

# 太阳影子定位

## 摘要

本文针对太阳影子定位问题，建立了影长计算、多维非线性优化、聚类分析等模型解决了太阳影子的定位问题。

对于问题一，建立了影长-时间初等函数模型。首先，利用时角公式、太阳赤纬角与日期的正弦函数关系式以及球面三角形余弦定理，求出太阳高度角与赤纬角、观测点经纬度和时间的函数关系式，进而推导出影长 $l$ 与各参数的函数关系，其次，将已知的赤纬角 $\delta$ 、经度 $\theta$ 、纬度 $\varphi$ 代入式中，得到影长关于时间的初等函数关系式，最后，根据函数关系式画出影长关于时间的变化曲线。

对于问题二，建立了基于 SQP 算法的三维非线性优化模型。首先，由附件 1 数据计算出影长与对应时间，其次，利用问题一所建立的影长-时间初等函数模型，以影长理论值与实际值标准差为目标函数，代入影长、对应时间和理论赤纬角，通过数据处理并合理筛选后得到可能地点为：印度尼西亚(3.54 S, 102.55 E)、海南省(19.30 N, 108.60 E)、云南省(24.59 N, 98.05 E)，最后，查询当天实际赤纬角并重新进行求解，分析得经纬度绝对误差不超过 1 度，模型精度较高。

对于问题三，建立了四维非线性优化模型和聚类分析模型。以理论影长与实际影长的标准差作为目标函数，考虑已有数据误差，以 0.00001 为误差限，找到所有在误差限下的可行解。采用聚类分析方法对可行解进行分类、筛选得到符合题目要求的可能地点及日期。

符合附件 2 要求的可能地点及日期为：新疆和田(38.62 °N, 79.37 °E)5 月 16 日或 7 月 28 日、新疆阿克苏(40.98 °N, 80.13 °E)6 月 3 日或 7 月 10 日、美国斯普林布鲁克(39.03 °N, 100.49 °W)1 月 24 日或 11 月 17 日。

符合附件 3 要求的可能地点及日期为：湖北省十堰市(31.99 °N, 110.36 °E)，1 月 30 日或 11 月 10 日、陕西省商洛市(33.75 °N, 110.12 °E)，2 月 13 日或 10 月 27 日、阿根廷门多萨(36.01 °S, 68.81 °W)，1 月 17 日或 11 月 23 日、阿根廷圣胡安省(31.80 °S, 69.60 °W)，1 月 28 日或 11 月 12 日。

对于问题四，可以分为两个小问：已知拍摄日期和直杆高度求解拍摄地点问题和只知道直杆高度求解拍摄地点与日期。

对于第一小问，建立了基于射影几何的影长计算模型和关于经、纬度的二维非线性优化模型。首先，根据射影几何关系，得到影长与图像坐标的比例关系，之后以影长理论值与实际值标准差为目标函数进行优化。将视频隔 1500 帧取一帧图，利用 Canny 边缘检测算法找到影子和直杆像的坐标，代入模型得到影长数据，最后处理数据得到可能的拍摄地点为：山西省临汾市(36.48 °N, 111.90 °E) 阿根廷(36.48 °S, 68.07 °W)。最后查询当日赤纬，进行误差分析，得到经、纬度误差小于 0.1°；验证了模型的可靠性。

对于第二小问，建立了以经、纬度和赤纬为决策变量的非线性优化模型。采用与问题三相似的方法，可以得到结果为：浙江省杭州市(30.20N, 120.00E)，9 月 2 日或 4 月 9 日、山西省临汾市(36.66N, 111.10E)，6 月 16 日或 6 月 26 日、阿根廷(36.66S, 68.95W)，12 月 26 日或 12 月 16 日。

**关键词：** 多维非线性优化 聚类分析 Canny 边缘检测

## 一、问题的重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

1. 建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00–15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

如果拍摄日期未知，你能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

## 二、问题的分析

对于问题一，利用时角公式、太阳赤纬角与日期的正弦函数关系式以及观测点、太阳直射点和地心的空间位置关系，先求出太阳高度角、赤纬角、观测点经纬度以及时间之间的等式关系，用已知量代替未知量太阳高度角  $\alpha$ ，然后带入等式  $L = l \tan \alpha$ ，先求出影长  $l$  和部分度角量和时间之间的关系式。由于本题中的赤纬角  $\delta$ 、经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  已知，先将计算出的赤纬角  $\delta$ 、经度  $\theta$ 、纬度  $\varphi$  的具体值带入函数关系式中，再求出影长  $l$  关于时间  $t$  的一元函数。最后通过此函数关系和时间  $t$  的取值区间画出影长  $l$  的变化曲线。

对于问题二，问题一已经得到了直杆影长关于时间的函数关系，附件 1 中有直杆影长顶端坐标和对应的记录时间，既然直杆底端为原点，那就可以根据直杆影长顶端坐标求得直杆影长，本问需要根据直杆影长和记录时间求出直杆所在地点(经纬度)，直杆长度也是未知参数，问题就是以纬度、经度、直杆高度为决策变量，以影长理论值与实际测量值误差为目标函数的优化问题，采用理论值与实际值的标准差作为误差度量，可以建立三维非线性优化模型求解。由于求全局最优解的复杂性，可以求局部最优解，最后汇总。

对于问题三，根据问题一中的函数关系式，日期决定赤纬，所以问题就是以赤纬、纬度、经度、直杆高度为决策变量，以影长理论值与实际测量值误差为目标函数的优化问题。由问题二，可以建立四维非线性优化模型解决。考虑数据误差，在 0.0001 以下均为可靠，汇总出可能的解。之后按照太阳赤纬的经验公式反求出日期。

对于问题四，可以分为两个小问：已知拍摄日期和直杆高度求解拍摄地点问题和只知道直杆高度求解拍摄地点与日期。

对于第一小问，首先由摄像机的投影过程可以得到影长比例计算公式，同样，在已知影长关系之后，可以建立以经、纬度为决策变量的二维非线性优化模型。考虑数据误差，取误差界限为 0.02，编程找出所有符合条件的点。

为得到影长，需要对视频进行处理，将视频隔 1min 取一帧图，利用 Canny 边缘检测算法找到影子和直杆像的坐标，代入影长计算公式得到影长数据，之后求解优化模型得到可能的拍摄地点。最后，考虑到赤纬是由近似公式得到的，不够精确，将查找文献得到的准确数据代入模型，再次求解，与前面结果进行比较，得到误差分析结果。

对于第二小问，与问题三类似，可以建立以经、纬度和赤纬为决策变量，以影长标准差为目标函数的非线性优化模型，代入数据求解之后聚类分析，筛选即可。

### 三、模型的假设

- 1、假设地球可以看做标准球体。
- 2、假设一天内太阳直射纬度几乎不变。
- 3、假设问题二、三、四中的地点不位于极圈内和海洋上。
- 4、假设直杆与影子始终垂直。
- 5、假设视频拍摄的 40 分钟内直杆影子变化角度可以忽略不计。
- 6、假设视频中镜头平面与直杆和其影子构成的平面平行。

### 四、符号说明

$\varphi$  —— 观测点纬度  
 $\theta$  —— 观测点经度  
 $\delta$  —— 太阳赤纬角  
 $\alpha$  —— 太阳高度角  
 $l$  —— 影长  
 $L$  —— 直杆高度  
 $t$  —— 观测点时间  
 $\omega$  —— 时角  
 $n$  —— 日期序号

