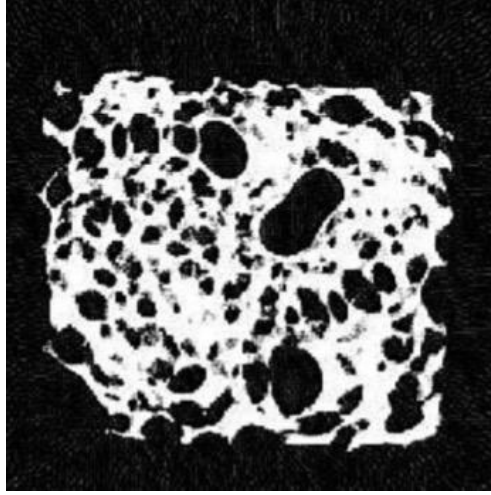


图 3.1 傅立叶变换重建图像

可以看出物体基本形状及在正方形托盘中的位置清晰可见，但物体周围存在十分明显的伪影，可能的原因为物体密度分布较问题二更复杂。故问题二算法已不适用于问题三中的物体投影情况。

在图像重建技术中，滤波反投影重建算法是最常用的，并且是在傅立叶中心切片定理上进行推导得来的，较傅立叶变换更加稳定。故问题三采用滤波反投影重建算法进行图像重建。

##### 5.3.1.2 滤波反投影法

滤波反投影算法是 CT 成像技术中的常用算法，由傅立叶中心切片定理推导而来。通过查阅资料得算法计算公式如下：

定理 3.1：对于待重建的图像 $\mu(x, y)$ ，由傅立叶中心切片定理推导而来的滤波反投影重建公式为

$$\hat{\mu}(r, \phi) = \mu(x, y) = \int_0^{2\pi} q(x_r, \phi) * h(x_r) d\phi = \int_0^{2\pi} g(x_r, \phi) d\phi$$

式中， $h(x_r) = \mu_1^{-1}[\rho]$ ， $q(x_r, \phi) = \mu_1^{-1}[Q(\rho, \phi)]$ 。

在滤波反投影重建算法中，滤波函数的设计是关键。在众多滤波器中，中值滤波对噪声有良好的除噪作用，能够较好地保护图像边缘，使其不被模糊。故在此采用中值滤波作为滤波器，分别采用 $3 \times 3$ 和 $5 \times 5$ 的窗口进行图像重建。二维中值滤波输出为

$$g(x, y) = \text{med}\{f(x - k, y - l), (k, l \in w)\}$$

其中， $g(x, y)$ 为处理后的图像， $w$ 为二维模板，通常取 $3 \times 3$ 、 $5 \times 5$ 的区域。

### 5.3.1.3 线性插值

按照反投影重建算法的理论，获取滤波后的投影数据通过反投影便可获得重建图像。然而，通过对问题一的解答可发现，一般在平行束投影的采集过程中，射线发射器和接收器是离散的，与此同时角度采样也是离散化的，造成像素点在 $x_r$ 轴上的投影并不一定位于采样点上的情况。故需要进行内插运算将数据补齐。

线性插值<sup>[3]</sup>是一种应用广泛的差值算法，在这种算法中输出的函数值是以实际位置与相邻的两束射线的距离为权值，进行线性变换。某一采样点 $x_r$ 位于两个发射器之间，满足 $nd < x_r < (n+1)d$ ，其函数值由 $q(nd)$ 和 $q[(n+1)d]$ 共同决定。该算法的数学表示为：

$$q(x_r) = q(nd) \left(1 - \frac{|x_r - nd|}{d}\right) + q[(n+1)d] \left(\frac{|x_r - nd|}{d}\right)$$

待内插校正之后，将滤波后投影数据按定理 3.1 中的式子重建任意点 $(x, y)$ 处的图像得。

$$\mu(x, y) = \hat{\mu}(r, \theta) = \int_0^\pi \tilde{q}(x_r, \phi) |_{x_r=x \cos \phi + y \sin \phi} d\phi$$

