

太阳影子定位

摘 要

本文针对太阳影子定位问题进行了深入的研究,利用二次曲线拟合、三角函数法、遗传算法、视频图像处理,建立了“立竿见影”模型、基于太阳高度角的二次曲线拟合模型以及基于遗传算法的定时定位模型,并对得到的拟合回归方程进行 F 检验,以验证方程的正确性和模型的可靠性。

针对问题一,建立了“立竿见影”模型,求出影子长度关于观测点的经纬度、日期和时间的关系表达式。运用三角函数法,得到了 3 米高直杆在北纬 $39^{\circ}54'26''$,东经 $116^{\circ}23'29''$ 9:00-15:00 的太阳影子长度变化曲线,其影长范围在 $[3.6668, 6.7246]$,曲线变化符合太阳照射物体形成影子的变化规律。模型合理简单,很好地解决了问题。

针对问题二,利用了二次曲线拟合和正午太阳高度角关系,建立基于正午太阳高度角的二次曲线拟合模型,并且利用 F 检验对所拟合的结果进行分析检验,得到拟合效果很好。最终得出了观测点所在的地点可能为北纬 $21^{\circ}14'42''$,东经 $109^{\circ}30'01''$ 和北纬 $20^{\circ}39'01''$,东经 $109^{\circ}30'01''$ 。

针对问题三,利用遗传算法,以实际影长与预测影长之间的接近度为目标函数,建立基于遗传算法的定位定时模型,对附件 2 处理得到观测点的日期可能分别为 1 月 18 日,地点为北纬 $43^{\circ}22'19''$,东经 $87^{\circ}16'29''$ 和日期为 1 月 27 日,地点为北纬 $52^{\circ}49'20''$,东经 $86^{\circ}49'15''$ 。对附件 3 处理得到观测点的日期可能为 8 月 22 日,地点为北纬 $24^{\circ}36'16''$,东经 $108^{\circ}31'20''$ 和日期为 8 月 20 日,地点为北纬 $55^{\circ}16'36''$,东经 $109^{\circ}02'30''$ 。最后利用问题二的模型对问题三的模式进行检验分析,可知两者相似度很高,说明模型的正确性。

针对问题四,通过相应的代码程序,读入视频数据,可得视频每隔 1000 帧的图像,对图像进行处理得到坐标数据以及影子长度。利用基于太阳高度角的二次曲线模型解决了已知日期和影长求拍摄地点的问题,利用遗传算法定时定位模型解决了已知影长,日期未知求拍摄地点的问题。经过求解,我们得到了日期和影长已知情况下可能的拍摄地点为北纬 $39^{\circ}52'33''$ 东经 $116^{\circ}15'33''$ 或北纬 $40^{\circ}20'36''$,东经 $111^{\circ}67'03''$ 。在影长已知,日期未知的情况下可能的拍摄地点为北纬 $39^{\circ}45'13''$,东经 $116^{\circ}154'10''$,拍摄日期为 7 月 14 日或北纬 $40^{\circ}45'03''$,东经 $111^{\circ}131'10''$,拍摄日期为 7 月 19 日。最后得到的结果带入第一问的模型中进行检验,发现得出来的影长轨迹和拟合出来的相似度很高,说明了模型建立的准确性。

关键词: 二次拟合 遗传算法 太阳高度角 F 检验 太阳定位

一、问题重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1. 建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00–15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

如果拍摄日期未知，你能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

二、问题分析

对于问题一，问题一需要我们分析并建立影子长度变化的数学模型以及求出影子长度变化的规律，并在具体情况下求出直杆的太阳影子长度变化曲线。首先，拿到问题，我们要明确影子长度受哪些因素的影响，通过查阅资料，发现影子长度由观测点的地理经纬度以及日期、时间三个因素决定，而影子的长度取决于太阳与该物体所处平面的夹角，即太阳高度角。然后，建立影子长度的关系表达式，通过对表达式的求解就可以得到影子变化的规律。最后用建立的影子长度模型对具体地点，日期，时间，杆长一定的情况下，得到影子长度变化曲线。

对于问题二，我们可以根据附件 1 给出的影子的坐标进行求解。首先根据给出的横坐标，我们可以拟合其与时间的拟合图形；然后，我们可以将纵坐标的值和时间拟合，两个拟合图像的最低点也就是我们需要求解的正午时刻的点，最终拟合出影长与时间的关系式，算出影长最短的时间，即该地的太阳正午时间，然后可以由坐标与方位角的关系可求出太阳方位角，进而求得观测点的经纬度。

对于问题三，题目要求根据影子顶点坐标建立数学模型，对附件 2 和 3 的直杆进行定时定位，即要求给出所在地的经纬度和当时日期。对于本问题，我们可以利用遗传算法，建立定时定位模型，遗传算法的定时定位模型可以以实际影子长度与预测影子长度的接近程度作为目标函数。利用遗传算法的 matlab 程序进行求解得出当地的经纬度，日期可由太阳直射角纬度反推得出。最后我们可以采用问题二建立的求解经度模型，对该模型进行检验分析。

对于问题四，题目给出的是在太阳照射下杆的影子变化视频，让我们求出视频可能拍摄的地点。我们可以通过 matlab 对视频截取视频中的每一帧，然后对其每帧截取的照片进行处理，得到每帧图片上杆的坐标，并且对影子长度关于时间 t 进行拟合，把得出来的拟合结果，带入第二问建立的模型，运用正午太阳高度角的模型，就可以算出了视频可能拍摄的地点。在问题的最后，又给出一个小问，

如果没有给出拍摄时间，怎么确定拍摄时间和拍摄地点，那么这就不能利用时间直接算经度，于是我们利用遗传算法来解决这个小问，通过程序的求解，就可以得到若干的经纬度和日期。我们又通过得出来的经纬度，日期带入第一问的模型，得到相对应的影长和时间的关系式，与拟合的结果进行检验比较。

三、模型假设

- 1、假设大气层中存在的水蒸气、二氧化碳和灰尘，其密度与外太空真空相同，即当太阳光从外太空的真空传入大气层时，不发生折射；
- 2、假设地球的公转、自转对太阳影子的大小变化不影响；
- 3、假设物体在测量过程中不会发生形变，并在物体测量过程中，无意外情况发生（风吹倒直杆等）；
- 4、太阳和地球相距不远，故假设太阳照射在地球上的光为平行光；
- 5、由于日序会影响物体影子的长度，故假设忽略日序与年之间的关系。

四、符号说明

D_w 表示当地纬度
 D 表示当地经度
 α 表示赤纬度
 \emptyset 表示太阳时角
 Q 表示日角
 θ 表示太阳高度角
 A 表示太阳方位角
 H 表示正午太阳高度角
 C_{min} 表示目标函数
 n 表示数据个数
 L_i 表示预测影长
 L_{oi} 表示实际影长

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

通过查阅资料，可知，影子长度由观测点的地理经纬度以及日期、时间决定。通过分析知，要求的影子长度的大小，还需要太阳光线与影子的夹角，即太阳高度角，以及太阳方位角，太阳高度角和太阳方位角公式可以通过查阅文献得出，最终求得影子长度关于地理经纬度、日期（转化为日序）、时间、赤纬角的表达式，将建立的模型求解出在北京天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）、2015 年 10 月 22 日 09:00-15:00、杆长为 3m 的情况下得到要测直杆的太阳影子长度变化曲线。

5.1.1 问题一模型的建立

D_w 表示当地纬度，本问题一中天安门广场所在地点的纬度为北纬 39°54'26"，东经 116°23'29"； α 表示太阳赤纬角^[1]，其计算公式为：

$$\begin{aligned}\alpha = & 0.3723 + 23.2567 \sin Q + 0.1149 \sin 2Q \\ & - 0.1712 \sin 3Q \\ & - 0.7580 \cos Q + 0.3656 \cos 2Q + 0.0201 \cos 3Q\end{aligned}\quad (5-1)$$

