

CT 系统参数标定及成像

摘要

本文针对 CT 系统参数标定及成像问题,建立了基于遗传算法的参数优化模型,确定了探测器单元之间的距离以及 X 射线的 180 个方向,利用基于 Radon 变换的质心法确定了旋转中心的位置;建立了基于反投影法和线性插值法的图像重建模型,确定了未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率并给出指定 10 处吸收率;建立了基于滤波反投影法的图像重建模型,给出了介质的几何形状、吸收率和指定 10 处吸收率;利用计算机仿真检验标定参数精度和稳定性,并给出了对称双圆模板和标定模型。

针对问题一,建立了基于遗传算法的系统参数优化模型,确定了探测器单元之间的距离以及 X 射线 180 个方向,利用基于 Radon 变换的质心法确定了旋转中心的位置。首先以投影值不为 0 的探测器个数与实际个数的方差最小为目标函数,将探测器初始角度、探测器间距、每次转动的角度作为决策变量并以初始角度范围、转动角度范围为约束条件建立参数优化模型。其次通过遗传算法求解出各个系统参数值。再根据质心法求出 CT 系统的旋转中心位置。最后通过选取旋转过程中探测器平行于长短轴的两个特殊位置重新确定旋转中心位置进行检验,结果合理。得到旋转中心位置为 $(-8.7219, 7.1361)$,探测器单元间距离为 0.2643mm, X 射线的初始角为 -50.9245° ,每次的转角为 1.0141° 。

针对问题二,建立了基于反投影法和线性插值法的图像重建模型,确定了未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率并给出指定 10 处吸收率值。首先将扫描范围内的投影值沿着原射线路径均匀回抹到待重建图像断层的各个像素采样点上,其次将不同角度下的投影值进行线性插值运算并按照对应角度回抹叠加得到重建图像,进行边沿提取确定几何形状与介质的位置,再对重建图像灰度值矩阵进行归一化处理确定介质各处吸收率。最后将模型应用于附件 2,将重建图像与实际对比,吻合度高,模型合理。10 处吸收率值为:0, 0, 1.0730, 1.0156, 0.9886, 1.0090, 1.0531, 0, 0, 0。

针对问题三,建立了基于滤波反投影法的 CT 图像重建模型,给出了介质相关信息和 10 处吸收率。首先对扫描数据进行快速傅里叶变换,其次将变换结果与 $ram-lak$ 滤波核相乘后进行快速傅里叶反变换,再对处理后的数据进行反投影操作完成图像重建并通过边沿提取确定几何形状,最后对重建图像灰度值矩阵进行归一化处理确定介质各处吸收率。10 处吸收率值为:0, 0, 5.0396, 0.1653, 4.1326, 2.1069, 1.4883, 0, 0, 0。

针对问题四,首先将椭圆模板的重建图像与实际模板对比,得到重建图像位置的误差百分比小,参数精度较高。其次通过计算机仿真出 shepp-Logan 头图像的投影值,分别在考虑旋转中心偏移和不考虑的情况下进行图像重建,得代入偏移量的重建图还原度高,偏移量参数精度也较高,且多次还原不同介质均成功,可知参数标定具有稳定性。再考虑到椭圆模板下旋转 180 个角度获取的投影值不完整,会对参数标定的精度造成一定影响,决定采用两个直径为 10 毫米的对称圆形作为新模板以获取完整周期的投影值,再建立基于遗传算法的参数优化模型用以求解系统参数。

关键词: 遗传算法 质心法 Radon 变换 参数优化模型 滤波反投影法 线性插值

一、 问题重述

CT(Computed Tomography)可以在不破坏样品的情况下，利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像，由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示，平行入射的 X 射线垂直于探测器平面，每个探测器单元看成一个接收点，且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变，整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向，在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量，并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

CT 系统安装时往往存在误差，从而影响成像质量，因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定，即借助于已知结构的样品（称为模板）标定 CT 系统的参数，并据此对未知结构的样品进行成像。

请建立相应的数学模型和算法，解决以下问题：

(1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板，模板的几何信息如图 2 所示，相应的数据文件见附件 1，其中每一点的数值反映了该点的吸收强度，这里称为“吸收率”。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据这一模板及其接收信息，确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

(2) 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率，相应的数据文件见附件 4。

(3) 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数，给出该未知介质的相关信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

(4) 分析(1)中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。

(1)-(4)中的所有数值结果均保留 4 位小数。同时提供(2)和(3)重建得到的介质吸收率的数据文件（大小为 256×256 ，格式同附件 1，文件名分别为 problem2.xls 和 problem3.xls）

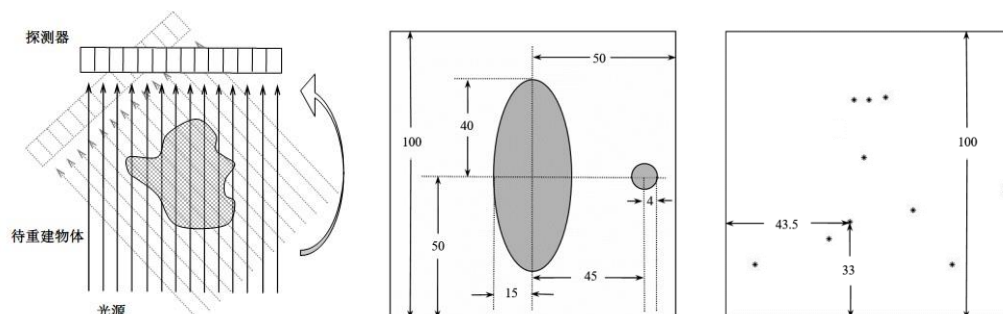


图 1. CT 系统示意图 图 2.模板示意图（单位：mm）图 3.10 个位置示意图

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求根据模板的形状及其吸收率,确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。根据经验,CT 系统每定位一个方向,绕旋转中心转过的角度相等。因此,只要确定 CT 系统的初始方向和每次转过的角度,就能确定 X 射线的 180 个方向。先对附表中部分探测器的吸收情况进行分析,易得到探测器进行扫描的大致范围。以 CT 系统的初始方向、CT 系统每次的转角、探测器单元之间的距离为决策变量,以探测器扫描过的范围为约束条件,以探测器接收的投影长度和真实的长度差异为优化目标,建立参数优化模型。遗传算法能有效的寻找全局最优解,宜选用遗传算法对模型进行求解,就能得到探测器单元之间的距离 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

由于探测器扫描范围不到 360° ,利用正弦图^[5]中投影对称性^[4]或 π 分割一致性的特点都无法求解旋转中心。因此,可选用物体质心与其投影质心关系定理,将求旋转中心偏移量的问题转化成求固定视角下的投影函数的质心偏移问题,运用 60° 的投影即可准确测量出旋转中心的位置。

2.2 问题二的分析

问题二要求利用问题一中得到的标定参数,确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率,并给出附件 4 中的 10 个位置处的吸收率。此题是问题一的反演,要解决问题二,需要用到问题一中求解的 180 个方向、旋转中心位置和探测器单元之间的距离。这属于 CT 图像重建问题,需要用反投影法确定其形状。将 CT 系统 180 个方向的观测值沿原射线路径均匀回抹至各个像素点上,再将各个反投影角度下的回抹值叠加,即可获得被扫描物的基本轮廓。

得到介质的形状图之后,将图像分为像素 256×256 ,分别对介质到托盘上边界的像素、介质到托盘左边界的像素进行计数,就能得到介质到纵、横两边界的距离,确定出介质在托盘中的位置。

用反投影重建问题一中的图像,建立图像的灰度矩阵与像素吸收率的对应关系,参照该关系得到问题二中图像各像素点的吸收率。根据 10 个位置所在的位置坐标,计算这 10 个位置所在的像素点,其所在像素点的吸收率就是该位置处的吸收率。

2.3 问题三的分析

问题三要求利用(1)中得到的标定参数,给出未知介质的相关信息,并给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。此题与问题二所给的条件和待求解的量都一样,用问题二中反投影重建模型对其进行求解。直接反投影法复现空间中被扫描的点时,各个角度下投影强度的回抹致使重建后圆点中心的像素值较周围像素值被过多的加强,从而导致圆点的边缘模糊,中心发亮。在重建空间圆点很密集的数据时,得到的重建图非常模糊,与实际图像吻合度低,此方法不再适用。

为消除反投影产生的模糊,考虑利用滤波反投影^[2]对模板进行重建,先对观测数据进行傅里叶变换,将计算结果与卷积函数相乘且进行傅里叶反变换,对处理后的观测数据进行反投影,再进行图像重建,可给出该介质的形状。

建立图像的灰度矩阵与像素吸收率的对应关系,参照该关系得到问题三中图像各像素点的吸收率。根据 10 个位置所在的位置坐标,计算这 10 个位置所在的像素点,其所在像素点的吸收率就是该位置处的吸收率。

2.4 问题四的分析

问题四要求分析问题一中参数标定的精度和稳定性，并自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性。

这属于灵敏度分析问题，用问题三的滤波反投影模型，重建旋转中心位于正方形托盘的几何中心时图像、重建问题一求解出的含系统参数的图像，比对两种情况下的重建图像，若利用参数画出的图像质量较高，且较接近实际图像，可知问题一中参数标定的精度较高且稳定性较好。

