

# 高温作业专用服装设计

## 摘要

本文针对高温作业专用服装设计问题,分别建立稳态、非稳态热传递微分方程模型,描述了不同时空状态下的温度分布情况;建立基于层次分析法的多目标规划模型,利用蒙特卡罗算法,解决了在特定条件下织物 II 层的最优厚度设计问题;建立了基于双决策变量的多目标规划模型,采用 $\gamma$ -粒子群算法,得到了在特定条件下织物 II 层和空气层 IV 层的最优厚度。

针对问题一,对温度变化过程分为非稳态阶段和稳态阶段。对于稳态阶段,首先,建立热阻串联模型,确定三层织物边界温度。接着,建立稳态热传递微分方程模型,得出随着距离的增加,温度随位置变化的函数。对于非稳态阶段,增加时间变量,利用傅立叶定律,建立非稳态热传递微分方程模型,利用基于向后差分的微分方程数值解法,通过离散时空、微分方程、边界条件,得出微分方程数值解格式,以稳态各位置温度为初值向后差分,求解出非稳态温度随时间和位置的分布情况。模型求解结果为在织物的不同层面,温度变化满足不同的函数关系式。彼此变化快慢不一但趋势一致,都呈先快后慢最终趋于稳定的形式,得到隔温服的时空分布矩阵。对模型进行有效性检验显示:模型求解温度和附件中的温度曲线吻合度很高,且两者从 $37^{\circ}\text{C}$ 收敛到稳态 $48.08^{\circ}\text{C}$ 时的时间相差 $22\text{s}$ ,误差率为 $1.4\%$ ,误差较小,表明该模型有效;同时,对模型进行灵敏度分析显示,步长不同时温度的时空分布没有显著的变化,因此模型合理。

针对问题二,建立了基于层次分析法的多目标规划模型,以织物 II 层厚度 $r_2$ 为决策变量;以工作 60 分钟时人体皮肤外侧的温度、工作 55 分钟时人体皮肤外侧的温度、织物 II 层厚度为规划目标,通过层次分析法确定目标权重,将多目标规划转化成单目标规划,设定最终加权值尽可能小为目标函数;以条件中指定时刻点温度阈值和厚度范围为约束条件。采用了蒙特卡罗算法,解决了在特定条件下织物 II 层的最优厚度设计问题。最终求解得到:织物 II 层的最佳厚度为 $8.9392\text{mm}$ ,此时目标函数最优结果为 $43.7012$ 。对模型进行灵敏度分析,得到微调后的标准差分别为: $54.619$ 、 $53.951$ 、 $92.714$ ,表明织物 II 层厚度的灵敏度最大;而其余 2 个系数的灵敏度较为接近,都较低,影响较小,符合实际条件。

针对问题三,建立了基于双决策变量的多目标规划模型,以问题二的多目标规划模型为基础,设定 II 层厚度和 IV 层厚度为双决策变量;以工作 30 分钟时人体皮肤外侧的温度、工作 25 分钟时人体皮肤外侧的温度、织物 II 层厚度、IV 层厚度为规划目标,利用层次分析法重新确定目标权重,得到相应目标函数;修改相应约束条件,得到新多目标规划模型。针对该模型高维约束的特点,采用 $\gamma$ -粒子群算法求解,解决了在特定条件下织物 II 层和 IV 层的最优厚度设计问题。结果显示当织物 II 层和空气层 IV 层的厚度分别为 $12.85\text{mm}$ 和 $6.2\text{mm}$ 时,此时目标函数有最优结果 $33.5226$ 。对该模型进行灵敏度分析,得到微调后的标准差分别为: $0.0068218$ 、 $0.011117$ 、 $0.0095278$ 、 $0.0079859$ ,表明系数中 55 分钟体表温度的灵敏度最大;而 60 分钟体表温度的灵敏度较低,影响较小,符合实际条件。

**关键词:** 热传递微分方程模型、傅立叶定律、多目标规划、层次分析法  
蒙特卡罗算法、 $\gamma$ -粒子群算法

## 一、 问题重述

### 1.1 问题的背景

在高温环境下长时间工作时，人们需要穿着特殊服装以避免皮肤被灼伤。专用服装一般由三层织物材料构成，分为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境直接接触，III 层与皮肤之间存在一定空隙，将此空隙记为 IV 层。因此，专用服装的设计需要充分考虑高温工作时长以及服装的材料参数。

### 1.2 问题的提出

为设计专用服装，需要将体内温度控制在 $37^{\circ}\text{C}$ 的假人放置于高温的实验环境中，测量假人皮肤表面的温度。为了降低制作成本同时缩短研发周期，请使用数学模型来确定假人皮肤表面的温度变化情况，并对以下问题做出解答：

- (1) 专用服装材料的某些参数值由附件1给出，对环境温度为 $75^{\circ}\text{C}$ 、II层厚度为6 mm、IV层厚度为5 mm、工作时间为90分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度（见附件2）。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的 Excel 文件。
- (2) 当环境温度为 $65^{\circ}\text{C}$ 、IV层的厚度为5.5 mm时，确定II层的最优厚度，确保工作60分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间不超过5分钟。
- (3) 当环境温度为 $80^{\circ}\text{C}$ 时，确定II层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间不超过 5 分钟。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一的分析

问题一要求根据给出的四层织物材料参数、环境温度和工作时间，建立数学模型来刻画出温度的分布。此外，问题一中构建的各参数间得到相关关系，将是问题二和问题三求解的重要基础，所以问题一是问题二和问题三的前提。

当把假人放置于实验室的瞬间，服装表面温度变化很快，而其余未接触的部分仍然保持原来的温度，此时体表温度仍然为 $37^{\circ}\text{C}$ 。随着时间的推移，温度变化波及的范围不断扩大，在一定时间以后，体表温度会逐渐升高。经过一段时间后，温度分布保持恒定，体表温度处于恒定状态。通过以上分析可知，温度的分布随着衣服材质厚度和时间而改变，因此体表温度的变化过程是一维非稳态传热的过程。当热空气由环境向内部传导时，经过每一层介质都会发生较大改变，可将每一层织物视为一个热阻。同时考虑到结合已知条件可方便求取出稳态时温度的分布<sup>[1]</sup>，因此求解过程可分两部分进行：先求解出非均匀内热源的稳态温度分布，再向后差分<sup>[2]</sup>的办法，求取温度随位置和时间的分布情况。

针对第一部分的求解，由于服装的面积尺度远远大于两平面间的距离，根据建筑热工学原理，每一层均可近似看作相互平行的无限大平面，所以边缘的影响可以不计。可取厚度为  $dx$  的微元薄层进行分析，依据此微元薄层的热平衡建立导热方程。由于取微元分析，所得微分方程中必然含有而多重积分，若从纯数学的观点来求解则非常繁琐，可从物理观点方面另辟蹊径。假设微元热流单独作用于某一点处，得出微元内热源的热流分流公式<sup>[1]</sup>，然后用叠加原理将所有微元内热源产生的温度进行叠加，即得最后的温度分布。

针对第二部分的求解,由于引入了时间变量,其与非稳态导热问题有些差别。根据这个特点构造差分方程时,有显式和隐式<sup>[2]</sup>两种不同的差分格式。由于第一部分中已经求取了稳态时的温度分布,可以此为起点,进行迭代计算,即采用向后差分的方法,构造隐式差分方程进行求解。具体求解时需先对时间、空间区域进行离散化,使用坐标来表示不同时间、位置的温度,之后记稳态时的温度为 $K$ 时刻的温度,根据隐式差分方程可计算出 $K-1$ 时刻的温度,进而可以计算出 $K-2$ 时刻的温度,这样一层层迭代即可求取出除边界位置外各时刻点的温度。最后进行边界条件的离散,同样采用隐式进行差分,与前面的不同之处在于:仅取每层的边界的表面节点求解该层边界的温度。

## 2.2 问题二的分析

问题二需要确定在一定环境下 II 层的最优厚度,使得在该环境下工作不被灼伤。由于 II 层的厚度不仅影响稳态时皮肤外侧的温度,还影响皮肤外侧温度达到 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间,设计 II 层的厚度,使得服装能满足特定使用场景,可以建立多目标规划模型<sup>[4]</sup>进行优化。结合题干所给信息,应当以 60 分钟时假人皮肤外侧温度不超过 $47^{\circ}\text{C}$ 以及超过 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间不超过 5 分钟为约束条件;以工作 60 分钟时人体皮肤外侧的温度、工作 55 分钟时人体皮肤外侧的温度、织物 II 层厚度尽可能小为目标函数,建立多目标规划模型。基于问题一的模型基础,可以得到稳态时(工作 60 分钟)体表温度和非稳态时工作 55 分钟对应的体表温度,因此约束条件可以方便求出。为了简化模型,需要将多目标模型转化成单目标模型。常见简化方法有:加权系数法、功效函数法、分层序列法等。功效函数法能够充分考虑每一项评价指标确定的满意值和不允许值,但受极端值的干扰比较严重。分层序列法将问题中的各个目标,按轻重缓急分成不同层次,然后对最重要的一类目标求其有效解,所以其缺点显而易见,它不能评估次重要目标的影响。而加权系数法不仅能够综合评估最重要目标的影响,同时还考虑到非最重要目标的影响。综合考虑各方法的优缺点,本文使用加权系数法进行简化。对简化后的模型需要评估三个目标的权重,可使用层次分析法进行量化求解。最后对多目标优化模型进行求解时,鉴于蒙特卡罗<sup>[3]</sup>方法能够同时处理多种不确定性因素,并且不需要复杂的数学计算的高效性,它对于本文多目标规划问题的求解有很强的适用性。

## 2.3 问题三的分析

问题三需要设计 II 层和 IV 层的最优厚度,满足它在特定环境下的工作需求。分析问题三可知,这是在问题二的基础上,进一步探讨 II 层和 IV 层两个层面的最优厚度问题。因此,在问题二的多目标规划模型的基础上,添加 IV 层的厚度为决策变量,从而构成基于双决策变量的多目标规划模型。此外,还需增加织物 IV 层厚度为规划目标。同理,可以采用层次分析法进行量化求解。由于对象层发生了改动,只需要重新评估各目标的权重<sup>[5]</sup>即可。在对多目标优化模型进行求解时,由于引入了双决策变量,蒙特卡罗算法已无法正常求解。对于这类模型中的高维约束优化问题,遗传算法能很好的解决并获得极大成功。而粒子群算法没有遗传算法的交叉、变异和选择等操作,相对更简洁。考虑到对于高维优化问题,粒子群算法可能会早熟收敛,而  $\gamma$ -粒子群算法<sup>[6]</sup>则更适合求解高维优化问题,因此本题选用  $\gamma$ -粒子群算法求解。

### 三、模型假设

- 1、假设空气层稳定；
- 2、假设衣服的每层材质分布均匀, 导热均匀；
- 3、假设不存在湿度的影响；
- 4、假设介质交界处，两介质表面温度相同。

### 四、符号说明

符号	表示含义
$q$	热流密度
$t_i(i = 0,1,2,3,4)$	由环境到人体皮肤体表每一层的临界温度
$r_i(i = 1,2,3,4)$	第I~IV层织物的厚度
$\lambda_i(i = 1,2,3,4)$	第I~IV层织物的热传导率
$T_0$	初始温度
$T_\infty$	环境温度
$(i, k)$	时间-空间区域中的一个节点的位置
$T_1^{3600}$	工作60分钟时人体皮肤外侧的温度
$T_1^{3300}$	工作55分钟时人体皮肤外侧的温度
$\omega_i(i = 1,2,3)$	多目标规划模型的权重系数
$A$	截取的薄层截面的表面积
$q_v(x)$	发热源在 $x$ 轴方向上的平均发热率分布
$q_v(x)Adx$	微元薄层热量的产生量
$\rho_i(i = 1,2,3,4)$	第I~IV层织物的密度
$c_i(i = 1,2,3,4)$	第I~IV层织物的密度
$h$	每一层之间的对流换热系数
$t(x)$	稳态时温度的分布函数
CR	检验系数
$\lambda_{max}$	最大特征根

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一的模型建立和求解

资料表明，体表温度的变化是一维非稳态传热直至到达稳态的过程，将温度分布的求解分为两个阶段进行。先求解稳态时温度分布，依据热平衡建立的导热微分方程<sup>[1]</sup>进行分析；再求解非稳态时温度随时间变化分布，建立热传递微分方程模型，采用离散法和向后差分法求其数值解。

#### 5.1.1 模型的建立

##### 5.1.1.1 稳态阶段温度分布

##### 1、热阻串联模型—确定三层织物边界温度

已知专用服装由三层织物材料构成，记为I、II、III层，其中I层与外界环境接触，III层与皮肤之间存在空隙，将此空隙记为IV层，且每层由不同材料组成。由此，抽象出下图5.1-1，假设各层之间接触良好，并且沿水平方向每一个横截面上受热均匀，在稳态情况下，空气通过每一个环节的导热热流密度<sup>[1]</sup> $q$ 相同。

