ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
15. Generált alterek
az "Órai feladatok" szakasz 2., 3., 4., 5. feladatainak megoldása
(írta: Németh Zsolt)

15.2.1. Órai feladatok / 2.

a) Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben definiált műveletekkel

$$-2u + 3v = (-2) \cdot (1, 2, -1) + 3 \cdot (6, 4, 2) = (-2, -4, 2) + (18, 12, 6) = (16, 8, 8)$$

lesz a lineáris kombináció eredménye.

b) A generált altér definíciója szerint a W altér elemei a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok (az u és v vektorok összes lineáris kombinációi):

$$W := \mathrm{Span}(u, v) = \{\lambda \cdot u + \eta \cdot v \,|\, \lambda, \eta \in \mathbb{R}\},$$

ahol esetünkben

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \eta \cdot v = \lambda \cdot (1, 2, -1) + \eta \cdot (6, 4, 2) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda) + (6\eta, 4\eta, 2\eta) = \\ = (\lambda + 6\eta,\ 2\lambda + 4\eta,\ -\lambda + 2\eta). \end{aligned}$$

A W altér elemei pontosan a fenti alakú vektorok, formálisan

$$W = \{(\lambda + 6\eta,\ 2\lambda + 4\eta,\ -\lambda + 2\eta) \,|\, \lambda, \eta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Speciálisan $\lambda = \eta = 0$ választással kapjuk, hogy $(0, 0, 0) \in W$ (emlékezzünk vissza, korábban már láttuk, hogy bármely V vektortér tetszőleges W altere tartalmazza a V nullvektorát).

c) Most vizsgáljuk meg, hogy az $x := (9, 2, 7) \in \mathbb{R}^3$ vektort tartalmazza-e W. Nyilvánvaló, hogy $x \in W$ pontosan akkor igaz, ha léteznek olyan λ és η valós skalárok, melyekkel az $x = \lambda \cdot u + \eta \cdot v$ egyenlőség fennáll (hisz a jobboldalon szereplő alakban W bármely eleme előállítható).

Fogalmazzuk meg a konkrét x, u, v vektorokkal ezt a feltételt: Léteznek-e olyan $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ skalárok, melyekkel

$$(9, 2, 7) = (\lambda + 6\eta,\ 2\lambda + 4\eta,\ -\lambda + 2\eta)$$

teljesül?

Ahhoz, hogy ez az egyenlőség fennálljon, az alábbi három egyenlőség egyidejű teljesülése szükséges (és elégséges is):

$$\begin{aligned} \lambda + 6\eta &= 9 \qquad (1) \\ 2\lambda + 4\eta &= 2 \qquad (2) \\ -\lambda + 2\eta &= 7 \qquad (3) \end{aligned}$$

Az ilyen típusú, úgynevezett *lineáris egyenletrendszer* feladatok megoldhatóságát és megoldási módszereit általános keretek között az elkövetkező alkalmakon tárgyaljuk. Jelenleg elég lenne csupán azt igazolnunk vagy cáfolnunk, hogy létezik megoldás. Ehhez egy, a későbbiekben is jól használható "stratégia", ha egy-egy kiválasztott egyenlet megfelelő valós számszorosait a többiből kivonva "elimináljuk" egy-egy változó összes előfodulásait ezekben az egyenletekben.

Például a mostani esetben az első egyenlet 2-szeresét kivonva a másodikból, valamint a (-1)-szeresét kivonva a harmadikból kapjuk, hogy az eredetieken túl az alábbi egyenleteknek is teljesülniük kell:

$$\begin{aligned} \lambda + 6\eta &= 9 && (1) \\ -8\eta &= -16 && (2) - 2 \cdot (1) \\ 8\eta &= 16 && (3) + 1 \cdot (1) \end{aligned}$$

A második és harmadik feltételek alapján $\eta = 2$ lehet csak, és így az első egyenlet a $\lambda = 9 - 6 \cdot 2 = -3$ választással teljesül. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezzel a két értékkel az $x = -10 \cdot u + 2 \cdot v \in W$ egyenlőség tényleg fennáll, vagyis $x \in W$.