其余符号含义在使用时具体给出。

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一的模型建立与求解：

通过天文学中的各个角度量以及各个位置点的几何关系，可以求出影长的关于时间变量的函数关系，根据函数关系画出影长的变化曲线。

#### 5.1.1 模型的建立 —— 影长-时间初等函数模型

由光线，直杆和影子的几何关系。可以得到影长的计算公式：

$$l = \frac{L}{\tan \alpha}$$

由于直杆高度 $L$ 已知，因此计算影长需要得到太阳高度角 $\alpha$ 。太阳折射点，实际观测点和地心的位置关系如图 5.1.1 所示：

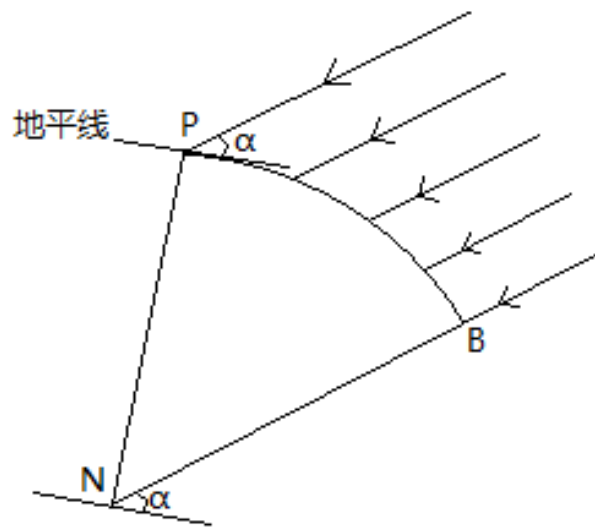


图 5.1.1 太阳高度角示意图

其中，P 为实际观测点，B 为太阳直射点，N 为地心。由图中的几何关系可知， $\angle PNB = 90^\circ - \alpha$ 。

时角是以正午 12 点为 0 度开始算，每一小时为 15 度，上午为负下午为正，即 10 点和 14 点分别为 -30 度和 30 度。设当地的北京时间为  $t$ ，经度为  $\theta$  因此时角的计算公式为[1][2]：

$$\omega = 15t + \theta + 60$$

赤纬角也称为太阳赤纬，即太阳直射纬度，其计算公式近似为：[3]

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360(n + 284)}{365}\right)$$

其中  $n$  为日期序号，即该年 1 月 1 日至该天的总天数。本题的日期为 10 月 22 日，所以  $n = 295$ ，带入上式，得到此时的太阳赤纬角  $\delta = -21.898^\circ$ （其中正号表示北纬，负号表示南纬）。

利用观测点与太阳直射点和地心在三维空间中的位置分布，可以得到各个度角之间的数量关系，如图 5.1.2 所示：[4][5]

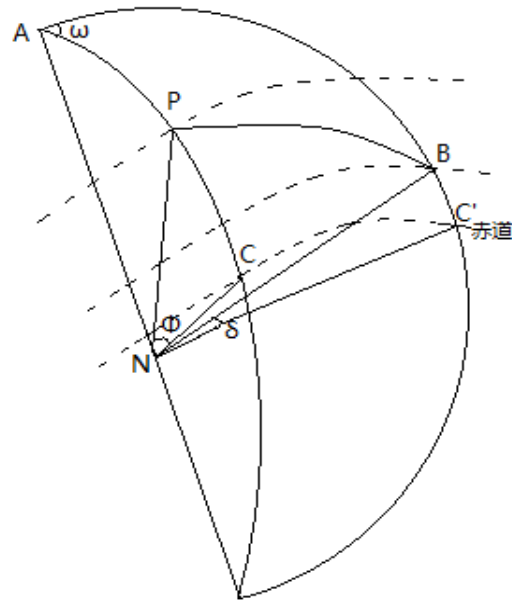


图 5.1.2 各角关系图

其中 B 点为太阳直射点，P 点为观测点，A 点为北极点，C 点在赤道上且与点 P 在同一条经度。由题意可知， $\angle PNC = \varphi$ ， $\angle BNC' = \delta$ ， $\angle A = \omega$ 。在多面体 PNBA 中，由球面三角形余弦定理公式可得：

$$\cos \angle PNB = \cos \angle ANB \cos \angle ANP + \sin \angle ANB \sin \angle ANP \cos \angle A$$

通过图中所示的角度关系，用已设的度角表示各个角度，由此得到各个度角之间的关系：

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos \omega$$

化简该式，得到太阳高度角的计算公式：

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega$$

将上式带入影长的计算公式，得到影长关于各个度角的计算公式为：

$$l = L \sqrt{\frac{1}{(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega)^2} - 1}$$

### 5.1.2 模型的求解

观测点所在纬度为北纬 39 度 54 分 26 秒，将其转化成度数，则  $\varphi = 39.907^\circ$ ，所在的经度为东经 116 度 23 分 29 秒，即  $\theta = 116.391^\circ$ 。将已知数据代入上式，得到影长  $l$  关于时间  $t$  的函数表达式为：

$$l = 3 \sqrt{\frac{1}{0.51 \cos^2(15t - 183.6) + 0.34 \cos(15t - 183.6) + 0.51} - 1}$$

根据上述函数表达式，画出影长  $l$  关于时间  $t$  的变化曲线，如图 5.1.3 所示：

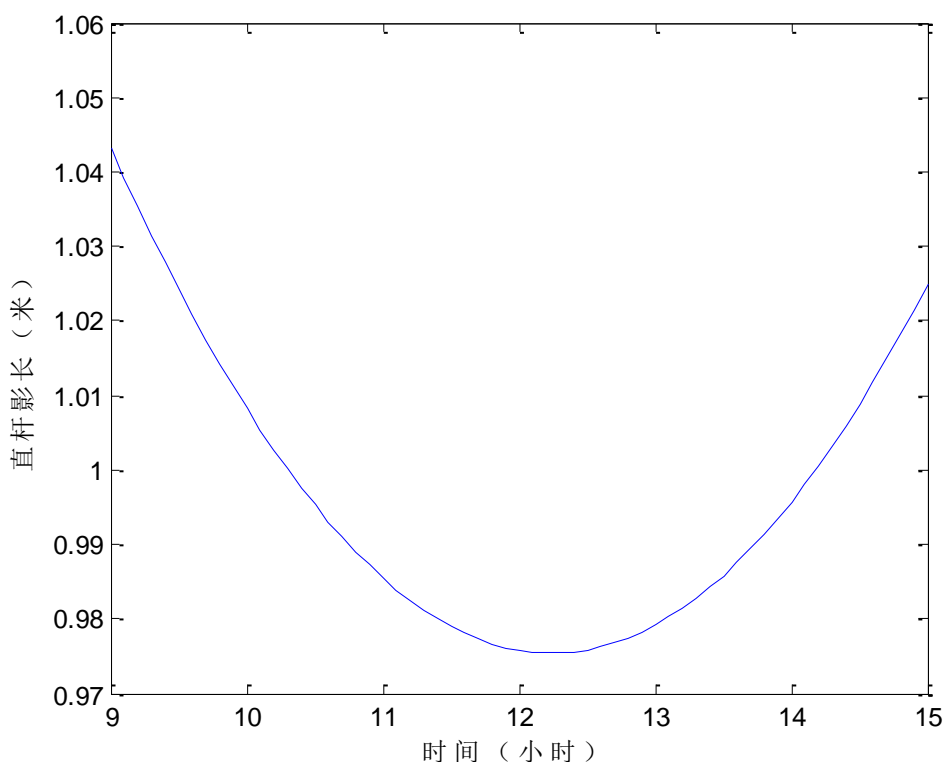


图 5.1.2.1 直杆影长变化曲线

由图像可知，影长从 9 点开始逐渐变短，12.24 时(即 12 点 14 分 24 秒)达到最短，在最低点时刻至 15 点之间逐渐增长。

## 5.2 问题二的模型建立与求解：

得到了问题一推导的直杆影长与时间的函数关系，可知本问是要通过附件 1 中给的直杆影子顶点坐标、对应的记录时间和 4 月 18 日这一日期来逆求直杆所在的经纬度以及直杆长度，由此建立三维非线性优化模型来确定直杆所在的可能地点。

### 5.2.1 模型的建立 —— 三维非线性优化模型

由问题一得到了直杆影长关于时间的函数关系：

$$f(t) = L \sqrt{\frac{1}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(15t + \theta + 60))^2 - 1}}$$

其中  $t$  为北京时间， $\delta$  为太阳直射纬度， $\varphi$  为直杆所在纬度， $\theta$  为直杆所在经度， $L$  为直杆长度。

由附件 1 中采集数据的日期 4 月 18 日可知  $n = 108$  天，所以赤纬为：

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360(n + 284)}{365}\right) = 10.511^\circ$$

显然以上的函数关系无法容易求解出三个参数  $\varphi$ 、 $\theta$ 、 $L$ ，因此我们采用非线性规划方法，建立以理论值与实际值标准差的最小值为目标函数的三维非线性优化模型：

$$\min S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f(t_i) - l_i)^2}{m}}$$

$$st \begin{cases} \delta = 10.511^\circ \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ 0 < L \leq 5 \end{cases}$$

