衰退问题/腐败问题 The Decay Problem

1. 问题描述

假设某种物质的浓度是 C_0，这种物质的浓度随着时间变化而按照一定的速率减少，

即$\frac{dc}{dt}=-\kappa\cdot C$，该方程为一阶常微分方程，对等式两边积分求解可得 $C(t)=C\cdot e^{-\kappa\cdot t}$

$C(t_0)=C_0$　　初始条件

$C(t)=C\cdot e^{-\kappa\cdot t}$，$t\geqslant t_0$

初值问题

使用有限差分-前向差分来表示上述微分方程：

$$\frac{dc}{dt}=\frac{C(t_n+\Delta t)-C(t_n)}{\Delta t}=-\kappa\cdot C(t_n)$$

在 tn+1 时刻的浓度：$\frac{C_{n+1}-C_n}{\Delta t}=-\kappa\cdot C_n$

整理左右两边的项可得：$C_{n+1}=C_n-\Delta t\cdot\kappa\cdot C_n=(1-\Delta t\cdot\kappa)C_n$

数值稳定性条件：$\Delta t<\frac{1}{\kappa}$

2. 问题要求：

$\kappa=0.0001s^{-1}$，$\Delta t=3600s$，初始浓度为 100%，模拟 15 个小时的浓度变化

3. 三种格式

显式格式：$C_{n+1}=(1-\Delta t\cdot\kappa)C_n$

隐式格式：$C_{n+1}=\frac{C_n}{(1+\Delta t\cdot\kappa)}$

混合格式：$C_{n+1}=\frac{1-(1-\alpha)\cdot\kappa\cdot\Delta t}{1+\alpha\cdot\kappa\cdot\Delta t}C_n$，当α=0.5 时这种格式被称为半隐式格式

4. 结果展示（完整代码见.py 文件）