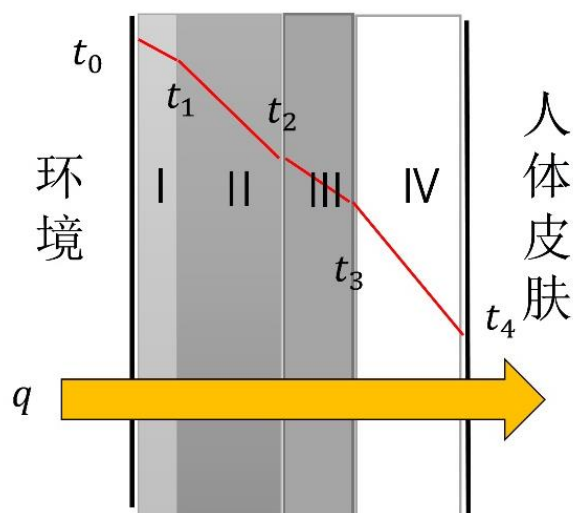


图5.1-1 热量流通示意图

对于整个假人，服装的面积尺度远远大于两平面间的距离，根据建筑热工学原理，每一层均可近似看作相互平行的无限大平面。此时，一个表面发射的辐射热将全部投射到另一个表面上。每一层即可看成一个热阻，串联热阻叠加与电学中串联电阻叠加原则<sup>[8]</sup>相对应，即在一个串联的热量传递过程中，则各串联环节的总热阻等于各串联环节热阻。类比如图5.1-2所示

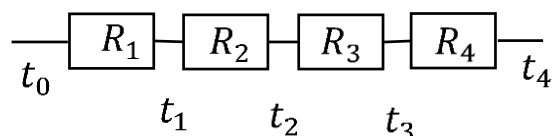


图5.1-2 织物材料各层热阻等效图

因此，热流密度为

$$q = \frac{t_0 - t_1}{r_1/\lambda_1} + \frac{t_1 - t_2}{r_2/\lambda_2} + \frac{t_2 - t_3}{r_3/\lambda_3} + \frac{t_3 - t_4}{r_4/\lambda_4} \quad (5.1.1)$$

其中,  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$  为由环境到人体皮肤体表每一层的临界温度,  $r_1, r_2, r_3, r_4$  为每一层织物的厚度,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  为每一层织物的热传导率。

由热阻串联可知:

$$\bar{q} = \frac{t_0 - t_4}{r_1/\lambda_1 + r_2/\lambda_2 + r_3/\lambda_3 + r_4/\lambda_4} \quad (5.1.2)$$

由串联电阻分压原理, 即临界温度可以表示为:

$$t_i = t_{i-1} + \bar{q} \frac{r_{i-1}}{\lambda_{i-1}}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.1.3)$$

即热空气由环境向内部传导时, 每一层次相互影响, 由热量传递原理, 取下一层的左边界温度即为上一层右边界温度, 然后进行迭代计算。

## 2、稳态热传递微分方程模型—描述织物水平方向温度分布

由于服装的面积尺度远远大于两平面间的距离, 根据建筑热工学原理, 每一层均可近似看作相互平行的无限大平面, 因此边缘的影响可以不计。导热沿服装厚度方向进行, 所以每层织物材料的等温面垂直于厚度方向, 如图5. 1-1中所示。沿厚度的方向, 以衣服中织物材料的I层为例, 在其距离外界表面  $x$  处, 取厚度为  $dx$  的微元薄层进行分析。依据此微元薄层的热平衡建立导热方程<sup>[1]</sup>。

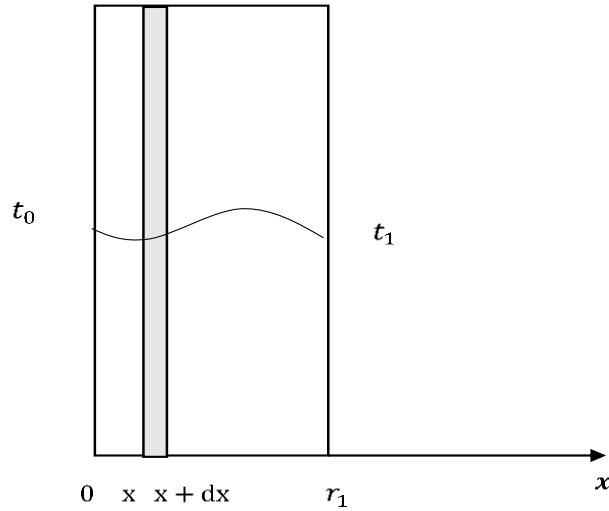


图5. 1-3 微元截面选取示意图

设该薄层截面的表面积为  $A$ , 薄层的导热系数为  $\lambda_1$ , 根据傅立叶定律, 从  $x$  处流入薄层的热量为:

$$q_x = -\lambda_1 A \frac{dt}{dx} \quad (5.1.1)$$

薄层  $x + dx$  处流出的热量为

$$q_{x+dx} = q_x + dq_x = -\lambda_1 A \frac{dt}{dx} - A \frac{d}{dx} \left( \lambda_1 \frac{dt}{dx} \right) dx \quad (5.1.2)$$

从附件中可知  $\lambda_1$  为常数，则

$$q_{x+dx} = -\lambda_1 A \frac{dt}{dx} - \lambda_1 A \frac{d^2 t}{d^2 x} dx \quad (5.1.3)$$

薄层内有内热源时，设在  $x$  轴方向上其发热源的单位体积发热率分布为  $q_v(x)$ ，可得该微元薄层热量的产生量为  $q_v(x)Adx$ 。

经过一段时间后，该模型达到稳态平衡状态，此时薄层内部的处于稳定状态。因此，微元薄层处流入和流出的热量动态平衡。即得

$$q_x + Aq_v(x)dx = q_{x+dx} \quad (5.1.4)$$

$$-\lambda_1 A \frac{dt}{dx} + Aq_v(x)dx = -\lambda_1 A \frac{dt}{dx} - \lambda_1 A \frac{d^2 t}{d^2 x} dx \quad (5.1.5)$$

$$\frac{d^2 t}{d^2 x} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_1} \quad (5.1.6)$$

此即为导热系数为常数的、均匀分布内热源的薄层稳态导热微分方程。设薄层左、右两壁面的温度分别为  $t_0$  和  $t_1$ ，则式(5.1.6)的临界条件为

$$x = 0 \text{ 时, } t = t_0$$

$$x = r_1 \text{ 时, } t = t_1$$

式(5.1.6)的通解显然为

$$t = -\lambda_1^{-1} \iint q_v(x) dx dx + c_1 x + c_2 \quad (5.1.7)$$

根据上述边界条件，可将其视为在温差源( $t_0 - t_1$ )作用下所产生的薄层温度分布  $t_1(x)$ 。按照导热系数为常数的薄层稳态导热公式，它应该呈直线分布

$$\frac{t_0 - t_1(x)}{t_0 - t_{w2}} = \frac{x}{r_1} \quad (5.1.8)$$

因为式(5.1.6)为线性常微分方程，该情况下叠加原理<sup>[7]</sup>适用。

下面分别对如何计算各微元热流中流过的热流量和如何将所有的微元温度叠加进行讨论：

#### (1) 热流分流

针对各微元热流中流过的热流量的计算难题，使用热流分流公式进行解决。假设微元热流  $q_v(x_v)Adx_v$  单独作用于  $x = x_v$  处，产生大小为  $dt(x_v)$  的微元升温，则  $q_v(x_v)Adx_v$  中流过  $x > x_v$  段薄层的热流量为

$$dQ_{21}(x_v) = \frac{dt(x_v)}{(r_1 - x_v)/(A\lambda_1)} \quad (5.1.9)$$

而流过  $x < x_v$  段薄层的热流量为

$$dQ_{22}(x_v) = \frac{dt(x_v)}{x_v/(A\lambda_1)} \quad (5.1.10)$$

则

$$\frac{dQ_{21}(x_v)}{dQ_{22}(x_v)} = \frac{x_v}{r_1 - x_v} \quad (5.1.11)$$

由于

$$q_v(x_v)Adx_v = dQ_{21}(x_v) + dQ_{22}(x_v) \quad (5.1.12)$$

故得

$$dQ_{21}(x_v) = \frac{x_v}{r_1} q_v(x_v) A dx_v \quad (5.1.13)$$

$$dQ_{22}(x_v) = \frac{r_1 - x_v}{r_1} q_v(x_v) A dx_v \quad (5.1.14)$$

式(5.1.13)、(5.1.13)就是热流分流公式。

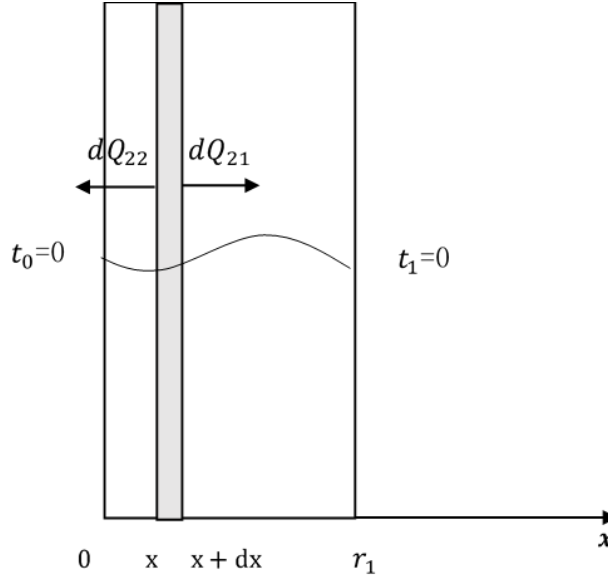


图5.1-4 流进和流出微元薄层的热流量示意图

结合图5.1-4分析可得，在 $x = x(x > x_v)$ 处，此微元热流产生的微元温度为

$$dt_{21}(x) = \frac{r_1 - x}{A\lambda_1} \cdot dQ_{21}(x_v) = \frac{r_1 - x}{\lambda_1} \cdot \frac{x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v \quad (5.1.15)$$

在 $x = x(x < x_v)$ 处，微元热流产生的微元温度为

$$dt_{22}(x) = \frac{x}{A\lambda_1} \cdot dQ_{22}(x_v) = \frac{x}{\lambda_1} \cdot \frac{r_1 - x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v \quad (5.1.16)$$

## (2) 参变量叠加

由于微元热流 $q_v(x_v)A dx_v$ 的坐标为 $x_v$ ，且所求温度处其平面位置坐标为 $x$ ，所以该叠加应该为以 $x$ 为参变量的积分。同时考虑到微元热流位置 $x_v < x$ 和 $x_v > x$ 的两种情况，则此积分应按照式子(5.1.15)和(5.1.16)，分段在区间 $[0, x]$ 和 $[x, r_1]$ 进行。因此，全体内热源单独作用时，圆柱体内的稳态温度分布为

$$\begin{aligned} t_2(x) &= \int_0^x \frac{r_1 - x}{\lambda_1} \cdot \frac{x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v + \int_x^{r_1} \frac{x}{\lambda_1} \cdot \frac{r_1 - x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v \\ &= \frac{r_1 - x_v}{\lambda_1 r_1} \int_0^x x_v q_v(x_v) dx_v + \frac{x}{\lambda_1 r_1} \int_x^{r_1} (r_1 - x_v) q_v(x_v) dx_v \quad (5.1.17) \end{aligned}$$

对于全体内热源单独作用时，圆柱体内的热流量 $Q_2(x)$ 分布的求解，可以同理根据式(5.1.13)、(5.1.14)，分段进行积分。考虑到热流量是矢量，规定与 $x$ 轴方向一致的为正，与 $x$ 轴方向相反的为负。根据此规定，可得式(5.1.13)表示的热流量应该为负值。



$$\begin{aligned}
Q_2(x) &= \int_0^x \frac{x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v - \int_x^\delta \frac{r_1 - x_v}{r_1} q_v(x_v) dx_v \\
&= \frac{A}{r_1} \int_0^x x_v q_v(x_v) dx_v - \frac{A}{r_1} \int_x^\delta (r_1 - x_v) q_v(x_v) dx_v \quad (5.1.18)
\end{aligned}$$

最后利用温差源 $(t_0 - t_1)$ 作用于薄层产生的温度 $t_1(x) = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{x}{r_1}$ 以及热流量 $Q_1(x) = \frac{\lambda_1 A}{r_1} (t_0 - t_1)$ ，将其分别与式(5.1.17)和式(5.1.18)叠加，得到的非均匀圆柱体的稳定温度分布公式如下：

$$\begin{aligned}
t(x) &= t_0 - (t_0 - t_1) \frac{x}{r_1} + \frac{r_1 - x}{\lambda_1 r_1} \int_0^x x_v q_v(x_v) dx_v \\
&+ \frac{x}{\lambda_1 r_1} \int_x^\delta (r_1 - x_v) q_v(x_v) dx_v \quad (5.1.19)
\end{aligned}$$

在应用式(5.1.19)进行求解时，为了进一步简化积分求解过程，， $q_v(x_v) = \bar{q}$ ，对式(5.1.19)进行积分，整理后可得：

$$\begin{aligned}
t(x) &= t_0 - (t_0 - t_1) \frac{x}{r_1} + \frac{\bar{q} \delta^2}{2\lambda_1} \left[ \frac{x}{r_1} - \left( \frac{x}{r_1} \right)^2 \right] \\
&= t_0 - \frac{\bar{q}}{2\lambda_1} x^2 - \left( \frac{t_0 - t_1}{r_1} - \frac{\bar{q} r_1}{2\lambda_1} \right) x \quad (5.1.20)
\end{aligned}$$

对于服装的其他层面的分析，由于各层次的织物材料的参数已给出，所以可同理求解得到其他层面到达稳态时，稳态时其内部水平方向的温度分布。

### 5.1.1.2 非稳态热传递过程温度分布

非稳态导热与稳态导热的主要区别在于加入了时间变量，由于系统内部温度随着时间的推移会越来越高，其数值计算就出现了一些新的特点。在非稳态导热微分方程中，与时间因素相关的非稳态项是温度对时间的一阶导数，这给差分离散带来了新的困难。考虑到稳态时温度分布在5.1.1.1中已经得出，并且其相对于初始状态更有参考意义，所以本文选用向后差分<sup>[2]</sup>的办法，利用隐式差分方程<sup>[2]</sup>由后向前推导温度随时间的变化。