其中 $m$ 为附件 1 中统计数据个数 $m = 21$ 。

### 5.2.2 模型的求解

首先计算附件 1 中直杆影长，由公式：

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

以及附件 1 中的坐标得到直杆影长与时间对应的表：

表 5.2.2.1 直杆影长与时间对应表

时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)
14.70	1.1496	15.05	1.3894	15.40	1.6613
14.75	1.1822	15.10	1.4262	15.45	1.7033
14.80	1.2153	15.15	1.4634	15.50	1.7462
14.85	1.2491	15.20	1.5015	15.55	1.7901
14.90	1.2832	15.25	1.5402	15.60	1.8350
14.95	1.3180	15.30	1.5799	15.65	1.8809
15.00	1.3534	15.35	1.6201	15.70	1.9279

其次利用以上表中的数据，采用 MATLAB 中 SQP(序列二次规划)算法求解参数，得到可能地点的经纬度分布图：

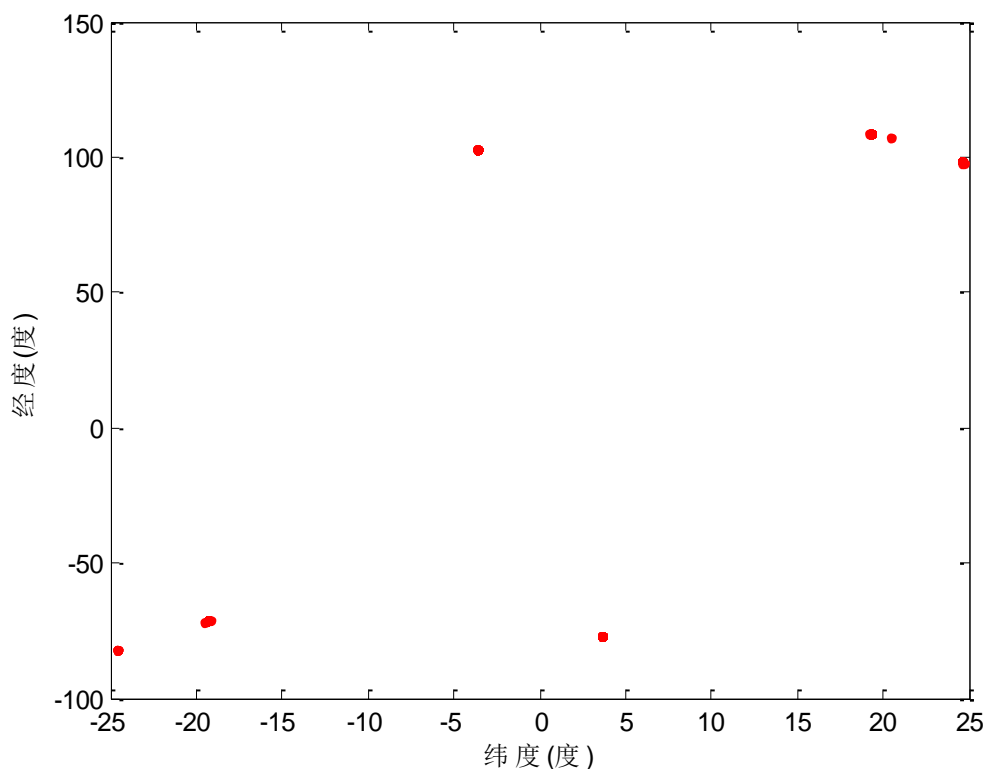


图 5.2.2.1 直杆可能所在地点的经纬度分布图

采集图中的经纬度得到直杆所在地点以及相关信息为：

**表 5.2.2.2 可能地点、直杆长度与标准差**

纬度	经度	直杆长度	标准差	地点
3.54 S	102.55 E	2.26 m	$7.47 \times 10^{-4}$	印度尼西亚
19.30 N	108.60 E	2.03 m	$5.40 \times 10^{-5}$	海南省
20.46 N	107.20 E	2.06 m	$7.40 \times 10^{-4}$	南海
24.59 N	98.05 E	2.77 m	$7.00 \times 10^{-4}$	云南省
24.56 S	81.83 W	2.76 m	$7.12 \times 10^{-4}$	太平洋
19.31 S	71.28 W	2.04 m	$5.45 \times 10^{-4}$	太平洋
3.60 N	77.31 W	2.26 m	$7.50 \times 10^{-4}$	北太平洋

其中经纬度单位为度。

由上表可知，标准差的数量级都在 $10^{-4}$ 以下，说明此模型求出的地点都是满足要求的可能地点且较为可靠。

排除个别极端和不可能的地点(海上)，得到最终确定的地点以及其经纬度：

**表 5.2.3 最终确定的可能地点**

纬度	经度	直杆长度	地点
3.54 S	102.55 E	2.26 m	印度尼西亚
19.30 N	108.60 E	2.03 m	海南省
24.59 N	98.05 E	2.77 m	云南省

其中经纬度单位为度。

### 5.2.3 模型的检验

考虑到 4 月 18 日当天的赤纬 $\delta = 10.511^\circ$ 是根据公式计算得到，然而实际情况与理论值有所出入，查询[6] 得到 2015 年 4 月 18 日当天的赤纬为 $\delta = 10.617^\circ$ ，重新带入问题二模型对地点进行求解，得到新的地点经纬度分布图：

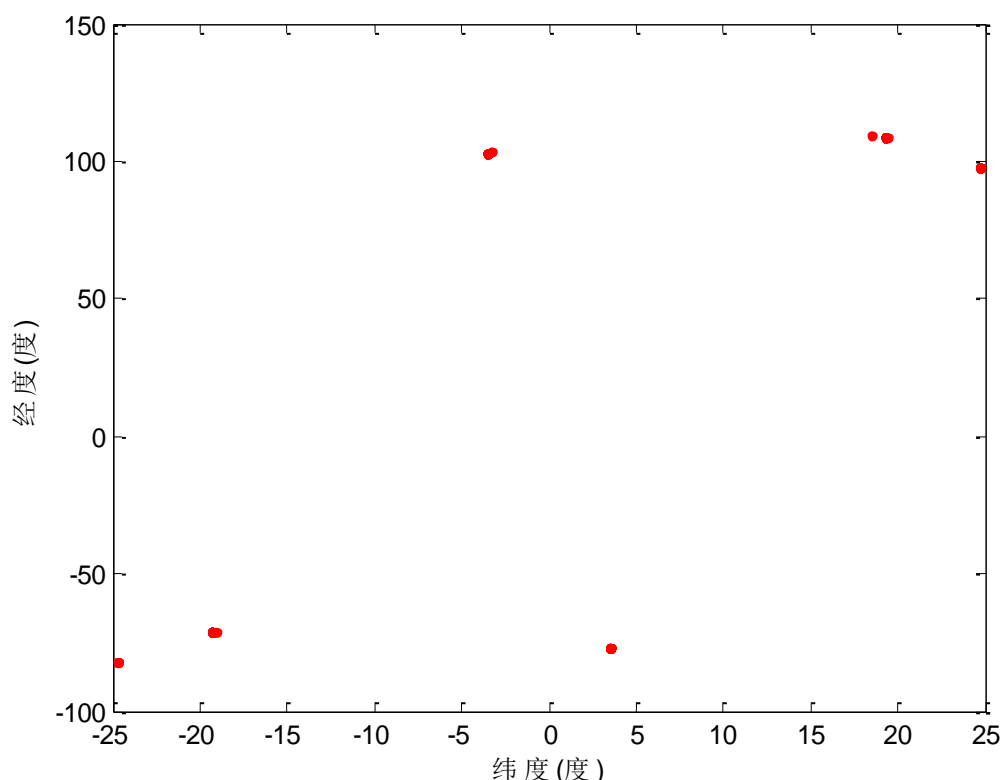


图 5.2.3.1 直杆可能所在地点的经纬度分布图



采集图中的经纬度得到直杆所在地点以及相关信息为：

**表 5.2.3.1 根据实际 $\delta$ 重新确定的可能地点**

纬度	经度	直杆长度	标准差	地点
3.50 S	102.70 E	2.26 m	$7.44 \times 10^{-4}$	印度尼西亚
3.27 S	103.20 E	2.24 m	$5.42 \times 10^{-4}$	印度尼西亚
18.50 N	109.50 E	2.03 m	$6.32 \times 10^{-5}$	海南省
19.36 N	108.60 E	2.06 m	$6.81 \times 10^{-4}$	南海
24.68 N	98.07 E	2.77 m	$7.22 \times 10^{-4}$	云南省
24.67 S	81.89 W	2.76 m	$8.54 \times 10^{-4}$	太平洋
19.12 S	71.08 W	2.04 m	$7.53 \times 10^{-4}$	太平洋
3.48 N	77.30 W	2.29 m	$7.81 \times 10^{-4}$	北太平洋