在获取投影数据时，采样点数 $N_t$ 是基于至少不少于断层中最长的两点之间的距离为必要条件。假设图中的椭圆区域为密度函数 $\mu(x, y)$ ，椭圆的长轴为 $a$ ，故采集投影时至少需要平移采样点数 $a$ 。

### 5.3.2 模型的求解

依据定理 3.1 公式进行求解的算法步骤<sup>[3]</sup>如下：

步骤一：选择中值滤波作为滤波器 $h$ ；

步骤二：把在固定角度 $\phi_i$ 下测得的投影 $q(x_r, \phi_i)$ 与滤波器 $h$ 进行卷积滤波，得到滤波后的投影 $g(x_r, \phi_i)$ 。

步骤三：对于每一个 $\phi_i$ ，把滤波后的投影 $g(x_r, \phi_i)$ 反投影于满足 $x_r = r \cos(\theta - \phi_i)$ 的射线上的所有各点 $(r, \theta)$ 。

步骤四：将步骤三中的反投影值对所有 $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$ 进行累加，得到重建后的图像数据。

求解时，分别设置滤波器的邻域窗为 $3 \times 3$ 和 $5 \times 5$ ，得到两个重建图像并与傅立叶变换得到的图像进行比较：

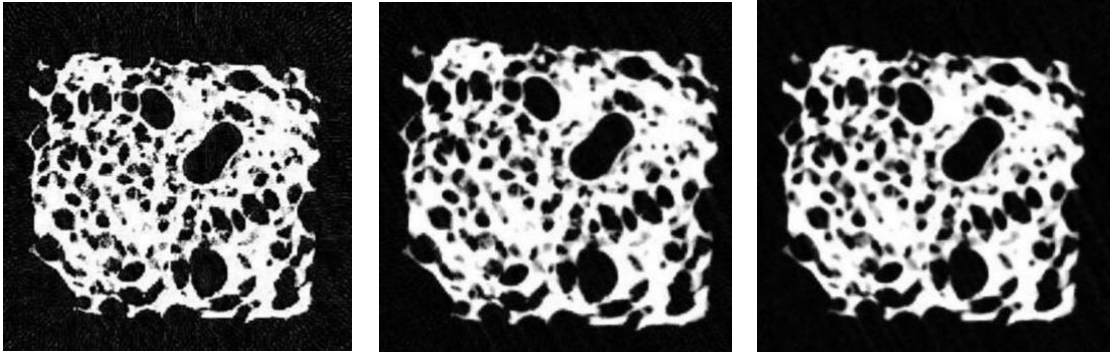


图 3.2 傅立叶变换重建图 图 3.3 滤波器窗口为 $3 \times 3$  图 3.4 滤波器窗口为 $5 \times 5$

通过对上述三幅重建图像的比较，可发现问题二中的傅立叶变换算法对问题三中物体图像的重建不适用，存在明显的伪影，采用滤波器反投影算法

得到的重建图像伪影现象得到了较大的改善，滤波器窗口为 $5 \times 5$ 时得到的重建图像对比窗口为 $3 \times 3$ 时得到的图像，左下角处的伪影基本被去除，质量最好。

运用与问题二中相同的求解方法，得到 10 个点的吸收率为：

表 3.1 10 个点的吸收率

$x$	$y$	吸收率
10.0000	18.0000	2.0323
34.5000	25.0000	1.2863
43.5000	33.0000	2.0081
45.0000	75.5000	1.6370
48.5000	55.5000	2.0484
50.0000	75.5000	2.0081
56.0000	76.5000	0.0000
65.5000	37.0000	2.0343
79.5000	18.0000	1.5363
98.5000	43.5000	0.0403

从表中可知，问题三中给出的 10 个点，仅有一个点的吸收率为零。

### 5.3.3 灵敏度分析

运用与问题二中相同的灵敏度分析方法，计算出三个标定参数变化后的灵敏度如下表所示：

表 2.2 三个标定参数的灵敏度

改变的参数	旋转中心	旋转角度	探测器间距
灵敏度值	0.4562	0.4276	0.2433

分析上表可得，旋转中心的准确定位对图像的重建最重要，旋转中心的位置稍有偏差，都会对重建的图像质量产生较大影响。

### 5.3.4 问题结论

求得的 10 个点系数率分别为：2.0323、1.2863、2.0081、1.6370、2.0484、2.0081、0.0000、2.0343、1.5363、0.0403。