设计具有对称特征的模板，给出其形状及几何尺寸，使其能在较小的扫描角度之内确定探测器单元间距、旋转中心、初始角度和每次转角。

三、 基本假设

- 1、假设 CT 系统每次转过的角度均相同；
- 2、假设 CT 系统 X 射线平行于正方形托盘；
- 3、假设在问题二、三中探测器每次转过的角度与问题一中相同；

四、 符号说明

a	椭圆标定模板长半轴
b	椭圆标定模板短半轴
k	椭圆切线的斜率
θ_0	探测系统的初始角度
i	为转动的次数
$\Delta\theta$	每次转动的角度
d	切线间距离
Δx	探测器间距
N	投影值不为 0 的探测器个数
num_i	投影值不为 0 的探测器实际个数
$f(x, y)$	待重建物体函数
(x_1, y_1)	切线与椭圆的一个切点
(x_2, y_2)	切线与椭圆的一个切点
a	x 轴方向偏移距离
$p(s, \theta)$	$f(x, y)$ 沿直线 L 的投影
s	原点 O 到直线 L 的距离。
$C(\bar{x}, \bar{y})$	物体函数的质心
C_p	投影函数的质心
$p'_{\theta_j}(s_i)$	旋转中心有偏移时投影
Δpix	像素大小
Horizon	建像视野大小，单位为 mm
M	重建图像矩阵大小。
$P(d, \theta)$	投影数据用函数
$I(x, y)$	待重建图像用函数
Δs	采样间隔
u_m	每个采样点在反投影的过程中的位置

$Scan$	扫描视野的大小
N_s	一次投影观测的采样点总数量
I	射线穿过介质后的强度
I_0	射线初始强度
$\mu_l(L)$	介质的衰减系数即介质吸收率

五、 模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立与求解

问题一要求确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。考虑首先以投影值不为 0 的探测器个数与实际个数的方差为目标函数，将探测器初始角度、探测器间距、每次转动的角度作为决策变量并以初始角度范围、转动角度范围为约束条件建立参数优化模型。其次考虑通过遗传算法求解出各个系统参数值。最后考虑根据质心法^[1]求出 CT 系统的旋转中心位置。

5.1.1 模型的建立

1) 探测器单元间距离、射线初始方向、旋转步长的确定

系统参数的标定问题实际上可以转化为寻求最优参数使得每个角度下投影值不为 0 的探测器个数与实际探测器个数差距最小的优化问题。易知当每一个角度下的预测探测器个数与实际探测器个数吻合度最高时，此时对应的探测器单元间距离、射线的 180 个方向等即为所求 CT 系统的参数值。这是一个参数优化问题，需要建立一个参数优化模型进行问题求解。

首先以椭圆中心为原点，X 射线方向为 x 轴，探测器方向为 y 轴建立重建坐标系。对应的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中， a 为长半轴， b 为短半轴， $a = 40\text{mm}$, $b = 15\text{mm}$ 。

对椭圆方程求导，表示出椭圆的切线方程后与椭圆方程联立

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \times y' = 0$$

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x}{y}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x}{y} = k \end{cases}$$

其中， k 为椭圆切线的斜率，由于探测系统绕旋转中心逆时针旋转 180 次，且假设探测系统以均匀角度旋转，则 k 可表示为

$$k = \tan(\theta_0 + i\Delta\theta) \quad i = 1, 2, 3 \dots 179$$

式中， θ_0 为探测系统的初始角度， i 为转动的次数， $\Delta\theta$ 为每次转动的角度。

联立即可求解出切线与椭圆的两个切点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-a^2 k}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} \\ y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{a^2 k}{\sqrt{a^2 k + b^2}} \\ y_2 = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 k + b^2}} \end{cases}$$

再根据切点表示出两条切线并根据两平行线间的距离公式求出切线间距离 d

$$d = \frac{|(-kx_1 + y_1) - (-kx_2 + y_2)|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

其中， $d \in [30, 80]\text{mm}$ ，即切线间距不会大于椭圆长轴，也不会小于椭圆短轴。

由于探测器是等距分布的，则两切线间对应的投影值不为 0 的探测器个数可以表示为

$$N = \frac{d}{\Delta x}$$

其中， Δx 为探测器间距， N 为投影值不为 0 的探测器个数。

而 CT 系统在不同角度值下投影值不为 0 的探测器实际个数 num_i 可由给出的模板接收信息附件得知。因此将投影值不为 0 的探测器个数与实际个数的方差最小设为目标函数，用以衡量预测值与实际值的差距

$$\min \frac{1}{180} \sum_{j=1}^{180} (N_i - num_i)^2$$

将探测器初始角度、探测器间距、每次转动的角度作为决策变量，即待优化的参数并以初始角度范围、转动角度范围为约束条件

对于附件 2 给出的模板接收信息，选取其中的中段接收信息进行作图分析，如下图：

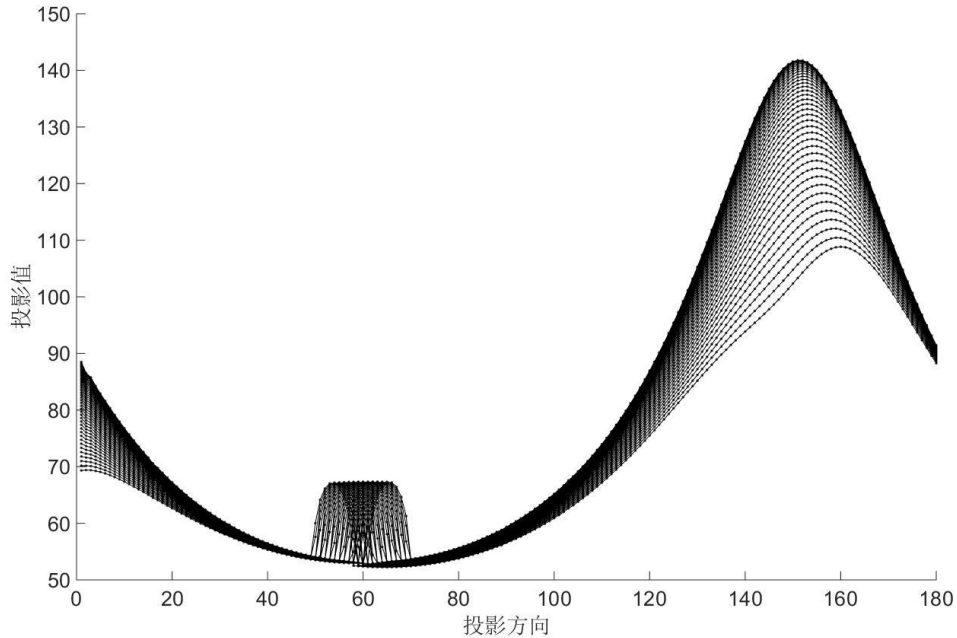


图 5.1.1 中部衰减强度变化趋势

由图 5.1.1 可知，衰减强度变化整体呈现先递减并在出现一个峰值后呈现上升趋势，最后再次到达峰值后递减。由于椭圆模板是均匀介质，各点的吸收率相

同，因此衰减强度也反映了 X 射线穿过的椭圆厚度。取穿过椭圆中心的射线为例，则该射线呈现先衰减的趋势，接着出现的峰值为 X 射线穿过圆，越过圆之后，X 射线穿过的椭圆厚度逐渐增大，当与椭圆长轴重合时达到最大衰减度，越过长轴又开始呈现减小趋势，由此可推测探测器转动角度范围是由第四象限逆时针旋转到第二象限，范围为 $[-90^\circ, 135^\circ]$ 。

由此可以确定约束条件探测器初始角度的范围为 $[-90^\circ, 0^\circ]$ ，且变化曲线并未呈现出周期特性，可推知 180 次旋转角度总和没有 360° ，每次旋转的角度范围为 $[0^\circ, 2^\circ]$ 。

$$s. t \begin{cases} 0 \leq \Delta\theta \leq 2^\circ \\ -90^\circ \leq \theta_0 \leq 0 \\ 30 \leq d \leq 80 \end{cases}$$

至此可以建立起系统参数优化模型

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{180} \sum_{j=1}^{180} (N_i - num_i)^2 \\ & s. t \begin{cases} 0 \leq \Delta\theta \leq 2^\circ \\ -90^\circ \leq \theta_0 \leq 0 \\ 30 \leq d \leq 80 \\ k = \tan(\theta_0 + i\Delta\theta) \quad i = 1, 2, 3 \dots 179 \\ d = \frac{|(-kx_1 + y_1) - (-kx_2 + y_2)|}{\sqrt{1 + k^2}} \\ x_1 = \frac{-a^2k}{\sqrt{a^2k + b^2}} \\ y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2k + b^2}} \\ x_2 = \frac{a^2k}{\sqrt{a^2k + b^2}} \\ y_2 = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2k + b^2}} \end{cases} \end{aligned}$$

2) 旋转中心相对位置的确定

在 CT 二维图像重建领域，要求平行束扫描的中心射线经过旋转中心且与探测器垂直，其垂足为探测器中点，表现在本题即初始设定的旋转中心为椭圆模板的中心位置。但是由于在实际 CT 系统的安装过程中这些要求很难满足，实际的系统旋转中心会与设定的旋转中心产生一定偏差，这会使重建图像中出现伪影，图像质量下降。