#### 1、非稳态热传递微分方程模型的建立

根据以上对于服装-人体系统的分析，将每层织物的面积无限延展，如图5.1-5所示，其一半厚度为 $L$ ，初始温度为 $T_0$ ，环境温度为 $T_\infty$ ，每一层织物的导热系数为 $\lambda_i$ ，密度为 $\rho_i$ ，比热为 $c_i$ ，每一层之间的对流换热系数为 $h$ 。从将假人系统放入实验室开始，建立一维非稳态热传递微分方程：

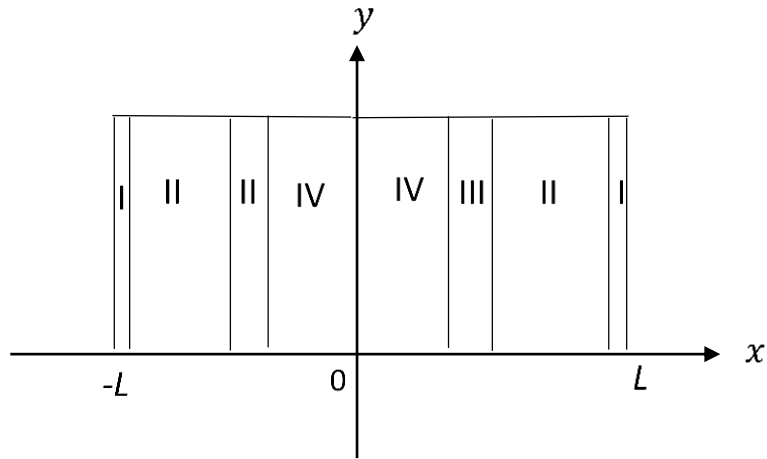


图5.1-5 服装-人体系统分析

由于人体服装换热关于人体表面是对称的，仅对一半区域进行计算即可。坐标x的原点选在人体表面皮肤上，因而一半区域的非稳态导热的数学描述为：

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & (1) \\ \tau = 0, T = T_0 & (2) \\ x = 0, \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 & (3) \\ x = L, -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) & (4) \end{cases}$$

利用分离变量可得该数学模型的解析解为：

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos \left( \mu_n \frac{x}{L} \right) e^{-\mu_n^2 F_0} \quad (5.1.21)$$

其中， $F_0 = \frac{a\tau}{L^2}$ ,  $a = \frac{h}{c\rho} \mu_n$  为方程  $\text{ctg} \mu = \frac{\mu}{B_i}$  的根， $B_i = \frac{hL}{\lambda}$

## 2、基于向后差分的微分方程数值解法

### ① 时间-空间区域离散化

首先，对于环境-服装-人体构成的一维非稳态导热进行时间-空间的离散化，如图5.1-6所示。

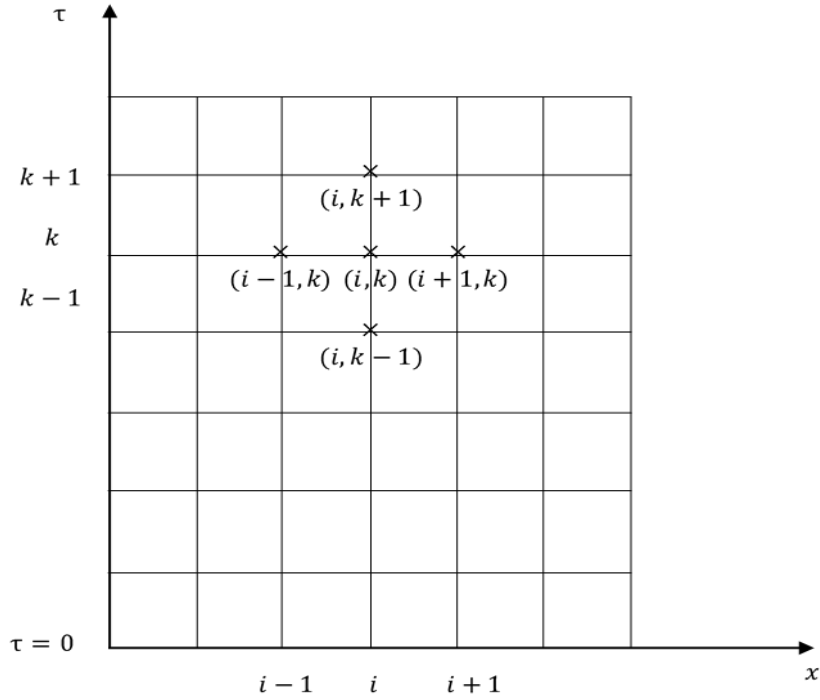


图5.1-6 模型的时间-空间的离散化

$x$ 为空间坐标，本文将计算区域划分为 $(I - 1)$ 份，得到 $I$ 个空间节点； $t$ 为时间坐标，将时间坐标上的计算区域划分为 $(K - 1)$ 份，得到 $K$ 个时间节点。从一个时间层到下一个时间层的间隔 $\Delta t$ 即为时间步长。空间网格线与时间网格线的交点，如 $(i, k)$ 代表了时间-空间区域中的一个节点的位置，相应的温度为 $T_i^k$ 。

## ② 微分方程离散化

非稳态 $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ 的离散有三种不同的格式，即向前差分，向后差分和中心差分。在对系统稳态分析时，我们计算出环境-服装-人体的热传递近似的稳态下，温度随距离人体距离的变化值。考虑到初始时刻，外界环境温度、织物各层环境温度、人体表面温度三者之间，尚未形成相关性联系，也未知各层次初始时刻的温度，本文决定使用向后差分的方法，由热传递到达稳定状态的各点温度，逐步向前推导，从而计算出所有时刻的温度分布。

对于 $i$ 结点，在 $K$ 和 $K - 1$ 时刻可将微分方程（1）写成下面式子：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^K = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^K \quad (5.1.22)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^{K-1} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{K-1} \quad (5.1.23)$$

将函数 $T$ 在节点 $(i, k - 1)$ 对 $(i, k)$ 作泰勒展开，可有

$$T_i^{k-1} = T_i^k + \Delta T \left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^K + \frac{\Delta T^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\right)_i^K + \dots \quad (5.1.24)$$

于是有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^K = \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\partial \tau} - o(\Delta T) \quad (5.1.25)$$

此处符号 $o(\Delta T)$ 表示余项中 $\Delta T$ 的最低阶为一次。

由式(5.1.25)可得，在点 $(i, k)$ 处的一阶导数的向后差分形式为：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_i^K = \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\partial \tau} \quad (5.1.26)$$

将式(5.1.26)带入(5.1.22)和(5.1.23)，并将(5.1.22)和(5.1.23)右端关于 $x$ 的二阶导数用相应的差分代替，则可得到下列显式和隐式两种不同的差分格式：

显式：

$$T_i^k = fT_{i+1}^{k-1} + (1 - 2f)T_i^{k-1} + fT_{i-1}^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K, i = 2, 3, \dots, I - 1) \quad (5.1.27)$$

隐式：

$$T_i^k = \frac{1}{1 + 2f} (fT_{i+1}^k + fT_{i-1}^k + T_i^{k-1}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K, i = 2, 3, \dots, I - 1) \quad (5.1.28)$$

其中， $f = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$ 即为以 $\Delta x$ 为特征长度的傅里叶数，称为网格傅里叶数。

由于本文准备采用向后差分，即使第 $k - 1$ 时间层的节点由第 $k$ 时间层的节点表示，符合隐式方程的格式。因此，将(5.1.28)化简得：

$$T_i^{k-1} = -fT_{i+1}^k + (1 + 2f)T_i^k - fT_{i-1}^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K, i = 2, 3, \dots, I - 1) \quad (5.1.29)$$

由上式可见，其右端只涉及 $k$ 时刻的温度，当从 $k = K$ 开始计算，在 $k = K$ 时等号右端都是已知值，因而直接可计算出 $k = K - 1$ 时刻各点的温度。由 $k = K - 1$ 时刻的各点的温度值，又可以直接利用式(5.1.29)计算 $k = K - 2$ 时刻的各点的温度，这样一个时层一个时层的迭代即可，但此时边界位置各时刻点的温度还未知，由此进行边界条件的离散。

### ③ 边界条件离散化

对于式(3)和(4)所给出的边界条件，可以直接用差分代替微分。查找文献显示，边界节点的差分格式是显示还是隐式，取决于内部节点的差分方程组合。由于本文内部节点采用隐式时，边界节点也用隐式进行差分。用 $K - 1$ 时刻相应节点的差分，代替式(3)和(4)中的微分，可得到边界节点的差分方程：

$$\begin{cases} T_1^{k-1} = T_2^{k-1} \\ T_I^{k-1} = \frac{1}{\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1} \left( T_{I-1}^{k-1} + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_\infty \right) \end{cases} \quad (5.1.30)$$

### ④ 数值解格式

综上所述，一维非稳态导热问题的离散格式的数值解为如下形式：

$$\begin{cases} \text{初始值: } T_1^K = T_K \\ T_i^{k-1} = -fT_{i+1}^k + (1+2f)T_i^k - fT_{i-1}^k \\ T_1^{k-1} = T_2^{k-1} \\ T_l^{k-1} = \frac{1}{\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1} \left( T_{l-1}^{k-1} + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_\infty \right) \end{cases} \quad (5.1.31)$$

其中,  $k = 0, 1, 2, \dots, K, i = 2, 3, \dots, I - 1$ 。通过不断迭代以上方程组, 计算出每个时层每个节点的温度, 直至收敛即可。

### 5.1.2 模型的求解

分析附件二得知稳态时体表温度 $48.0^\circ\text{C}$ , 首先根据热阻串联模型, 求解出稳态情况下每层介质交界处的温度数值, 如下表所示。

表5.1-1 稳态时介质交界处的温度分布

编号	$t_0$	$t_1$	$t_1$	$t_3$	$t_4$
温度( $^\circ\text{C}$ )	75	74.3	72.8	65.1	48.08

将求解得到的每层介质的交界处的温度, 带入稳态导热微分方程模型, 计算得到稳态时温度随距离变化情况如下:

$$t(x) = \begin{cases} 75 - 581.9x^2 - 1163.7x, 0 < x < r_1 \\ 74.3 - 128.9x^2 - 257.8x, r_1 < x < r_2 \\ 72.8 - 1060.3x^2 - 2120.6x, r_2 < x < r_3 \\ 65.1 - 1704x^2 - 3408x, r_3 < x < r_4 \end{cases}$$

为了直观地观察稳态时的温度分布情况, 可根据方程绘制出稳态时织物各层水平方向温度分布图, 见图5.1-7。

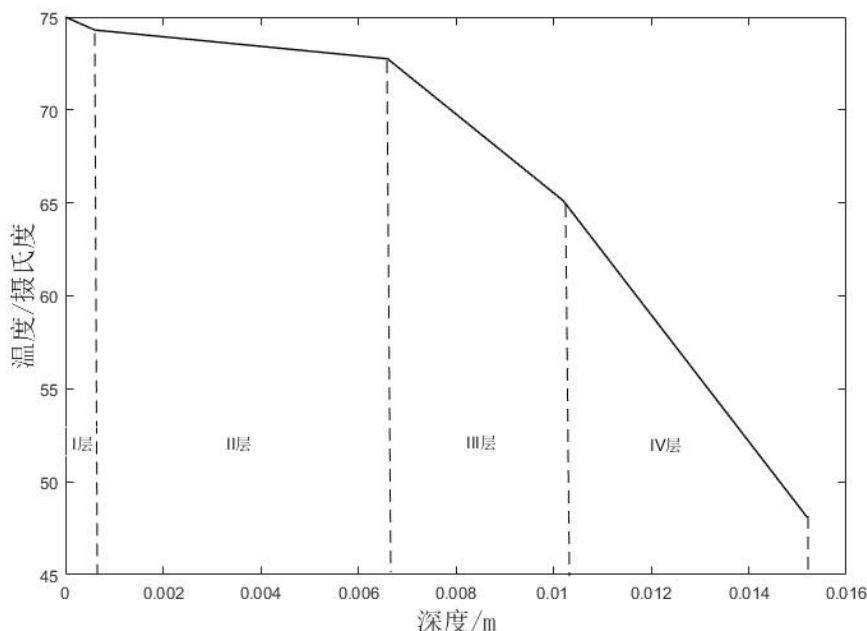


图5.1-7 稳态时的温度分布图

根据上式可以得到稳态时在隔温服装中的温度分布情况, 并将其作为迭代的上边界初值, 结合非稳态热传递模型中的式(5.1.30)和(5.1.31)向后差分计算后可以得到隔

温服的时空分布矩阵(详见附录“problem1.xlsx”)。下表5. 1-2截取的是体表温度开始变化后，距离体表不同距离处，在不同时间下的温度分布情况。

表5. 1-2 不同位置和时间下温度分布的部分数据

距离 时间	0.1mm	0.11mm	0.12mm	0.13mm	0.14mm
22s	37.44793	37.49602	37.5441	37.59218	37.64026
23s	37.45782	37.50589	37.55396	37.60203	37.6501
24s	37.45782	37.50589	37.55396	37.60203	37.6501
25s	37.46771	37.51577	37.56382	37.61188	37.65994
26s	37.4776	37.52564	37.57369	37.62173	37.66977
27s	37.48748	37.53552	37.58355	37.63158	37.67961

为了更清晰的得到稳态时织物各层温度变化情况，我们提取附录“problem1.xlsx”数据，选取每一层的任意竖直截面（假设每一层竖直截面温度相等），绘制出时间与温度的变化曲线图5. 1-8。

