

# 砂川理論電磁気学 学習ノート

orange-kyoto

2025 年 9 月 4 日

# 目次

第 1 章	真空電磁場の基本法則	2
§1	場の概念 . . . . .	2
§2	電場と磁場の定義 . . . . .	2
§3	Coulomb の法則 . . . . .	2
§4	Faraday の電磁誘導の法則 . . . . .	3
§5	Ampere の法則 . . . . .	3
§6	電荷保存則と変位電流 . . . . .	3
§7	Maxwell の方程式 . . . . .	3

## 第 1 章

# 真空電磁場の基本法則

### §1 場の概念

### §2 電場と磁場の定義

### §3 Coulomb の法則

閉曲面  $S$  の外部に点電荷が存在するときは、以下が”容易に”示せるとのこと：

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = 0$$

ガウスの定理より、

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x$$

閉曲面内に点電荷がないので、電場が無限大になるような特異点が無い。よって、電場の div を普通に計算することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_Q}{R^3} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{3(x - x_Q)^2}{R^5} \right\} \end{aligned}$$

同じように  $y, z$  の偏微分も計算できるので

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3}{R^3} - \frac{3(x-x_Q)^2 + 3(y-y_Q)^2 + 3(z-z_Q)^2}{R^5} \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3}{R^3} - \frac{3R^2}{R^5} \right\} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3}{R^3} - \frac{3}{R^3} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

になり、積分しても 0 になる。電場の湧き出しが無いので、閉曲面を出入りする電場が差し引きでゼロになるイメージ。

## §4 Faraday の電磁誘導の法則

## §5 Ampere の法則

## §6 電荷保存則と変位電流

## §7 Maxwell の方程式

帯電体  $\rho_0$  自身が作る静電場から受ける力を自己力と呼ぶらしい。次の形でかける\*<sup>1</sup>：

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_s^{(e)} &= \int_V \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) d^3x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho_0(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho_0(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}
\end{aligned}$$

2 行目への変形では、帯電体の位置  $\mathbf{x}'$  の微小領域の電荷  $\rho_0(\mathbf{x}')d^3x'$  が位置  $\mathbf{x}$  に作る静電場がクーロンの法則からわかっているの、それを重ね合わせた電場の式を使っている。これが 0 になるとのことだが、以下のように考えると当然のようにも思えてくる。

領域  $V$  内の 2 点  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  の微小領域を考え、それぞれに位置する電荷  $\rho_0(\mathbf{x})d^3x$  と  $\rho_0(\mathbf{x}')d^3x'$  が及ぼし合う力を考えると、当然ながらクーロンの法則より、互いに同じ大きさで逆向きの力を及ぼし合うことになる。

---

\*<sup>1</sup> そういえばこの形だと一見、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  が近いような領域で分母が発散しそうに思う。そう思った。けど、電荷分布が有限である限りは発散しない。点電荷だと電荷分布が  $\rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  などと書けるので積分が発散してしまうけどね。これはまた別で勉強してまとめてみたい。

位置  $\boldsymbol{x}$  の電荷が受ける力は、

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0(\boldsymbol{x})d^3x(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\rho_0(\boldsymbol{x}')d^3x'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}$$

と書けるし、逆に位置  $\boldsymbol{x}'$  の電荷が受ける力は、

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}')d^3x'(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x})d^3x}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|^3} = -\boldsymbol{F}_1$$

と書ける。よって 2 点の合力は  $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$  になる。最初の自己力の式は領域  $V$  のすべての点のペア\*2について足し合わせているだけと考えると、合力 0 をいくら足し合わせても全体が 0 なので、自己力が 0 になるのは当然のように思われる。

---

\*2  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$  どちらも  $V$  全体で足し合わせているので、厳密には 1 つのペアについて 2 回足し算しているとは思う。が、結局 0 になるのでここでは問題にはならない。自己力をきちんと考慮する必要がある場面ではどう扱うのだろうか？それともクーロン力で考えること自体が誤っているのだろうか。