浮力物体的振动 Oscillations of a Buoyant Object

1. 问题描述：预测分层水体中浮力块的路径
2. 问题要求

假设在 100m 深的水中，密度随深度线性增加，表面密度为 1025 kg/m³，稳定频率的平方取 $N^2 = 10^{-4}\ s^{-2}$，使底部密度增加到 1026 kg/m³。读者现在的任务是预测一个密度为 1025.5 kg/m³ 的物体在深度（比如 80 米）释放后的运动轨迹。

为了简单起见，我们假定只有垂直方向上的运动。因此，动量方程可以简化为一个方程:

$$\frac{dw_{\mathrm{obj}}}{dt} = -g\,\frac{(\rho_{\mathrm{obj}} - \rho_{\mathrm{amb}})}{\rho_{\mathrm{obj}}}$$

后一个方程右边的浮力大小和符号随物体位置的变化而变化。另一方面，物体的位置 z_{obj} 随着它的垂直速度 ω_{obj} 改变而改变，根据:

$$\frac{dz_{\mathrm{obj}}}{dt} = w_{\mathrm{obj}}$$

后两个方程是相互耦合的，因为物体的位置决定了在周围流体中的密度和浮力的大小

该代码由三部分组成:

（1）垂直速度 ω_{obj} 预测器

（2）新位置 z_{obj} 的预测器

（3）相对于物体位置的环境海洋密度的计算器

3.有限差分方程

$$w_{\mathrm{obj}}^{n+1} = w_{\mathrm{obj}}^{n} - \Delta t\ g\ (\rho_{\mathrm{obj}} - \rho_{\mathrm{amb}})/\rho_{\mathrm{obj}} \qquad (3.20)$$

其中 n 为时间水平，Δt 为所选的时间步长

$$z_{\mathrm{obj}}^{n+1} = z_{\mathrm{obj}}^{n} + \Delta t \cdot w_{\mathrm{obj}}^{n+1} \qquad (3.21)$$

后一个方程中对垂直速度 ω_{obj} 使用时间水平（n + 1），意味着这个方程的输入来自于前一个方程中 ω_{obj} 的预测值。换句话说，步骤（3.20）必须出现在步骤（3.21）之前。时间步长设为 Δt = 1s。

初始和边界条件：

对象的初始位置设置为 $z0o_{bj}$ =−80 m。初始垂直速度 $w0o_{bj}$ 被设为 0。除此之外，还需要明确边界条件，最简单的解决办法是使这些边界不被渗透。

3. 结果展示