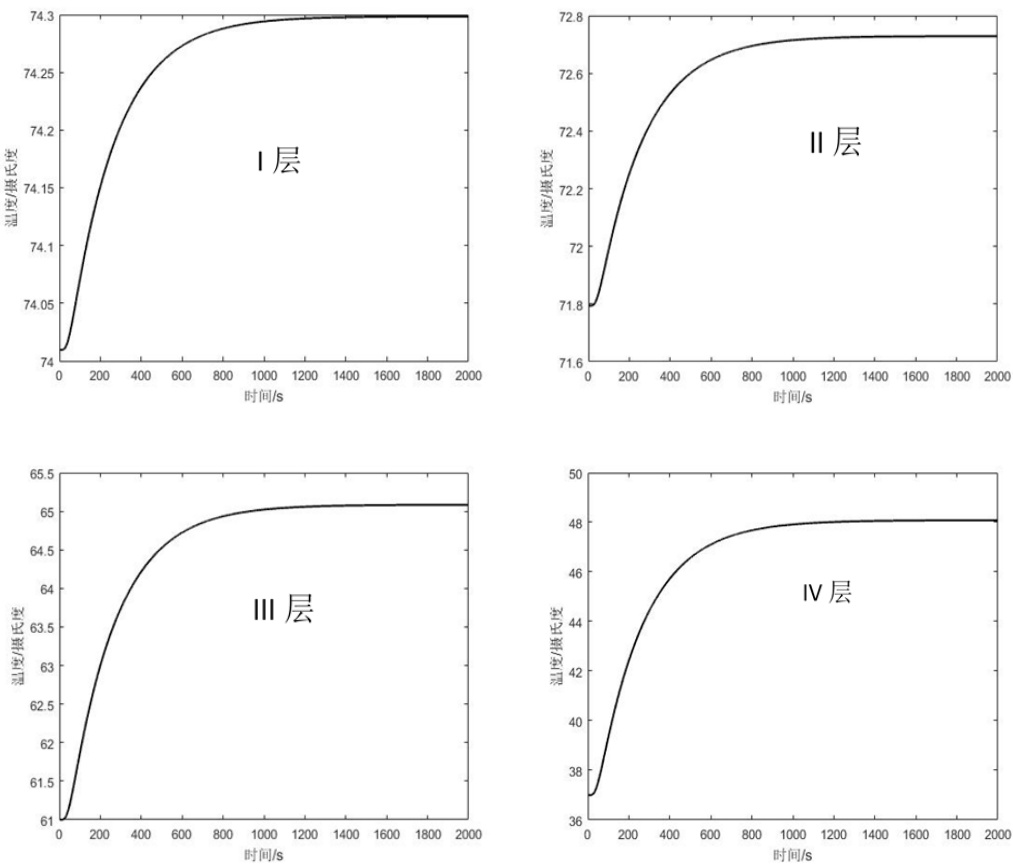


图5. 1-8 四个截面的温度随时间变化情况

对于非稳态热传递微分方程模型，根据求得稳态时的温度分布，利用基于离散格式向后差分的数值解方法，通过1607次迭代解出，从稳态时层向前各时层每个节点的温度分布。利用MATLAB，绘制出不同时间下，沿着体表-服装-环境方向的温度变化情况，如图5. 1-9所示。

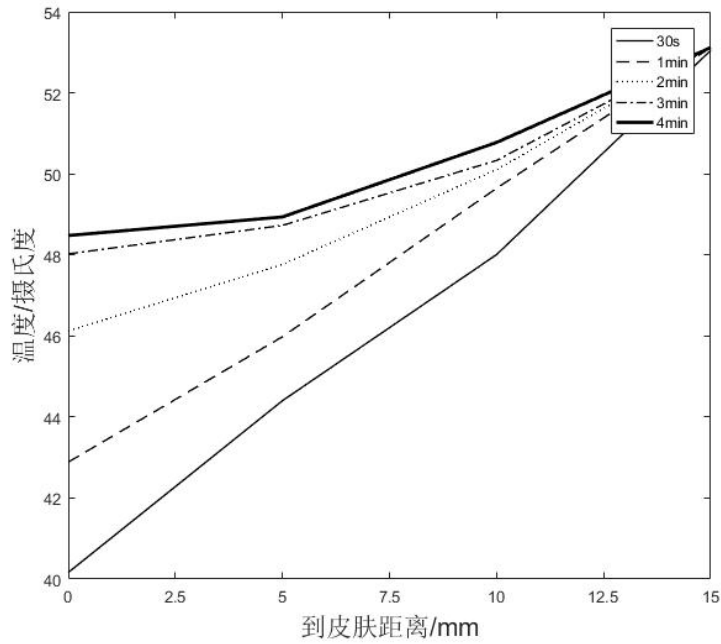


图5.1-9 不同位置和时间下的曲线图

由图可知，当 $t = 30s$ 时，环境温度的影响已经波及到皮肤外侧，使得人体体表升温。在同一位置处随着时间的推移，该处的升温呈现先快后慢、最后趋于稳定的特点；在相同时间里，不同位置处，温度变化的快慢不同，从图可以看出曲线斜率变化较大的点即为不同介质的交界处。

### 5.1.3 模型的检验

#### 1、有效性检验

对非稳态情况下，建立的热传递微分方程结果进行有效性检验。利用MATLAB拟合出基于向后差分数值解解出的皮肤表面温度函数图和附录二中已知的皮肤表面温度函数图，见图图5.1-10，两者进行对比分析。

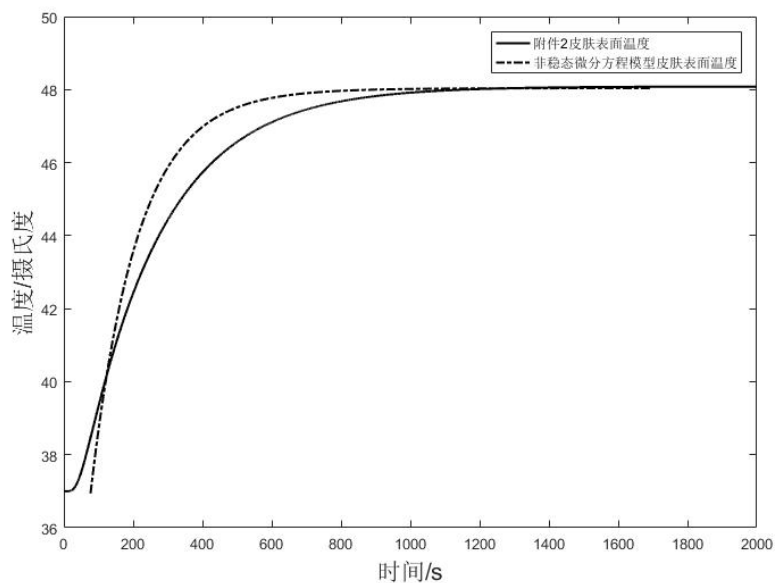


图5.1-10 温度分布对比图

由上图可以得出两条曲线吻合度较高，最终收敛温度几乎一致，且当温度收敛到37℃时的经过的时间为1607s，和附件2的收敛时间相差22s，误差率为1.4%，误差较小，表明该模型有效。

## 2、灵敏度检验

由于上式中使用了时空区域离散化求解，非稳态导热计算的瞬时温度分布与时间步长的取值有关，因此，本题进行时间步长的灵敏度检验，取两个不同时刻，改变各时刻取值的时间步长，画出距离与温度的关系图，见下图：

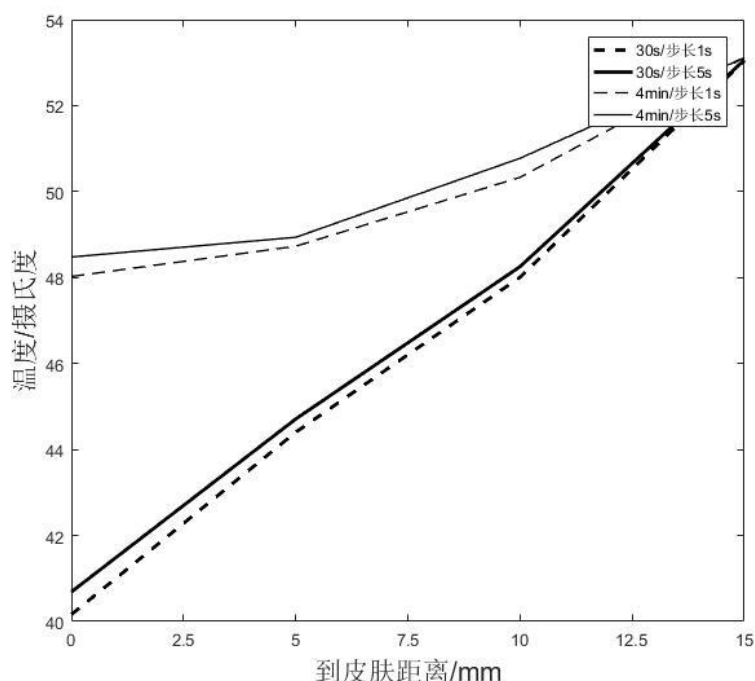


图5.1-11 灵敏度分析

由图可见，在步长不同的情况下温度的时空分布没有显著的变化，兼顾到计算的精准度和计算的工作量可以认为取步长为1s时的计算数据有效。在 $\tau < 30s$ 的时间范围内其近肤层尚未受到界面上发生的热扰动的影响，因此在整个过程中把物体当做厚为 $2\tau$ 的半无限大物体来处理是一种合理的方法。

### 5.1.4 问题的结论

温度的分布随位置、时间而改变，在织物材料的不同层面，温度变化满足不同的函数关系式。虽然它们的变化快慢不一但变化趋势一致。温度从37℃收敛到稳态48.08℃时的时间为1607s，详细温度分布见附录“problem1.xlsx”。



## 5.2 问题二的模型建立与求解

根据题干所给信息，建立的多目标规划模型，取 60 分钟时假人皮肤外侧温度不超过 $47^{\circ}\text{C}$ ，以及超过 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间不超过 5 分钟为约束条件，工作 60 分钟和工作 55 分钟这两个临界处人体皮肤外侧的温度，可通过问题一的模型求解。目标函数取工作 60 分钟时人体皮肤外侧的温度、工作 55 分钟时人体皮肤外侧的温度、织物 II 层厚度，构建多目标规划模型对 II 层厚度进行优化。

### 5.2.1 模型的建立和求解

#### 5.2.1.1 多目标规划模型

本题要求计算出在特定条件下，织物II层的最优厚度，本文选择在问题一模型的基础上建立多目标规划模型<sup>[4]</sup>对符合条件的最优厚度进行求取，所以，取织物II层厚度 $r_2$ 为决策变量。

##### ①目标函数确定

分析题目可知，织物II层厚度选取的目标包括三个方面：工作60分钟时人体皮肤外侧的温度 $t_4$ 即 $T_1^{3600}$ ，工作55分钟时人体皮肤外侧的温度 $T_1^{3300}$ 在规定控制下尽可能低；由于需要高温天气防护服工作人员需随身穿戴，要求织物的质量尽可能轻，由于体积未知该要求即可等价为，织物II层厚度 $r_2$ 尽可能薄。

由于多目标规划本身的特点，求多目标规划问题的解也就是求非劣解。求解方法主要有：加权系数法，功效函数法，极大熵方法等。这些方法各有优缺点，本文使用加权系数法，为每一个目标赋予一个权系数把多目标模型转化成单一目标的模型，即：

$$f = \omega_1 T_1^{3600} + \omega_2 T_1^{3300} + \omega_3 r_2 \quad (5.2.1)$$

这三个目标中，最为重要的是工作60分钟时人体皮肤外侧的温度，它直接影响着该防护服的使用效率。其次为工作55分钟时人体皮肤外侧的温度，需要超过 $44^{\circ}\text{C}$ 的时间不超过5分钟，否则对人体也会有烧伤的风险。因此，在主观分析这三个目标重要程度的基础上，进行层次分析<sup>[5]</sup>，量化各目标的重要程度。

##### ②层次分析法求解变量权重

将相关因素按照不同属性自上而下分解成三层。同一层的诸因素从属于上一层，同时又支配着下一层的因素，而同一层的各因素间相互独立，最上层为目标层，通常只有一个因素；最下层为对象层，即我们确定的各个指标；中间层为准则层。将每一层次的各要素进行重要程度的两两比较，得到对比较阵，计算对比较阵的最大特征值及其特征向量，从而得到下一层次相对于上一层次的重要性程度，进而确定各因素间的权重。

(1) 首先，从防护服工作效益和人体实际效益两方面考虑，建立如下层次结构图

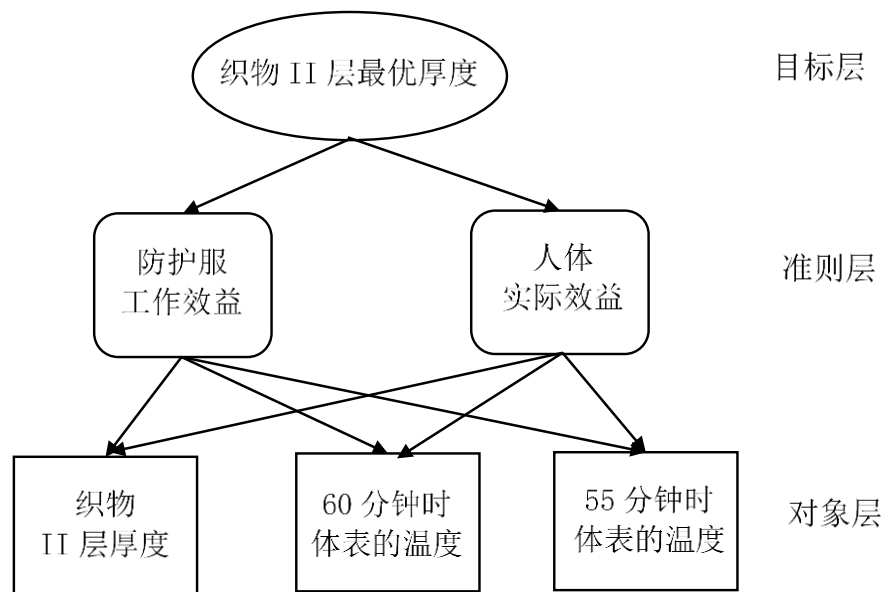


图5.2-1 层次结构图

(2) 利用 1-9 尺度法构造因素间的成对比矩阵:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3}, (i, j = 1, 2, 3)$$