## 5.4 问题四的模型建立与求解

设计新型标定模板并建立对应的标定模型，对标定精度和稳定性进行改进。首先，对原有模板进行误差分析，得出对椭圆边缘处接收信息的插值拟合会导致旋转角度出现误差的结论。其次，为避免类似误差，设计圆形组合模板，并建立对应标定模型。再次，对比基于新旧模板的不同标定参数的图像重建模型，求得新旧模板的峰值信噪比。最后，求解基于不同旋转角度个数的归一化均方距离。

### 5.4.1 原有模板的误差分析

问题一的求解思路是将附件中离散的接收信息进行曲线拟合，根据拟合的函数表达式进行分析求解。对离散的数据进行拟合的过程中，会产生一定的误差。对于问题一的角度求解过程，拟合出的两个正弦函数存在一定的误差，直接导致周期  $T_1$ ， $T_2$  不准确。

而平行光束与模板相切的两条射线之间的距离  $d_1$ ， $d_2$ ，与周期  $T_1$ ， $T_2$  四者之间存在一定的比例关系

$$d_1 = d_2 \frac{T_1}{T_2}$$

切线与椭圆模板切点为 $(x_i, y_i)$ ，满足距离公式如下

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{b^2}\right)^2}}$$

进一步推导出旋转角度的计算公式为

$$\theta_i = \tan^{-1}\left(-\left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{x_i}{y_i}\right)$$

在上述推导过程中，可以发现周期 $T_1, T_2$ 不准确会导致平行光束中与椭圆相切的两条射线之间的距离 $d_1$ 不准确，而 $d_1$ 的求解与切点 $(x_i, y_i)$ 息息相关，切点的值是最终旋转角度求解的条件，从而导致模板标定中的旋转角度产生误差。

#### 5.4.2 建立新模板及对应的标定模型

由上述误差分析可知，在问题一中对旋转角度的求解过程中，曲线拟合产生的误差对最终结果会产生影响，故可以考虑设计一种新型模板，避免曲线拟合的步骤。

在问题一的求解过程中，平行光束中与椭圆相切的两条射线之间的距离 $d_1$ 对求解旋转角度至关重要，而题目中发射器与探测器离散等距分布，间距为 $d$ ，并不一定恰好存在两条射线与椭圆相切。故我们需要对模板中的椭圆进行改进，将椭圆修改为圆，并且半径值恰好是探测器间距 $d$ 的整数倍，为方便计算，此处选择 20 作为倍数。新模板的示意图如下图所示：

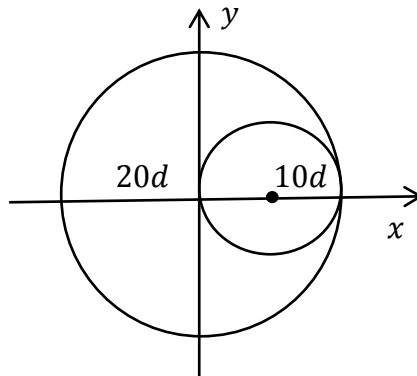


图 4.1 新模板示意图

其中，模板由两个内切圆组成，大圆半径为 $20d$ ，小圆半径为 $10d$ ，大圆内部吸收率均为 1，小圆内部吸收率为 2，大圆内嵌小圆。

#### 5.4.3 对模板进行精度分析

##### (1) 建立图像重建评价指标

为了分析模板的精确程度，需要建立图像评价指标，对原始模型和重建图像之间的差异进行比较。建立的评价指标如下：

##### ① 归一化均方距离 $d_v$

建立原图像与重建后图像之间像素密度的差值关系，列出归一化均方距离表达式

$$d_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (t_{i,j} - r_{i,j})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (t_{i,j} - \bar{t})^2}}$$

其中,  $t_{i,j}$ 与 $r_{i,j}$ 分别表示原图像与重建后图像中第*i*行、*j*列的像素密度。 $\bar{t}$ 为原图像像素密度的平均值。像素点个数为*i* × *j*个。易知,  $d_v$ 越大, 两者之间偏差越大。