本题 CT 系统的扫描方式是探测系统旋转、物体不动的平行束扫描，相较于物体旋转的扫描模式复杂。容易知道系统设定的旋转中心为椭圆模板的中心，当 CT 系统的重建中心与设计的旋转中心重合时，可以实现精确重建。但实际情况下，探测系统的旋转中心会发生偏移，如下图：

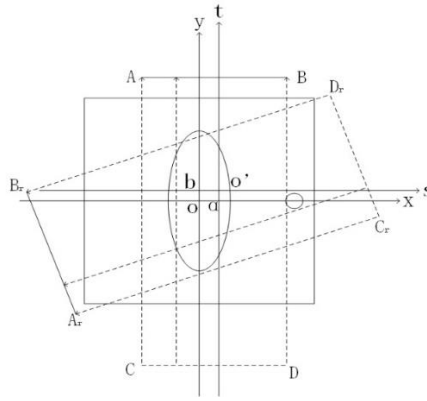


图 5.1.2 旋转中心发生偏移的情况

图中，旋转中心由 O 移到 O' ，在 x 轴方向平移距离为 a ，在 y 轴方向平移距离为 b ，此时探测坐标系为 $sO't$ 。探测器围绕着旋转中心不断变化，但 O' 在重建坐标系 xOy 中的坐标始终为 (a, b) ，且会对投影造成影响的偏移量只有 a 。因此，确定旋转中心偏移量尤为重要。

质心法确定旋转中心

CT重建的数学基础是 Radon 变换^[6]，二维 Radon 变换定义为

$$Rf(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \sigma(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

其中， $f(x, y)$ 为待重建物体函数。如图 5-1-3 所示， $Rf(s, \theta)$ 为视角 θ 时，沿直线 L 的 Radon 变换，即 $f(x, y)$ 沿直线 L 的投影，简记作 $p(s, \theta)$ ， s 为原点 O 到直线 L 的距离。

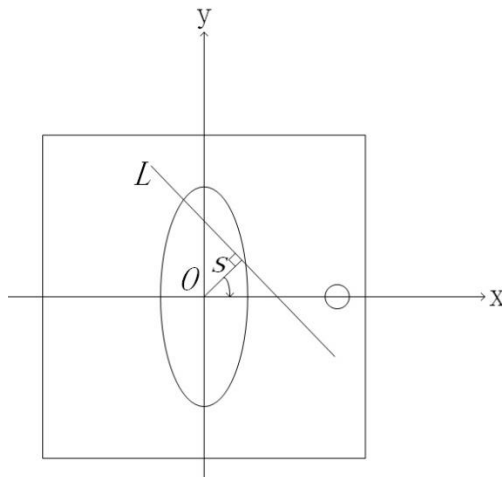


图 5.1.3 二维 Radon 变换图

设物体函数的质心为 $C(\bar{x}, \bar{y})$ ，则有

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}, \bar{y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}$$

令 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = M$ ，对一固定视角 θ ，记 $p(s, \theta)$ 为 $p_{\theta}(s)$ ，则可证 $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(s) ds = M$ ，设 $p_{\theta}(s)$ 的质心点为 C_p ，其在 s 轴上的坐标为 \bar{s}_{θ} ，则有

$$\bar{s}_\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s p_\theta(s) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(s) ds}$$

由于 $p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$, 则

$$\bar{s}_\theta = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s f(s, t) dt ds$$

由于坐标系 sOt 与 xOy 的变换关系为 $s = x \cos \theta + y \sin \theta$, $t = -x \sin \theta + y \cos \theta$ 从而有

$$x = s \cos \theta - t \sin \theta, \quad y = s \sin \theta + t \cos \theta$$

由于雅克比式 $|J(x, y)| = 1$, 则积分变量代换后有

$$\bar{s}_\theta = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) (x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta$$

公式(5)是严格证明出来的, 也可从图 5-1-4 中直观地理解, 即物体质心 C 在探测器上的投影必与投影函数的质心 C_p 重合。

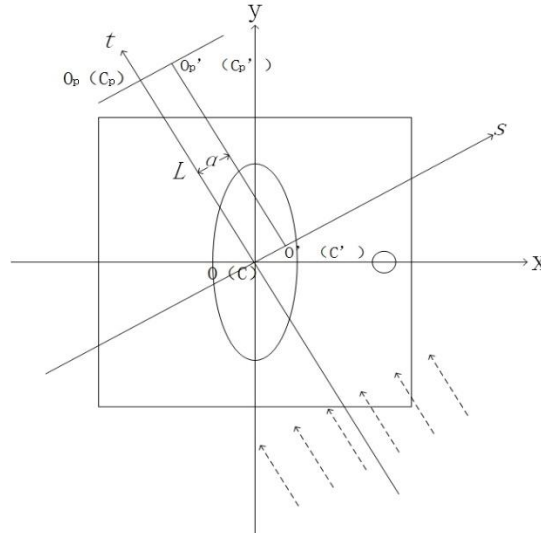


图 5.1.4 质心法几何模型

当旋转中心由 O 偏移到 O' 时, 它们在探测器上的投影分别为 O_p 与 O'_p , 易知 $O_p O'_p = a$ 。旋转中心偏移后所获得的投影数据为 $p'_\theta(s)$, 其质心设为 C_p , 则有 $C_p C'_p = a$ 。这样就将求旋转中心偏移量的问题转化为求固定视角下的投影函数的质心偏移问题。

5.1.2 模型的求解

1) 探测器单元间距离、射线初始方向、旋转步长的确定

- (1) 将建立的参数优化模型用遗传算法进行求解, 优化模型的目标函数即为适应度函数

$$\min \frac{1}{180} \sum_{j=1}^{180} (N_i - num_i)^2$$

- (2) 将探测器单元间距 Δx , 射线初始方向 θ_0 , 单位旋转角度 $\Delta \theta$ 定为待优化的参数, 设置种群大小为 200, 进化代数无穷, 种群初始范围为

$$[[0 - \pi/2 \pi/180]; [10 \ 5 * \pi/6 \pi/180 * 6]]$$

- (3) 设置种群交叉变异概率，为默认值
- (4) 进行遗传选择操作
- (5) 选取适应度最优的一组参数作为参数优化结果。

详细实现代码见附件。

2) 旋转中心的确定

上述模型建立中的公式是在连续条件下推导得到的，而在 CT 系统中获取的投影一般是离散的。问题一中每个视角有 512 个投影，一共有 180 个视角。旋转中心无偏移时的投影为 $p_{\theta_j}(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, 512$; $j = 1, 2, \dots, 180$, 旋转中心有偏移时投影为 $p'_{\theta_j}(s_i)$, 设 $s_i = i$, 则在视角 θ_j 下其质心在 s 轴上的坐标为

$$\bar{s}_{\theta_j}' = \frac{\sum_{i=1}^N i p'_{\theta_j}(i)}{\sum_{i=1}^N p'_{\theta_j}(i)}$$

由图 5.1.4 可以看出

$$\bar{s}_{\theta_j}' - \bar{s}_{\theta_j} = a$$

而

$$\bar{s}_{\theta} = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta$$

则有

$$\bar{x} \cos \theta_j + \bar{y} \sin \theta_j + a = \bar{s}_{\theta_j}'$$

对于不同的 θ_j , 可以得到所获投影质心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 与旋转中心偏移量 a 之间的关系方程, 利用最小二乘法计算可得出旋转中心偏移量和质心坐标。详细实现代码见附件。

5.1.3 模型的检验与分析

找到探测器平行于正方形托盘右边和平行于托盘上边这两个特殊位置, 根据模板的几何形状和吸收情况, 找出正对托盘中心的探测器单元的序号。

首先, 当探测器平行于正方形托盘右边时, 此位置模板接收到信号单元最多, 对附表 2 中 180 组数据进行搜索, 得到第 62 组数据非 0 个数最多且非 0 值相邻, 将这组的位置视为平行于正方形托盘右边。

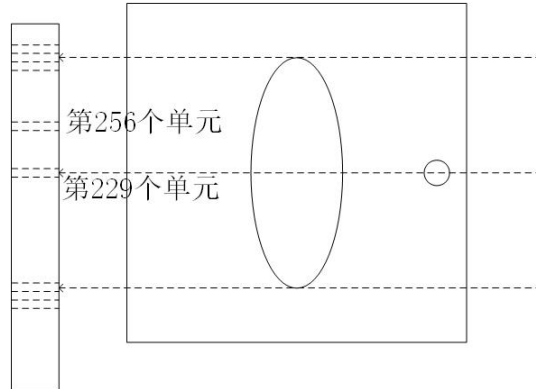


图 5.1.5 探测器平行于托盘右边

从这个方向投影过来的平行光束, 穿过小圆圆心并穿过椭圆圆心的光束被模板吸收的最多, 因此这组数据中最大值对应的探测器单元就是对应于托盘正中的探测器单元, 为第 245 个。