其中:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \\ a_{ii} = 1 \end{cases}$$

(3) 求解对比矩阵的权重向量  
将A的每一列向量归一化得:

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}$$

对 $\tilde{\omega}_{ij}$ 按行求和得:

$$\tilde{\omega}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_{ij}$$

将 $\tilde{\omega}_i$  归一化得:

$$\omega_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i}$$

由此 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 即为各指标值的权向量矩阵。

(4) 一致性检验

a. 计算一致性指标CI:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

b. 计算随机一致性指标RI:

随机一致性指标RI和判断矩阵的阶数有关，一般情况下，矩阵阶数越大，则出现一致性随机偏离的可能性也越大，其对应关系如表5.1-1所示：

表5.2-1 平均随机一致性指标RI标准值

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32

c. 计算检验系数CR

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$ ，则认为该判断矩阵通过一致性检验，否则就不具有满意一致性，需要重新选择指标。

### ③约束条件确定

由问题一的模型可知，在稳态条件下，每一层的边界温度为：

$$\bar{q} = \frac{t_0 - t_4}{r_1/\lambda_1 + r_2/\lambda_2 + r_3/\lambda_3 + r_4/\lambda_4} \quad (5.2.2)$$

$$t_i = t_{i-1} - \bar{q} \frac{r_i}{\lambda_i}, i = 1, 2, 3 \quad (5.2.3)$$

其中， $t_4 = T_1^{3600}$ 即60分钟时人体皮肤外侧的温度，其他变量和问题一中说明一样。

根据稳态微分方程模型：

$$t(x) = t_i - \frac{q_v}{2\lambda_{i+1}} x^2 - \left( \frac{t_i - t_{i+1}}{r_1} - \frac{q_v r_i}{2\lambda_i} \right) x \quad (5.2.4)$$

即可求得每一类织物层各节点的温度分布。

接着，需要得到55分钟时人体皮肤外侧的温度 $T_1^{3300}$ ，即使用前文的非稳态差分方程进行迭代求解，得出 $T_1^{3300}$ 关于决策变量 $r_2$ 和相关变量 $t_4$ 的函数，即

$$\begin{cases} \text{初始值: } T_1^K = T_K \\ T_i^{k-1} = -fT_{i+1}^k + (1+2f)T_i^k - fT_{i-1}^k \\ T_1^{k-1} = T_2^{k-1} \\ T_I^{k-1} = \frac{1}{\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1} \left( T_{I-1}^{k-1} + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_\infty \right) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

根据题目要求约束条件，60分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 $47^\circ\text{C}$ ，超过 $44^\circ\text{C}$ 的时间不超过5分钟，符号化可以表示为：

$$t_4 = T_1^{3600} \leq 47^\circ\text{C}$$

$$T_1^{3300} \leq 44^\circ\text{C}$$

同时，由附件一可得，织物II层厚度有范围限制：

$$0.6\text{mm} \leq r_2 \leq 25\text{mm}$$

至此可以建立多目标优化模型：

$$\min f = \omega_1 T_1^{3600} + \omega_2 T_1^{3300} + \omega_3 r_2$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& t_4 = T_1^{3600} \leq 47^\circ\text{C} \\
& T_1^{3300} \leq 44^\circ\text{C} \\
& 0.6\text{mm} \leq r_2 \leq 25\text{mm} \\
& \bar{q} = \frac{t_0 - t_4}{r_1/\lambda_1 + r_2/\lambda_2 + r_3/\lambda_3 + r_4/\lambda_4} \\
& t_i = t_{i-1} - \bar{q} \frac{r_i}{\lambda_i}, i = 1, 2, 3, 4 \\
& t_{\text{I}}(x) = t_0 - \frac{q_v}{2\lambda_1} x^2 - \left( \frac{t_0 - t_1}{r_1} - \frac{q_v r_1}{2\lambda_1} \right) x \\
& t_{\text{II}}(x) = t_1 - \frac{q_v}{2\lambda_2} x^2 - \left( \frac{t_1 - t_2}{r_2} - \frac{q_v r_2}{2\lambda_2} \right) x \\
& t_{\text{III}}(x) = t_2 - \frac{q_v}{2\lambda_3} x^2 - \left( \frac{t_2 - t_3}{r_3} - \frac{q_v r_3}{2\lambda_3} \right) x \\
& t_{\text{IV}}(x) = t_3 - \frac{q_v}{2\lambda_4} x^2 - \left( \frac{t_3 - t_4}{r_4} - \frac{q_v r_4}{2\lambda_4} \right) x \\
& T_K = (t_{\text{IV}}(x), t_{\text{III}}(x), t_{\text{II}}(x), t_{\text{I}}(x)) \\
& \begin{cases}
\text{初始值: } T_i^K = T_K \\
T_i^{k-1} = -fT_{i+1}^k + (1 + 2f)T_i^k - fT_{i-1}^k \\
T_1^{k-1} = T_2^{k-1} \\
T_l^{k-1} = \frac{1}{\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1} \left( T_{l-1}^{k-1} + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_\infty \right)
\end{cases}
\end{aligned} \right\} S.T. \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

其中求出所有符合约束条件的织物II层厚度所在的范围即为所求的织物II层厚度调节范围；而得到的最优解，就是最满足问题中织物层厚度选取目标的最佳织物II层厚度。

### 5.2.1.2 蒙特卡洛算法求解多目标优化模型

蒙特卡罗方法<sup>[3]</sup>是一种典型的多因素敏感性分析方法，能够同时处理多种不确定性因素，克服了单因素敏感性分析法的不足，并且不需要复杂的数学计算，只通过多次反复模拟试验，便可获知结果，对于本文多目标规划问题的求解有很强的适用性。

该方法是一种采用统计抽样理论近似地求解数学或物理问题的方法，它是一种同时处理多个变量的分析方法。在对于本文的多目标求解问题中，其基本步骤为：

- 步骤一：建立一个与所求解对象有关的数学模型，对模型中的不确定参数进行加工分析，确定其分布及相应的特征值；
- 步骤二：产生随机数序列，作为决策变量 $r_2$ 的抽象输入，进行大量的数字模拟试验，以获得模拟试验值；
- 步骤三：在步骤二获得的模拟试验值基础上，计算目标函数，使目标函数数值最小的随机数，即是该多目标规划模型的最优解。

### 5.2.2 模型的求解

#### 5.2.2.1 目标函数的确定

利用 1-9 尺度法构造因素间的成对比较矩阵：

第二层对第一层：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

第三层对第二层:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 软件求解各矩阵的 $\lambda_{max}$ 、 $\omega$ 、CR 值, 结果列如下表:

表5. 2-2 一致性检验表

检验矩阵	$\lambda_{max}$	权重向量 $\omega$	一致性比率CR
A	2	(0.75,0.25)	0
$B_1$	3.0385	(0.605,0.291,0.103)	0.03
$B_2$	3.0092	(0.309,0.162,0.529)	0.008

由上表可知, CR的值均小于 0.1, 说明构造的成对比较矩阵都通过了一致性检验。并且得到准则层对目标的权向量和各方案层对每一准则的权向量, 计算得到方案层对目标层的归一化权重为 $\omega = [0.531, 0.259, 0.210]$ 。

所以得到目标函数为:

$$f = 0.531T_1^{3600} + 0.259T_1^{3300} + 0.210r_2$$

#### 5. 2. 2. 2 多目标规划模型求解

当环境温度为65℃时的稳态参数的求取可以直接使用第一问建立的热传递微分模型和非稳态温度时空分布模型进行求解。

通过 MATLAB 结合蒙特卡罗算法对该多目标规划模型进行求解:

假设决策变量 $r_2$ 在定义域[0.6,25]内服从均匀, 在此区间内生成100个随机数。由于此时问题中有 $r_2$ 和 $t_4$ 两个变量, 所以将约束条件一取边界值带入计算, 当边界值满足条件时, 其他值也必满足。因此, 将随机 $r_2$ 代入非稳态热传导差分模型中进行计算求解各个参数, 选取参数满足约束条件的随机数。将这些随机数代入目标函数中进行计算, 选取出目标函数数值最小的随机数, 即是该多目标规划模型的最优解。

经过循环100次得到满足约束条件的结果有43组,  $r_2$ 的取值从0.0080304到0.01004, 也就是在环境温度为65℃时, 调节第二层厚度从8.0304mm到10.0400mm都满足要求。

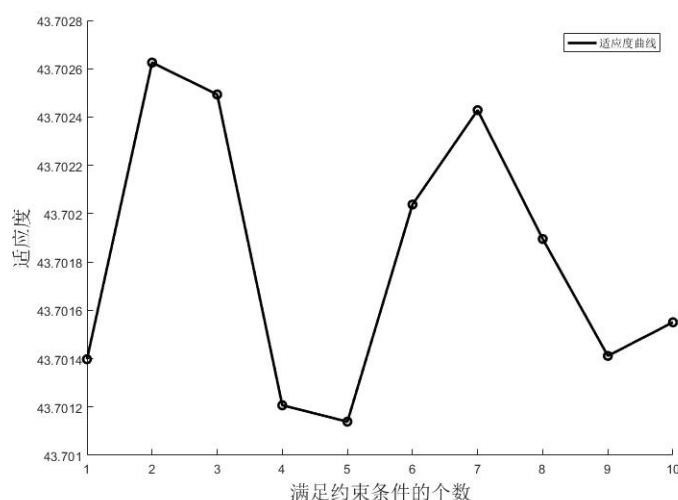


图5. 2-2 适应度变化曲线

在这43组可选II层厚度方案中，最佳设计为织物II层厚度为8.9392mm，此时目标函数最优结果为43.7012。

### 5.2.3 模型的检验

#### 1、结果准确性检验

为了验证求解结果，作出织物II层厚度为8.9392mm时皮肤表面温度变化图，如图5.2-3所示。

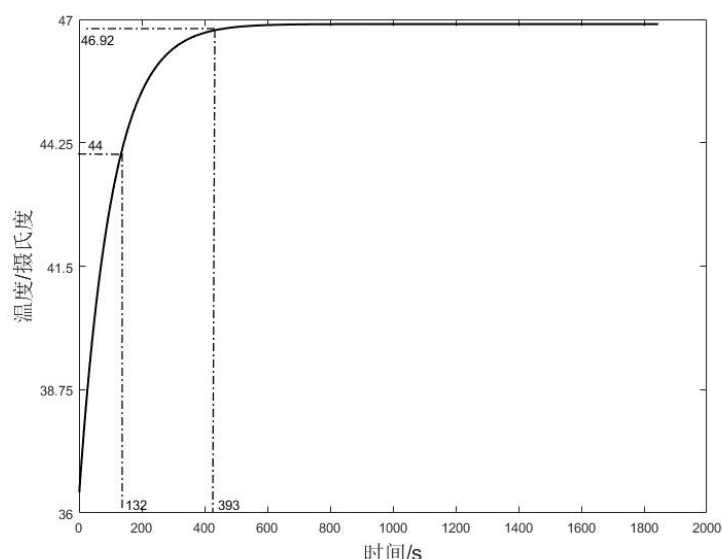


图5.2-3 织物II层厚度为8.9392mm时皮肤表面温度变化图

由上图分析可知，在132s时温度到达44℃，393s时温度到达平稳状态，温度接近趋于不变，显然两者之间相差不超过5分钟，且在60分钟时，温度没有达到47℃，基本符合题目条件。

#### 2、灵敏度检验

对问题二建立的多目标规划模型进行灵敏度分析<sup>[9]</sup>，微调60分钟时的体表温度、55分钟时的体表温度、织物II层厚度这3个参数2%，对比微调前后目标数值的差值，即可判断哪些参数较为灵敏，而哪些参数较不灵敏。