式(5-1)中的 Q 表示日角^[1]，其表达式为：

$$Q = \frac{2\pi t}{365.2422} \quad (5-2)$$

式(5-2)中 t 又由三部分组成，即

$$t = N - \Delta N - N_0 \quad (5-3)$$

式(5-3)中 N 是按天数顺序排列的累加和^[2]，例如：1月1日为0，则到12月31日，如果这一年为闰年则 N 为364天，如果这一年为平年则 N 为365天。 ΔN 为累加和订正值，由观测地点与格林尼治时间差订正值 W 组成。其中

$$\Delta N = \frac{(W - L)}{24} \quad (5-4)$$

$$N_0 = 79.6764 + 0.2422(Y - 1985) - INT[0.25(Y - 1985)] \quad (5-5)$$

$$W = \left(S + \frac{F}{60} \right) \quad (5-6)$$

式(5-4)中 L 表示当地时间与格林尼治时间差，东经取负号，西经取正号，北京处于东经，故 L 取负值；式(5-5)中， Y 为年份， $INT(X)$ 为BASIC语言中求出不大于 X 的最大整数的标准函数。

而 L 的表达式为

$$\pm L = \frac{\left(D + \frac{M}{60} \right)}{15} \quad (5-7)$$

式(5-6)中 S 为观测时刻， F 为分值；式(5-7)中 D 表示观测点的经度， M 为分值。每当地理经度大于东经120°，则每增加一经度加4分钟，而当地理经度小于东经120°则每减少一经度减4分钟。

根据查找的文献，我们会发现：

$$T_M = T + 4 \times (D - 120^\circ) \quad (5-8)$$

式(5-8)中 T 为当地时间， T_M 表示当地平均太阳时（地平时）。

可以得出太阳时角，真太阳时的计算表达式为：

$$\Phi = (TT - 12) \times 15^\circ \quad (5-9)$$

$$TT = T_M + E \quad (5-10)$$

其 Φ 表示太阳时角^[1]， TT 表示真太阳时^[1]， T_M 表示当地平均太阳时（地平时）^[1]；而式(5-10)中 E 表示时差是真太阳时与地方平均太阳时的差值^[1]，其计算公式为：

$$\begin{aligned}E = & 0.0028 - 1.9857 \sin Q + 9.9059 \sin 2Q \\ & - 7.0924 \cos Q - 0.6882 \cos 2Q\end{aligned}\quad (5-11)$$

为求得影子长度的变化，我们建立“立竿见影”模型，以直杆的底端为坐标原点，南北方向为 x 轴，正南方向为 x 轴的正南方向，与其垂直的东西方向作为 y 轴，建立的模型图示如下，杆长为 h ，直杆顶点在大地上的投影点为 s ，其坐标为 $s(x_s, y_s)$ 根据太阳高度角和直杆的长度就可以求出影子长度的变化规律。

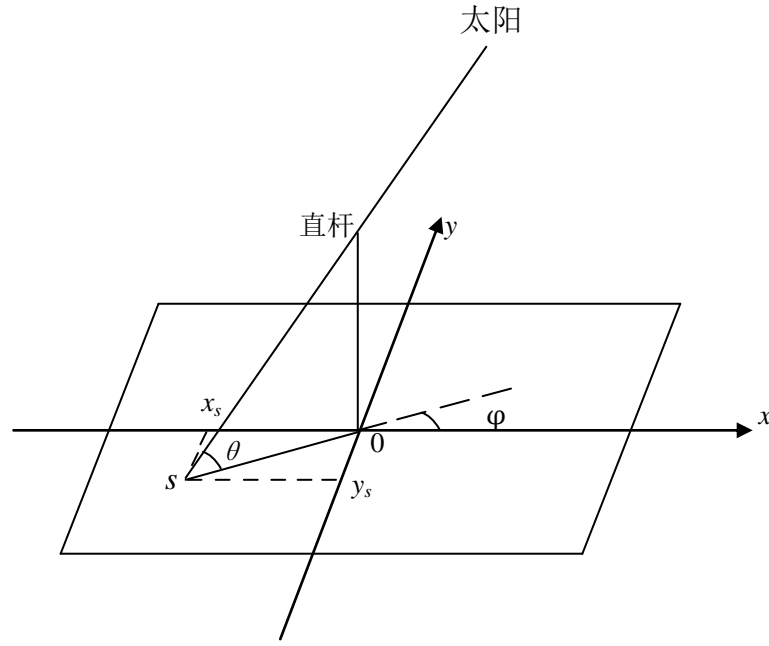


图 1 太阳照射直杆投影图

设太阳高度角^[2]为 θ ，根据查阅相关资料，可以得到太阳高度角与当地纬度 D_w 、太阳赤纬角 α 以及太阳时角 Φ 之间的关系式如下：

$$\sin \theta = \sin D_w \cdot \sin \alpha + \cos D_w \cdot \cos \alpha \cdot \cos \Phi \quad (5-12)$$

通过对式(5-12)，运用三角函数知识，求解得到太阳高度角 θ 的表达式为：

$$\theta = \sin^{-1}(\sin D_w \cdot \sin \alpha + \cos D_w \cdot \cos \alpha \cdot \cos \Phi) \quad (5-13)$$

D_w 由题目中给出，属于已知量，通过对式(5-11)求解出 α ，通过对式(5-9)求解出 Φ ，故 θ 是可求得，故可以求出太阳高度角 θ 的具体数值。

设直杆的长度为 h 直杆的影子为 l ，因为直杆垂直于影子，故太阳光、直杆、影子长构成一个三角形，根据勾股定理，知：

$$\tan \theta = \frac{h}{l} \quad (5-14)$$

化简得：

$$l = \frac{h}{\tan \theta} \quad (5-15)$$

把式(5-13) θ 的表达式代入 l 的表达式，得

$$l = \frac{h}{\tan(\sin^{-1}(\sin D_w \cdot \sin \alpha + \cos D_w \cdot \cos \alpha \cdot \cos \Phi))} \quad (5-16)$$

得到的式(5-16)就是最终的影子的长度关于经纬度、日期、时间的关系表达式。

5.1.2 问题一模型的求解

问题一模型的建立中我们求出 l 的表达式为：

$$l = \frac{h}{\tan \theta}$$

即：

$$l = \frac{h}{\tan(\sin^{-1}(\sin D_w \cdot \sin \alpha + \cos D_w \cdot \cos \alpha \cdot \cos \Phi))}$$

其中, D_w 为当地纬度, 题目中已经给出, α 为太阳赤纬角, 由式(5-1)可以算出, Φ 为太阳时角, 由式(5-1)可以求出。

问题提出用建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 09:00-15:00 之间天安门广场, 天安门广场的纬度是北纬 $39^{\circ}54'26''$, 经度是东经 $116^{\circ}23'29''$, 直杆的高度为 3m, 即日期为 10 月 22 日, 即 N 为 294, T 为 09:00-15:00, 代入以上公式求出需要的运用 MATLAB 运算求得这段时间段的直杆的太阳影子长度变化曲线为 (程序见附录一):

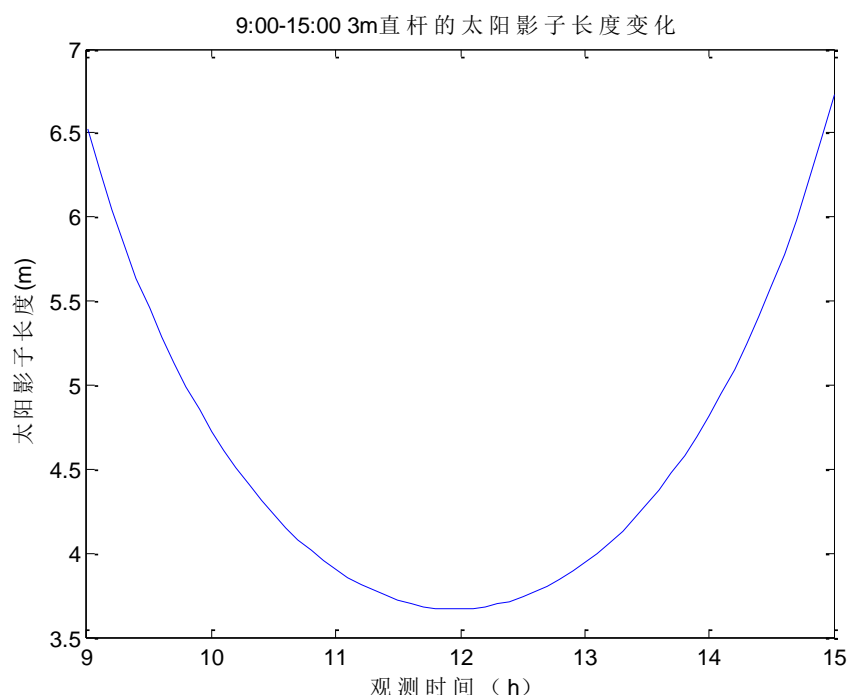


图 2 9:00-15:00 3m 直杆的太阳影子长度变化

由图形可以看出在当地经纬度为定值的情况下, 日期也为定值即日序一定在 09:00-15:00 这段时间, 太阳影子的长度是先减小后增大, 这由于地球是球形, 并且太阳是东升西落的, 通过查阅资料, 每天早上的影子和每天傍晚的影子是一天中最长的, 中午十二点是影子最短的时刻, 由于问题一给出的是北京十月份的数据, 并且北京的经纬度是北纬 $39^{\circ}54'26''$, 东经 $116^{\circ}23'29''$, 中午十二点的影子长度也是长于直杆的长度的, 故得到的图形是可靠的。通过对图形分析得, 关键时刻影子长度与时刻值见表 5-1