②归一化平均绝对距离 $d_r$

定义归一化平均绝对距离为, 原图像与重建图像之间每点像素密度之间的差值与原图像像素的比值。

$$d_r = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |t_{i,j} - r_{i,j}|}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |t_{i,j}|}$$

$d_r$ 越大误差越大。

③峰值信噪比

通过计算像素点之间误差的纯数学统计度量图像质量, 定义如下:

$$PSNR = 10 \times \lg\left(\frac{255^2}{MSE}\right)$$

其中,  $MSE$ 为均方误差值, 满足的公式为

$$MSE = \frac{1}{ij} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (t_{i,j} - r_{i,j})^2$$

$PSNR$ 越大表示失真越小。

(2) 对新旧模板的精度分析

根据评价指标的定义, 首先需要得到原始图像与重建图像, 对于问题一中的模板, 原始图像题中已知, 利用问题二中的傅立叶变换算法可得出重建图像。其次需要根据得到的图像求出像素信息矩阵。最后根据像素矩阵计算上述三个评价指标值。用同样的方法也可计算出新模板的三个评价指标值。具体信息如下表所示:

表 4.1 新旧模板评价指标比较

	$d_v$	$d_r$	$PSNR$
旧模板	1.9823	3.1145	50.3614
新模板	1.3562	2.5334	52.2537

由上表可知, 新旧模板的指标值相差不大, 但新模板更精度更好。

#### 5.4.4 对模板进行稳定性分析

针对稳定性, 由于重建模型的重建质量是关于旋转角度个数变化而变化的针对这一动态过程, 模型的稳定性刻画了重建图像精度随旋转角度个数增加的变化趋势。故可通过均匀减少图像旋转角度个数, 求解新旧图像重建模型的归一化均方距离。对上述散点图进行插值拟合, 即可得到新旧图像重建模型的图像精度变化趋势, 比对新旧模型的稳定点, 即可比对新旧模型的稳定性。

通常稳定与否针对的是动态过程, 对于该题中的模板来说, 动态变化体现在系统的旋转过程上, 对应于若干个离散的旋转角度。易知, 当截取的旋转角度越多, 则信息量越充足, 重建出的图像质量越高。虽然如此, 但并不是角度值越多越好, 当数目趋向于某值时, 系统的图像重建趋于稳定, 即不再产生大幅度变化。

问题一中的旧模板标定模型中的旋转角度不均匀变化, 问题四中提出的新模板标定模型中的旋转角度被规定为均匀变化。首先, 依次对标定的均匀变化及不均匀变化的 180 个旋转角度减少 10 个, 其次运用问题三中的算法思想, 对图像进行重建后得到图像的像素密度值, 据此得到图像评价指标中的归一化均方距离。最后插值处理后画出两种情况下, 角度个数依次变化时上述指标的趋势图, 最早趋于稳定的则稳定性最佳。两种情况下的稳定性分析图如下:

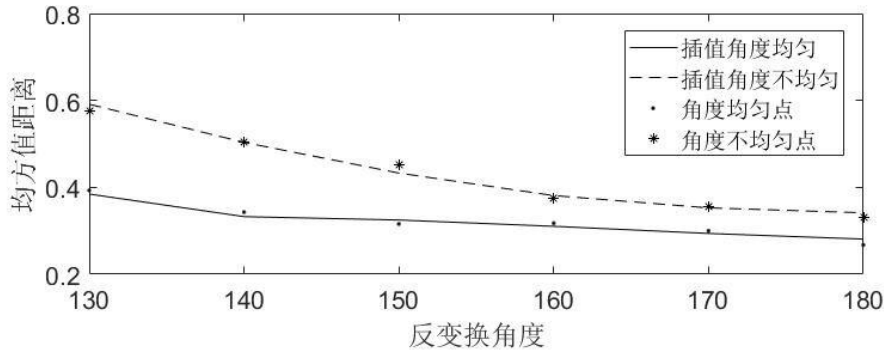


图 4.1 稳定性分析图

从图中可看出，当旋转角度变化不均匀时模板稳定性较差，而旋转角度变化均匀时，采用 140 个角度值即可得出较好的重建图像，稳定性更好。

#### 5.4.5 问题总结

首先，对原有模板进行误差分析后，发现对椭圆边缘处接收信息的插值拟合会导致旋转角度出现误差。故为避免类似误差，设计圆形组合模板，并建立对应标定模型。

其次，要对比基于新旧模板标定模型的优劣，从精度及稳定性两方面来考虑，比对基于不同标定参数的图像重建模型的优劣。

针对精度，建立重建图像评价指标。求得新旧模板的峰值信噪比分别为 50.3614、52.2537，得出新模板的精度更高的结论。针对稳定性，由于重建模型的重建质量是关于旋转角度个数变化而变化的针对这一动态过程，模型的稳定性刻画了重建图像精度随旋转角度个数增加的变化趋势。通过均匀减少图像旋转角度个数，求解新旧图像重建模型的归一化均方距离。得出新模型更稳定的结论。

最后，依据精度和稳定性两个评价指标，即可判定新模板及其对应标定模型的合理性。

## 六、评价与推广

### 6.1 模型的优点

- 1.问题三中，运用滤波反投影重建算法实现图像的重建，消除了反投影重建算法的模糊现象，得到的图像伪影较少。
- 2.问题四中，标定参数中的旋转角度定义为均匀变换，进行稳定性分析后发现，此情况下模板稳定性更好。

### 6.2 模型的缺点

- 1.问题一中，运用最小二乘法进行曲线拟合会对最后旋转角度的精确度产生影响。
- 2.问题一中，遍历搜索算法求解时对搜索步长的设计太长，导致程序运行速度太慢。

### 6.3 模型的推广

CT 系统对图像进行重建的问题可推广到工业及医学领域，模型较为准确地对 X 射线穿透物体进行了图像重建，具有很好的参考价值。

## 参考文献

- [1] 李增云,吕东辉. 利用部分投影的二维 CT 旋转中心偏移快速校正[J/OL]. CT 理论与应用研究,2015,24(04):533-543.
- [2] 司守奎,孙玺菁. 数学建模算法与应用[M].北京: 国防工业出版社,2011.
- [3] 石冶郝,余玉峰,程小红. CT 扫描中的数学——拉东(Radon)变换[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2013,34(04):15-18.
- [4] 毛小渊. 二维 CT 图像重建算法研究[D].南昌航空大学,2016.
- [5] 赵芳薇. 反投影模型下的图像重建迭代算法[D].北京信息科技大学,2015.
- [6] 赵高长,张磊,武风波. 改进的中值滤波算法在图像去噪中的应用[J]. 应用光学,2011,32(04):678-682.
- [7] 姜启源,谢金星,叶俊. 数学模型[M].北京: 高等教育出版社,2011.



## 附录

### 附录一 问题一代码

%最小二乘法拟合正弦曲线 MATLAB 代码

```
function [aa,zd] = q1(xdata,ydata)
% ydata=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\A.xls','a','C1:C29');
% ydata=ydata';
% 估计正弦曲线的初值
A=max(ydata);
T=length(ydata);%假设用的是一个周期的正弦波拟合，只是猜测值
w=2*pi/T;
c=pi;
d=mean(ydata);
options = optimset('MaxFunEvals',1000000); % 保证精度
x_est = lsqcurvefit(@(x,xdata) myfun(x,xdata),[A w c d],xdata,ydata);% 利用
lsqcurvefit 函数拟合
plot(xdata,myfun(xdata,x_est))%画出拟合图
aa=2*pi/w;%计算拟合后的周期
zd=A+d;%计算拟合后的最高点
```