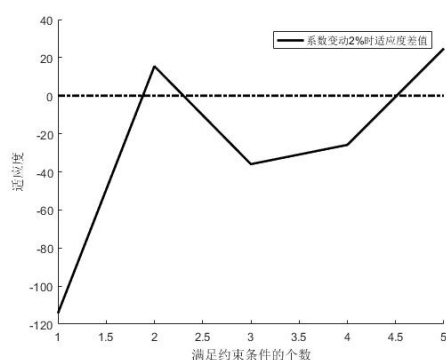


图5.2-3 针对60分钟时的体表温度的灵敏度分析

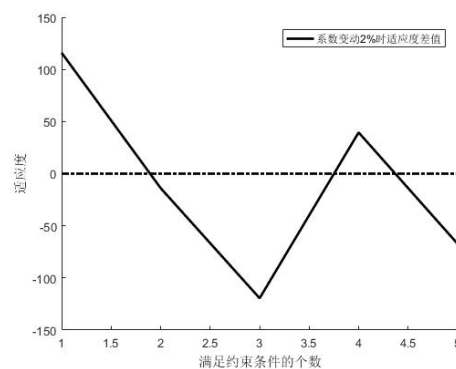


图5.2-4 针对55分钟时的体表温度的灵敏度分析

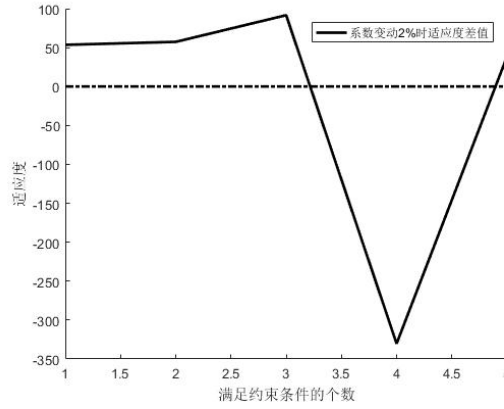


图5.2-5 针对织物II层厚度的灵敏度分析

通过计算得到：

60分钟时体表温度系数变动2%时适应度差值标准差为：54.619；

55分钟时体表温度系数变动2%时适应度差值标准差为：53.951；

织物II层厚度系数变动2%时适应度差值标准差为：92.714；

结合图可以得出3个系数中织物II层厚度的灵敏度最大，即影响最大；而其余2个系数的灵敏度较为接近，都较低，影响较小。

#### 5.2.4 问题的结论

经模型求解得，织物II层的最佳厚度为8.9392mm，此时层次分析法的目标函数最优结果为43.7012。

### 5.3 问题三的模型建立和求解

问题三是对问题二的进一步探讨，改进之处在于引入新的决策变量和目标函数，构造多目标规划模型时可以沿用问题二的方法，使用层次分析法确定各目标的权重。但在对模型进行求解时，由于引入双决策变量，须使用 $\gamma$ -粒子群算法，以适应高维优化问题。

#### 5.3.1 模型的建立和求解

##### 5.3.1.1 基于双决策变量的多目标规划模型

问题三中IV层即温度层的厚度 $r_4$ 也变为未知数，即在问题二的多目标规划方程中，由之前的三个规划目标增加为四个规划目标，由于空气层也应该尽可能的薄，以防止防热服的过度臃肿而影响行动，此时决策变量由单决策变量变为双决策变量，II层厚度 $r_2$ 和IV层厚度 $r_4$ 。为了简化模型，我们同样设定 $T_1^{1800}$ 为边界值进行求解，将约束条件引入目标函数中。

由于增加了一个规划目标，在层次分析过程中，对象层发生了改动，所以需要重新进行计算各规划目标权重，以此生成新目标函数：

$$f = \omega_1 T_1^{1800} + \omega_2 T_1^{1500} + \omega_3 r_2 + \omega_4 r_4 \quad (5.3.1)$$

由附件一可知，IV层厚度为0.6~6.4mm，所以，在问题二约束条件的基础上进行相应的增加修改，系统的其他各类参数依旧由问题一中的稳态热传递模型和非稳态差分方程模型确定。至此确定完整的基于双决策变量的多目标规划模型为：

$$\min f = \omega_1 T_1^{1800} + \omega_2 T_1^{1500} + \omega_3 r_2 + \omega_4 r_4 \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& t_4 = T_1^{1800} \leq 47^\circ\text{C} \\
& T_1^{1500} \leq 44^\circ\text{C} \\
& 0.6\text{mm} \leq r_2 \leq 25\text{mm} \\
& 0.6\text{mm} \leq r_4 \leq 6.4\text{mm} \\
& \bar{q} = \frac{t_0 - t_4}{r_1/\lambda_1 + r_2/\lambda_2 + r_3/\lambda_3 + r_4/\lambda_4} \\
& t_i = t_{i-1} - \bar{q} \frac{r_i}{\lambda_i}, i = 1, 2, 3, 4 \\
& t_{\text{I}}(x) = t_0 - \frac{q_v}{2\lambda_1} x^2 - \left( \frac{t_0 - t_1}{r_1} - \frac{q_v r_1}{2\lambda_1} \right) x \\
& t_{\text{II}}(x) = t_1 - \frac{q_v}{2\lambda_2} x^2 - \left( \frac{t_1 - t_2}{r_2} - \frac{q_v r_2}{2\lambda_2} \right) x \\
& t_{\text{III}}(x) = t_2 - \frac{q_v}{2\lambda_3} x^2 - \left( \frac{t_2 - t_3}{r_3} - \frac{q_v r_3}{2\lambda_3} \right) x \\
& t_{\text{IV}}(x) = t_3 - \frac{q_v}{2\lambda_4} x^2 - \left( \frac{t_3 - t_4}{r_4} - \frac{q_v r_4}{2\lambda_4} \right) x \\
& T_K = (t_{\text{IV}}(x), t_{\text{III}}(x), t_{\text{II}}(x), t_{\text{I}}(x)) \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \text{初始值: } T_i^K = T_K \\
& T_i^{k-1} = -fT_{i+1}^k + (1 + 2f)T_i^k - fT_{i-1}^k \\
& T_1^{k-1} = T_2^{k-1} \\
& T_l^{k-1} = \frac{1}{\frac{h\Delta x}{\lambda} + 1} \left( T_{l-1}^{k-1} + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_\infty \right)
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \right\} S.T. \quad (5.3.3)
\end{aligned}$$

求解出的最佳设计方案，即在满足各约束条件下，II层厚度 $r_2$ 和IV层厚度 $r_4$ 的最优值而使目标函数最小。

### 5.3.1.2 基于 $\gamma$ -粒子群算法的双决策变量多目标规划求解模型

在对基于双决策变量的多目标规划问题中，问题二中的蒙特卡罗算法已无法正常求解。查找资料发现，对于模型中的高维约束优化问题，遗传算法能很好的解决并获得极大成功。而粒子群算法没有遗传算法的交叉、变异和选择等操作，这就决定了粒子群算法相对遗传算法更简洁，但对于高维优化问题，粒子群算法可能会早熟收敛，而 $\gamma$ -粒子群算法<sup>[6]</sup>则更适合求解高维优化问题，因此我们选用 $\gamma$ -粒子群算法求解。

相较于原始PSO算法， $\gamma$ -PSO将随机值rand()的范围从(0,1)扩展到(-1,1)。每个粒子在搜索空间中以一定的速度飞行，这个速度根据它本身的飞行经验和周围同伴的飞行经验动态调整。第*i*个粒子在*n*维空间里的位置表示为向量 $X_i = (x_1, \dots, x_n)$ ，飞行速度表示为向量 $V_i = (v_1, \dots, v_n)$ ，粒子的每一次飞行就是PSO算法的一次迭代运算，对于第*k*次迭代，每个粒子飞行状况可用下列数学公式描述：

$$V_i^{k+1} = \omega V_i^k + c_1 \text{rand}(-1,1)(P_{pbest} - X_i^k) + c_2 \text{rand}(-1,1)(P_{gbest} - X_i^k) \quad (5.3.4)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1} \quad (5.3.5)$$

其中， $i = 1, 2, \dots, M$ ， $M$ 为粒子总数， $V_i^k$ 和 $X_i^k$ 表示第*k*次迭代粒子的飞行速度和位



置,  $\text{rand}(0,1)$ 是取(0,1)之间的随机数,  $c_1$ 、 $c_2$ 为粒子的学习因子,  $\omega$ 为惯性权重系数。

在上文的目标函数和约束条件下, 适应度函数变成目标函数加惩罚项的形式。本文设置惩罚项是常数项N, N是一个很大的正数, 即

$$\text{Fitness}(X) = \begin{cases} f, & X \text{ 满足约束条件} \\ N, & X \text{ 不满足约束条件} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

具体算法流程如下:

步骤一: 初始化粒子群 (速度和位置)、学习因子、惯性权重系数、最大迭代次数和算法终止约束条件;

步骤二: 评价每个粒子的初始适应值;

步骤三: 将初始适应值作为当前每个粒子的局部最优值, 并将各适应值对应的位置作为每个粒子局部最优值所在的位置  $P_{gbest}$ ;

步骤四: 将最佳初始适应值作为当前全局最优值, 并将最佳适应值对应的位置作为全局最优值所在位置  $P_{pbest}$ ;

步骤五: 依据式(5.3.5)更新每个粒子当前的飞行速度  $V_i^{k+1}$ ;

步骤六: 依据式(5.3.5)更新每个粒子当前位置  $X_i^{k+1}$ ;

步骤七: 比较当前每个粒子的适应值是否比历史局部最优值好, 如果好, 则将当前粒子适应值作为粒子的局部最优值, 其对应的位置作为每个粒子局部最优值粒子的位置;

步骤八: 在当前群中找出全局最优值, 并将当前全局最优值对应位置作为粒子群的全局最优值所在的位置;

步骤九: 重复Step5~8, 直至满足最小误差或者达到最大迭代次数;

步骤十: 输出粒子群全局最优值和其对应的位置及每个粒子的局部最优值和其对应的位置。

### 5.3.2 模型的解

利用问题二中的层次分析法求解四个规划目标  $T_1^{1800}, T_1^{1500}, r_2, r_4$  权重, 对于三个对比矩阵分别求出相应的  $\lambda_{max}$ 、 $\omega$ 、CR 值, 其中CR 值分别为: 均小于 0.1, 说明新构造的成对比较矩阵都通过了一致性检验。最终得到方案层对目标层的归一化权重为  $\omega = [0.4204, 0.293, 0.2127, 0.0739]$ 。

所以新目标函数为:

$$f = 0.4204T_1^{1800} + 0.293T_1^{1500} + 0.2127r_2 + 0.0739r_4$$

利用 MATLAB 结合  $\gamma$ -粒子群算法对该多目标规划模型进行求解:

初始化粒子群个数 30, 惯性因子 0.6, 个体和群体加速常数都为 0.5, 最大迭代次数200; 计算每个粒子的初始适应值; 找到个体和群体的最优值, 更新各个粒子的速度和位置; 如果达到最大迭代次数, 就结束算法, 否则重新计算各粒子的适应值。

经过200次迭代计算得到

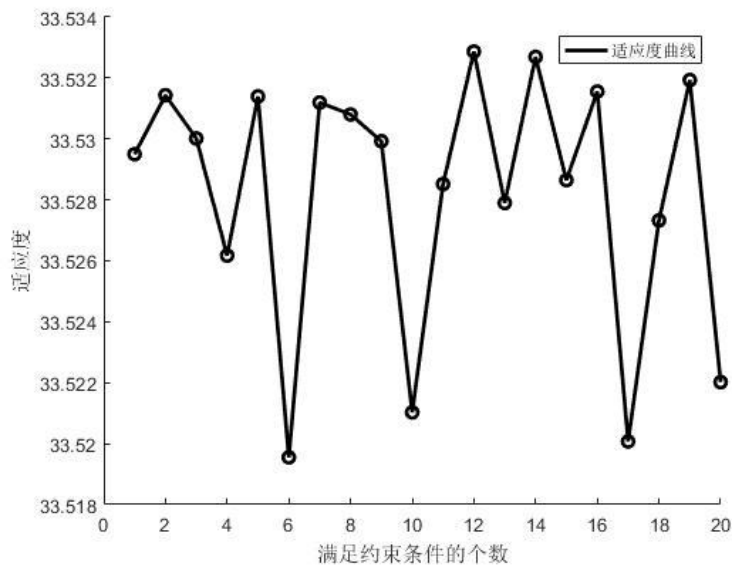


图5.3-1 适应度变化曲线

其中适应度最小的 $r_2 = 12.85mm$ ， $r_4 = 6.2mm$ ，此时目标函数最优结果为33.5226。

### 5.3.3 模型的检验

#### 1、结果准确性检验

为了验证求解结果，作出织物 II 层厚度为 12.85mm，IV 层厚度为 6.2mm 时皮肤表面温度变化图：

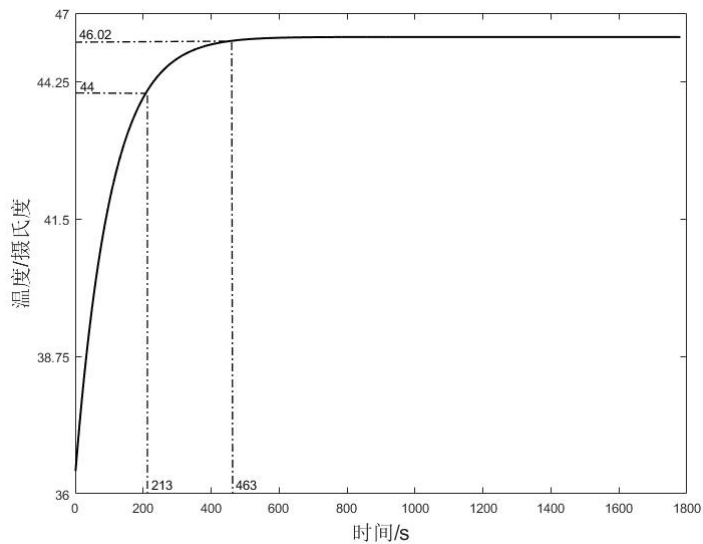


图5.3-2 皮肤表面温度变化图

由上图分析可知，在213s时温度到达44°C，在463s时温度到达平稳状态，温度接近趋于不变，显然两者之间相差不超过5分钟，且在60分钟时，温度没有达到47°C，基本符合题目条件。本文假设当环境-服装-人体系统达到稳定状态时，不会载发生热量交换，即只需要考虑非稳态到稳态的过程即可。

## 2、灵敏度检验

类似于问题二的检验，对问题三建立的多目标规划模型进行灵敏度分析<sup>[9]</sup>，微调II层厚度 $r_2$ ，IV层厚度 $r_4$ ，30分钟时体表温度 $T_1^{1800}$ ，25分钟时体表温度 $T_1^{1500}$ 这4个参数2%，对比微调前后目标数值的差值，即可判断哪些参数较为灵敏，而哪些参数较不灵敏。