表 5-1 关键时刻影子的长度值/m

时刻	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
影子长	6.5278	4.7270	3.9032	3.6668	3.9411	4.8167	6.7246

通过对表格中数据的分析, 进一步验证了我们的思想的正确性, 太阳东升西落, 早上和傍晚的影子最长, 中午的影子最短。

5.2 问题二模型的建立与求解

影子的长度与直杆所在地当时的太阳高度角和直杆的长度有关，而太阳高度角又与直杆所在地的纬度、时角、太阳直射点的纬度有关，太阳直射点的纬度可以通过日期求出，但是本题要求的是直杆所在地的经纬度，并且直杆的长度不知。所以我们首先要确定的便是太阳直射点的纬度、时角。

5.2.1 问题二模型的建立

根据附录一给出的数据发现，太阳影子顶点的坐标是离散的，不能找出太阳影子顶点与时间的关系式，不容易得出观测地点的经纬度，观测地点不容易确定，根据曲线拟合的方法，分别拟合出影子纵横坐标关于时间的拟合函数表达式和拟合图求出经纬度，从而求出观测地点。

由附件 1，太阳的影子的坐标给出，从而可以求出每一时刻的影子长度，利用 matlab 二次曲线拟合的方法得到如下图太阳影子长度变化曲线和其拟合方程(程序见附录二)

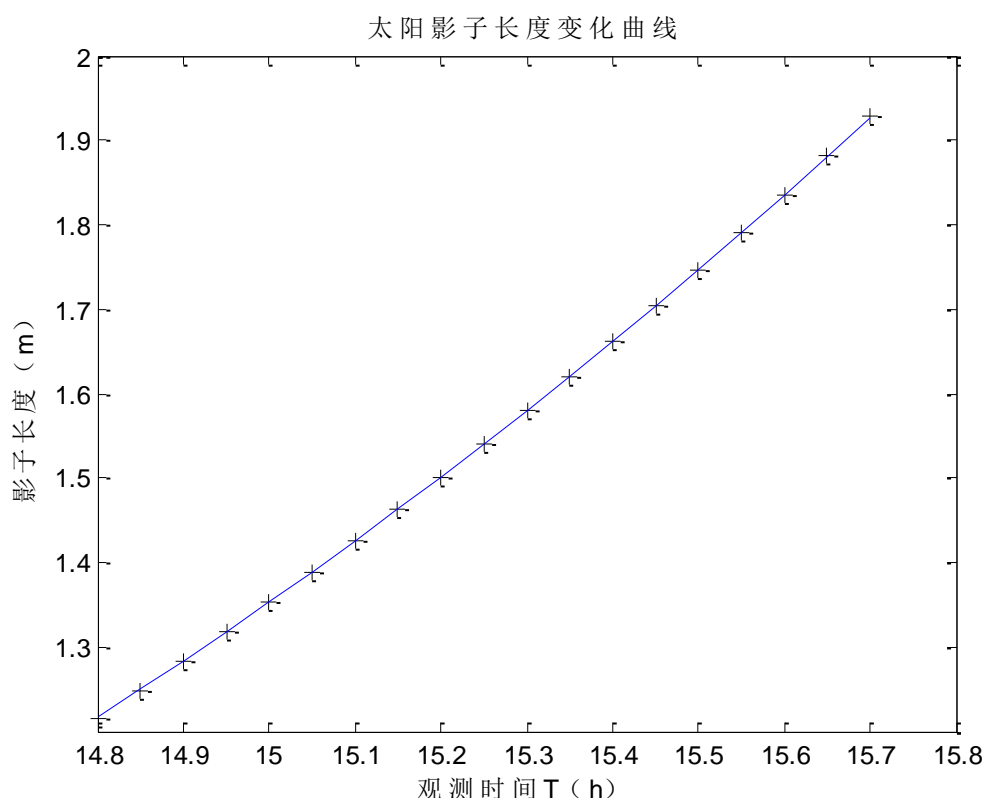


图 3 影子长度关于时间的变化图

运用 matlab 对拟合图进行分析求解，得到太阳影子与时间的拟合方程，即拟合方程为：

$$H = 0.1547x^2 - 3.9295x + 25.4883$$

运用二次曲线拟合的方法，需要检验拟合方程的显著性，也就是要对模型进行检验。

为检验拟合效果采用 F 检验，F 主要通过比较两组数据的方差 S^2 的大小进行检验的，F 检验的方法和过程如下：

设 y_i 为实际数据， \hat{y}_i 为拟合数据，令

$$Q_e = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

则可改写为

$$Q_e = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

式中： $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$, $S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2$, $S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

令 $S_0 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$, 则 $Q_e = S_{yy} - S_0$, 根据 F 分布的定义： $F = \frac{S_0}{Q_e/(n-2)} \sim F(1, n-2)$, 给定 α , 查 F 的分布表, 得到临界值, $F_\alpha(1, n-2)$, 若 $F > F_\alpha(1, n-2)$, 则拒绝 H_0 , 回归效果好; 否则接受原来假设 H_0 , F 越大, 回归效果越好。

给定 α 为 0.05, 经过运算求解, 得 H 的 F 检验值为 $15.6 > F_{0.05}(1, n-2) = 3.4$, 故通过检验。

由于太阳的影子是类似抛物线这一原理, 可以算出曲线的最低点, 得到如下图 4 影子长度的最低点和最高点:

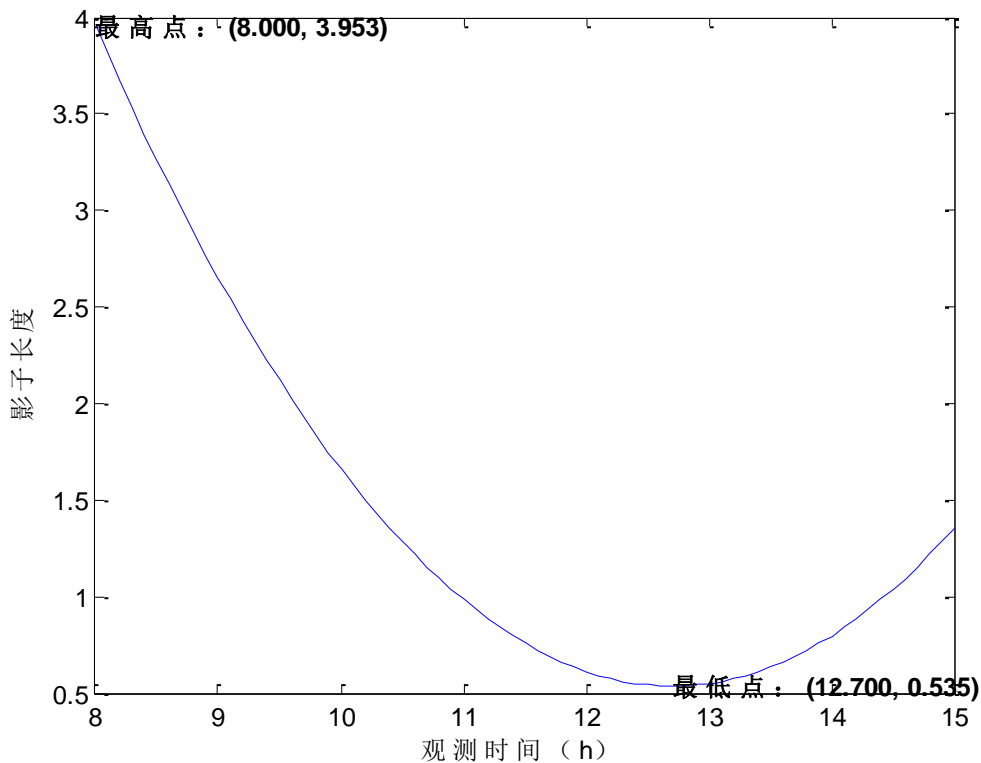


图 4 太阳影子长度的最低点和最高点

由图 2 可以看出: 求出影长最低点 (12.7, 0.535), 即得到当地正午时间为 12:42, 影长最短为 0.535m。

根据附件 1 中 x 坐标, 对其之间的间隔和时间次数 (第一个数记为 1) 进行拟合(附件三), 得到如下表 5-2。

表 5-2 x 坐标间隔

时间次数	坐标间隔	时间次数	坐标间隔
1	0.0334	11	0.0394
2	0.0339	12	0.0402
3	0.0345	13	0.0409
4	0.0349	14	0.0417
5	0.0355	15	0.0426
6	0.0361	16	0.0435
7	0.0367	17	0.0444
8	0.0374	18	0.0455
9	0.0379	19	0.0464
10	0.0387	20	0.0476

由表格可知， x 坐标间隔呈现递增的规律，因为影长曲线是类似抛物线，所以 x 间隔曲线也很有可能，通过下图 matlab 的散点数据，可看出曲线基本呈二次函数，进而用 matlab 进行拟合，得到如下图 5

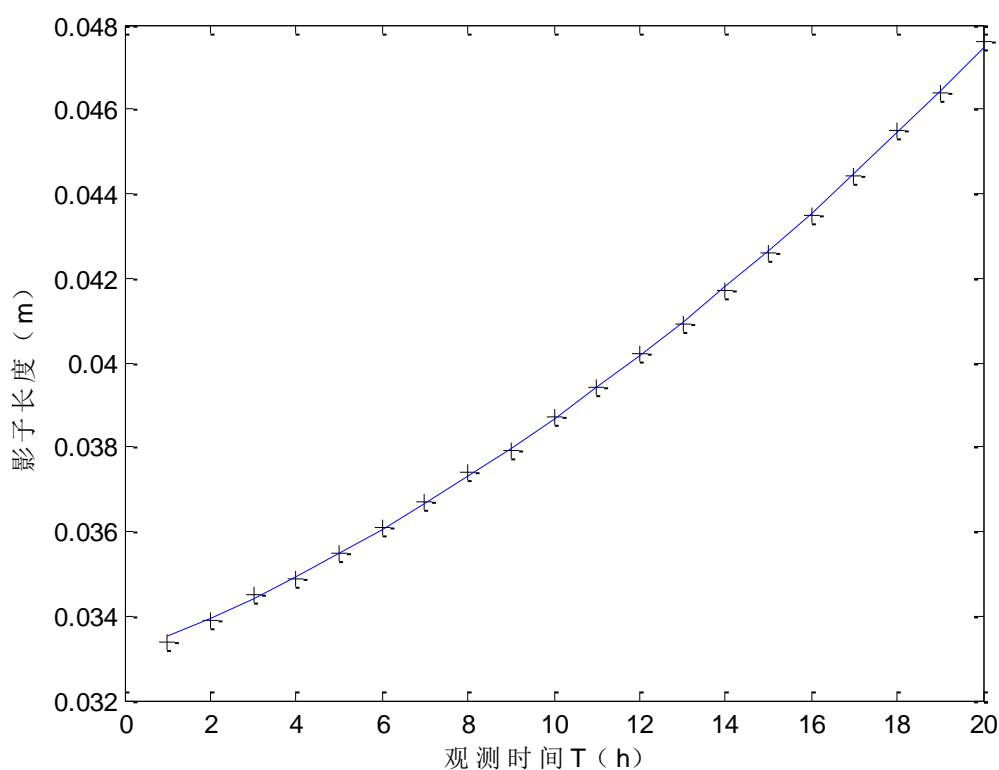


图 5 太阳影子长度与时间的拟合图

由图可看出拟合度非常高，得到拟合方程：

$$y = 1.6142 \times 10^{-5}x^2 + 0.000396x + 0.0330867$$

由此方程可往前推时间在 12:42 时， x 的坐标为 -0.31021m。同理，可得到 y 坐标为 0.2651m，即正午时间，太阳影子顶点坐标 (-0.31021, 0.2651)。

为检验拟合效果采用 F 检验，通过附件的数据的代入求解运算，通过查 F

分布表，得到 F 的临界值，即 F 为 $165.6 > F_{0.05}(1, n-2)=5.7$, 故拟合图形准确。

对于纬度的求解，我们由太阳高度角的可分别建立两个基于太阳高度角和方位角的模型。

模型一：基于正午太阳高度角的模型

$$\begin{cases} y = \tan Ax \\ \cos H = \frac{\cos \alpha \sin \phi}{\sin A} \\ H = 90^\circ - |D_w - \alpha| \\ \phi = (T - 12) \times 15^\circ \end{cases} \quad (5-17)$$

式中 A 为太阳方位角， H 为正午太阳高度角， D_w 为当地纬度， α 为太阳直射点纬度（也是太阳赤纬角）， ϕ 为太阳时角。

模型二：由地理知识可得到一般太阳高度角的公式，建立方程组

$$\begin{cases} \tan A = \frac{y}{x} \\ \sin \theta = \sin \alpha \sin D_w + \cos \alpha \cos D_w \cos \phi \\ \cos A = \frac{\sin \theta \sin D_w - \sin \phi}{\cos \theta \cos \alpha} \\ \phi = (T - 12) \times 15^\circ \end{cases} \quad (5-18)$$

对于经度的求解，首先对于经度，一般指球面坐标系的纵坐标，具体来说就是地球上一个地点离一根被称为本初子午线的南北方向走线以东或以西的度数。按国际规定英国首都伦敦格林尼治天文台原址的那一条经线定为 0° 经线，然后向左右延伸。而各地的时区也由此划分，每 15 个经度便相差一个小时。

5.2.2 问题二模型的求解

模型一纬度的求解

由影长最短坐标 $x_0 = -0.31021$ ， $y_0 = 0.2651$ ，可计算得到

$$\tan A = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{0.31021}{0.2651} = -1.17016$$

则 $A = -49.483^\circ$ 或 130.517° ，因为 y 为正， x 为负，所以得 $A = 130.517^\circ$ ($0 < A < 360^\circ$)。

由太阳时角公式：

$$\phi = (T - 12) \times 15^\circ$$

$T = 12:42$ ，即 $T = 12.7$ h，求得 $\phi = 10.5^\circ$ 。

由正午太阳高度角公式

$$\cos H = \frac{\cos \alpha \sin \phi}{\sin A} = 0.23766$$

得出 $H = 76.251^\circ$ 。即本地的正午太阳高度角为 76.251° 。

如下图是太阳直射点纬度一年的曲线变化

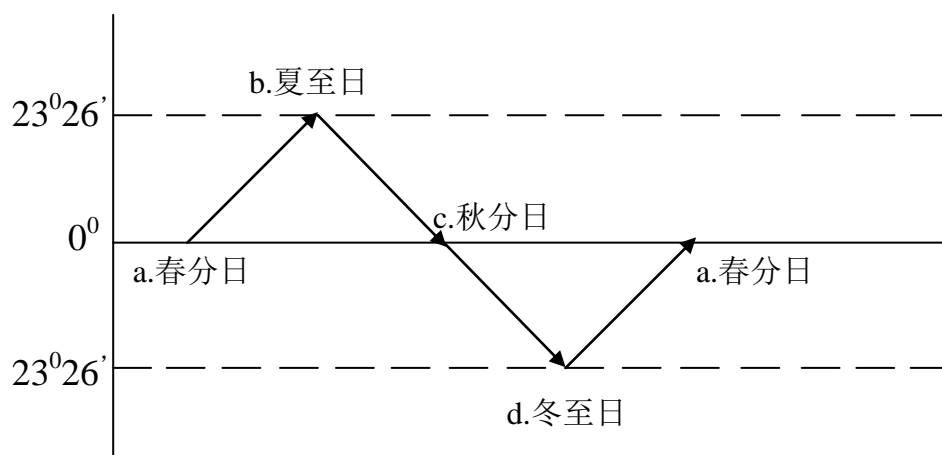


图 6 太阳直射点纬度一年的曲线变化图

由地理知识可知 3 月 21 日春分、9 月 23 日秋分直射赤道、6 月 22 日夏至直射北回归线、12 月 22 日冬至直射南回归线，而本题日期是 2015 年 4 月 18 日，可由线性关系，算出当时的太阳直射点纬度 $\alpha=7.4959^\circ$ 。