其次, 当探测器平行于正方形托盘上边时, 此位置模板接收到椭圆投影的信号单元最少, 对附表 2 中 180 组数据进行搜索, 得到第 152 组数据符合特征, 将

这组的位置视为平行于正方形托盘上边。

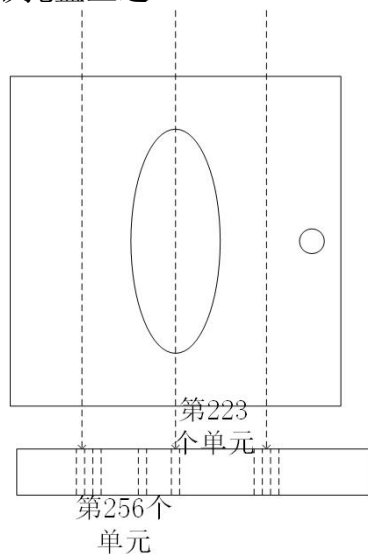


图 5.1.6 探测器平行于托盘上边

从这个方向投影过来的平行光束，穿过椭圆圆心的光束被模板吸收的最多，因此这组数据中最大值对应的探测器单元就是对应于托盘正中的探测器单元，为第 223 个。

探测器最中间的单元是第 256 个单元，它与第 223 个单元之间的距离为

$$(256 - 223) \times 0.2643 = 8.7219mm$$

第 256 个单元与第 229 个单元之间的距离为

$$(256 - 229) \times 0.2643 = 7.1361mm$$

即旋转中心偏离 x 轴 $8.7219mm$ ，偏离 y 轴 $7.1361mm$ 。

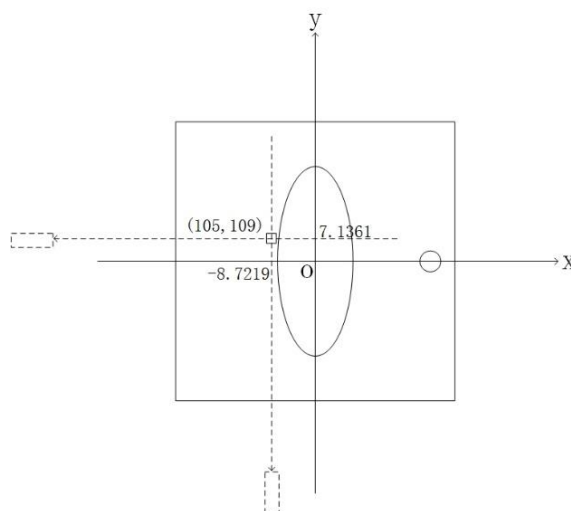


图 5.1.7 由第 256 个单元投影的交点确定旋转中心

经计算，旋转中心所在像素点为 (105,109)，即 xoy 坐标系下的 $(-8.7219, 7.1361)$ 。此方法默认了旋转中心在 CT 系统的中轴线上，即旋转中心正对探测器的第 256 个单元，但实际情况很难做到这一点，因此用质心与其投影质心关系定理计算出的结果更为准确，可验证模型合理。

5.1.4 问题的答案

- (1) CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置是 $(-8.7219, 7.1361)$
- (2) 探测器单元之间的距离为 $0.2643mm$
- (3) 该 CT 系统使用的 X 射线的初始角为 -50.9245° ，逆时针方向旋转，每次的转角为 1.0141° ，180 个方向见附录。

5.1.5 小结

问题一要求确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。首先将投影值不为 0 的探测器个数与实际个数的方差最小设为目标函数，将探测器初始角度、探测器间距、每次转动的角度作为决策变量并以初始角度范围、转动角度范围为约束条件建立参数优化模型。其次通过遗传算法求解出各个系统参数值。再根据质心法求出 CT 系统的旋转中心位置。最后通过选取旋转过程中探测器平行于长短轴的两个特殊位置重新确定旋转中心位置进行检验，结果合理。得到旋转中心位置为 $(-8.7219, 7.1361)$ ，探测器单元间距离为 $0.2643mm$ ，X 射线的初始角为 -50.9245° ，每次的转角为 1.0141° 。

5.2 问题二的模型建立与求解

问题二要求根据标定参数确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息并给出具体 10 个位置的吸收率。考虑首先通过将扫描范围内的投影值沿着原射线路径均匀回抹到待重建图像断层的各个像素采样点上。再将不同角度下的投影值进行线性插值运算并按照对应角度回抹叠加得到重建图像，确定介质的位置与几何形状。最后考虑根据对比重建图像和问题一中椭圆定标模型的灰度值矩阵对比确定介质吸收率以及指定 10 处吸收率。

5.2.1 模型的建立

要确定未知介质在正方形托盘中的位置以及几何形状，可以通过构建像素为 $256 * 256$ 的重建图像解决。这种重建图像中，每个像素点与实际正方形托盘位置一一形成映射，未知介质重建图像在整个重建图像中的位置即对应该介质实际在正方形托盘中的位置，并且重建图像也准确反映该介质的几何形状。

1) 介质位置以及几何形状的确——反投影

反投影^[2]实际上是投影的逆过程，主要通过将扫描范围内的投影值沿着原射线路径均匀回抹到待重建图像断层的各个像素采样点上，再将不同角度下的投影值进行线性插值运算并按照对应角度回抹叠加得到重建图像。

为了进行反投影的操作，需要定义两个坐标系。第一个坐标系为 xoy ，为重建目标的参考坐标平面，同时可以表示重建图像像素矩阵。第二个坐标系为 uov ，它是以 xoy 坐标系为参考的旋转坐标平面，可以表示反投影过程内不同的方向角。容易知道，两个坐标系之间存在以下的关系：

$$\begin{aligned} u &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ v &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

将给出的投影数据用函数 $P(d, \theta)$ 表示，将待重建图像用函数 $I(x, y)$ 表示，在理想的状态下， xoy 坐标系下的待重建图像的像素矩阵中的每一个点的反投影操作可以用连续的积分表示，但是在问题二的条件下，投影的测量不是连续的，得到的投影值是一系列离散的数值。因此，在平行束扫描范围下，射线回抹到对应重建点的值为

$$I(x, y) = \sum_{\theta} P(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \\ \theta \in \{0(\Delta\theta)\pi - \Delta\theta\}$$

由于重建图像的显示内容以及其建像中心在 xoy 坐标系中的位置并不固定，重建图像张红的像素点与它们在 xoy 坐标系中的坐标点应存在相互映射的关系。当建像中心偏离旋转中心为 (x_0, y_0) 的时候，重建图像的像素点对应在 xoy 坐标系中的位置为

$$x_c = \left(-\frac{N_{pix} - 1}{2} + c\right) \Delta pix + x_0 \\ y_r = \left(-\frac{N_{pix} - 1}{2} + r\right) \Delta pix + y_0$$

其中， Δpix 为像素大小

$$\Delta pix = Horizon/M$$

$Horizon$ 为建像视野大小，单位为 mm ， M 为重建图像矩阵大小。

图像的行列分别用 r 和 c 表示，取值范围为

$$r \in \{0(1)N_{pix} - 1\} \\ c \in \{0(1)N_{pix} - 1\}$$

由此， $I(x, y)$ 可以修改为

$$I(c, r) = \sum_{\theta} P(x_c \cos \theta + y_r \sin \theta, \theta)$$

问题二的投影测量中，探测器是由离散的探测器单元组成，这使得投影采样具有离散特性，坐标轴 u 上的每个投影采样点可以表示为：

$$u_m = \left(-\frac{N_s - 1}{2} + m\right) \Delta s \\ m \in \{0(1)N_s - 1\}$$

其中， Δs 为采样间隔， u_m 为每个采样点在反投影的过程中的位置

$$\Delta s = Scan/N_s$$

$Scan$ 为扫描视野的大小， N_s 表示一次投影观测的采样点总数量

因此，投影的数据可以重新表示为 $P(u_m, \theta)$ 。

在反投影的过程中，对于出现的预重建图像像素点在 uov 平面下的坐标与投影采样线 u_m 不完全吻合的问题，采用线性插值法解决。通过插值的方法将投影值分配到与投影采样线不是绝对相交的像素上，可以直接计算出重建图像的像素中心位置处的投影的采样值，从而使得在反投影的过程中像素点与反投影回抹线吻合。可表示为

$$I(c, r) = \sum_{\theta} \Lambda(x_c \cos \theta + y_r \sin \theta, \theta)$$

其中，函数 $\Lambda(x_c \cos \theta + y_r \sin \theta, \theta)$ 对投影数据进行了线性插值，插值后的投影值可以表示为

$$P_{int} = P(u_1, \theta)(u_2 - x_c \cos \theta + y_r \sin \theta) + P(u_2, \theta)(x_c \cos \theta + y_r \sin \theta - u_1)$$

最后将不同角度下的投影值按照角度一一回抹，即可完成图像重建。完成图像重建工作后即可根据图像确定介质在正方形托盘中的位置、几何形状。

2) 介质吸收率的确定

介质的吸收率可以通过重建出的图像确定。重建图像中的每一个像素实际上是其在不同角度下的投影值的叠加，而所谓投影值即为如下等式左边部分

$$-\ln \frac{I}{I_0} = \int \mu_l(L) dL$$

其中， I 为射线穿过介质后的强度， I_0 为射线初始强度， $\mu_l(L)$ 为介质的衰减系数即介质吸收率。

可以知道投影值在很大程度上反映了介质的吸收率，因而根据投影值叠加构成的重建图像也可以反映介质的吸收率，其反映的形式具体表现为重建图像的像素灰度值。

重建图像的灰度值矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

其中， a_{ij} 的取值范围为[0,255]