d) Az előző feladatrészhez hasonlóan ezúttal azt kell eldöntenünk, hogy léteznek-e olyan $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ skalárok, melyekkel

$$y := (4, -1, 8) = (\lambda + 6\eta,\ 2\lambda + 4\eta,\ -\lambda + 2\eta) \in W$$

teljesül, vagyis amikkel

$$\begin{aligned} \lambda + 6\eta &= 4 \\ 2\lambda + 4\eta &= -1 \\ -\lambda + 2\eta &= 8 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy (függetlenül a jobb oldalon álló értékektől) ezúttal is az első egyenlet kétszeresét illetve (-1)-szeresét kell kivonnunk a második illetve harmadik egyenletekből a λ ismeretlen eliminálásához:

$$\begin{aligned} \lambda + 6\eta &= 4 \\ -8\eta &= -9 \\ 8\eta &= 12 \end{aligned}$$

Azonban ezúttal a második egyenlet teljesüléséhez $\eta = \frac{9}{8}$ szükséges, míg a harmadikhoz $\eta = \frac{12}{8}$, ez a kettő egyszerre nem lehetséges, így a feltételeket nem lehet kielégíteni és nem léteznek megfelelő λ és η számok. Vagyis y nem állítható elő u és v lineáris kombinációjaként, így nem eleme az altérnek: $y \notin W$.

15.2.1. Órai feladatok / 3.

A feladat megoldásához figyeljük meg, hogy az előző feladat **b)** részében éppen fordítva, az u, v generátorrendszerből kiindulva adtuk meg az altér elemeit az ebben a feladatban szereplő alakhoz hasonló képlettel. Tehát a módszerünk lényegében az ott alkalmazott átalakításnak a "megfordítása" lesz.

a) Az $S_5 \subset \mathbb{R}^3$ altér elemei tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ skalárokat választva pontosan a következő vektorok:

$$(x - y,\ 3x,\ 2x + y) = (x, 3x, 2x) + (-y, 0, y) = x \cdot (1, 3, 2) + y \cdot (-1, 0, 1) \in S_5,$$

vagyis pontosan az $(1, 3, 2)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorok lineáris kombinációi. Következésképpen az $(1, 3, 2)$, $(-1, 0, 1)$ vektorrendszer egy generátorrendszer.

b) Az x, y, z értékekre vonatkozó $2x - 3y + z = 0$ megkötés pontosan akkor teljesül, ha $z = -2x + 3y$, így az altér megadható az

$$S_3 = \{(x,\, y,\, -2x + 3y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

alakban. Innen az előző feladatrészhez hasonlóan

$$(x,\, y,\, -2x + 3y) = (x, 0, -2x) + (0, y, 3y) = x \cdot (1, 0, -2) + y \cdot (0, 1, 3),$$

vagyis az $(1, 0, -2)$, $(0, 1, 3)$ vektorrendszer egy generátorrendszer.

c) A korábbiakhoz hasonlóan ezúttal tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ skalárokkal

$$W_1 \ni (x - y + 5z,\, 3x - z,\, 2x + y - 7z,\, -x) = (x, 3x, 2x, -x) + (-y, 0, y, 0)+ \\ +(5z, -z, -7z, 0) = x \cdot (1, 3, 2, -1) + y \cdot (-1, 0, 1, 0) + z \cdot (5, -1, -7, 0),$$

következésképpen az $(1, 3, 2, -1)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(5, -1, -7, 0)$ vektorrendszer egy generátorrendszere W_1-nek.

d) Ezúttal az x, y, z értékekre vonatkozó $x + 3y = 0$ megkötés pontosan akkor teljesül, ha $x = -3y$, így W_2 megadható az

$$W_2 = \{(-3y,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

alakban. Innen az előző feladatrészekhez hasonlóan

$$(-3y,\, y,\, z) = y \cdot (-3, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1),$$

vagyis a $(-3, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ vektorrendszer egy generátorrendszere W_2-nek.