最后将 $A=-49.483^\circ$ ， $\Phi=10.5^\circ$ ， $\alpha=7.4959^\circ$ ， $H=76.251^\circ$ 代入式 5-1 的得出当地纬度：

$$D_w=21^\circ 14' 42''$$

模型二纬度的求解

同模型一的求解方法一致，求解出 $D_w=20^\circ 39' 01''$

经度的求解

$$D = 120^\circ - (12.7 - 12) \times 15^\circ = 109.5^\circ = 109^\circ 30' 01''$$

经度的求解结果为 $109^\circ 30' 01''$

故求出的第一个可能的地点为东经 $119^\circ 30' 01''$ ，北纬 $21^\circ 14' 42''$ ，第二个可能的地点为东经 $119^\circ 30' 01''$ ，北纬 $20^\circ 39' 01''$ 。

5.3 问题三模型的建立与求解

我们利用遗传算法，以实际影长与预测影长为目标函数，建立基于遗传算法的定时定位模型，求解当地经纬度，日期可由太阳直射角反推求出，最后利用问题二的模型对其进行检验和分析。

5.3.1 问题三模型的准备

遗传算法^[7]是一种基于自然选择原理和自然遗传机制的搜索（寻优）算法，它是模拟自然界中的生命进化机制，在人工系统中实现特定目标的优化。遗传算法的实质是通过群体搜索技术，根据适者生存的原则逐代进化，最终得到最优解或者准最优解。它必须做下一操作：初始群体的产生、求每一个体的适应度、根据适者生存的原则选择优良个体、被选出的优良个体两两配对，通过随机交叉其染色体的基因并随机变异某些染色体的基因生成下一代群体，按照此方法是群体逐代进化，直到满足进化终止条件。

其实现方法如下：

(1)、根据具体问题确定可行解域，确定一种编码，能用数值串或者字符串表示可行解域的每一解。

(2)、对每一解应有一个度量好坏的依据，它用一函数表示，叫做适应度函数，一般由目标函数构成。

(3)、确定进化参数群体规模 M 、交叉概率 P_c 、变异概率 P_m 、进化终止条件。

为方便计算，一般来说，每一代群体的个体数目都取相等。群体规模越大，越容易找到最优解，但由于受到计算机的运算能力的限制，群体规模越大，计算机所需时间也相应地增加。进化终止条件指的是当进化到什么时候结束，他可以设定到某一代进化结束，也可以根据找到近似最优解是否满足精度要求来确定。

表 5-3 生物遗传概念在遗传算法中的对应关系

生物遗传概念	遗传算法中的作用
适者生存	算法停止时，最优目标值的可行解有最大的可能被留住
个体	可行解
染色体	可行解的编码
基因	可行解中每一分量的特征
适应性	适应度函数值
种群	根据适应度函数值选取的一组可行解
交配	通过交配原则产生一组新可行解的过程
变异	编码的某一分量发生变化的过程

5.3.2 问题三模型的建立

遗传算法的运行过程可以看做是一个典型的迭代过程，其必须需要完成的工作步骤和工作内容如下：

- 1)、选择编码策略，把参数集合和域转换为位串结构空间；
- 2)、定义适应值函数表达式；
- 3)、确定遗传策略，包括选择群体的大小，选择交叉变异方法，以及确定交叉概率，变异概率等进化参数；
- 4)、随机初始化生成群体；
- 5)、计算群体中个体位串解体后的适应值；
- 6)、按照遗传策略，运用选择交叉和变异算法作用于群体，形成下一代群体；
- 7)、判断群体性能是否满足某一指标，或者已完成预定迭代次数，不满足则返回步骤 6 或者修改遗传策略，再返回步骤 6。

利用遗传算法可建立模型：

$$C_{min} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_i - L_{oi})^2$$

其中， C_{min} 为目标函数， n 为数据个数， L_i 为预测影长， L_{oi} 为实际影长

5.3.3 模型的求解

根据 matlab 程序可得，对附件 2 处理得到观测点的日期可能分别为 1 月 18 日，地点为北纬 43°22'19"，东经 87°16'29"和日期为 1 月 27 日，地点为北纬 52°49'20"，东经 86°49'15"。对附件 3 处理得到观测点的日期可能为 8 月 22 日，

地点为北纬 24°36'16"，东经 108°31'20"和日期为 8 月 20 日，地点为北纬 55°16'36"，东经 109°02'30"。

5.3.4 问题三模型的检验与分析

对于经度的求解，我们可以采用前面问题二的方法，对基于遗传算法的定时定位模型进行检验与分析。

1.附件 2 经度模型

通过附件 2 中给的坐标进行 excel 处理，利用坐标到原点的距离公式得到各个数据点的影长，然后利用 matlab 表示散点数据，可知曲线不是线性递减，由影子变化趋势可知，对数据进行 matlab 二次线性拟合，得到如下图 4

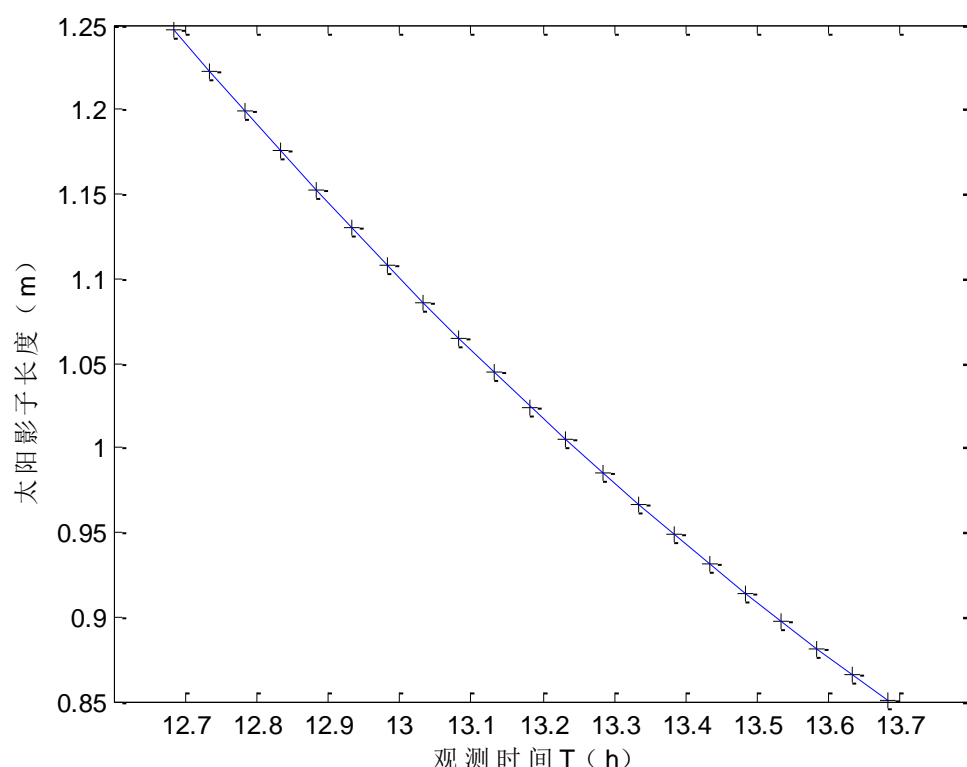


图 7 太阳影子长度与时间的关系图

得到拟合方程

$$y = 0.0981T^2 - 2.9849T + 23.3183$$

经度算法公式：

$$\text{当地地方时} = \text{北京时间} + (\text{当地经度} - 120^\circ) / 15^\circ$$

又由

$$T = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2.9849}{2 \times 0.0981} = 14.22\text{h}$$