而由附件一可知，椭圆模板的吸收率为 1，而椭圆模板的重建图像灰度值矩阵 B 也可知

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{ij} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix}$$

将未知介质的灰度值矩阵进行归一化处理

$$\widetilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_{ij}}$$

求得的归一化矩阵即为吸收率矩阵。

5.2.2 模型的求解

1) 介质位置以及几何形状的确定

首先通过将扫描范围内的投影值沿着原射线路径均匀回抹到待重建图像断层的各个像素采样点上。再将不同角度下的投影值进行线性插值运算并按照对应角度回抹叠加得到重建图像，再对重建图像进行边沿提取即可看出介质的几何形状，具体实现代码见附件，结果如下图

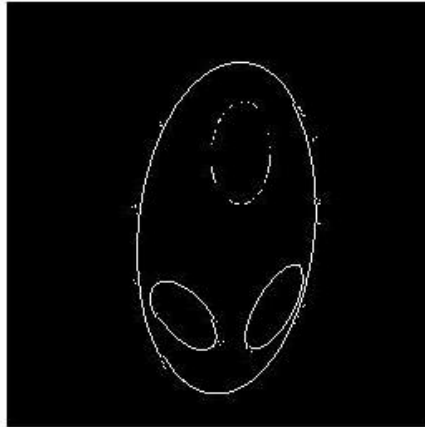


图 5.2.1 重建图像几何形状

作出该介质平行于上下左右边沿的四条切线，通过求四次两平行线之间的距离求出该介质距离各个边沿的距离，从而确定介质在正方形托盘中的位置。

2) 介质吸收率的确定

通过对重建图像的灰度值矩阵 A 进行归一化，求得该介质的吸收率，结果见

problem2.xls。

得到整个重建图像各个像素的吸收率后,从中数据文件中可以找到指定 10 个位置的吸收率值。

5.2.3 模型的检验与分析

运用反投影模型对附件 2 中数据进行重建,将 CT 系统 180 个方向的观测值沿原射线路径均匀回抹至各个像素点上,再将各个反投影角度下的回抹值叠加,获得了被扫描物的基本轮廓,如下

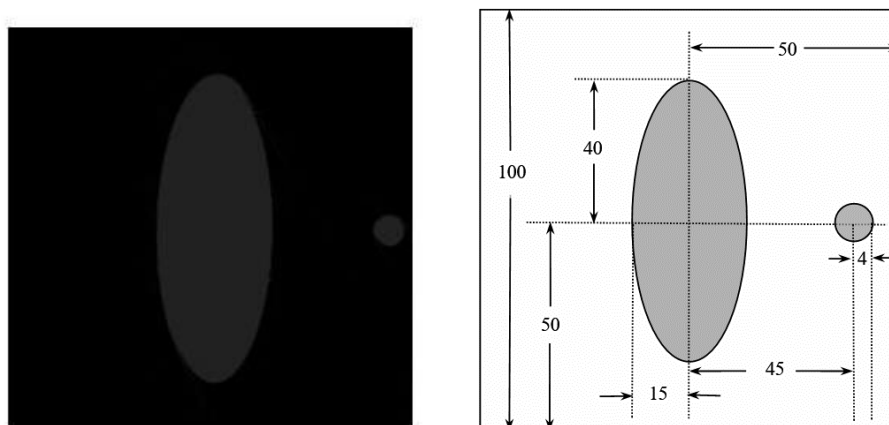


图 5.2.2 附表 2 数据重建模板以及实际模板

对比重建的物体形状和真实形状,发现利用反投影法重建模板得到的形状很附和实际形状,即对模板形状的还原度较高。再将图像分割为像素 256×256 ,根据椭圆占像素点的个数,计算出椭圆的宽为 28.1251 mm ;

椭圆的高为 75.7812 mm ;

椭圆距离托盘左边界的长度为 37.1093 mm ;

椭圆距离托盘上边界的长度为 12.1094 mm ;

将问题二模型求解出的模板位置、几何尺寸与实际情况作对比,如下

表 5.2.1 利用问题二模型求解的值与实际值对比

	利用问题二模型求解值	实际值
椭圆宽度/mm	28.1251	30
椭圆高度/mm	75.7812	80
椭圆距离左边界长度/mm	37.1093	35
椭圆距离上边界长度/mm	12.1094	10

利用问题二的模型,求解椭圆的几何尺寸和位置与实际值接近,证明反投影重建模型合理。存在 5 mm 之内的误差,这可能是由于旋转中心位置或初始角度值不准确造成的。因此,利用反投影重建模型求解模板的位置,旋转中心位置、初始角度值对结果影响较大。可以通过以下两种方法改进:

- (1) 将准确度更高的旋转中心位置、初始角度值代入计算。
- (2) 将已知位置信息的模板代入计算,利用当前旋转中心位置、初始角度画出重建图像,将重建图像和实际图像进行比对,不断调整参数使得重建图像接近实际图像,就能得到比较优的参数。将优的参数值代入反投影重建模型,就能得到很接近实际情况的模板形状和位置。

5.2.4 问题的答案

- (1) 介质在正方形托盘顶端 $14.8438mm$ ，距离托盘左边界 $31.2500mm$ 。
- (2) 几何形状如下，宽为 $41.4062mm$ ，高为 $77.3437mm$ 。

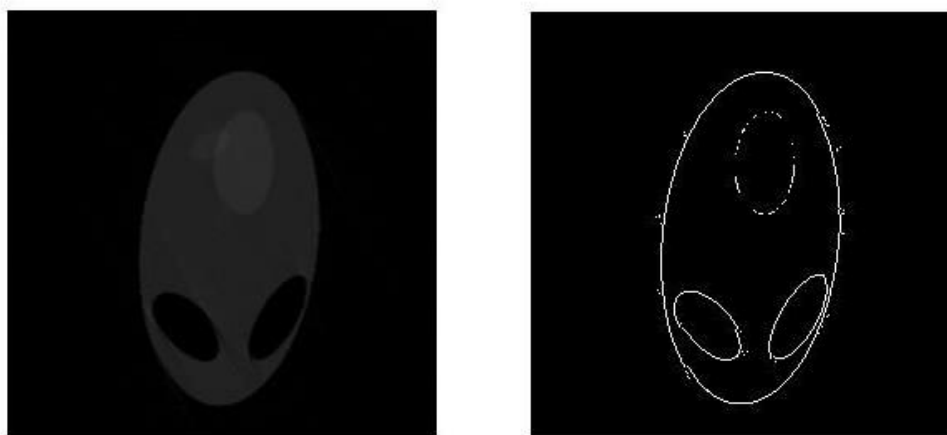


图 5.2.3 附件 3 复原图以及边沿提取图

- (3) 每个像素点吸收率见文件 problem2.xls。
- (4) 10 个位置的吸收率如下

表 5.2.2 10 个位置的吸收率

点的位置	点所在像素的位置	吸收率
(10,18)	(26,47)	0.0000
(34.5,25)	(89,64)	0.0000
(43.5,33)	(112,85)	1.0730
(45,75.5)	(116,194)	1.0156
(48.5,55.5)	(125,143)	0.9886
(50,75.5)	(128,194)	1.0090
(56,76.5)	(144,196)	1.0531
(65.5,37)	(168,95)	0.0000
(79.5,18)	(204,47)	0.0000
(98.5,43.5)	(253,112)	0.0000

5.2.5 小结

问题二要求根据标定参数确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息并给出具体 10 个位置的吸收率。首先通过将扫描范围内的投影值沿着原射线路径均匀回抹到待重建图像断层的各个像素采样点上。再将不同角度下的投影值进行线性插值运算并按照对应角度回抹叠加得到重建图像，确定介质的位置与几何形状。最后将模型应用于附件 2，将重建图像与实际物体对比，发现吻合度高，模型合理。

5.3 问题三的模型建立与求解

问题三要求根据标定参数给出位置介质的相关信息以及指定的 10 处吸收率。首先对扫描数据进行快速傅里叶变换，其次将变换结果与卷积函数相乘后进行快

速傅里叶反变换，再对处理后的数据进行反投影操作完成图像重建。

5.3.1 模型的建立

问题三相较于问题二，介质的几何形状更为复杂，单纯的进行直接反投影并不能逼真的重现出介质信息，只能得到一个模糊的重建图像，不利于介质几何形状以及吸收率的确定。

这主要是由于当利用直接反投影法重现一点时，各个角度下投影强度的回抹会使重建的圆点中心像素值较周围其他像素值被过多加强，这就会导致重建图出现边缘模糊，中心发亮的问题。为了解决这个问题，需要对问题二模型进行改进，建立起滤波反投影^{[7][8]}模型。滤波的过程是指首先对投影值数据进行快速傅里叶变换，再将变换得出的结果与卷积函数相乘，之后再快速傅里叶反变换，得到经过滤波处理后的投影值数据。