得到结果如图所示，分别是30分钟时的体表温度、55分钟时的体表温度、织物II层厚度、织物II层厚度这四个参数微调前后目标数值的差值：

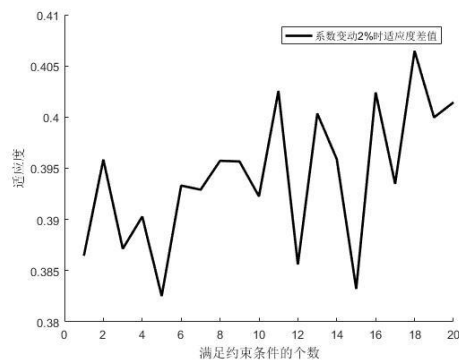


图5.3-3 对30分钟时体表温度参数的灵敏度分析

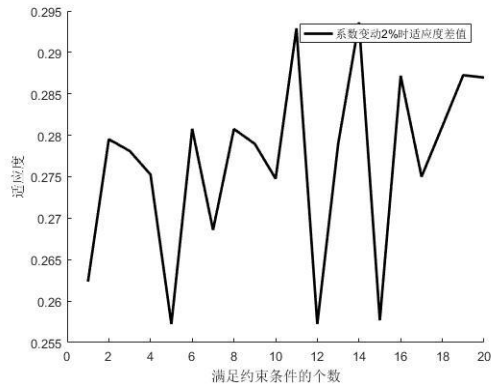


图5.3-4 对55分钟时体表温度参数的灵敏度分析

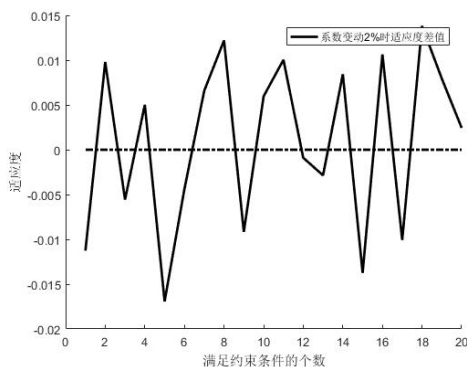


图5.3-5 对织物II层厚度参数的灵敏度分析

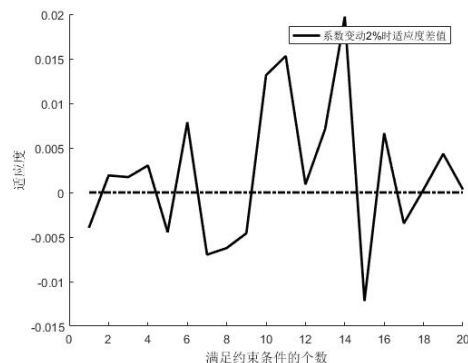


图5.3-6 对织物II层厚度参数的灵敏度分析

通过计算得到：

60分钟体表温度系数变动2%时适应度差值标准差为：0.0068218

55分钟体表温度系数变动2%时适应度差值标准差为：0.011117

织物二层厚度系数变动2%时适应度差值标准差为：0.0095278

织物四层厚度系数变动2%时适应度差值标准差为：0.0079859

结合图可以得出3个系数中55分钟体表温度的灵敏度最大，即影响最大；而60分钟体表温度的灵敏度较低，影响较小。

### 5.3.3 问题结论

模型求解结果显示，适应度最小的 $r_2 = 12.85mm$ ， $r_4 = 6.2mm$ ，此时目标函数最优结果为33.5226。

## 六、模型评价

### 6.1 模型的优点

1、对于一维非稳态导热问题，温度会随着时间和位置变化。若正向求解，由于热量存在对流、传导、辐射等复杂作用，会使得确定体表温度开始变化的时刻变得异常复杂。而采用逆向的方法，先求取出稳态时温度分布，则视此刻为刚好到达稳态的时刻，取其为初值向后差分，可以回推到稳态和初始时刻间温度的分布，避免了对初始时热量复杂作用状态的讨论。

2、在求解稳态时的温度分布情况时，思路是分析每个微元内的温度，再将它们全部叠加，这涉及到数学上多重积分的复杂计算，若从物理学角度分析，可以取该点两侧分析，而不必对每个微元进行叠加，极大地简化了求解难度。

3、在求解多目标规划模型时，多个约束条件和目标函数会给求解带来维数上的误差，而蒙特卡罗算法主要是基于随机模拟的方法进行求解可以避免此类误差。

### 6.2 模型的缺点

1、在分析热量流过织物材料的每个层面时，只考虑了传导、对流两种情况，对辐射情况考虑不周全。

2、在多目标规划模型中，使用层次分析法确定权重，过于主观，会对结果带来一定的误差。

3、在对双决策变量的多目标规划模型进行求解时，使用 $\gamma$ -粒子群算法对此高维优化问题，在在求解简洁和快速收敛的同时，也容易陷入局部最优，不能得到真实最优解，这是 $\gamma$ -粒子群算法本身的特性决定的。

### 6.3 模型的推广

题目中使用的稳态和非稳态模型具有广阔的使用场景，它不仅仅局限于隔热服装的设计，还可以推广到热传递的相关应用场景，比如隔热玻璃的研制、混凝土配方的比例、材料的导热系数的测试等等。尤其是稳态和非稳态模型的结合，实质就是静态与动态的结合，将可用来对换热站等复杂应用场景进行预测和智能调节。

## 参考文献

- [1]陶文铨, 传热学(第四版)[M], 2015: 71-77。
- [2]杨能彪, 一维非稳态导热问题的数值计算[J], 青海师范大学学报, 2006, 4(4): 24-26。
- [3]华钰超, 董源曹, 炳阳, 硅纳米薄膜中声子弹道扩散导热的蒙特卡罗模拟[J], 物理学报, 2013. 62(24): 1-9。
- [4]乔辰, 张国立, 几何加权法求解多目标规划问题[J], 华北电力大学学报, 2011, 38(6): 107-110。
- [5]邓雪, 李家铭, 曾浩健, 陈俊羊, 赵俊峰, 层次分析法权重计算方法分析及其应用研究[J], 数学的实践与认识, 2012, 42(7): 93-100。
- [6]张慧斌, 王鸿斌, 邸东泉, 一种求解高维约束优化问题的  $\gamma$ -PSO 算法[J], 计算机工程与应用, 2012. 7:43-47。
- [7]陈清华, 董长帅, 马燕, 庞立, 刘泽功, 基于恒温边界一维非稳态传热模型测量固体材料热物性参数[J], 中南大学学报, 2015. 46(12): 4686-4692。
- [8]导热的计算与分析,  
[https://wenku.baidu.com/view/16def793cc7931b764ce152c.html?tdsourcetag=s\\_pctim\\_aiomsg&qq-pf-to=pcqq\\_group](https://wenku.baidu.com/view/16def793cc7931b764ce152c.html?tdsourcetag=s_pctim_aiomsg&qq-pf-to=pcqq_group) , 2018. 9. 16。
- [9]赵金钢, 基于支持向量机和蒙特卡洛法的结构随机灵敏度分析方法[J], 工程力学, 2014, 31(2): 195-202。

## 附录

### 第一题附录

%A2018\_1 第一问主代码

%向前差分迭代计算

T\_huanj=75;

r1=0.0006;

r2=0.006;

r3=0.0036;

r4=0.005;

h=15;

%f(1,1)=f(1,1)/1000;

%f(1,2)=f(1,2)/10;

%f=f/1000;

%事先运行 wentai.m

[f,na]=solve\_u();

[m,n]=size(ttt);

M=ttt;

for i=1:6000

if M(i,1)-37<=0.0001

break;

end

%没有到达体温继续迭代

M(end+1,:)=zeros(1,n);

for j=2:n-1

%迭代

if j<=r4/0.000001

ff=f(1,1);

elseif j>r4/0.000001&&j<(r4+r3)/0.000001

ff=f(1,2);

elseif j>(r4+r3)/0.000001&&j<(r4+r3+r2)/0.000001

ff=f(1,3);

else

ff=f(1,4);

end

M(i+1,j)=-M(i,j-1)\*ff+(1+2\*ff)\*M(i,j)-M(i,j+1)\*ff;

end

%近肤点

M(i+1,1)=M(i+1,2);

%近热点

delta\_x=0.000001;

tmp=h\*delta\_x/na(1,4);

M(i+1,n)=(M(i+1,n-1)+tmp\*T\_huanj)/(tmp+1);

end

```

%wentai.m 向后差分计算稳态时的温度和函数
clear;clc;
t4=75;
t=[t4];
t0=48.08;
r1=0.0006;
r2=0.006;
r3=0.0036;
r4=0.005;
r=[r1,r2,r3,r4];
k1=0.082;
k2=0.37;
k3=0.045;
k4=0.028;
k=[k1,k2,k3,k4];
q_ave=(t4-t0)/(r1/k1+r2/k2+r3/k3+r4/k4);
ttt=[];
for i=1:4
t(end+1)=t(end)-q_ave*r(1,i)/k(1,i);
end
x=0:0.000001:r1;
tt=t(1,1)-q_ave*x.^2/(2*k1)-((t(1,1)-t(1,2))/r1-q_ave*r1/2*k1)*x;
ttt=[ttt tt];
plot(x,tt);
hold on;
x=0:0.000001:r2;
tt=t(1,2)-q_ave*x.^2/(2*k2)-((t(1,2)-t(1,3))/r2-q_ave*r2/2*k2)*x;
ttt=[ttt tt];
plot(x+r1,tt);
x=0:0.000001:r3;
tt=t(1,3)-q_ave*x.^2/(2*k3)-((t(1,3)-t(1,4))/r3-q_ave*r3/2*k3)*x;
ttt=[ttt tt];
plot(x+r1+r2,tt);
x=0:0.000001:r4;
tt=t(1,4)-q_ave*x.^2/(2*k4)-((t(1,4)-t(1,5))/r4-q_ave*r4/2*k4)*x;
ttt=[ttt tt];
plot(x+r1+r2+r3,tt);
%倒置 ttt
ttt=fliplr(ttt);

```

```

%plot_1_1 画出各层温度随时间变化曲线
A=xlsread('problem1.xlsx');
[m,n]=size(A);
i=1:m;
figure(1);
plot(i,A(:,1),'k','linewidth',1.5)
xlabel('时间/s');ylabel('温度/摄氏度');
figure(2);
plot(i,A(:,500),'k','linewidth',1.5)
xlabel('时间/s');ylabel('温度/摄氏度');
figure(3);
plot(i,A(:,500+360),'k','linewidth',1.5)
xlabel('时间/s');ylabel('温度/摄氏度');
figure(4);
plot(i,A(:,500+360+600),'k','linewidth',1.5)
xlabel('时间/s');ylabel('温度/摄氏度');

```

```

%计算出 $\mu$ 
function [f,na]=solve_u()
clear;clc;
syms x;
% $x_0 = \text{double}(\text{solve}(\cot(x)-x/8.14,x))$ ;
%X=fsolve('cot(x)-x/8.14',1);
delta_x=0.000001;
L=[0.005 0.0036 0.006 0.0006];
na=[0.028 0.045 0.37 0.082];
%na=[0.007898449 0.012693935 0.104372355 0.023131171];
c=[1005 1726 2100 1377];
%c=[283.4978843 486.8829337 592.3836389 388.4344147];
h=15;
rou=[1.18 74.2 862 300];
Bi=zeros(1,4);
miu=[];
a=[];
f=[];
for i=1:4
%Bi(1,i)=(h*delta_x)/na(1,i);
Bi(1,i)=(h*delta_x)/na(1,i);
miu(end+1)=fsolve(@(x)(cot(x)-x/Bi(1,i)),1);
end
%miu(end+1)=fsolve(@(x)(cot(x)-x/Bi(1,1)),1);

```



```

%miu(end+1)=fsolve(@(x)(cot(x)-x/Bi(1,2)),1);
%miu(end+1)=fsolve(@(x)(cot(x)-x/Bi(1,3)),1);
%miu(end+1)=fsolve(@(x)(cot(x)-x/Bi(1,4)),1);
for i=1:4
    a(1,end+1)=(h*miu(1,i))/(c(1,i)*rou(1,i));
    f(1,end+1)=a(1,end)*1/0.39^2;
end
end

```

## 第二题附录

```

%第三题主代码
% A2018_2_1.m 问题二的求解及灵敏度分析
clc,clear,close all
global AA;
[sol1,xx1,zz1]=optim_1([0.59 0.34 0.07]);
%min(AA(:,6))
min(AA)
max(AA)
%max(AA(:,8))
[sol2,xx2,zz2]=optim_1([0.59+(0.59*0.02),0.34,0.07]);
[sol3,xx3,zz3]=optim_1([0.59,0.34+(0.34*0.02),0.2,0.07]);
[sol4,xx4,zz4]=optim_1([0.59,0.34,0.07+(0.2*0.02)]);
figure(1)
plot(xx1,zz1,'k',xx1,zz1,'kO','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('适应度曲线'),box off
xx1=xx1(1:40);zz1=zz1(1:40);xx2=xx2(1:40);zz2=zz2(1:40); % 截取前 40 个数据
xx3=xx3(1:40);zz3=zz3(1:40);xx4=xx4(1:40);zz4=zz4(1:40);xx5=xx5(1:40);zz5=zz5(1:40);
figure(2),hold on
plot(xx2,zz2-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx2,zeros(1,40),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
figure(3),hold on
plot(xx3,zz3-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx3,zeros(1,40),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
figure(4),hold on
plot(xx4,zz4-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx4,zeros(1,40),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
st1=std(zz2-xx1);st2=std(zz3-xx1);st3=std(zz4-xx1);
figure(5),hold on
disp(['60 分钟体表温度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st1)])

