砂川理論電磁気学　学習ノート

orange-kyoto

2025 年 9 月 4 日

目次

第 1 章

真空電磁場の基本法則

§1　場の概念

§2　電場と磁場の定義

§3　Coulomb の法則

閉曲面 S の外部に点電荷が存在するときは、以下が”容易に”示せるとのこと：

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = 0$$

ガウスの定理より、

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) d^3x$$

閉曲面内に点電荷がないので、電場が無限大になるような特異点が無い。よって、電場の div を普通に計算することができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} E_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_Q}{R^3} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{3(x - x_Q)^2}{R^5} \right\}\end{aligned}$$

同じように y, z の偏微分も計算できるので

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3}{R^3} - \frac{3(x-x_Q)^2+3(y-y_Q)^2+3(z-z_Q)^2}{R^5}\right\} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3}{R^3} - \frac{3R^2}{R^5}\right\} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3}\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

になり、積分しても 0 になる。電場の湧き出しが無いので、閉曲面を出入りする電場が差し引きでゼロになるイメージ。

§4 Faraday の電磁誘導の法則

§5 Ampere の法則

§6 電荷保存則と変位電流

§7 Maxwell の方程式

帯電体 ρ_0 自身が作る静電場から受ける力を自己力と呼ぶらしい。次の形でかける：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_s^{(e)} &= \int_V \rho_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})d^3x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho_0(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\rho_0(\boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^3}
\end{aligned}
$$

2 行目への変形では、帯電体の位置 $\boldsymbol{x'}$ の微小領域の電荷 $\rho_0(\boldsymbol{x'})d^3x'$ が位置 $\boldsymbol{x}$ に作る静電場がクーロンの法則からわかっているので、それを重ね合わせた電場の式を使っている。これが 0 になるとのことだが、以下のように考えると当然のようにも思えてくる。

領域 V 内の 2 点 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x'}$ の微小領域を考え、それぞれに位置する電荷 $\rho_0(\boldsymbol{x})d^3x$ と $\rho_0(\boldsymbol{x'})d^3x'$ が及ぼし合う力を考えると、当然ながらクーロンの法則より、互いに同じ大きさで逆向きの力を及ぼし合うことになる。

位置 $\boldsymbol{x}$ の電荷が受ける力は、

$$
\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_0(\boldsymbol{x})d^3x(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\rho_0(\boldsymbol{x'})d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^3}
$$

と書けるし、逆に位置 $\boldsymbol{x'}$ の電荷が受ける力は、

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_0(\boldsymbol{x'})d^3x'(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x})d^3x}{|\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}|^3} = -\boldsymbol{F}_1$$

と書ける。よって 2 点の合力は $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$ になる。最初の自己力の式は領域 V のすべての点のペア[*1]について足し合わせているだけと考えると、合力 0 をいくら足し合わせても全体が 0 なので、自己力が 0 になるのは当然のように思われる。

[*1] $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x'}$ どちらも V 全体で足し合わせているので、厳密には 1 つのペアについて 2 回足し算しているとは思う。が、結局 0 になるのでここでは問題にはならない。自己力をきちんと考慮する必要がある場面ではどう扱うのだろう？それともクーロン力で考えること自体が誤っているのだろうか。