由信号与系统知识可知，正反傅里叶变换具有对称性。因此，图像 $I(x, y)$ 可由其对应的频域函数的二维傅里叶反变换得到

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i*2\pi\omega(ux+v)} du dv$$

其中， $F(u, v)$ 为 $I(x, y)$ 对应的傅里叶域函数。在傅里叶域中笛卡尔坐标系 (u, v) 与极坐标系 (ω, θ) 间存在转换关系

$$\begin{aligned} u &= \omega \cos \theta \\ v &= \omega \sin \theta \end{aligned}$$

上述二维傅里叶变换关系又可以表示为

$$du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \omega} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\omega d\theta = \omega d\omega d\theta$$

因此，图像 $I(x, y)$ 又可以写为

$$I(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) e^{i*2\pi\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)} \omega d\omega d\theta$$

由于是平行束投影问题， $0 - 180^\circ$ 和 $180^\circ - 360^\circ$ 投影方向的观测路径一致，但是方向相反，故存在关系

$$P(\omega, \theta + \pi) = p(-\omega, \theta)$$

因此 $F(\omega, \theta)$ 可以用投影数据的傅里叶变换 $p(\omega, \theta)$ 代替， $I(x, y)$ 又可以写为

$$I(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)} d\omega$$

其中， $|\omega|$ 为滤波核，CT 图像重建过程中，滤波核的选取至关重要，不同的滤波核在重建图像的噪声、分辨率以及观察者视觉感受方面都存在差异。

选定 $|\omega|$ 后，求解 $I(x, y)$ 首先要对投影值数据进行快速傅里叶变换，再将变换得出的结果与卷积函数相乘，之后再快速傅里叶反变换，得到经过滤波处理后的投影值数据后进行直接反投影操作，模型至此与问题二模型类似，不再赘述，最终得到重建图像。

5.3.2 模型的求解

首先，将附件 5 中给出的投影值数据进行快速傅里叶变换；

其次，选取合适的滤波核 $|\omega|$ ，即频域函数，通过不断调试，决定选取 $ram - lak$ 作为滤波核；

再次，将 FFT 变换结果与滤波核 $|\omega|$ 的乘积做一次反傅里叶变换；
最后，执行直接反投影操作，求出重建图像，对其进行边沿提取，确定介质的几何形状。吸收率的求解方法与问题二相同，不再赘述。

具体实现代码见附件。

5.3.3 问题的答案

(1) 介质的形状如下

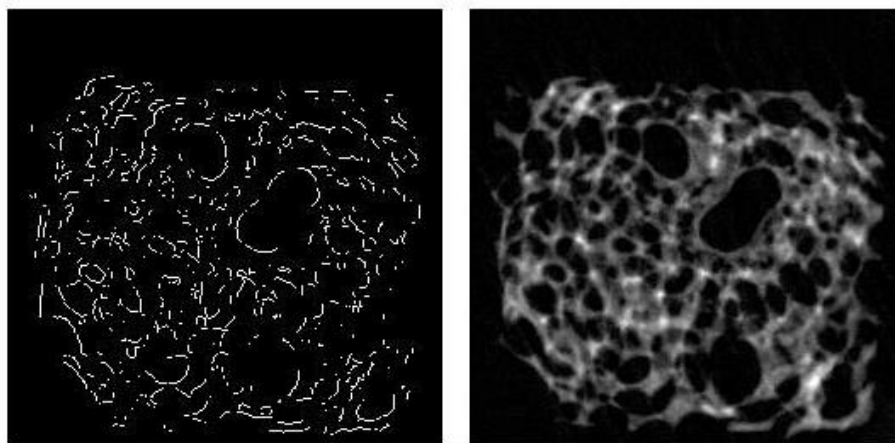


图 5.3.1 介质的形状复原图及边沿提取图

(2) 介质各像素点的吸收率见文件 problem3.xls。

(3) 10 个位置的吸收率如下

表 5.3.1 10 个位置的吸收率

点的位置	点所在像素的位置	吸收率
(10,18)	(26,47)	0.0000
(34.5,25)	(89,64)	0.0000
(43.5,33)	(112,85)	5.0396
(45,75.5)	(116,194)	0.1653
(48.5,55.5)	(125,143)	4.1326
(50,75.5)	(128,194)	2.1069
(56,76.5)	(144,196)	1.4883
(65.5,37)	(168,95)	0.0000
(79.5,18)	(204,47)	0.0000
(98.5,43.5)	(253,112)	0.0000

5.3.4 小结

问题三要求根据标定参数给出位置介质的相关信息以及指定的 10 处吸收率。首先对扫描数据进行快速傅里叶变换，其次将变换结果与卷积函数相乘后进行快速傅里叶反变换，再对处理后的数据进行反投影操作完成图像重建。

5.4 问题四的模型建立与求解

问题四要求分析(1)中参数标定的精度和稳定性，并自行设计新模板、建立对应标定模型，改进参数标定的精度和稳定性。首先将椭圆模板的重建图像与实际模板对比，通过误差百分比来反映图像重建质量，间接反映参数标定精度。其次通过计算机仿真出 shepp-Logan 头的投影值，分别在考虑旋转中心偏移和不考虑的情况下进行图像重建，比较两种情况下重建图的还原程度，反应偏移量参数精度，且多次还原不同介质均成功，可知参数标定具有稳定性。再考虑到椭圆模板

下旋转 180 个角度获取的投影值不完整，会对参数标定的精度造成一定影响，决定采用两个直径为 10 毫米的圆形作为新模板，可以获取完整周期的投影值，再建立基于遗传算法的参数优化模型。

5.4.1 模型的建立

1) 参数标定的精度和稳定性分析

参数标定对最后重建图像的影响很大，因此参数标定的精度可以通过重建图像的质量反应。

可以利用附件 2 中的投影值数据对椭圆定标模板进行图像重建，重建图像素为 256*256。对重建图像进行边沿提取，分别求出其最上端到托盘上边沿距离 x'_1 、最下端到托盘上边沿距离 x'_2 、最左端到托盘左边沿距离 x'_3 和最右端到托盘右边沿的距离 x'_4 ，分别与实际模板与各边沿的距离进行对比，求误差百分比 Δx_i

$$\Delta x_i = \frac{|x'_i - x_i|}{x_i} \times 100\%$$

通过误差百分比来反映图像重建质量，间接反映参数标定精度。对比结果如下表：

表 5.4.1 各距离对比

	利用问题二模型求解值	实际值	误差百分比
椭圆宽度/mm	28.1251	30	6.25%
椭圆高度/mm	75.7812	80	5.27%
椭圆距离左边界长度/mm	37.1093	35	6.03%
椭圆距离上边界长度/mm	12.1094	10	2.11%

重建图像与实际位置的误差百分比较小，图像重建质量高，参数标定精度高。

另外，可以通过 $phantom$ 函数仿真出 180 组 $shepp - Logan$ 头的投影值数据，分别在考虑旋转中心偏移和不考虑的情况下进行图像重建。可以发现考虑偏移量的重建图还原度高，也说明偏移量参数精度高。

问题一中定标的参数在问题二、三以及 $shepp - Logan$ 头重建中均有运用，重建图像还原度很高，且均成功，在一定程度上说明了参数标定的稳定性。

2) 新模板和标定模型

虽然通过原椭圆模板定标，参数精度已达到较高水平，但是相比于实际模板还是存在差距，应是仍存在问题。考虑到椭圆模板下旋转 180 个角度获取的投影值不完整，未达一个变化周期，会对参数标定的精度造成一定影响，决定采用两个直径为 10 毫米的圆形作为新模板。新模板在 180 个旋转角度下，投影值会呈现出周期性变化，这会为后来的参数定标提供充足的数据。

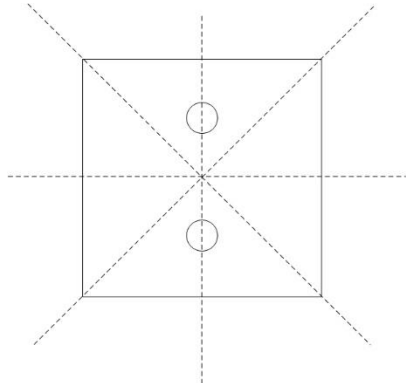


图 5.4.1 新型模板

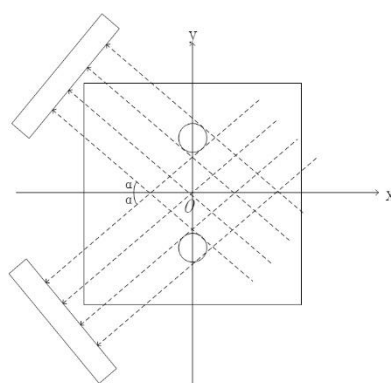


图 5.4.2 探测器对称时的情况

标定模型方面，与椭圆模板类似，假设探测器每次转动的角度为定值，同样将投影值不为 0 的探测器个数 M_i 与实际个数 num_i 的方差最小设为目标函数，用以衡量预测值与实际值的差距

$$\min \frac{1}{180} \sum_{j=1}^{180} (M_i - num_i)^2$$

将探测器初始角度 α_0 、探测器间距 Δx 、每次转动的角度 $\Delta\alpha$ 作为决策变量，即待优化的参数并以初始角度范围、转动角度范围为约束条件

$$\text{s.t} \begin{cases} \alpha_i = \alpha_0 + (i-1)\Delta\alpha \\ M_i = |\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_i)| * 2a\Delta x \\ 0 < \Delta\alpha \leq \frac{5\pi}{180} \\ 0 < \alpha_0 < 2\pi \\ 0 < \Delta x \leq 5 \end{cases}$$