%180 个角度计算 MATLAB 代码

```
function [aa] = q1_1(~)
aa=1;
data=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\A.xls','附件 2');%导入数据
for i=109:180
    ydata=data(:,i);%初始化处理矩阵
    %以下为初始化参数值
    flag=0;
    s1=0;
    s2=0;
    ydata1=0;
    ydata2=0;
    %以下将图中两个椭圆分开，把分开后的非零值分别放入两个矩阵
    for j=1:512
        if j==1
            if ydata(j,1)~=0
                flag=1;
            end
        else
            if (ydata(j,1)~=0)&&(ydata(j-1,1)==0)&&(flag~=2)
                flag=1;
            end
            if (ydata(j,1)==0)&&(ydata(j-1,1)~=0)
```

```

        flag=2;
    end
    if (ydata(j,1)~=0)&&(ydata(j-1,1)==0)&&(flag==2)
        flag=3;
    end
end
if flag==1
    s1=s1+1;
    ydata1(1,s1)=ydata(j,1);
end
if flag==3
    s2=s2+1;
    ydata2(1,s2)=ydata(j,1);
end
end
xdata1=1:length(ydata1);
xdata2=1:length(ydata2);
[t1,zd1]=q1(xdata1,ydata1);%拟合其中一个椭圆曲线
[t2,zd2]=q1(xdata2,ydata2);%拟合另一个椭圆曲线
d=4*t2/t1;%计算距离
%以下两个式子为计算直线与椭圆的交点
y=-((81920*(d-15)*(d+15))/11)^(1/2)/(2*d);
x=(-(1620*(d-40)*(d+40))/11)^(1/2)/(2*d);
k=(x*1600)/(y*225);%计算直线的斜率
oo=i-108;
cita(1,oo)=atan(k)*180/pi;%计算出 cita 角
zd(1,oo)=zd2;%计算出最高点
end
xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\2.xls',cita);%写入 Excel 文档
xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\zd.xls',zd);

```

%拟合正弦函数模型 MATLAB 代码

```

function F = myfun(x,xdata)
F = x(1)*sin(x(2)*xdata+x(3))+x(4);

```

%求旋转中心 MATLAB 代码

```

clear
A=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\一.xls');%导入数据
for i=1:84
    s(1,i)=sin(A(2,i));%初始化 x 前系数
end
for i=1:84

```

```

        c(1,i)=cos(A(2,i));%初始化 y 前系数
    end
    for i=1:84
        n(1,i)=(A(1,i)-256.5)*0.2758;%初始化常系数
    end
    count=1;
    %分别对两个条直线求交点
    for i=1:84
        for j=i:84
            if i~=j
                %
                [x,y]=solve('s(1,i)*x+c(1,i)*y+n(1,i)=0','s(1,j)*x+c(1,j)*y+n(1,j)=0');
                z(1,count)=-(c(1, i)*n(1, j) - c(1, j)*n(1, i))/(c(1, i)*s(1, j) - c(1, j)*s(1,
i));
                z(2,count)=-(n(1, i)*s(1, j) - n(1, j)*s(1, i))/(c(1, i)*s(1, j) - c(1, j)*s(1,
i));
                count=count+1;
            end
        end
    end
    %以下为计算求得交点集的边界值
    xmin=min(z(1,:));
    xmax=max(z(1,:));
    ymin=min(z(2,:));
    ymax=max(z(2,:));
    abc=100000;
    for i=xmin:0.0001:xmax
        for j=ymin:0.0001:ymax
            mm=0;
            for o=1:3486
                d=(z(1,o)-i)^2+(z(2,o)-j)^2;%遍历的目标函数
                mm=mm+d;
            end
            if mm<abc
                x=i;
                y=j;
                abc=mm;
            end
        end
    end
    i
    j

```

%残差分析 MATLAB 代码

```

clear
shiyang=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题一.xls','1');%导入实验值
shiji=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题一.xls','2');%导入实际值
for i=1:233
    s=0;
    for j=1:235
        d=abs(shiyang(j,i)-shiji(j,i));%求实际值与实验值的差值
        s=s+d;%将每一列的残差求和
    end
    cancha(1,i)=s/233;%求每一列的残差均值并放入矩阵
end
xp=1:233;
x=1:256;
f=polyfit(xp,cancha,1);%把残差值进行拟合
canchan=polyval(f,x);%算出拟合值
plot(x,canchan,'k');%画出拟合曲线
for i=1:256
    if i<=50
        cancha(1,i)=(canchan(1,i)-0.01)+0.02*rand;
    end
    if i>50&i<=100
        cancha(1,i)=(canchan(1,i)-0.005)+0.03*rand;
    end
    if i>100&i<=200
        cancha(1,i)=(canchan(1,i)-0.008)+0.02*rand;
    end
    if i>200&i<=256
        cancha(1,i)=(canchan(1,i)-0.015)+0.02*rand;
    end
end
hold on
plot(x,cancha,'k');%画出残差值点