其中经纬度单位为度。

同样排除个别极端和不可能的地点，得到最终确定的地点以及其经纬度：

**表 5.2.3.2 最终确定的可能地点**

纬度	经度	直杆长度	地点
3.50 S	102.70 E	2.26 m	印度尼西亚
3.27 S	103.20 E	2.24 m	印度尼西亚
18.50 N	109.50 E	2.03 m	海南省
24.68 N	98.07 E	2.77 m	云南省

其中经纬度单位为度。

将根据实际 $\delta$ 最终确定的可能地点与理论 $\delta$ 最终确定的可能地点进行误差分析(相同地点的误差取误差均值)：

**表 5.2.3.3 实际与理论赤纬对参数造成的误差**

地点	纬度绝对误差	经度绝对误差	直杆长度绝对误差
印度尼西亚	0.17	0.40	0.01 m
海南省三亚市	0.80	0.30	< 0.01 m
云南省	0.09	0.02	< 0.01 m

由上表可知，实际与理论赤纬 $\delta$ 对求解直杆所在地点的经纬度以及长度造成的误差不超过  $1^\circ$ ，这对确定直杆所在地点没有太大的影响，可见问题二所建的三维非线性规划模型具有较高的精度。

### 5.3 问题三的模型建立与求解：

对于问题三，根据问题一中的函数关系式，日期决定赤纬，所以问题就是以赤纬、纬度、经度、直杆高度为决策变量，以影长理论值与实际测量值误差为目标函数的优化问题。由问题二，可以建立四维非线性优化模型解决。考虑数据误差，在 0.0001 以下均为可靠，汇总出可能的解。之后按照太阳赤纬的经验公式反求出日期。

#### 5.3.1 模型的建立 —— 四维非线性优化模型

问题三中只有时间与直杆影长的数据，缺少测量点经度、纬度、当天太阳直射纬度、直杆长度四个参数，由问题一的函数表达式

$$l = f(t) = L \sqrt{\frac{1}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(15t + \theta + 60))^2} - 1}$$

其中 $t$ 为北京时间， $\delta$ 为太阳直射纬度， $\varphi$ 为直杆所在纬度， $\theta$ 为直杆所在经度， $L$ 为直杆长度。

建立以理论值与实际值标准差的最小值为目标函数的四维非线性优化模型

$$\min S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f(t_i) - l_i)^2}{m}}$$

$$s.t. \begin{cases} -23.45^\circ \leq \delta \leq 23.45^\circ \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ 0 < L \leq 5 \end{cases}$$

其中 $m$ 为数据点个数

由于数据量过于庞大，全局最优解不容易求解。可以按照一定间隔遍历所有点，在选定点附近求解局部最优解。

考虑到附件中数据精确度为 $10^{-4}$ 数量级，所以标准差值小于 $10^{-4}$ 的解相互之间无法评判优劣。所以定义误差限 $\Delta = 1 \times 10^{-4}$ ，将所有局部最优解中满足

$$S < \Delta$$

的解汇总。

由于解的数目过多，采用聚类方法对解集进行处理。设解集为

$$P = \{(\delta_i, \varphi_i, \theta_i, L_i) \mid S < \Delta\}$$

定义任意两个解集中点 $(\delta_i, \varphi_i, \theta_i, L_i)$ 与点 $(\delta_j, \varphi_j, \theta_j, L_j)$ 的距离为

$$d = \sqrt{(\delta_i - \delta_j)^2 + (\varphi_i - \varphi_j)^2 + (\theta_i - \theta_j)^2 + (L_i - L_j)^2}$$

所有 $d < 2$ 聚为一类，对于每一类中的点，取平均值作为这一类的代表。即对于某一类，其预期解为

$$(\delta, \varphi, \theta, L) = \left( \frac{\sum_{k=1}^m \delta_k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m \varphi_k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m \theta_k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m L_k}{m} \right)$$

其中 $m$ 为该类元素数目

解出所有可能解之后，根据赤纬估计公式

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360(n + 284)}{365}\right)$$

求解出 $n$ 的近似值，即可得到日期。

### 5.3.2 模型的求解

(1) 对附件2数据求解

首先计算直杆影长，由公式：

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

以及附件2中的坐标得到直杆影长与时间的数据：

表 5.3.2.1 直杆影长与时间关系表

时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)
13.15	3.5331	13.50	3.6572	13.85	3.8508
13.20	3.5468	13.55	3.6805	13.90	3.8846
13.25	3.5618	13.60	3.7052	13.95	3.9199
13.30	3.5781	13.65	3.7313	14.00	3.9569
13.35	3.5958	13.70	3.7589	14.05	3.9955
13.40	3.6149	13.75	3.7881	14.10	4.0358
13.45	3.6354	13.80	3.8187	14.15	4.0779

利用 MATLAB 软件编写求出所有满足标准差（目标函数值）小于 0.0001 的参数值，其中经纬度坐标分布如图所示

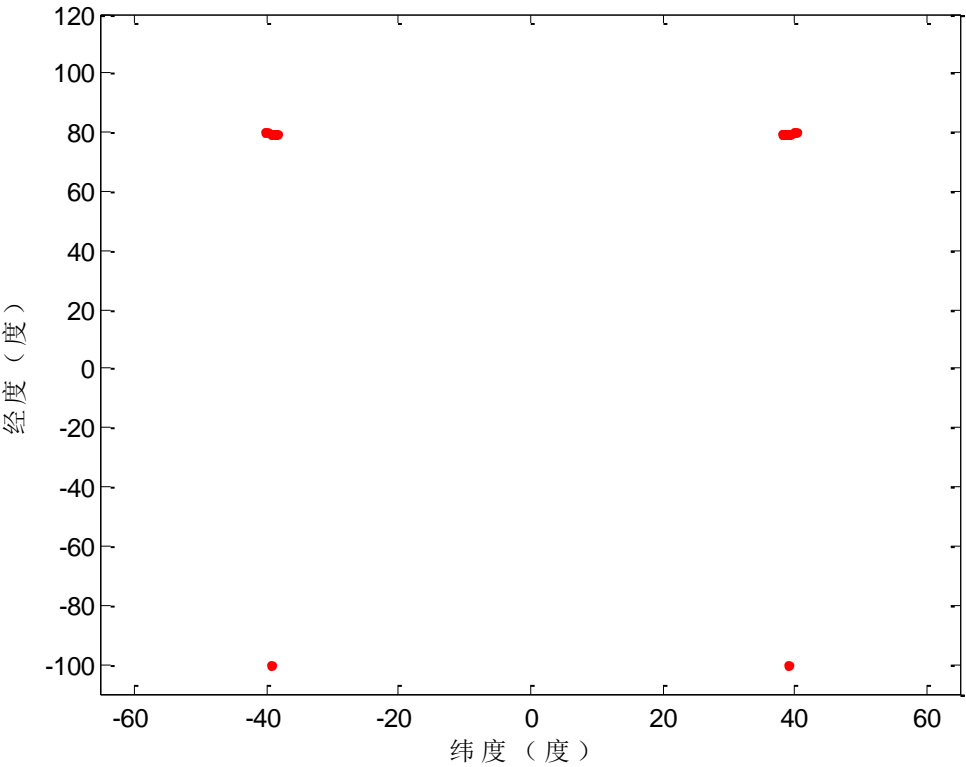


图 5.3.2.1 可能地点分布图

由图可知，所有的解可以聚集为 6 类，利用聚类方法处理数据，得到

表 5.3.2.2 可能地点、直杆高度、赤纬、标准差表

纬度	经度	赤纬	直杆高度	标准差	地点
38.62	79.37	18.98	1.93	0.000047	新疆和田地区
-39.61	79.68	-20.36	1.98	0.000003	印度洋
-39.03	-100.49	19.56	1.95	0.000038	太平洋
39.03	-100.49	-19.56	1.95	0.000038	美国斯普林布鲁克
-40.99	80.13	-22.27	2.06	0.000041	印度洋
40.98	80.13	22.27	2.06	0.000042	新疆阿克苏地区