至此建立起系统参数优化模型，可以通过遗传算法进行参数优化，求出最优解即为探测器初始角度 α_0 、探测器间距 Δx 、每次转动的角度 $\Delta\alpha$ 。

5.4.2 问题的答案

(1) 利用滤波反投影模型，重建出的旋转中心位于正方形托盘的几何中心时图像、重建问题一求解出的含系统参数的图像如下

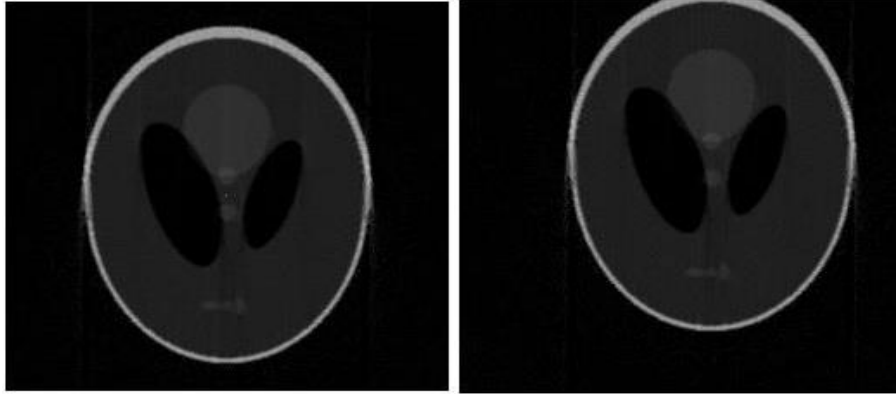


图 5.4.3 校正前后的图像

由上图可以看出，利用参数重建的模板图像分辨率更高，且尺寸与真实尺寸吻合度较高。因此，问题一中标定参数的精度较高且稳定性较好。

(2) 设计的模板形状及几何尺寸如下

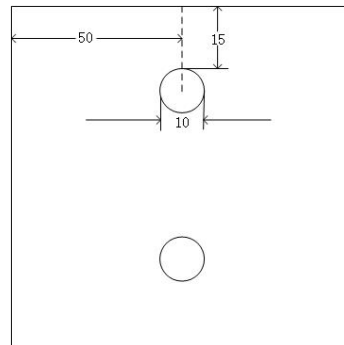


图 5.4.4 设计的模板形状及其几何尺寸

5.4.3 小结

问题四要求分析(1)中参数标定的精度和稳定性,并自行设计新模板、建立对应标定模型,改进参数标定的精度和稳定性。首先将椭圆模板的重建图像与实际模板对比,得重建图像位置的误差百分小,参数精度较高。其次通过 phantom 函数仿真出 shepp-Logan 头的投影值,分别在考虑旋转中心偏移和不考虑的情况下进行图像重建,得代入偏移量的重建图还原度高,偏移量参数精度也较高,且多次还原不同介质均成功,可知参数标定具有稳定性。再考虑到椭圆模板下旋转 180 个角度获取的投影值不完整,会对参数标定的精度造成一定影响,决定采用两个直径为 10 毫米的圆形作为新模板,可以获取完整周期的投影值,再建立基于遗传算法的参数优化模型。

六、 模型的评价与改进

优点:

1. 解决问题一时,根据物体空间质心与投影空间的质心的对应关系定理,利用部分视角的投影就能对旋转中心进行快速定位,需要的数据量比传统方法少。
2. 解决问题三时,滤波反投影法有效解决了重建模板的几何边缘模糊问题,这种方法比传统迭代算法速度更快,得到的重建图像质量较高。

缺点:

1. 解决问题一时,利用初始角和每次的转角对 CT 系统的 180 个方向进行描述,若求解的转角度数不够准确,当累加转角次数越来越多时,与实际方向将产生较明显误差。
2. 解决问题二时,反投影法得到模板的形状边缘模糊,只适用于简单几何形状模板的重建,不适用于形状较复杂的模板形状重建。

参考文献

- [1] 李增云,吕东辉. 利用部分投影的二维 CT 旋转中心偏移快速校正[J]. CT 理论与应用研究, 2015, 24(04):533-543.
- [2] 张学松. CT 图像射束硬化伪影校正方法研究[D].沈阳工业大学,2017.
- [3] 孟凡勇,李忠传,杨民,等. 基于投影原始数据的 CT 旋转中心精确确定方法[C]// 中国体视学与图像分析学术会议. 2013.
- [4] 李保磊,张耀军. 基于对称投影的 2D-CT 系统投影旋转中心自动确定方法[C]// 2009 全国射线数字成像与 CT 新技术研讨会. 2009.
- [5] 孟凡勇,李忠传,杨民,等. CT 旋转中心的精确确定方法[J]. 中国体视学与图像分析, 2013(04):336-341.
- [6] 郭立倩. CT 系统标定与有限角度 CT 重建方法的研究[D]. 大连理工大学, 2016.
- [7] 王志伟,于强,舒春梅,谭润初,贺奇才. 计算机模拟 CT 滤波反投影重建的方法[J]. 中国医学物理学杂志,2010,27(02):1737-1740.
- [8] 马继明,张建奇,宋顾周,王群书,韩长材,段宝军. 全变分约束迭代滤波反投影 CT 重建[J]. 光学学报,2015,35(02):392-398.

附录

代码一

GA.m

```
function [X,FVAL,REASON,OUTPUT,POPULATION,SCORES] = GA
%适应度函数
fitnessFunction = @fitness1;
%变量数
nvars =3;
%从默认选项开始
options = gaoptimset;
%修改一些参数
% options = gaoptimset(options,'PopInitRange' ,[[0 pi/18 pi/18*2 pi/18*3 pi/18*4
pi/18*5 pi/18*6 pi/18*7 pi/18*8 pi/18*9]/5;[0 pi/18 pi/18*2 pi/18*3 pi/18*4 pi/18*5
pi/18*6 pi/18*7 pi/18*8 pi/18*9]/3]);
options = gaoptimset(options,'PopInitRange' ,[[0 -pi/3 pi/180];[10 2*pi/3
pi/180*10]]);
options = gaoptimset(options,'PopulationSize' ,80);
options = gaoptimset(options,'Generations' ,500);
options = gaoptimset(options,'StallTimeLimit' ,Inf);
options = gaoptimset(options,'MutationFcn' ,{ @mutationgaussian 11 });
options = gaoptimset(options,'Display' , 'off');
options = gaoptimset(options,'PlotFcns' ,{ @gaplotbestf});
%%Run GA
[X,FVAL,REASON,OUTPUT,POPULATION,SCORES] =
ga(fitnessFunction,nvars,options);
fprintf('起始角度:%f\n角度步长:%f\n',rad2deg(X(2)),rad2deg(X(3)));
```

Fitness1.m

```
function [ h ] = fitness1( arg )
%% arg(1)=delta_x arg(2)=theta0 arg(3)=delata_theta
syms x y
a = 15;
b = 40;
num = load('num.txt');
h = 0;
X = zeros(2,1);
Y = zeros(2,1);
if arg(2) < -pi/2 || arg(2) > 2*pi/3 || arg(3)<0 || arg(3)>pi/180*10
    h = Inf;
else
    for i=1:180
        k = tan( arg(2) + arg(3)*(i-1));
        X(1) = -a^2*k*(1/(a^2*k^2 + b^2))^(1/2);
        X(2) = a^2*k*(1/(a^2*k^2 + b^2))^(1/2);
        Y(1) = b^2*(1/(a^2*k^2 + b^2))^(1/2);
```

```

        Y(2)=-b^2*(1/(a^2*k^2 + b^2))^(1/2);
        d = abs( (k*X(1)-Y(1)) - (k*X(2)-Y(2)) ) / sqrt( 1+k^2 );
        h = h+( d/arg(1)-num(i) )^2;
    end
    h = h/180;
end
% arg(1)=b arg(2)=delta_x arg(3)=theta0 arg(4)=delata_theta
end