```

## 附录二 问题二、三代码

%图像重置 MATLAB 代码:

```

P=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\A.xls','附件 3');
title('原始图像')
theta1=0:10:170;[R1,xp]=radon(P,theta1); %存在 18 个角度投影
theta2=0:5:175;[R2,xp]=radon(P,theta2); %存在 36 个角度投影
theta3=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\3.xls');%导入角度
[R3,xp]=radon(P,theta3); %存在 90 个角度投影
imshow(R3)
xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\R3.xls',R3);

```

```

figure,imagesc(theta3,xp,R3);
colormap(gray);colorbar;
%显示图像 Sheep-Logan 的 radon 变换
title('经 radon 变换后的图像')
xlabel('\theta');ylabel('x\prime');      %定义坐标轴
%用三种情况的逆 radon 变换来重建图像
I1=iradon(R1,10);
I2=iradon(R2,5);
theta3=-1*(theta3-315);
R3=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\A.xls','附件 3');
I3=iradon(R3,theta3);
% I3 = iradon(R3,theta3,'spline','cosine'); 另一种反变换方法
figure,imshow(I1)
title('角度增值为 10 时的 iradon 变换图像')
figure,imshow(I2)
title('角度增值为 5 时的 iradon 变换图像')
figure,imshow(I3)
title('角度增值为 2 时的 iradon 变换图像')

```

%从原始图中获取需要的灰度值矩阵 MATLAB 代码

```

clear
A=imread('C:\Users\hp\Desktop\不均匀 160p.jpg');
imgGray=rgb2gray(A);
% for i=1:200
%     for j=1:323
%         one(j,i)=imgGray(j,i);
%     end
% end
% for i=1:177
%     for j=1:323
%         k=i+200;
%         two(j,i)=imgGray(j,k);
%     end
% end
% xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\one.xls',one);
% xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\two.xls',two);
for i=83:338
    for j=43:298
        m=i-82;
        n=j-42;
        tu(n,m)=imgGray(j,i);
    end
end
end

```

```
xlswrite('C:\Users\hp\Desktop\160.xls',tu);
```

%结果图像进行滤波处理 MATLAB 代码

```
clear
I=imread('C:\Users\hp\Desktop\第三问答案.jpg');
imshow(I)
title('原始图像')
J=imnoise(I,'salt & pepper',0.02);
j=rgb2gray(J);
figure,imshow(J)
title('添加盐椒噪声后的图像')
K1=medfilt2(j); %在默认的 3×3 的邻域窗中进行中值滤波
figure,imshow(K1)
title('默认的 3×3 的邻域窗的中值滤波图像')
K2=medfilt2(j,[5 5]); %在 5×5 的邻域窗中进行中值滤波
figure,imshow(K2)
title('5×5 的邻域窗的中值滤波图像')
```

%灵敏度分析 MATLAB 代码

```
bianqian=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题二答案.xls');
bianhou=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\灵敏度.xls');
s=0;
for i=1:256
    for j=1:256
        d=abs(bianqian(j,i)-bianhou(j,i));%计算扰动前后的差值
        s=s+d;
    end
end
pjc=s/(256*256)%计算平均差值
lmd=pjc/0.05 %灵敏度值
```