```

```
disp(['55 分钟体表温度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st2)])
disp(['织物二层厚度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st3)])
```

```
%% optim_1.m, 主函数调用函数求解最优解
function [sol,xx,zz]=optim_1(p)
[f,na]=solve_u();
syms t4;
global AA;
t0=75;
r1=0.0006;
r3=0.0036;
r4=0.0055;
k1=0.082;
k2=0.37;
k3=0.045;
k4=0.028;
k=[k1,k2,k3,k4];
%设置最小值为 inf,算数空间最大值
pmax=20;z0=inf;sol=zeros(1,1);exitflag=1;z=[];
m=unifrnd(0.0006,0.025,pmax,1);
syms y d
options = optimoptions('fsolve','Display','none');
disp('程序正在运行中, 请稍后...')
count=1;
for i=1:pmax
    disp(['正在计算第',num2str(i),'组数据, 共',num2str(pmax),'组'])
    r2=m(i);
    %计算 tt
    ttt=root2_1(r2);
    %如果有解
    if exitflag==1
        %带入限制条件判断是否符合
        [st,T30]=limitst_1(ttt,r2,f,na);
        %满足限制条件查看是否为最优解
        if st==1
            z(i)=targetfun1(p,T30,r2);
            if p(1)==0.59&&p(2)==0.34&&p(3)==0.07
                disp([num2str(r2),' ',num2str(T30),' ',num2str(z(i))])
                AA(count,:)=r2;
                count=count+1;
            end
            if z(i)<z0
```

```

                z0=z(i);
                sol=r2;
            end
        end
    end
end
disp(['最优变量:',num2str(r2)])
disp(['最优解:',num2str(z0)])
j=length(z(z>0));
zz(1:j)=z(z>0);
xx=1:j;
end

```

```

%limitst_1，限制函数
%事先运行 solve_u.m
function [st,T30]=limitst_1(ttt,r2,f,na)
%计算得出 M 时空矩阵
T_huanj=65;
r1=0.0006;
r3=0.0036;
r4=0.005;
h=15;
[m,n]=size(ttt);
M=ttt;
for i=1:4000
    %i
    %M(i,1)
    if M(i,1)-37<=0.0001
        break;
    end
    %没有到达体温继续迭代
M(end+1,:)=zeros(1,n);
for j=2:n-1
    %迭代
    if j<=r4/0.000001
        ff=f(1,1);
    elseif j>r4/0.000001&&j<(r4+r3)/0.000001
        ff=f(1,2);
    elseif j>(r4+r3)/0.000001&&j<(r4+r3+r2)/0.000001
        ff=f(1,3);
    else
        ff=f(1,4);
    end
end

```

```

        end
        M(i+1,j)=-M(i,j-1)*ff+(1+2*ff)*M(i,j)-M(i,j+1)*ff;
    end
    %近肤点
    M(i+1,1)=M(i+1,2);
    %近热点
    delta_x=0.000001;
    tmp=h*delta_x/na(1,4);
    M(i+1,n)=(M(i+1,n-1)+tmp*T_huanj)/(tmp+1);
    end
    [m,n]=size(M);
    T30=M(300,1)
    m
    if m>=3600&&M(300)<=47;
        st=1;
    else
        st=0;
    end
    end
    % targetfun1.m
    % 变量说明:theta1-theta5 x(1)-x(5) h x(6) d x(7) m x(8)
    function f=targetfun1(p,T30,r2)
    f=p(1)*47+p(2)*T30+r2*p(3);

```

```

%层次分析法的权重
clear;clc;
A=[1 2 1/2 4;1/2 1 1/3 3;2 3 1 5;1/4 1/3 1/5 1];
[m,n]=size(A);
[V,D]=eig(A); %求得 A 的特征值特征向量
%列归一化
B=zeros(m,n);
for i=1:n %列
    tmp=sum(A(:,i));
    for j=1:m
        B(j,i)=A(j,i)/tmp;
    end
end
%行求和
C=zeros(m,1);
for i=1:m
    C(i,1)=sum(B(i,:));
end

```

```

%对 C 归一化
tmp=sum(sum(C));
for i=1:m
C(i,1)=C(i,1)/tmp;
end
C=C';

```

```

% root2_1.m
%调用迭代函数求 r2
function ttt=root2_1(r2)
%global r2;
t4=65;
t=[t4];
t0=47;
r1=0.0006;
r3=0.0036;
r4=0.005;
r=[r1,r2,r3,r4];
k1=0.082;
k2=0.37;
k3=0.045;
k4=0.028;
k=[k1,k2,k3,k4];
q_ave=(t4-t0)/(r1/k1+r2/k2+r3/k3+r4/k4);
ttt=[];
for i=1:4
t(end+1)=t(end)-q_ave*r(1,i)/k(1,i);
end
x=0:0.000001:r1;
tt=t(1,1)-q_ave*x.^2/(2*k1)-((t(1,1)-t(1,2))/r1-q_ave*r1/2*k1)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r2;
tt=t(1,2)-q_ave*x.^2/(2*k2)-((t(1,2)-t(1,3))/r2-q_ave*r2/2*k2)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r3;
tt=t(1,3)-q_ave*x.^2/(2*k3)-((t(1,3)-t(1,4))/r3-q_ave*r3/2*k3)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r4;
tt=t(1,4)-q_ave*x.^2/(2*k4)-((t(1,4)-t(1,5))/r4-q_ave*r4/2*k4)*x;
ttt=[ttt tt];
%倒置 ttt
ttt=flipr(ttt);

```

```
%t4=t0+((t0-t4)*r1)/((r1/k1+r2/k2+r3/k3+r4/k4)*k1);
end
```

### 第三问附录

% A2018\_3\_1.m 问题三的求解及灵敏度分析

```
global AA;
%传入系数
[sol1,xx1,zz1]=optim_2([0.4204 0.293 0.2127 0.0739]);
%min(AA(:,6))
min(AA)
max(AA)
%max(AA(:,8))
[sol2,xx2,zz2]=optim_2([0.4204+(0.4204*0.02),0.293,0.2127,0.0739]);
[sol3,xx3,zz3]=optim_2([0.4204,0.293+(0.293*0.02),0.2127,0.0739]);
[sol4,xx4,zz4]=optim_2([0.4204,0.293,0.2127+(0.2127*0.02),0.0739]);
[sol5,xx5,zz5]=optim_2([0.4204,0.293,0.2127,0.0739+(0.0739*0.02)]);
figure(1)
plot(xx1,zz1,'k',xx1,zz1,'kO','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('适应度曲线'),box off
xx1=xx1(1:20);zz1=zz1(1:20);xx2=xx2(1:20);zz2=zz2(1:20); % 截取前 20 个数据
xx3=xx3(1:20);zz3=zz3(1:20);xx4=xx4(1:20);zz4=zz4(1:20);xx5=xx5(1:20);zz5=zz5(1:20);
figure(2),hold on
plot(xx2,zz2-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx2,zeros(1,20),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
figure(3),hold on
plot(xx3,zz3-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx3,zeros(1,20),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
figure(4),hold on
plot(xx4,zz4-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx4,zeros(1,20),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
figure(5),hold on
plot(xx5,zz5-xx1,'k','linewidth',2),plot(xx5,zeros(1,20),'k-','linewidth',2)
xlabel('满足约束条件的个数'),ylabel('适应度'),legend('系数变动 2%时适应度差值'),box off
st1=std(zz2-xx1);st2=std(zz3-xx1);st3=std(zz4-xx1);st4=std(zz5-xx1);
disp(['织物二层厚度:',num2str(sol1(1,1)),'织物四层厚度',num2str(sol1(1,2))])
disp(['60 分钟体表温度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st1)])
disp(['55 分钟体表温度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st2)])
disp(['织物二层厚度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st3)])
```

```
disp(['织物四层厚度系数变动 2%时适应度差值标准差为:',num2str(st4)])
```

```
%% optim_2.m
%粒子群算法求解
function [sol,xx,zz]=optim_2(p)
[f,na]=solve_u();
global m1;
global m2;
c1=0.5;c2=0.5;w=0.6;%个体群体加速常量，惯性因子
sizepop=20;    %种群规模
Vmax=1;
Vmin=-1;
popmax=5;
popmin=-5;
pmax=20;z0=inf;sol=zeros(1,1);exitflag=1;z=[];
m1=unifrnd(0.0006,0.025,pmax,1);
m2=unifrnd(0.0006,0.0064,pmax,1);
options = optimoptions('fsolve','Display','none');
disp('程序正在运行中，请稍后...')
for i=1:sizepop
    pop(i,:)=5*rands(1,2);
    V(i,:)=rands(1,2);
    fitness(i)=targetfun3(pop(i,:));
end
[bestfitness bestindex]=min(fitness);
zbest=pop(bestindex,:);
gbest=pop;
fitnessgbest=fitness;
fitnesszbest=bestfitness;
%限制条件
for i=1:pmax
    disp(['正在计算第',num2str(i),'组数据，共',num2str(pmax),'组'])
    r2=m1(i);
    r4=m2(i);
    %计算 tt
    ttt=root3_1(r2,r4);
    if exitflag==1
        [st,T30]=limitst_2(ttt,r2,r4,f,na);
        if st==1
            z(i)=targetfun2(p,T30,r2,r4);
            disp([num2str(r2),' ',num2str(r4),' ',num2str(T30),' ',num2str(z(i))])
```

```

        if z(i)<z0
            z0=z(i);
            sol=[r2,r4];
        end
    end
end
for j=1:sizepop
    V(j,:)=w*V(j,:)+c1*rand*(gbest(j,:)-pop(j,:))+c2*rand*(zbest-pop(j,:));
    V(j,find(V(j,:)>Vmax))=Vmax;
    V(j,find(V(j,:)<Vmin))=Vmin;
    pop(j,:)=pop(j,:)+0.5*V(j,:);
    pop(j,find(pop(j,:)>popmax))=popmax;
    pop(j,find(pop(j,:)<popmin))=popmin;
    fitness(j)=targetfun3(pop(j,:));
    if fitness(j) < fitnessgbest(j)
        gbest(j,:)=pop(j,:);
        fitnessgbest(j)=fitness(j);
    end
    if fitness(j) < fitnesszbest
        zbest=pop(j,:);
        fitnesszbest=fitness(j);
    end
end
yy(i)=fitnesszbest;
end
disp(['最优变量:',num2str(r2),num2str(r4)])
disp(['最优解:',num2str(z0)])
j=length(z(z>0));
zz(1:j)=z(z>0);
xx=1:j;
end

```

```

%limitst_2, 第三问限制函数
function [st,T30]=limitst_2(ttt,r2,r4,f,na)
%计算得出 M 时空矩阵
T_huanj=80;
r1=0.0006;
r3=0.0036;
h=15;
[m,n]=size(ttt);
M=ttt;
for i=1:4000

```



```

if M(i,1)-37<=0.0001
    break;
end
%没有到达体温继续迭代
M(end+1,:)=zeros(1,n);
for j=2:n-1
    %迭代
    if j<=r4/0.000001
        ff=f(1,1);
    elseif j>r4/0.000001&&j<(r4+r3)/0.000001
        ff=f(1,2);
    elseif j>(r4+r3)/0.000001&&j<(r4+r3+r2)/0.000001
        ff=f(1,3);
    else
        ff=f(1,4);
    end
    M(i+1,j)=-M(i,j-1)*ff+(1+2*ff)*M(i,j)-M(i,j+1)*ff;
end
%近肤点
M(i+1,1)=M(i+1,2);
%近热点
delta_x=0.000001;
tmp=h*delta_x/na(1,4);
M(i+1,n)=(M(i+1,n-1)+tmp*T_huanj)/(tmp+1);
end
[m,n]=size(M);
T30=M(300,1)
m
%if m>=1800&&M(300)<=44;
if m>=1100&&M(300)>44;
    st=1;
else
    st=0;
end
end
end

```

```

% targetfun2.m 目标函数
function f=targetfun2(p,T30,r2,r4)
f=p(1)*47+p(2)*T30+r2*p(3)+r4*p(4);

```

```
% targetfun3.m
function y = targetfun3(x)
y=-20*exp(-0.2*sqrt((x(1)^2+x(2)^2)/2))-
exp((cos(2*pi*x(1))+cos(2*pi*x(2)))/2)+20+2.71289;
```

```
% root3_1.m
%求解 r2,r4
function ttt=root3_1(r2,r4)
%global r2;
t4=80;
t=[t4];
t0=47;
r1=0.0006;
r3=0.0036;
r=[r1,r2,r3,r4];
k1=0.082;
k2=0.37;
k3=0.045;
k4=0.028;
k=[k1,k2,k3,k4];
q_ave=(t4-t0)/(r1/k1+r2/k2+r3/k3+r4/k4);
ttt=[];
for i=1:4
t(end+1)=t(end)-q_ave*r(1,i)/k(1,i);
end
x=0:0.000001:r1;
tt=t(1,1)-q_ave*x.^2/(2*k1)-((t(1,1)-t(1,2))/r1-q_ave*r1/2*k1)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r2;
tt=t(1,2)-q_ave*x.^2/(2*k2)-((t(1,2)-t(1,3))/r2-q_ave*r2/2*k2)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r3;
tt=t(1,3)-q_ave*x.^2/(2*k3)-((t(1,3)-t(1,4))/r3-q_ave*r3/2*k3)*x;
ttt=[ttt tt];
x=0:0.000001:r4;
tt=t(1,4)-q_ave*x.^2/(2*k4)-((t(1,4)-t(1,5))/r4-q_ave*r4/2*k4)*x;
ttt=[ttt tt];
%倒置 ttt
ttt=flipr(ttt);
%t4=t0+((t0-t4)*r1)/((r1/k1+r2/k2+r3/k3+r4/k4)*k1);
end
```