15.2.1. Órai feladatok / 4.

A feladat megoldásához elegendő az az észrevétel, hogy a kijelölt mátrix-vektor szorzások eredményeként lényegében ugyanolyan feltételeket kapunk, amilyenekkel az előző feladat **b)** valamint **d)** részében találkoztunk.

a) A feltétel szerint $x, y, z \in \mathbb{R}$-re teljesülnie kell, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - 3y + 5z) = (0) \in \mathbb{R}^1$$

legyen, azaz $2x - 3y + 5z = 0$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{3y-5z}{2}$, így W_1 elemei éppen az alábbi alakú vektorok:

$$W_1 \ni \left(\frac{3y - 5z}{2}, y, z\right) = y \cdot \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) + z \cdot \left(\frac{-5}{2}, 0, 1\right).$$

Következésképpen $\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, 0, 1\right)$ egy generátorrendszer.

b) Ezúttal az x, y, z-re vonatkozó feltétel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Ez azt jelenti, hogy most az

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x - z &= 0 \end{aligned}$$

feltételeknek egyaránt teljesülniük kell ahhoz, hogy $(x, y, z) \in W_2$ igaz legyen. A második feltétel ekvivalens $z = 2x$ teljesülésével, és ekkor az első feltétel

$$x - 2y + 3 \cdot 2x = 7x - 2y = 0$$

alakra egyszerűsödik. Utóbbi ekvivalens $y = \frac{7}{2}x$ feltétellel, így összefoglalva azt kaptuk, hogy W_2 elemei pontosan az

$$(x, y, z) = \left(x, \frac{7}{2}x, 2x\right) = x \cdot \left(1, \frac{7}{2}, 2\right) \in W_2$$

alakú vektorok. Következésképpen az egyelemű $\left(1, \frac{7}{2}, 2\right)$ vektorrendszer egy generátorrendszer.

c) Ezúttal az x, y, z-re vonatkozó feltétel:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - 2z \\ -4x + 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Ez azt jelenti, hogy most a

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 0 \\ -4x + 2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

feltételeknek egyaránt teljesülniük kell ahhoz, hogy $(x, y, z) \in W_3$ igaz legyen. Ha az előbbi teljesül, akkor utóbbi egyenlethez az első kétszeresét hozzáadva $0 = 0$ azonosság adódik, tehát a második feltétel minden esetben automatikusan teljesül, ha az első teljesül. (Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy észrevesszük, hogy a második egyenlet épp az első (-2)-szerese, vagy úgy is, ha az első feltételből kifejezzük az egyik skalárt és behelyettesítjük a második feltételbe).

A $2x - y - 2z = 0$ egyenlőség pontosan akkor igaz, ha $y = 2x - 2z$, és mivel ekkor a másik feltétel is teljesül, így W_3 elemei pontosan az

$$(x, y, z) = (x, 2x - 2z, z) = x \cdot (1, 2, 0) + z \cdot (0, -2, 1)$$

alakú vektorok. Következésképpen $(1, 2, 0)\,,\ (0, -2, 1)$ egy generátorrendszer.

15.2.1. Órai feladatok / 5.

Az $x, y, z \in \mathbb{R}$-re vonatkozó $x + 2y + z = 0$ megkötés ekvivalens $x = -2y - z$ teljesülésével. Ekkor W elemei pontosan az alábbi alakú vektorok lesznek:

$$\begin{aligned} W \ni & \left(2 \cdot (-2y - z) - y + z,\ y + 3z,\ (-2y - z) + y - 2z,\ (-2y - z) - y\right) = \\ = & \left(-5y - z,\ y + 3z,\ -y - 3z,\ -3y - z\right) = y \cdot (-5, 1, -1, -3) + z \cdot (-1, 3, -3, -1) \end{aligned}$$

Következésképpen $(-5, 1, -1, -3)$, $(-1, 3, -3, -1)$ egy generátorrendszer.