其中经纬度以度为单位。

剔除位于海洋中的解，并利用赤纬近似公式得到可能地点与日期为

- 1、(38.62 °N, 79.37 °E)，新疆和田地区，5 月 16 日或 7 月 28 日
- 2、(40.98 °N, 80.13 °E)，新疆阿克苏地区，6 月 3 日或 7 月 10 日
- 3、(39.03 °N, 100.49 °W)，美国斯普林布鲁克地区，1 月 24 日或 11 月 17 日

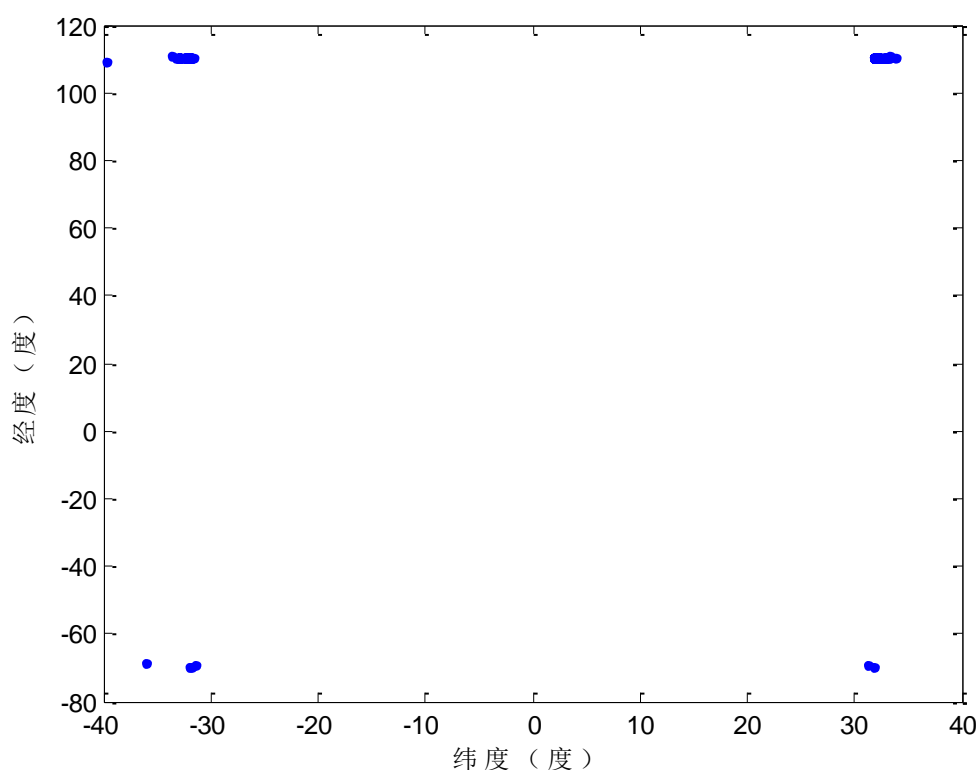
## (2) 附件 3 求解

同理，附件三中直杆影长与时间的数据为

**表 5.3.2.3 影长随时间变化表**

时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)	时间(h)	影长(m)
12.68	1.2473	13.03	1.0863	13.38	0.9486
12.73	1.2228	13.08	1.0651	13.43	0.9309
12.78	1.1989	13.13	1.0444	13.48	0.9138
12.83	1.1754	13.18	1.0243	13.53	0.8971
12.88	1.1524	13.23	1.0046	13.58	0.8810
12.93	1.1299	13.28	0.9855	13.63	0.8655
12.98	1.1078	13.33	0.9668	13.68	0.8505

利用 MATLAB 软件编写求出所有满足标准差（目标函数值）小于 0.0001 的参数值，其中经纬度坐标分布如图所示



**图 5.3.2.2 可能地点分布图**

由图可知，所有的解可以聚集为 8 类，利用聚类方法处理数据，得到

表 5.3.2.4 可能地点、赤纬、直杆高度、标准差表

纬度	经度	太阳赤纬	直杆高度	标准差	地点
39.68S	109.47E	1.53	3.97	0.0003	印度洋
31.33N	69.37W	21.07	2.67	0.0001	北大西洋
36.01S	68.81W	-20.84	2.26	0.0003	阿根廷门多萨
31.80S	69.60W	-18.52	2.88	0.0001	阿根廷圣胡安省
31.87S	110.38E	18.29	2.89	0.0001	印度洋
33.75N	110.12E	-13.90	3.16	0.0001	陕西省商洛市
33.64S	110.10E	13.73	3.13	0.0001	印度洋
31.99N	110.36E	-18.01	2.91	0.0001	湖北省十堰市

其中经纬度以度为单位。

剔除位于海洋中的解，并利用赤纬近似公式得到可能地点与日期为

- 1、(31.99 °N, 110.36 °E)，湖北省十堰市，1 月 30 日或 11 月 10 日
- 2、(33.75 °N, 110.12 °E)，陕西省商洛市，2 月 13 日或 10 月 27 日
- 3、(36.01 °S, 68.81 °W)，阿根廷门多萨，1 月 17 日或 11 月 23 日
- 4、(31.80 °S, 69.60 °W)，阿根廷圣胡安省，1 月 28 日或 11 月 12 日

### 5.3.3 问题的答案

模型应用于附件 2 数据，得到的可能地点及日期为（已剔除位于海洋上的地点）：

- 1、(38.62 °N, 79.37 °E)，新疆和田地区，5 月 16 日或 7 月 28 日
- 2、(40.98 °N, 80.13 °E)，新疆阿克苏地区，6 月 3 日或 7 月 10 日
- 3、(39.03 °N, 100.49 °W)，美国斯普林布鲁克地区，1 月 24 日或 11 月 17 日

模型应用于附件 3 数据，得到的可能地点及日期为（已剔除位于海洋上的地点）：

- 1、(31.99 °N, 110.36 °E)，湖北省十堰市，1 月 30 日或 11 月 10 日
- 2、(33.75 °N, 110.12 °E)，陕西省商洛市，2 月 13 日或 10 月 27 日
- 3、(36.01 °S, 68.81 °W)，阿根廷门多萨，1 月 17 日或 11 月 23 日
- 4、(31.80 °S, 69.60 °W)，阿根廷圣胡安省，1 月 28 日或 11 月 12 日

## 5.4 问题四的模型建立与求解：

首先由摄像机的投影过程可以得到影长比例计算公式，同样，在已知影长关系之后，可以建立以经、纬度为决策变量的二维非线性优化模型。考虑数据误差，取误差界限为 0.02，编程找出所有符合条件的点。

### 5.4.1 问题四(1)模型的建立 —— 影长计算模型和二维非线性优化模型

视频中每一帧图像可以视为直杆-太阳影子平面到摄像机像素平面的中心投影。设像素平面中影子与直杆交点 $(X_s, Y_s)$ 、影子顶点 $(X_d, Y_d)$ 、直杆顶点 $(X_l, Y_l)$ 则从像素平面到直杆-太阳影子平面的比例系数  $k$  为

$$k = \frac{2}{\sqrt{(X_s - X_l)^2 + (Y_s - Y_l)^2}}$$

所以实际影子长度为

$$l = k\sqrt{(X_s - X_d)^2 + (Y_s - Y_d)^2} = \frac{2\sqrt{(X_s - X_d)^2 + (Y_s - Y_d)^2}}{\sqrt{(X_s - X_l)^2 + (Y_s - Y_l)^2}}$$

从而得到时间与直杆影长的数据。

根据视频拍摄日期 2015-7-13 可以得到

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(n + 284)\right) = 21.825^\circ$$

在影长-时间函数关系中缺少测量点经度、纬度两个参数，由问题二解答，建立以理论值与实际值标准差的最小值为目标函数的二维非线性优化模型

$$\min S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f(t_i) - l_i)^2}{m}}$$

$$s. t. \begin{cases} \delta = 21.825^\circ \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ L = 3 \end{cases}$$

其中

$$f(t) = L \sqrt{\frac{1}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(15t + \theta + 60))^2} - 1}$$