$$D_{2j} = 120^\circ - (14.22 - 12) \times 15^\circ = 86.67^\circ$$

当 T=14.22h 时，代入曲线方程，得影长最短 L=0.61282597m

2.附件 3 经度模型

同理可得到图 5 和拟合方程：

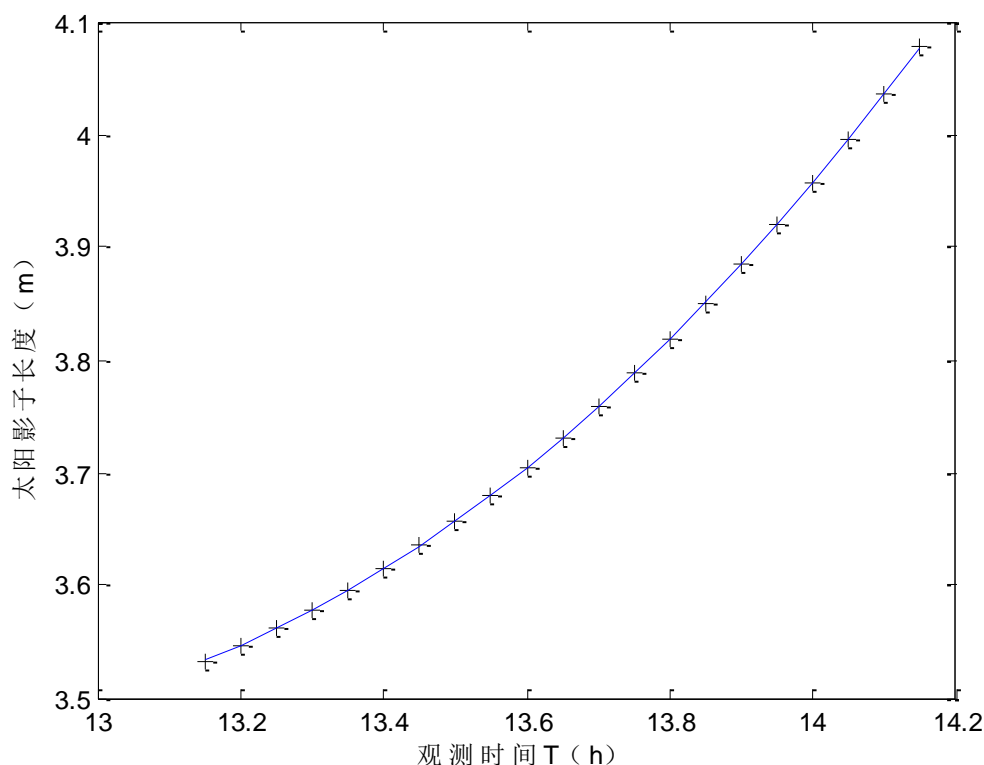


图 8 太阳影子与时间的关系与

拟合方程

$$y = 0.2964x^2 - 7.5507x + 51.5639$$

又由

$$T = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7.5507}{2 \times 0.2964} = 12.737h$$

$$D_{3j} = 120^\circ - (12.737 - 12) \times 15^\circ = 108.945^\circ$$

当 $T=12.737h$ 时，代入曲线方程，得影长最短 $L=3.47595m$

由此可看出，相似度很高，模型较正确。

5. 4 问题四模型的建立与求解

通过 matlab 对视频截取每一帧进行处理，得到每帧图片上杆的坐标，并且对影子长度关于时间 t 进行拟合，把得出来的拟合结果，带入第二问建立的模型，算出了视频可能拍摄的地点。如果没有给出拍摄时间，我们利用遗传算法，通过程序的求解，就可以得到若干的经纬度和日期。

5. 4. 1 问题四模型的建立

第四问我们利用基于太阳高度角的二次拟合模型和遗传算法解决了以下两个问题，一知道拍摄时间和影子长度求出拍摄点的地理位置，二知道影子长度但拍摄时间未知的情况下求出若干个拍摄地点的地理位置。

首先我们先对题目中所给的视频进行预处理，为了方便统计，我们将所给的视频每 1000 帧截取一次图，然后对每张图建立以杆底为圆心，正东方向为 X 的正半轴，正北为 Y 的正半轴，杆为 Z 轴建立三维直角坐标系

如图 4-1 所示的空间直角坐标系, 并且通过测量杆长的顶点坐标, 通过比例关系, 计算每帧图片的影子长度, 得到每时刻的影子长度, 具体值见附录。

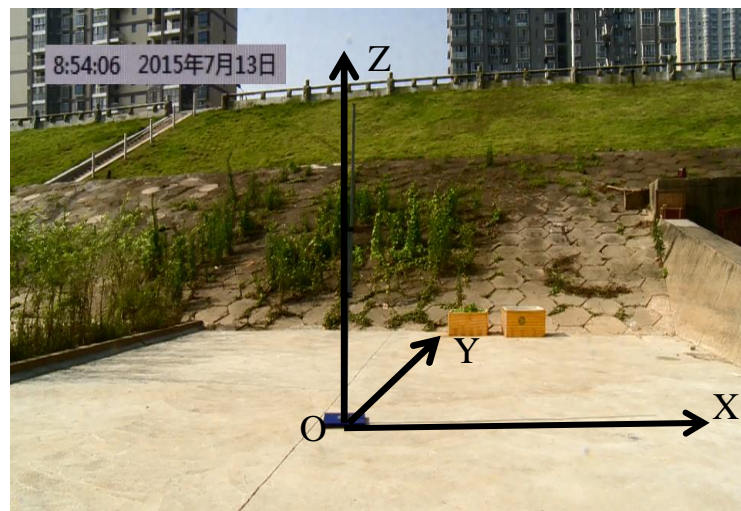


图 9 视频中截取的图建立的坐标系示意图

通过第二问的模型, 又知道此段视频拍摄的时间是 2015 年 7 月 13 日, 我们利用第二问的二次拟合模型先求影长和时间的二次拟合图形, 图形见图

通过拟合的结果我们得到了影长关于时间的函数拟合表达式,

$$y = 0.0861x^2 - 2.4062x + 16.9283$$

太阳影子和时间的模拟图:

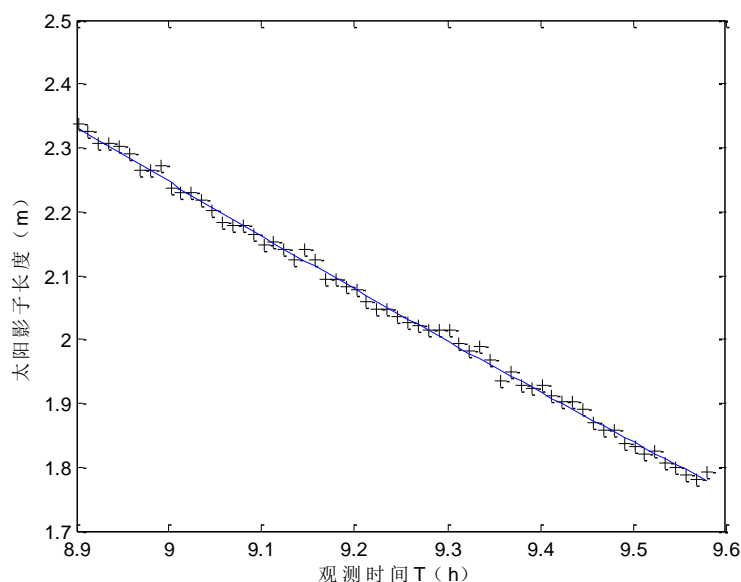


图 10 太阳影子与时间的关系图

又由第二问经度的算法公式我们可以得到视频所在地的经度, 经过计算

$$D = 120^\circ - (12.265 - 12) \times 15^\circ = 116^\circ 15'$$

由于这个小题的第一小问给了我们拍摄该视频的时间，所以我们基于正午太阳高度角的模型

$$\begin{cases} y = \tan Ax \\ \cos H = \frac{\cos \alpha \sin \phi}{\sin A} \\ H = 90^\circ - |D_w - \alpha| \\ \phi = (T - 12) \times 15^\circ \end{cases}$$