```

代码二

Filterfun.m

```

function p = Filterfun(p_in,filter, len, d)
%% p_in: 图片大小    filter: 滤波函数    len: 需要构建的图片的大小
d: 0--1之间低于奈奎斯特采样率的成分将忽略

order = max(64,2^nextpow2(2*len));

if strcmpi(filter, 'none')
    filt = ones(1, order);
    return;
end

n = 0:(order/2); % 'order' is always even.
filtImpResp = zeros(1,(order/2)+1); % 'filtImpResp' is the bandlimited ramp's impulse
response (values for even n are 0)
filtImpResp(1) = 1/4; % Set the DC term
filtImpResp(2:2:end) = -1./((pi*n(2:2:end)).^2); % Set the values for odd n
filtImpResp = [filtImpResp filtImpResp(end-1:-1:2)];
filt = 2*real(fft(filtImpResp));
filt = filt(1:(order/2)+1);

w = 2*pi*(0:size(filt,2)-1)/order;    % frequency axis up to Nyquist

switch filter
    case 'ram-lak'
        % Do nothing
    case 'shepp-logan'
        % be careful not to divide by 0:
        filt(2:end) = filt(2:end) .* (sin(w(2:end)/(2*d))./(w(2:end)/(2*d)));
    case 'cosine'
        filt(2:end) = filt(2:end) .* cos(w(2:end)/(2*d));
    case 'hamming'
        filt(2:end) = filt(2:end) .* (.54 + .46 * cos(w(2:end)/d));
    case 'hann'
        filt(2:end) = filt(2:end) .* (1+cos(w(2:end)/d)) / 2;
    otherwise
        error(message('images:iradon:invalidFilter'))
end

```

```

filt(w>pi*d) = 0; % Crop the frequency response
filt = [filt' ; filt(end-1:-1:2)']; % Symmetry of the filter
p_in(length(filt),1)=0; % Zero pad projections

```

```

p_in = fft(p_in); % p holds fft of projections

```

```

p_in = bsxfun(@times, p_in, filt); % faster than for-loop

```

```

p_in = ifft(p_in,'symmetric'); % p is the filtered projections

```

```

p_in(len+1:end,:) = []; % Truncate the filtered projections
p = p_in;

```

chongjian.m

```

clear
close all
% f2 = load('fu3.txt'); %% 载入附件
load I;
f2 = I;
clear I;
f2 = Filterfun(f2,'ram-lak', 512, 1);
% angle = zeros(180,1);
% for i=1:length(angle)
%     angle(i) = deg2rad( 80+39+(i-1));
% end

```

```

angle = zeros(180,1);
for i=1:length(angle)
    angle(i) = deg2rad( 80+(i-1));
end

```

```

x0 = 5.7219;
y0 = 7.1361;
Npix = 256;
Ns = 512;
L = 100;
pix = L / Npix;
delta_x = 0.2643;
Um = zeros(Ns,1);
center = 255;
for i=1:Ns
    Um(i) = (i-center)*delta_x;
end
maxM = max(Um);
minM = min(Um);
L = zeros(Npix);
xc = ( (1:Npix)-Npix/2 ) * pix + x0;

```



```

yr = ( (1:Npix)-Npix/2 ) * pix + y0;
for c=1:Npix
    for r=1:Npix
        for j=1:180
            theta = angle(j);
            U0 = xc(c)*cos(theta) + yr(r)*sin(theta);
            if U0 > maxM || U0 < minM
                L(c,r) = L(c,r) + 0;
            else
                index = find(Um == U0);
                if isempty(index)
                    in1 = find(Um < U0, 1, 'last'); % small
                    in2 = find(Um > U0, 1); % big
                    L(c,r) = L(c,r) + f2(in2,j) * (Um(in2) - U0)
                + f2(in1,j) * (U0 - Um(in1));
            else
                L(c,r) = L(c,r) + f2(index(1),j);
            end
        end
    end
end
end
img = L * pi / (2 * length(angle));
imshow(img)

```

代码三

```

b = load('fu2.txt');
%% 计算附件2接收端数据非0端口的个数
% num = zeros(180,1);
% for i=1:180
%     num(i) = length( find(b(:,i)>0) );
% end
% save 'num.txt' -ascii num;
%%
% M = 0;
% index = 1;
% for i=1:180
%     t = length( find(b(:,i)) > 0 );
%     if t > M;
%         index = i;
%         M = t;
%     end
% end
% fprintf('接受端最多的组:%d\n', index);
% r = find( b(:,index) == max(b(:,index)) );
% fprintf('中心对应的接受端的序号:%d\n', r);

%%
% M = max( max(b) );

```

```
% [r,~] = find(b==M);
%
% % fprintf('接受端最多的组:%d\n',index);
% % r = find( b(:,index)== max(b(:,index)) );
% fprintf('中心对应的接受端的序号:%d\n',r);
```

```
%% 画出接收端中部吸收强度分布规律
```

```
% x=1:180;
% figure
% hold on
% bottom = 220;
% top = 260;
% plot(x,b(bottom:top,:), 'k');
% for i=bottom:top
%     plot(x,b(i,:), 'k. ');
% end
```

```
%% 答案 0.2643 -0.9065 0.0177
```

```
delta_x = 0.2643 ;
zhongxinju = delta_x*(256-245)
theta0 = -0.9065;
delta_theta = 0.0177; %%弧度
delta_theta = rad2deg(delta_theta); %%角度
theta0 = rad2deg(theta0 );
result = zeros(180,1);
for i=1:180
    result(i) = theta0 + i*delta_theta;
end
save 'q1_result_angle.txt' -ascii result;
```

代码四

```
%% 求解问题二的几何信息
clc
clear
img2 = load('fuyuan.txt'); %%加载附件二的复原图像信息
% load img2;
% % img2 = img;
load img3;
img3 = img; %%加载附件三的复原图像信息
clear img;
```

```
img = img2;
%%img = img3;
img( img<0.099 )=0;
% img3( img3<0.1 )=0;
info = zeros(4,1); %% top bottom left right
[m,n] = size(img);
```

```

flag = 1;
for i=1:m
    if flag && ~isempty( find(img( i,: ))>0 )
        info(1) = i;
        flag = 0;
    end
    if ~flag && isempty( find( img(i,:) )>0 )
        info(2) = i-1;
        break;
    end
end
flag = 1;
for i=1:n
    if flag && ~isempty( find(img( :,i ))>0 )
        info(3) = i;
        flag = 0;
    end
    if ~flag && isempty( find( img(:,i) )>0 )
        info(4) = i-1;
        break;
    end
end
info = info * 100/256;
info(2) = 100-info(2);
info(4) = 100 - info(4);
fprintf('距离顶端，下端，左端，右端的距离分别为:%s\n',mat2str(info));

%% 求解吸收率
% load img5;
% img5 = img;
% clear img;

%% 求解 problem2.xls    problem3.xls
% f1 = load('fu1.txt');
% problem2 =abs( img3./img2.*f1 );
% problem3 = abs( img5./img2.*f1 );
% xlswrite('problem2.xls',problem2);
% xlswrite('problem3.xls',problem3);
%%
% place = load('fu4.txt');
% m = size(place,1);
% result = zeros(m,1);
% for i=1:m
%     c = ceil( place(i,1)/100*256 );
%     r = 256 - ceil( place(i,2)/100*256 );
%     result(i) = img3(r,c)/img2(r,c)*f1(r,c); %第二问的吸收率
%     result(i) = img5(r,c)/img2(r,c)*f1(r,c); %第三问的吸收率
% end
% fprintf('各点的吸收率:%s\n',mat2str(result));

```

问题一仪器的 180 个方向:

-50.9245	-5.2884	40.3477	85.9838
-49.9104	-4.2743	41.3618	86.9979
-48.8962	-3.2601	42.3760	88.0120
-47.8821	-2.2460	43.3901	89.0262
-46.8679	-1.2319	44.4042	90.0403
-45.8538	-0.2177	45.4184	91.0545
-44.8397	0.7964	46.4325	92.0686
-43.8255	1.8105	47.4466	93.0827
-42.8114	2.8247	48.4608	94.0969
-41.7973	3.8388	49.4749	95.1110
-40.7831	4.8530	50.4890	96.1251
-39.7690	5.8671	51.5032	97.1393
-38.7549	6.8812	52.5173	98.1534
-37.7407	7.8954	53.5314	99.1675
-36.7266	8.9095	54.5456	100.1817
-35.7125	9.9236	55.5597	101.1958
-34.6983	10.9378	56.5739	102.2099
-33.6842	11.9519	57.5880	103.2241
-32.6701	12.9660	58.6021	104.2382
-31.6559	13.9802	59.6163	105.2524
-30.6418	14.9943	60.6304	106.2665
-29.6276	16.0084	61.6445	107.2806
-28.6135	17.0226	62.6587	108.2948
-27.5994	18.0367	63.6728	109.3089
-26.5852	19.0508	64.6869	110.3230
-25.5711	20.0650	65.7011	111.3372
-24.5570	21.0791	66.7152	112.3513
-23.5428	22.0933	67.7293	113.3654
-22.5287	23.1074	68.7435	114.3796
-21.5146	24.1215	69.7576	115.3937
-20.5004	25.1357	70.7717	116.4078
-19.4863	26.1498	71.7859	117.4220
-18.4722	27.1639	72.8000	118.4361
-17.4580	28.1781	73.8142	119.4502
-16.4439	29.1922	74.8283	120.4644
-15.4298	30.2063	75.8424	121.4785
-14.4156	31.2205	76.8566	122.4927
-13.4015	32.2346	77.8707	123.5068
-12.3873	33.2487	78.8848	124.5209
-11.3732	34.2629	79.8990	125.5351
-10.3591	35.2770	80.9131	126.5492
-9.3449	36.2911	81.9272	127.5633
-8.3308	37.3053	82.9414	128.5775
-7.3167	38.3194	83.9555	129.5916
-6.3025	39.3336	84.9696	130.6057