$t$ 为北京时间， $\delta$ 为太阳直射纬度， $\varphi$ 为直杆所在纬度， $\theta$ 为直杆所在经度， $L$ 为直杆长度。

考虑到数据的误差，标准差值小于 $10^{-2}$ 的解相互之间无法评判优劣。所以定义误差限 $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ ，将所有局部最优解中满足

$$S < \Delta$$

的解汇总即得结果。

#### 5.4.2 问题四(1)模型的求解

根据前面的问题假设和分析，首先将视频转化为一帧帧图片。每间隔一分钟，提取一帧图片。从图片中找到相应时刻直杆影子的长度。如图



图 5.4.2.1 视频图像提取图

由图可知，图像中影子的边界比较模糊，不容易找到边界，所以利用 canny 算子对图片进行边缘检测并提取，如图所示

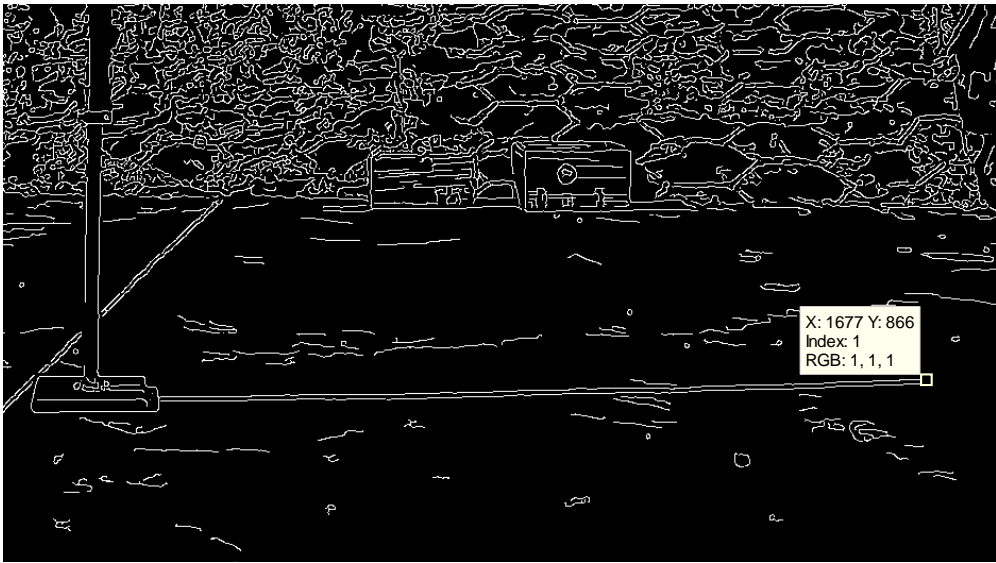


图 5.4.2.2 边缘提取后图片

确定每张图片的影子与直杆交点、影子顶点以及直杆顶点的像素坐标后，代入模型中的公式，得到视频中直杆影长随时间变化数据为

表 5. 4. 2. 1 视频中影长与时间关系表

时间	影长	时间	影长	时间	影长	时间	影长	时间	影长
8.902	2.298	9.052	2.153	9.203	2.044	9.353	1.912	9.503	1.800
8.919	2.292	9.069	2.153	9.219	2.018	9.370	1.903	9.520	1.797
8.935	2.277	9.086	2.138	9.236	2.009	9.386	1.826	9.537	1.782
8.952	2.259	9.102	2.127	9.253	2.006	9.403	1.829	9.553	1.774
8.969	2.239	9.119	2.118	9.269	1.991	9.420	1.821	9.570	1.759
8.986	2.221	9.136	2.103	9.286	1.977	9.436	1.829		
9.002	2.215	9.153	2.080	9.303	1.962	9.453	1.821		
9.019	2.197	9.169	2.065	9.320	1.953	9.470	1.824		
9.036	2.183	9.186	2.056	9.336	1.941	9.487	1.774		

其中时间单位为小时（北京时间），影长单位为米。

编写程序，处理数据并查询得到

表 5.4.2.2 可能的点提取结果表

纬度	经度	地点
36.48N	111.90E	山西省临汾市
36.48S	68.07W	阿根廷
3.845S	123.70E	班达海
3.845N	56.33W	

### 5. 4. 3 问题四(2)的模型建立与求解

根据问题四(1)中得到的影长-时间数据，求解拍摄地纬度、经度、拍摄时间，在问题中拍摄时间等效于太阳赤纬，所以就是以纬度、经度、赤纬为决策变量，影长理论计算值与实际测量值误差为目标函数的优化问题。

参考前面问题，建立以理论值与实际值标准差的最小值为目标函数的二维非线性优化模型

$$\min S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f(t_i) - l_i)^2}{m}}$$

$$s.t. \begin{cases} -23.45^\circ \leq \delta \leq 23.45^\circ \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \\ L = 3 \end{cases}$$

其中

$$f(t) = L \sqrt{\frac{1}{(\sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos(15t + \theta + 60))^2} - 1}$$

考虑到数据的误差，标准差值小于 $10^{-2}$ 的解相互之间无法评判优劣。所以定义误差限 $\Delta = 1 \times 10^{-2}$ ，将所有局部最优解中满足 $S < \Delta$ 的解汇总即得结果。

编写程序，处理数据得到地点结果如图

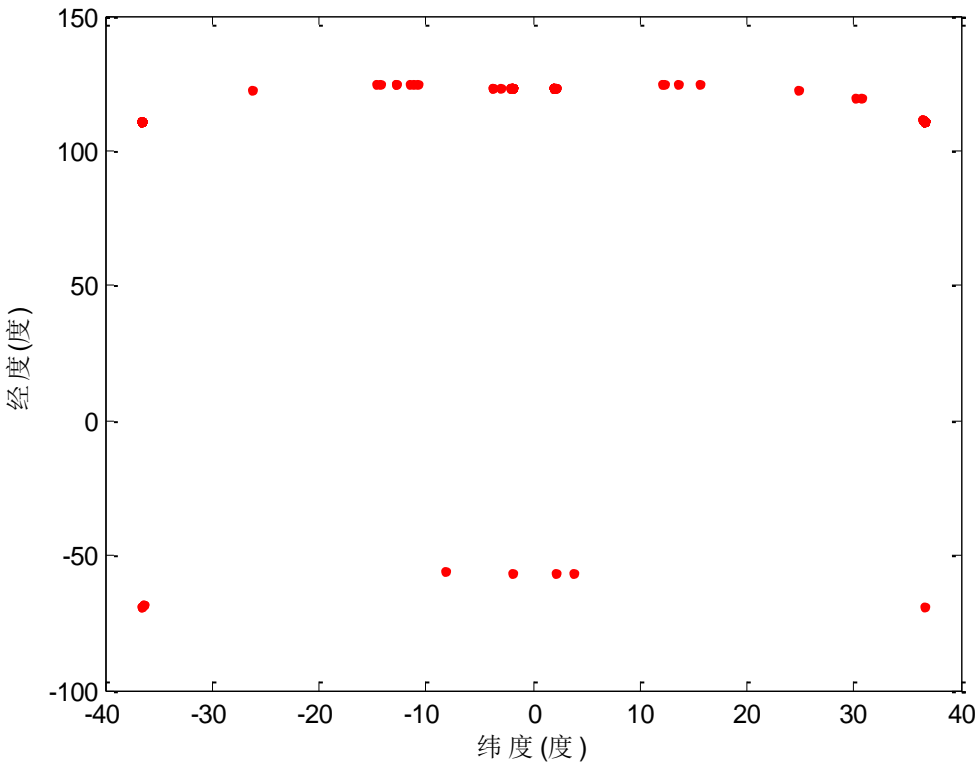


图 5.4.3.1 问题四(2)可能地点分布图

从图中数据筛选出位于陆地的点，得到结果为

表 5.4.3.1 位于陆地的可能地点

纬度	经度	赤纬	地点
30.20N	120.00E	7.27	浙江省杭州市西湖区
36.66N	111.10E	27.36	山西省临汾市隰县
36.66S	68.95W	-27.36	Mendoza, 阿根廷



利用赤纬估计公式，反求出日期，结果如下

- 1、(30.20N, 120.00E) 浙江省杭州市西湖区，9月2日或4月9日
  - 2、(36.66N, 111.10E) 山西省临汾市隰县，6月16日或6月26日
  - 3、(36.66S, 68.95W) Mendoza, 阿根廷，12月26日或12月16日
- 与问题四(1)比较，(36.66N, 111.10E) 6月16日或6月26日之前结果为(36.48N, 111.9E) 7月13日，可以看出缺少条件导致误差增加。

#### 5.4.4 问题四模型的检验

问题四中，公式里的太阳赤纬是由近似公式得到的，并不够精确，从而导致误差产生。查询[6]可知，2015-7-13对应的太阳赤纬为  $21.917^\circ$  不是计算得到的  $21.825^\circ$ ；校正误差，重新代入问题四(1)模型进行求解，如图所示