并且我们可以根据太阳直射点纬度变化算出当时的太阳直射点纬当时的太阳直射点纬度 $\alpha = 16.2241^\circ$ 。由此我们得到了两个纬度： $D_w = 39^\circ 52' 33''$ 和 $D_w = 40^\circ 20' 36''$ 。

经过求解，我们得到了日期和影长已知情况下可能的拍摄地为北纬 $39^\circ 52' 33''$ 东经 $116^\circ 15' 33''$ 和北纬 $40^\circ 20' 36''$ ，东经 $111^\circ 67' 03''$ 。在影长已知，日期未知的情况下可能的拍摄地点为北纬 $39^\circ 45' 13''$ ，东经 $116^\circ 154' 10''$ ，拍摄日期为 7 月 14 日或北纬 $40^\circ 45' 03''$ ，东经 $111^\circ 131' 10''$ ，拍摄日期为 7 月 19 日。最后得到的结果带入第一问的模型中进行检验，发现得出来的影长轨迹和拟合出来的相似度高，说明了模型建立的准确性。

由于在此问中我们的出来的一个经纬度靠近北京地区，而第一问的模型就是建立在北京地区，为了检验这个地区是否正确，我们把所得到的经纬度又带回了第一问的模型中，由于这个小问知道杆长，测量时间，所以模型一的所有未知数都已经得到，带入公式

$$l = \frac{h}{\tan \theta}$$

得到影长关于时间的轨迹方程为

$$y = 0.0823x^2 - 2.1362x + 16.2343$$

和我们利用二次拟合得出来的二次拟合曲线进行对比。

我们通过对比可以发现经过模型一得出来的曲线和我们拟合出来的结果相似，稍微有点不同，这可能是由于我们算出来的经纬度可能有点偏差，导致产生偏差的原因有很多，比如我们在截取视频的时候没有截取每一帧的结果，还有在定位顶点的坐标可能产生偏差，但这些都是误差允许的范围。如果截的帧个数足够多的话就可以提高准确性。

这一小问可以利用日期和时间来解决纬度的关系，而如果题目没有给出具体日期，那么用以上的算法和模型显然是解决不了问题的，那么解决该问题就必须要用其他的解决方法，通过第三问的模型建立与分析，通过遗传算法就能解决没有日期，通过影长和时间的关系就能解决的得到该测量的经纬度和拍摄时间。

我们将影长和时间的带入第三问的遗传算法得到如下的经纬度和拍摄日期为北纬 $39^\circ 45' 13''$ ，东经 $116^\circ 154' 10''$ ，拍摄日期为 7 月 14 日或北纬 $40^\circ 45' 03''$ ，东经 $111^\circ 131' 10''$ ，拍摄日期为 7 月 19 日。

五、模型的评价与推广

5.1 模型的评价

优点：

1. 本文结合了地理学知识,天文学知识建立了太阳影子长度关于经度,日期,时间之间的数学模型,求出了具体的太阳影子长度的变化曲线,模型简单合理,很好的解决了题目所要求的问题。
2. 采用曲线拟合的方法,把影长和时间拟合,求出了影子长度变化的一般曲线,并且给出了杆子可能所在的经纬度。
3. 使用遗传算法很好的解决了只知道影长和时间的关系,而测量时间的未知情况下杆子可能所在的经纬度,和测量的时间。

缺点:

由于问题二的一个问题简单的采用了曲线拟合的方法,可能的出的结果和实际测量的结果有点差别。

5.2 模型的推广

- 1、通过查阅资料更好的查出赤纬角与日期的准确映射关系,以便于实现对年份的预测。
- 2、下面研究的方向可以重点研究太阳高度角与太阳影子更深层次的关系,建立更牢固的函数关系,方便求出太阳所在的位置和时间。

参考文献

- [1] 张文华, 司徒亮, 徐淑通, 祁东婷. 太阳影子倍率的计算方法及其对光伏阵列布局的影响[J]. 技术与产品. 2(11):28-31, 2011
- [2] 屈名, 王征兵, 王德麾. 基于交比不变性的太阳定位算法的研究[J]. 硅谷, 3(19):53-55, 2013
- [3] 郑鹏飞, 林大钧, 刘小羊, 吴志庭. 基于影子轨迹反求采光效果的技术研究[J], 华东理工大学学报(自然科学报). 36(3):459-463, 2010
- [4] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011
- [5] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学建模[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013
- [6] 高正明, 赵娟, 贺升平. 多项式回归分析及回归方程的显著性检验[J]. 中国核科学技术进展报告. 2(3):295-297, 2011
- [7] 罗钦平. 遗传算法的改进及其在结构优化中的应用研究[D]. 中北大学
- [8] 雷玉梅. 基于改进遗传算法的大规模 TSP 问题求解方案[D]. 计算机与现代化. 3(9):34-39, 2015

附 录

附录一：9:00-15:00 3m 直杆的太阳影子长度变化

```
Dw=39.91*pi/180;
D=116.39;
T=[9:0.1:15];
H=3;
N=294;
Y=2015;
Tm=(T-4/60.*(120-116.39));
N1=(T+D./15)./24;
N0=79.6764+0.2422.*(Y-1985)-7;
Q=2*pi*(N+N1-N0)/365.2422;
E=(0.0028-1.9857*sin(Q)+9.9059*sin(2.*Q)-7.0924*cos(Q)-0.6882*cos(2.*
Q))*pi/180;
TT=Tm+E
W=(TT-12)*15.*pi/180;
h=(0.3723+23.2567.*sin(Q)+0.1149.*sin(2.*Q)-0.1712.*sin(3.*Q)-0.7580.
*cos(Q)+0.3656.*cos(2.*Q)+0.0201*cos(3.*Q)).*pi/180;
B=asin(sin(Dw).*sin(h)+cos(Dw).*cos(h).*cos(W));
L=H./tan(B);
plot(T,L);
xlabel('观测时间 (h)');
ylabel('太阳影子长度(m)');
title('9:00-15:00 3m 直杆的太阳影子长度变化')
```

附录二：太阳影子长度变化曲线

```
W=xlsread('F:\附件 1.xls','A4:D24');
x=W(:,1);y=W(:,4);
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z);
xlabel('观测时间 T (h)');
ylabel('影子长度 (m)');
title('太阳影子长度变化曲线')
```

A =

0.1547 -3.9295 25.4883

附录三：影子长度曲线拟合

```

x=8:0.1:15;
z=0.1547*x.^2-3.9295*x+25.4883;
plot(x,z);
[ymax, ind] = max(z);
[ymin, n] = min(z);
hold on;
text(x(ind), ymax, sprintf(' 最高点: (%.3f, %.3f)', x(ind), ymax),
'FontWeight', 'Bold');
text(x(n), ymin, sprintf(' 最低点: (%.3f, %.3f)', x(n), ymin),
'FontWeight', 'Bold');
xlabel(' 观测时间 (h) ');
ylabel(' 影子长度 ');

```

附录四：间隔曲线

```

W=xlsread(' F:\附件1-3.xls',1,' A4:F23');
x=W(:,5);y=W(:,6);
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z);
xlabel(' 观测时间T (h) ');
ylabel(' 影子长度 (m) ');

```

A =

```

1.6142e-05    0.000396    0.0330867

```

附录五：太阳影子长度变化曲线

```

W=xlsread(' F:\附件 1-3.xls',2,' A4:D24');
x=W(:,1);y=W(:,4);
A1=polyfit(x,y,2)
z1=polyval(A1,x);
plot(x,y,'k+',x,z1);
xlabel(' 观测时间 T (h) ');
ylabel(' 太阳影子长度 (m) ');

```

A1 =

```

0.0981    -2.9849    23.3183

```

附录六：太阳影子长度变化曲线

```

W=xlsread(' F:\附件 1-3.xls',3,' A4:D24');
x=W(:,1);y=W(:,4);
A2=polyfit(x,y,2)

