ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
13. Determinánsok
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3. feladatainak megoldása
(írta: Chripkó Ágnes)

13.2.1. Órai feladatok / 1a.

Az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa a 13.3. szakasz 1. példájában írtak alapján:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Ugyanez pl. a második oszlop szerinti kifejtéssel számolva:

$$\det(A) = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det([3]) + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det([1]) = -6 + 4 = -2.$$

Mivel $\det(A) \neq 0$, ezért A reguláris. A 13.6. szakasz 2. megjegyzése alapján A inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

13.2.1. Órai feladatok / 1b.

Az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa 1. sor szerinti kifejtéssel:

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}\right) -$$

$$- 4 \cdot (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 16 - 1 \cdot 10 - 4 \cdot 3 = 26.$$

Ugyanez pl. a harmadik oszlop szerinti kifejtéssel:

$$\det(A) = -4 \cdot (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) + 6 \cdot (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) +$$

$$+ 8 \cdot (-1)^6 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = -4 \cdot 3 - 6 \cdot 11 + 8 \cdot 13 = 26.$$

Érdemes megjegyezni, hogy 3×3-as mátrixok determinánsa gyorsan számolható az alábbi ún. Sarrus-szabállyal, amely az 1. sor szerinti kifejtésből egyszerűen következik:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

A fenti mátrixra használva:

$$\det(A) = 120 + 6 - 32 + 20 - 72 - 16 = 26.$$

Mivel $\det(A) \neq 0$, ezért az A mátrix reguláris. A inverzének meghatározásához számítsuk ki az előjelezett aldeterminánsokat:

$$a'_{11} = (-1)^2 \cdot \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16,$$

$$a'_{12} = (-1)^3 \cdot \det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -10,$$

$$a'_{13} = (-1)^4 \cdot \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3,$$

$$a'_{21} = (-1)^3 \cdot \det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -24,$$

$$a'_{22} = (-1)^4 \cdot \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 28,$$

$$a'_{23} = (-1)^5 \cdot \det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -11,$$

$$a'_{31} = (-1)^4 \cdot \det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 26,$$

$$a'_{32} = (-1)^5 \cdot \det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -26,$$

$$a'_{33} = (-1)^6 \cdot \det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Így A inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -10 & 3 \\ -24 & 28 & -11 \\ 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -24 & 26 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{13} & -\frac{12}{13} & 1 \\ -\frac{5}{13} & \frac{14}{13} & -1 \\ \frac{3}{26} & -\frac{11}{26} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -24 & 26 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} = I.$$

$\boxed{\text{13.2.1. Órai feladatok / 2.}}$

Az

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa $\det(A) = -2 + 15 = 13 \neq 0$, ezért A reguláris. Inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \end{bmatrix}.$$

A

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa $\det(B) = -12 + 12 = 0$, ezért B szinguláris.

$\boxed{\text{13.2.1. Órai feladatok / 3.}}$

Szemléltessük a determináns 3.-11. tulajdonságait konkrét mátrixokon!

3. Ha egy mátrix valamely sorában/oszlopában csupa 0 áll, akkor a determináns 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 0 \cdot 2 = 0.$$

4. Ha egy mátrix két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

5. Ha egy mátrix két sora/oszlopa azonos, akkor a determináns 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

6. Ha egy mátrix valamely sorát/oszlopát megszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns c-szeresére változik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

7. Ha $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{K}$, akkor $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8.$$

8. Ha egy mátrix két sora/oszlopa arányos, akkor a determináns 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0.$$

9. A determináns sor/oszlop szerint additív:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -6.$$

10. Ha egy mátrix valamely sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop valahányszorosát, akkor a determináns nem változik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2.$$

11. Szorzat determinánsa egyenlő a determinánsok szorzatával:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}.$$