筛选出位于陆地的点，得到结果为

表 5.4.4.1 根据日期重新确定 $\delta$ 得到的可能地点

纬度	经度	地点
36.53N	111.88E	山西省临汾市
36.52S	68.10W	阿根廷
3.76S	123.78E	班达海

与之前计算结果进行比较，绝对误差为

表 5.4.4.1 实际与理论赤纬对参数造成的误差

地点	纬度绝对误差	经度绝对误差
山西省临汾市	0.05	0.02
阿根廷	0.04	0.03
班达海	0.09	0.08

由表可知计算所得经度、纬度误差均小于  $0.1^\circ$ ；模型较为可靠。

## 六、模型的分析与评价

### 6.1 模型的可靠性

为了检验我们建立的二维、三维、四维非线性优化模型的可靠性，考虑将此模型中的 $\delta$ 、 $\varphi$ 、 $\theta$ 变为未知参数，利用问题一中得到影长随时间变化数据，代入此模型进行求解，得到：

$$\delta = -12.204^\circ, \varphi = 39.8802^\circ, \theta = 116.3541^\circ$$

与第一问给出的 $\delta = -12.102^\circ, \varphi = 39.9072^\circ, \theta = 116.3914^\circ$ 进行比较和误差分析：

根据太阳赤纬的近似公式反向求解得出日期为10月22日或2月19日，与实际结果相符，经、纬度绝对误差不超过 $0.05^\circ$ ，地点在北京菜园街，距离天安门不是特别远，由此可以看出此模型较为可靠。

## 6.2 模型的缺点

- 1、太阳赤纬采用近似公式进行估计，由一定误差，可以使用更高精确度的公式来改进。
- 2、没有考虑太阳赤纬随年份变化的规律，加入会使模型更精确。
- 3、对视频的处理数据较少，大量视频纤细没有用到。

## 参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶 俊, 数学模型(第四版)[M], 北京: 高等教育出版社, 2011
- [2] 维基百科, <https://en.wikipedia.org/wiki/Declination>, Declination, ,2015.9.14
- [3] 维基百科, [https://en.wikipedia.org/wiki/Solar\\_azimuth\\_angle](https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_azimuth_angle), Solar azimuth angle, 2015.9.14
- [4] 维基百科, [https://en.wikipedia.org/wiki/Solar\\_zenith\\_angle](https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_zenith_angle), Solar zenith angle, 2015.9.14
- [5] 郑鹏飞 林大钧, 基于影子轨迹线反求采光效果的技术研究[J], 华东理工大学学报(自然科学版), 36(3): 1-6,2010.6
- [6] 离奇, [http://www.360doc.com/content/11/0829/14/680559\\_144236604.shtml](http://www.360doc.com/content/11/0829/14/680559_144236604.shtml), 太阳赤纬表, 2015.9.14
- [7] 刘群, 日晷投影原理及应用[J], 贵州师范大学学报(自然科学版)[J], 21(3): 1-4,2003.8

## 附录

运行环境：windowsXP 、 windows 7 或 windows 8

运行软件：matlab 2013 版本以上

问题一的附录：

问题一的曲线：

问题一曲线的检验：

```
function [ F ] = Wucha3(x)
format long;
func = @(t,delta,fi,theta,L)
L.*sqrt(abs(1./(sind(delta).*sind(fi)+cosd(delta).*cosd(fi).*cosd(15.*(t-12+(theta-120
)/15))).^2-1));
```

```
j=0;
% delta=-12.102;fi=39.9072;
for i = 9:0.05:10
    j=j+1;
    t1(j) = i;
    l1(j) = func(t1(j),-12.102,39.9072,116.3914,3);
end
```

```
delta = -10.833;
% delta = -12.102;
```

```
F=0;
if abs(x(1))<=90 && abs(x(2))<=180
    for i=1:length(t1)
        F = F + (func(t1(i),delta,x(1),x(2),3)-l1(i))^2;
    end
else
    F=inf;
end
F = sqrt(F ./ (length(t1)-1));
end
```

问题二的附录：

```
%Pro2fun.m
function [ F ] = pro2fun( x )
que=[14.70 1.1496
14.75 1.1822
```

```

14.80    1.2153
14.85    1.2491
14.90    1.2832
14.95    1.3180
15.00    1.3534
15.05    1.3894
15.10    1.4262
15.15    1.4634
15.20    1.5015
15.25    1.5402
15.30    1.5799
15.35    1.6201
15.40    1.6613
15.45    1.7033
15.50    1.7462
15.55    1.7901
15.60    1.8350
15.65    1.8809
15.70    1.9279];

```

```

delta=10.510978;
func = @(t,delta,fi,theta,L)
L.*sqrt(abs(1./(sind(delta).*sind(fi)+cosd(delta).*cosd(fi).*cosd(15.*(t-12+(theta-120
)/15))).^2-1));
F=0;

```

```

if abs(x(1))<90 && abs(x(2))<=180 && x(3)<5 && x(3) >0
    for i=1:size(que,1)
        F = F + (func(que(i,1),delta,x(1),x(2),x(3))-que(i,2))^2;
    end
else
    F=inf;
end
F = sqrt(F / (size(que,1)-1));
end

```

问题三的附录：

```

%pro3fun.m
function [ F ] = pro3fun_1( x )
% Detailed explanation goes here
que=[12.68    1.247256205

```

```

12.73    1.22279459
12.78    1.198921486
12.83    1.175428964
12.88    1.152439573
12.93    1.12991747
12.98    1.10783548
13.03    1.086254206
13.08    1.065081072
13.13    1.044446265
13.18    1.024264126
13.23    1.004640314
13.28    0.985490908
13.33    0.966790494
13.38    0.948584735
13.43    0.930927881
13.48    0.91375175
13.53    0.897109051
13.58    0.880973762
13.63    0.865492259
13.68    0.850504468
];

% delta=10.510978;
func = @(t,delta,fi,theta,L)
L.*sqrt(abs(1./(sind(delta).*sind(fi)+cosd(delta).*cosd(fi).*cosd(15.*(t-12+(theta-120
)/15))).^2-1));
F=0;

if abs(x(1))<=23.45 && abs(x(2))<=90 && abs(x(3))<=180 && x(4)<5 && x(4)>0
    for i=1:size(que,1)
        F = F + (func(que(i,1),x(1),x(2),x(3),x(4))-que(i,2))^2;
    end
else
    F=inf;
end
F = sqrt(F / (size(que,1)-1));
End

%problem3_1.m
% ÎÊËË¼ö³Ðò
i0 = 0;
options = optimset('Algorithm','SQP');
options1 = optimset('Algorithm','interior-point');
t=-25;

```

```

for i=-23:2:23
    t=i;u=-100;
    for j = -60:10:60
        u=j;
        for k=-100:20:120
            v=k;

[x,fval,flag]=fmincon(@pro3fun_1,[t,u,v,3],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180,0],[23.45,90,18
0,4],[[],options);
%
[x1,fval1,flag1]=fmincon(@pro3fun_1,[t,u,100,3],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180,0],[23.45
,90,180,4],[[],options1);
%     if fval > fval1
%         fval = fval1;
%         x = x1;
%     end
        if fval < 0.0005
            i0 = i0 + 1;
            delta(i0)=x(1);
            X(i0) = x(2);
            Y(i0) = x(3);
            L(i0) = x(4);
            Z(i0) = fval;

        end
    end
end
end
figure,plot(X,Y,'r.','MarkerSize',10);
axis([-65 65 -110 120]);
xlabel('Î³');ylabel('3/4 - Î³');

%pro3fun_2
function [ F ] = pro3fun_2( x )
% 问题三函数
% Detailed explanation goes here
que=[13.15 3.533142184
13.20 3.546768029
13.25 3.561797643
13.30 3.578100715
13.35 3.595750783
13.40 3.61493428
13.45 3.635425983
13.50 3.657218272
13.55 3.680541115

