3.变换（上）

3.1 为什么要学习变换

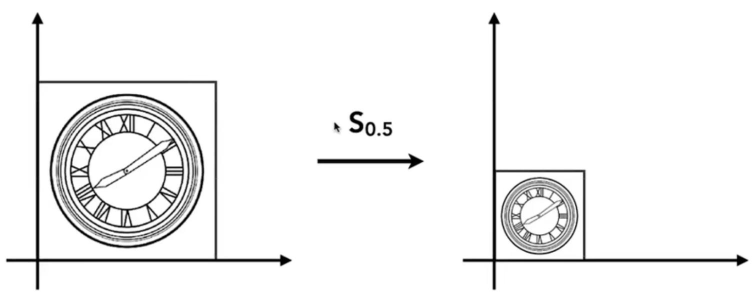
变换可以分为两种模式：

1. 模型变换：物体本身发生形态变化
2. 视图变换：静态场景，但摄像机在运动

光栅化中也存在着大量的变换（比如投影）

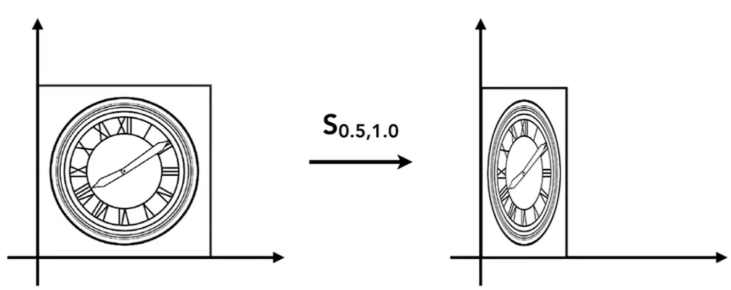
3.2 基础的二维变换

缩放变换：物体以原点为中心进行大小缩放，可以视为乘以一个 2×2 对角矩阵



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

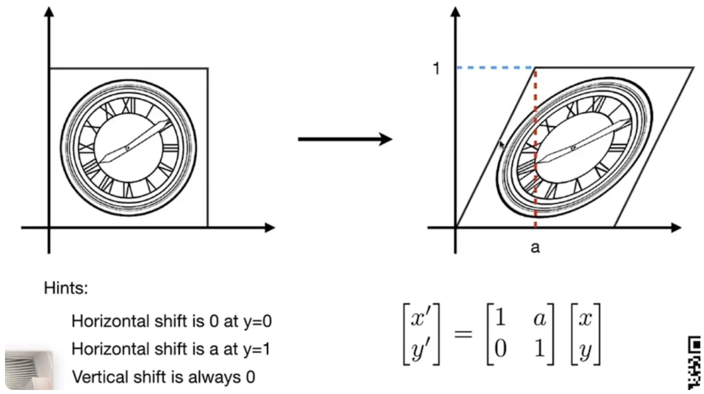
如果缩放并不均匀，那么变化矩阵中的两个s会不相同。



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

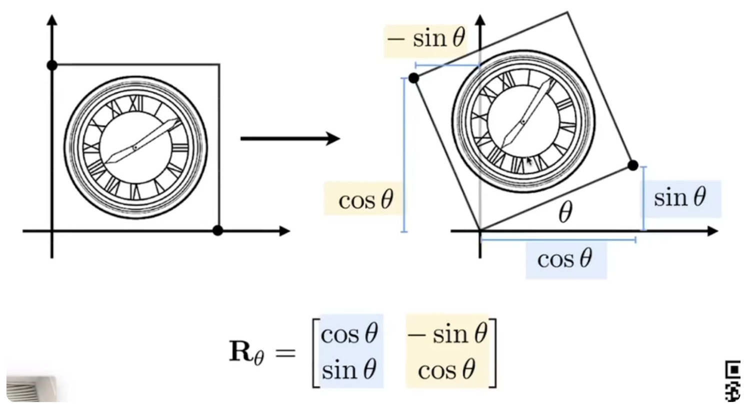
对称变换可以理解为一种复杂的缩放变换 $(s_x = 1, s_y = -1)$

切变会使得对角阵的右上左下两个值并不为0



思路都是研究变换前后坐标 (x, y) 之间的关系。

绕原点旋转



3.3 齐次坐标

面对平移问题时，引入了横纵坐标轴上的常量，这时就不能与其他变换一样用 2×2 的矩阵来进行变换，为了同样使用矩阵来表示变换，引入了齐次坐标。

$$把二维的点写作(x, y, 1)^T$$
$$把二维的向量写作(x, y, 0)^T$$

向量的第三位为0是因为向量需要保持平移不变性，经过平移运算不改变，同时也满足向量和点的转化：

> 向量+向量=向量
>
> 点−点=向量
>
> 点+向量=点
>
> 点+点=中点（扩充定义）

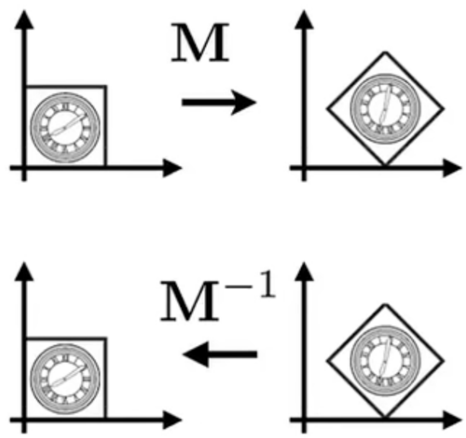
平移的计算公式如下：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \text{在齐次坐标中等同于} \begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{x}{w} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2节中只需要两个维度就可以进行的变换称为线性变换，3.3节中需要三维度进行的变换称为仿射变换。

只在二维平面中进行的变换，最下一行一定为（0，0，1），三维中的投影变换才会改变。



图像的逆变换在计算中等同于乘上变换矩阵的逆矩阵

3.4 组合变换

组合变换中，交换变换的次序会改变最终得到的图像。在计算中表现为两次变换矩阵交换相乘得到的结果不同。**矩阵乘法不满足交换律**

变换中，矩阵置于列向量的左边，越靠左越后执行

多个变换矩阵相乘可以得到一个同样是3*3的矩阵，也就是说，单个矩阵就可以进行相当复杂的变换。