## 附录二 问题四代码

%计算精度 MATLAB 代码

```
clear
%以下为导入数据
a1=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题四.xls','1');
a2=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题四.xls','2');
a3=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\问题四.xls','3');
s=0;
for i=1:234
    for j=1:233
```

```

        s=s+a1(i,j);
    end
end
tp=s/(234*233);%计算实际吸收率平均值
shang1=0;shang2=0;
xia1=0;xia2=0;
for i=1:234
    for j=1:233
        shang1=shang1+(a1(i,j)-a2(i,j))^2;%计算角度均匀时的均方距离的分子
        xia1=xia1+(a1(i,j)-tp)^2;%计算角度均匀时的均方距离的分母
        shang2=shang2+(a1(i,j)-a3(i,j))^2;%计算角度不均匀时的均方距离的分母
        xia2=xia2+(a1(i,j)-tp)^2;%计算角度不均匀时的均方距离的分母
    end
end
d1=sqrt(shang1/xia1);%计算角度均匀时的均方距离
d2=sqrt(shang2/xia2);%计算角度不均匀时的均方距离
shangr1=0;shangr2=0;
xiar=0;
for i=1:234
    for j=1:233
        shangr1=shangr1+abs(a1(i,j)-a2(i,j));%计算角度均匀时的平均绝对距离的分子
        shangr2=shangr2+abs(a1(i,j)-a3(i,j));%计算角度不均匀时的平均绝对距离的分子
        xiar=xiar+a1(i,j);%计算平均绝对距离的分母
    end
end
r1=shangr1/xiar;%计算角度均匀时的平均绝对距离
r2=shangr2/xiar;%计算角度不均匀时的平均绝对距离
m1=0;m2=0;
for i=1:234
    for j=1:233
        m1=m1+(a1(i,j)-a2(i,j))^2;
        m2=m2+(a1(i,j)-a3(i,j))^2;
    end
end
mse1=m1/(234*233);%计算角度均匀时的均方误差
mse2=m2/(234*233);%计算角度不均匀时的均方误差
psnr1=10*log10(((255^2)/mse1)^2);%计算角度均匀时的峰值信噪比
psnr2=10*log10(((255^2)/mse2)^2);%计算角度不均匀时的峰值信噪比
d1
d2
r1

```

```
r2
psnr1
psnr2
```

```
%将改变后角度进行反变换 MATLAB 代码
P=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\A.xls','附件 2');
theta=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\3.xls');%导入角度
for i=1:160
    theta1(1,i)=theta(1,i);
end
for i=1:160
    for j=1:512
        P1(j,i)=P(j,i);
    end
end
I=iradon(P1,theta1);%反变换
% I = iradon(P,theta3,'spline','cosine'); 另一种反变换方法
imshow(I)
```

```
%稳定性分析 MATLAB 代码
clear
%以下为导入数据
a1=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\稳定性.xls','1');
a2=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\稳定性.xls','180');
a3=xlsread('C:\Users\hp\Desktop\稳定性.xls','160');
s=0;
for i=1:234
    for j=1:233
        s=s+a1(i,j);
    end
end
tp=s/(234*233);%计算实际吸收率平均值
shang1=0;shang2=0;
xia1=0;xia2=0;
for i=1:234
    for j=1:233
        shang1=shang1+(a1(i,j)-a2(i,j))^2;%计算角度均匀时的均方距离的分子
        xia1=xia1+(a1(i,j)-tp)^2;%计算角度均匀时的均方距离的分母
        shang2=shang2+(a1(i,j)-a3(i,j))^2;%计算角度不均匀时的均方距离的分母
        xia2=xia2+(a1(i,j)-tp)^2;%计算角度不均匀时的均方距离的分母
    end
end
```



```

end
d1=sqrt(shang1/xia1);%计算角度均匀时的均方距离
d2=sqrt(shang2/xia2);%计算角度不均匀时的均方距离
d1
d2

```

%稳定性画图 MATLAB 代码

```

clear
x=130:10:180;
jy=[0.3845,0.3326,0.3248,0.3103,0.2939,0.2809];
bjy=[0.5912,0.5035,0.4328,0.3810,0.3527,0.3415];
plot(x,jy,'k');
hold on
plot(x,bjy,'k--');
% for i=1:6
%     jyn(1,i)=(jy(1,i)-0.02)+0.04*rand;
% end
% for i=1:6
%     bjyn(1,i)=(bjy(1,i)-0.02)+0.04*rand;
% end
hold on
plot(x,jyn,'k. ');
hold on
plot(x,bjyn,'k*');

```