```

```

13.60    3.705167836
13.65    3.731278025
13.70    3.758917911
13.75    3.788087888
13.80    3.818701015
13.85    3.850809619
13.90    3.88458522
13.95    3.919911828
14.00    3.956875992
14.05    3.99553479
14.10    4.035750835
14.15    4.077863059
];

% delta=10.510978;
func = @(t,delta,fi,theta,L)
L.*sqrt(1./(sind(delta).*sind(fi)+cosd(delta).*cosd(fi).*cosd(15.*(t-12+(theta-120)/15
))).^2-1);
F=0;

if abs(x(1))<23.45 && abs(x(2))<90 && abs(x(3))<=180 && x(4)<5 && x(4) >0
    for i=1:size(que,1)
        F = F + (func(que(i,1),x(1),x(2),x(3),x(4))-que(i,2))^2;
    end
else
    F=inf;
end
F = sqrt(F / (size(que,1)-1));
end

%problem3_2.m
% 问题三解决程序
i0 = 0;t=-23;
options = optimset('Algorithm','SQP');
options1 = optimset('Algorithm','interior-point');
for i=-23:2:23
    t=i;
    for j = -77:10:77
        u=j;

[x,fval,flag]=fmincon(@pro3fun_2,[t,u,100,3],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180,0],[23.45,90,
180,4],[],options);
%
[x1,fval1,flag1]=fmincon(@pro3fun_2,[t,u,100,3],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180,0],[23.45

```

```

,90,180,4],[],options1);
    if fval > fval1
        fval = fval1;
        x = x1;
    end
    if fval < 0.0009
        i0 = i0 + 1;
        delta(i0)=x(1);
        X(i0) = x(2);
        Y(i0) = x(3);
        L(i0) = x(4)
        Z(i0) = fval;
    end

    end
end
figure,plot(X,Y,'r.','MarkerSize',10);

%date2n.m
function [ n ] = date2n( year,month,day )
% ½ «ËÖÆ Ú × º» - Æñ
% Detailed explanation goes here
days=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
n=0;
for i=1:month-1
    n=n+days(i);
end
n=n+day;
end

%delta2date.m
function [ month,day ] = delta2date( delta )
%DELTA2DATE Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
% n = asind(delta./23.45).*365./360 - 284;
% n = mod(n,365);
days = [31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
Days(1)=31;
for i=2:12
    Days(i)=Days(i-1)+days(i);
end
min=inf;
for i=1:365
    tmp = abs(sind((i+284).*(360/365)).*23.45-delta);

```



```

        if tmp < min
            min = tmp;
            n(1) = i;
        end
    end
    min=inf;
    for i=1:365
        tmp = abs(sind((i+284).*(360/365)).*23.45-delta);
        if i~=n(1) && tmp < min
            min = tmp;
            n(2) = i;
        end
    end
    end
    for j=1:2
        for i=1:12
            if n(j) < Days(i)
                break;
            end
        end
        if i>1
            month(j) = i;
            day(j) = n(j)-Days(i-1);
        else
            month(j)=1;
            day(j)=n(j);
        end
    end
end
end
end

```

## 问题四的附录：

### 问题四第一小问

%Pro4fun.m

```

function [ F ] = pro4fun( x )
que=[2.298  8.902
2.292  8.919
2.277  8.935
2.259  8.952
2.239  8.969
2.221  8.986

```

2.215	9.002
2.197	9.019
2.183	9.036
2.153	9.052
2.153	9.069
2.138	9.086
2.127	9.102
2.118	9.119
2.103	9.136
2.080	9.153
2.065	9.169
2.056	9.186
2.044	9.203
2.018	9.219
2.009	9.236
2.006	9.253
1.991	9.269
1.977	9.286
1.962	9.303
1.953	9.320
1.941	9.336
1.912	9.353
1.903	9.370
1.826	9.386
1.829	9.403
1.821	9.420
1.829	9.436
1.821	9.453
1.824	9.470
1.774	9.487
1.800	9.503
1.797	9.520
1.782	9.537
1.774	9.553
1.759	9.570

];

delta=21.825;

func = @(t,delta,fi,theta,L)

L.\*sqrt(abs(1./(sind(delta).\*sind(fi)+cosd(delta).\*cosd(fi).\*cosd(15.\*(t-12+(theta-120)/15))).^2-1));

F=0;

if abs(x(1))<=90 && abs(x(2))<=180

```

        for i=1:size(que,1)
            F = F + (func(que(i,2),delta,x(1),x(2),2)-que(i,1))^2;
        end
    else
        F=inf;
    end
end
F = sqrt(F / (size(que,1)-1));
end

%Problem4.m
i0 = 0;t=-90;
options = optimset('Algorithm','SQP');
options1 = optimset('Algorithm','interior-point');
for i=-90:10:90
    t=t+10;u=-180;
    for j = -180:10:180
        u=u+10;

[x,fval,flag]=fmincon(@pro4fun,[t,u],[[],[]],[[],[]],[-90,-180],[90,180],[[],options);

[x1,fval1,flag1]=fmincon(@pro4fun,[t,u],[[],[]],[[],[]],[-90,-180],[90,180],[[],options1);
    if fval > fval1
        fval = fval1;
        x = x1;
    end
    if fval < 0.02
        i0 = i0 + 1;
        X(i0) = x(1);
        Y(i0) = x(2);
        Z(i0) = fval;
    end

end

end
end
figure,plot(X,Y,'r.','MarkerSize',10);

```

问题四第二小问：

```

%pro4fun_p.m
function [ F ] = pro4fun_p (x)
que=[2.298  8.902
2.292  8.919
2.277  8.935
2.259  8.952

```

2.239	8.969
2.221	8.986
2.215	9.002
2.197	9.019
2.183	9.036
2.153	9.052
2.153	9.069
2.138	9.086
2.127	9.102
2.118	9.119
2.103	9.136
2.080	9.153
2.065	9.169
2.056	9.186
2.044	9.203
2.018	9.219
2.009	9.236
2.006	9.253
1.991	9.269
1.977	9.286
1.962	9.303
1.953	9.320
1.941	9.336
1.912	9.353
1.903	9.370
1.826	9.386
1.829	9.403
1.821	9.420
1.829	9.436
1.821	9.453
1.824	9.470
1.774	9.487
1.800	9.503
1.797	9.520
1.782	9.537
1.774	9.553
1.759	9.570

];

% delta=21.825;

% delta=21.917;

func = @(t,delta,fi,theta,L)

L.\*sqrt(abs(1./(sind(delta).\*sind(fi)+cosd(delta).\*cosd(fi).\*cosd(15.\*(t-12+(theta-120)/15))).^2-1));

```

F=0;

if abs(x(1))<=90 && abs(x(2))<=90 && abs(x(3))<=180
    for i=1:size(que,1)
        F = F + (func(que(i,2),x(1),x(2),x(3),2)-que(i,1))^2;
    end
else
    F=inf;
end
F = sqrt(F / (size(que,1)-1));
end

%Problem4_p.m
i0 = 0;
options = optimset('Algorithm','SQP');
options1 = optimset('Algorithm','interior-point');
t=-23.45;
for i=-23.45:2:23.45
    t=t+2;u=-90;
    for j = -90:10:90
        u=u+10;

[x,fval,flag]=fmincon(@pro4fun_p,[t,u,100],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180],[23.45,90,180
],[],options);

[x1,fval1,flag1]=fmincon(@pro4fun_p,[t,u,100],[[],[],[],[],[-23.45,-90,-180],[23.45,90,
180],[[],options1);
    if fval > fval1
        fval = fval1;
        x = x1;
    end
    if fval < 0.02
        i0 = i0 + 1;
        delta(i0)=x(1);
        X(i0) = x(2);
        Y(i0) = x(3);
        Z(i0) = fval;
    end

end

end
figure,plot(X,Y,'r.','MarkerSize',10);

```

第四问误差程序：

```
i0 = 0;
options = optimset('Algorithm','SQP');
options1 = optimset('Algorithm','interior-point');
min=inf;
for i=20:1:40
    t=i;
    for j = 100:1:120
        u=j;

[x,fval,flag]=fmincon(@pro4fun,[t,u],[[],[]],[[],[]],[-90,-180],[90,180],[[],options]);
%
[x1,fval1,flag1]=fmincon(@pro4fun,[t,u],[[],[]],[[],[]],[-90,-180],[90,180],[[],options1]);
%     if fval > fval1
%         fval = fval1;
%         x = x1;
%     end
%     if fval < 0.02
%         i0 = i0 + 1;
%         X(i0) = x(1);
%         Y(i0) = x(2);
%         Z(i0) = fval;
%     end
%     if fval < min
%         min = fval;
%         XX = x;
%     end

end

end
XX
fval
% figure,plot(X,Y,'r.','MarkerSize',10);

%Date2n.m% 计算时间序列
function [ n] = date2n( year,month,day )
days=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
n=0;
for i=1:month-1
    n=n+days(i);
end
```

```
n=n+day;  
end
```