HW4 Test Report

B06602037 徐子程

實驗條件：
以範例提供的 ex/graph.txt，重複生成 5 次 page rank，並觀察生成的數據。
亂數產生方式為使用 numpy 的 random.randint，先產生介於 1~100 的亂數，填入 n x 1 的 Matrix R_0，再取其總和 sum，將 R_0 每個元素除以 sum，即 sum(R_0) = 1。

生成亂數：

1	2	3	4	5
2.277580071174377108e-01	7.903780068728522012e-02	7.017543859649122417e-02	2.500000000000000000e-01	3.425414364640884113e-01
2.775800711743772187e-01	2.542955326460480947e-01	1.973684210526315819e-01	2.916666666666666713e-02	2.762430939226519222e-02
1.387900355871886093e-01	1.924398625429553367e-01	2.938596491228070429e-01	2.500000000000000000e-01	2.651933701657458453e-01
2.135231316725978712e-02	1.855670103092783574e-01	2.412280701754385970e-01	3.666666666666666408e-01	6.629834254143646133e-02
3.345195729537366325e-01	2.886597938144329634e-01	1.973684210526315819e-01	1.041666666666666713e-01	2.983425414364641037e-01

生成 Page Rank：

1	2	3	4	5	標準差
3.047997463157256504e-01	2.974718960690885261e-01	3.007958011950061517e-01	3.298309224337961920e-01	3.249617123198797475e-01	0.0132
4.163701067615659113e-02	3.814432989690721976e-02	2.960526315789474214e-02	4.375000000000000416e-03	4.143646408839779700e-03	0.0163
1.680541270596282444e-01	1.715028754169914960e-01	1.844993997184039558e-01	1.795375170343633808e-01	1.796487829845676842e-01	0.0060
2.343682838209035224e-01	2.502676516632639236e-01	2.492438123826009877e-01	2.541499737578726270e-01	2.320350165668531861e-01	0.0090
2.511408321275859223e-01	2.426132469537489733e-01	2.358557235460940482e-01	2.321065867739678101e-01	2.592108417198597525e-01	0.0099

由以上結果可以觀察到，由 5 組不同亂數生成的 page rank 標準差並不大，並且與使用 R_0 = [1/N]生成的 page range 也差異不大，故可以推測在 R_0 不同的起始條件下， 產生的 page rank 有收斂現象。

理論推導：

令 $\boldsymbol{N_0} = [\frac{1}{N} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \dots \frac{1}{N}]^T$ ，其中 sum($\boldsymbol{R_0}$) = 1。 $\boldsymbol{R_{n+1}} = (1-d)\boldsymbol{N_0} + d\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R}$ ，則

$$R_n = (1-d)[\sum_{k=0}^{n-1}(dA)^k]\boldsymbol{N_0} + (dA)^n\boldsymbol{R_0}$$

$$= (1-d)(d\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I_n})^{-1}[(d\,\boldsymbol{A})^n - \boldsymbol{I_n}]\boldsymbol{N_0} + (d\,\boldsymbol{A})^n \cdot \boldsymbol{R_0}$$

$$\boldsymbol{R_n}(n \rightarrow \infty)\begin{cases} \boldsymbol{N_0}, d=0 \\ (d-1)(d\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I_n})^{-1}\boldsymbol{N_0}, 0<d<1 \end{cases} \quad \Rightarrow \mathit{Indenpendent\ of}\ \boldsymbol{R_0}$$