```

```

z2=polyval(A2,x);
plot(x,y,'k+',x,z2);
xlabel('观测时间 T (h) ');
ylabel('太阳影子长度 (m) ');

```

A2 =

```

0.2964    -7.5507    51.5639

```

附录七 遗传算法代码

```

function prelationdate(data 2, str,result_name, epsnlin, epsga, h)
L=3;
t=data(:,1);
t=t*24;
x=data(:,2);
y=data(:,3);
L_shadow=sqrt(x.^2+y.^2);
% data=[2015 4 18];
% N=datenum(data)-dataenum([data(1),1,1])+1;
beta()=[116,20,150];
lotran=-180:10:180;
N=1:30:365;
allfit=[];
% options=stayset('Display','iter');
if nargin==3
    epsnlin=1e-4;
    epsga=1e-4;
    h=[-6,5];
elseif nargin==5
    b=[-6,5];
    L=2;
end
h1=h(1);h2=h(2);
% warnning off
for k=1:length(lonran)
    for p=1:length(latran)
        for q=1:length(N)
            beta0=[lonran(k),latran(p);N(q)];

[BETA,R,J,COVB,MSE]=nlinfit(t0,L_shadow,@(var,t)Lchange(var(3),t,var(
1),var(2),L),beta0);
            if BETA(1)>180
                BETA(1)=BETA(1)-360*ceil((BETA(1)-180)/360);
            elseif BETA(1)<-180

```

```

        BETA(1)=BETA(1)+360*ceil((-BETA(1)-180)/360);
    end
    if BETA(2)>90
        BETA(2)=BETA(2)-180*ceil((BETA(2)-90)/180);
    elseif BETA(2)<-90
        BETA(2)=BETA(2)+180*ceil((-BETA(2)-90)/180);
    end
    if BETA(3)>365
        BETA(3)=BETA(3)-365*ceil((BETA(3)-365)/365);
    elseif BETA(3)<-365
        BETA(3)=BETA(3)+365*ceil((-BETA(3)-365)/365);
    end
    n2=size(allfit,1);
    flag=1;
    if MSE>epsnlin
        flag=0;
    end
    if n2>0
        for j=1:n2;
            if mean((BETA(1:2)-allfit(j,1:2)).^2)<10
                flag=0;
            end
        end
        if MSE>epsnlin
            flag=0;
        end
    end
    if flag
        allfit=[allfit;[BETA,MSE]];
    end
end
end
end
tdiff=(allfit(:,1)-120)/15;
allfit(tdiff<h1|tdiff>h2,:)=[];

```

附录八 遗传算法

```

lb=[-180;-90;1];
up=[180;90;365];
allresult=[];
for i=1:100
    beta_ga=ga(@(var)Lchange_for_ga(var(3),t0,var(1),var(2),L,L_shadow),3, [], [], [], [], lb, up, [], []);
    var=beta_ga;MSE=Lchange_for_ga(var(3),t0,var(1),var(2),L,L_shadow);

```

```

n2=size(allresult,1);
flag=1;
if MSE>epsga;
flag=0;
end
if n2>0
for j=1:n2
if mean((beta_ga(1:2)-allresult(j,1:2)).^2)<10
flag=0;
end
end
if MSE>epsga
flag=0;
end
end
if flag
allresult=[allresult;[beta_ga,MSE]];
end
end
tdiff=(allresult(:,1)-120)/15;
allresult(tdiff<h1|tdiff>h2);
allresult(tdiff<h1|tdiff>h2)=[];
%输出
lon=allfit(:,1);
lat=allfit(:,2);
N=allfit(:,3);
n2=size(allfit,1);
fprintf(' 共有%d 个预测点')

```

附录九 matlab 对视频的处理得到每一帧图片

```

vdir='F:\ Appendix4.avi';
readerobj = VideoReader(vdir, 'tag', 'myreader');
numFrames = readerobj.NumberOfFrames;
for k = 1 : 1000: numFrames
    frm = read(readerobj, k);
    imwrite(frm, ['frames' num2str(k) '.png']); %把第 k 帧的图片写为
png 格式并编号
end

```

附录十 图片坐标数据的处理

```

I=imread(' 文件名.jpg');
imshow(I);

```

表 1

北京时间 t	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影子长度
14.7	1.0365	0.4973	1.149626
14.75	1.0699	0.5029	1.182199
14.8	1.1038	0.5085	1.215297
14.85	1.1383	0.5142	1.249051
14.9	1.1732	0.5198	1.283195
14.95	1.2087	0.5255	1.317993
15	1.2448	0.5311	1.353364
15.05	1.2815	0.5368	1.389387
15.1	1.3189	0.5426	1.426153
15.15	1.3568	0.5483	1.4634
15.2	1.3955	0.5541	1.501482
15.25	1.4349	0.5598	1.540232
15.3	1.4751	0.5657	1.579853
15.35	1.516	0.5715	1.620145
15.4	1.5577	0.5774	1.661271
15.45	1.6003	0.5833	1.703291
15.5	1.6438	0.5892	1.746206
15.55	1.6882	0.5952	1.790051
15.6	1.7337	0.6013	1.835014
15.65	1.7801	0.6074	1.880875
15.7	1.8277	0.6135	1.927918

表 2

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影子长度
12.683	-1.2352	0.173	1.247256
12.733	-1.2081	0.189	1.222795
12.783	-1.1813	0.2048	1.198921
12.833	-1.1546	0.2203	1.175429
12.883	-1.1281	0.2356	1.15244
12.933	-1.1018	0.2505	1.129917
12.983	-1.0756	0.2653	1.107835
13.033	-1.0496	0.2798	1.086254
13.083	-1.0237	0.294	1.065081
13.133	-0.998	0.308	1.044446
13.183	-0.9724	0.3218	1.024264
13.233	-0.947	0.3354	1.00464
13.283	-0.9217	0.3488	0.985491
13.333	-0.8965	0.3619	0.96679
13.383	-0.8714	0.3748	0.948585
13.433	-0.8464	0.3876	0.930928

13.483	-0.8215	0.4001	0.913752
13.533	-0.7967	0.4124	0.897109
13.583	-0.7719	0.4246	0.880974
13.633	-0.7473	0.4366	0.865492
13.683	-0.7227	0.4484	0.850504

表 3

时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影子长度
14.7	1.0365	0.4973	1.149626
14.75	1.0699	0.5029	1.182199
14.8	1.1038	0.5085	1.215297
14.85	1.1383	0.5142	1.249051
14.9	1.1732	0.5198	1.283195
14.95	1.2087	0.5255	1.317993
15	1.2448	0.5311	1.353364
15.05	1.2815	0.5368	1.389387
15.1	1.3189	0.5426	1.426153
15.15	1.3568	0.5483	1.4634
15.2	1.3955	0.5541	1.501482
15.25	1.4349	0.5598	1.540232
15.3	1.4751	0.5657	1.579853
15.35	1.516	0.5715	1.620145
15.4	1.5577	0.5774	1.661271
15.45	1.6003	0.5833	1.703291
15.5	1.6438	0.5892	1.746206
15.55	1.6882	0.5952	1.790051
15.6	1.7337	0.6013	1.835014
15.65	1.7801	0.6074	1.880875
15.7	1.8277	0.6135	1.927918

表 4

北京时间	x 坐标(米)	y 坐标(米)	影子长度
13.15	1.1637	3.336	3.533142
13.2	1.2212	3.3299	3.546768
13.25	1.2791	3.3242	3.561798
13.3	1.3373	3.3188	3.578101
13.35	1.396	3.3137	3.595751
13.4	1.4552	3.3091	3.614934
13.45	1.5148	3.3048	3.635426
13.5	1.575	3.3007	3.657218
13.55	1.6357	3.2971	3.680541
13.6	1.697	3.2937	3.705168
13.65	1.7589	3.2907	3.731278
13.7	1.8215	3.2881	3.758918

13.75	1.8848	3.2859	3.788088
13.8	1.9488	3.284	3.818701
13.85	2.0136	3.2824	3.85081
13.9	2.0792	3.2813	3.884585
13.95	2.1457	3.2805	3.919912
14	2.2131	3.2801	3.956876
14.05	2.2815	3.2801	3.995535
14.1	2.3508	3.2804	4.035751
14.15	2.4213	3.2812	4.077863