2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Másodfokú egyenletek, megoldóképlet, egyenlőtlenségek.
2. Gyökök és együtthatók közti összefüggések (Viéte képletek).
3. Gyöktényezős felbontás, teljes négyzetté alakítás.
4. Másodfokú függvények, polinomok és tulajdonságaik.
5. Másodfokú függvények ábrázolása, parabolák és tulajdonságaik.
6. Másodfokú függvények szélsőértékei.
7. Szélsőértékfeladatok.

2.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ rögzített valós számok. Az
$$ax^2 + bx + c = 0$$
másodfokú egyenletnek mik leszenek a gyökei és a diszkrimináns függvényében tárgyalja a gyökök természetét.

2. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ rögzített valós számok. Írja fel a
$$cx^2 + bx + a = 0$$
másodfokú egyenlet gyökeinek összegére és szorzatára vonatkozó Viéte−formulákat.

3. Adott a $2x^2 - 3x - 8 = 0$ másodfokú egyenlet. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1},$$
ha x_1, x_2 jelölik a megadott egyenlet gyökeit.

4. Írja fel azt a másodfokú egyenletet, melynek főegyütthatója 1 és gyökei $\sqrt{2} - 1$ és $\sqrt{2} + 1$. Mik a további együtthatók ebben az egyenletben?

5. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:
$$px^2 - x + 1 = 0\,?$$

6. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz igaz az alábbi egyenlőtlenség minden valós x esetén:
$$px^2 - (p+2)x + 3 > 0\,?$$

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:
$$\frac{p}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 0\,?$$
Mikor lesz pontosan egy megoldása az egyenletnek?

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < 1.$$

9. Tekintsük az
$$f(x) := x^2 - 4x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvényt. Írja fel a teljes négyzet alakot, ábrázolja a függvényt, és adja meg az f minimumának helyét és értékét. Hol metszi el f grafikonja az y tengelyt?

10. Milyen $(x;y)$ valós számpárok elégítik ki az alábbi egyenletet?
$$x^2 - 3xy + y^2 = 0\,?$$
Hol helyezkednek el a síkon ezek az $(x;y)$ pontok?

11. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:
$$f(x) := 2 - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (x \in [-3;2]).$$
Hol veszi fel ezeket az f?

12. Bizonyítsa be, hogy minden a, b nemnegatív valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$
Mikor van itt egyenlőség?

13. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{|x|}{x^2+4} \leq \frac{1}{4}.$$

Mikor van itt egyenlőség?

14. Adja meg az alábbi függvény szélsőértékeit és azok helyeit:

$$f(x) := -2x^2 + x - 1 \quad (x \in D := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1/2| \leq 1/2\}).$$

15. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ valós együtthatók és a

$$P(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

másodfokú polinom. Írja fel ennek gyöktényezős alakját, ha x_1 és x_2 jelölik a valós gyököket. Mikor teljesül, hogy ez a gyöktényezős alak egy teljes négyzet (ekkor hogy néz ki) ?

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x) = x^2 - 6x + 3; \qquad P(x) = 2x^2 + 7x - 1.$$

2. A *Viète*–képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

(a) $x^2 - 5x + 6 > 0$;

(b) $\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$;

(c) $\dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{3x+4}{1-2x}$;

(d) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{3x-2}{1-2x} \leq 0$

egyenlőtlenség?

4. Adjuk meg azokat a $p \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekre

(a) az $x^2 + 6x + p > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(b) az $x^2 - px > \dfrac{2}{p}$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(c) az $(p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(d) az $\dfrac{x^2 - px + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

5. Valamely $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett a $2x^2 - 3(p-1)x + 1 - p^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\frac{5}{4}$. Mi a p?

6. Adjuk meg a p paraméter értékeit úgy, hogy az $(1-p)x^2 + 2px = p + 3$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke legyen!

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $x^2 - (p-2)x + p - 3 = 0$ másodfokú egyenletet! Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy az egyenlet gyökeinek a négyzetösszege minimális legyen!

8. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek p is gyöke és q is gyöke?

9. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén:

$$\frac{7-\sqrt{52}}{3} \leq \frac{x+3}{x^2-x+1} \leq \frac{7+\sqrt{52}}{3}.$$

10. Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb és legkisebb értékeit:

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+4x+5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy mértani sorozat különböző, egymást követő tagjai, akkor érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c} \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

12. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{a-1}}{a-2}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}},$$

ahol $a \in [1; +\infty) \setminus \{2\}$ paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) A megadott a paraméter függvényében tárgyaljuk a gyökök természetét (valósak vagy komplexek) és a valós esetekben azok előjelét.

13. Mutassuk meg, hogy

(a) $\dfrac{2}{1/a+1/b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b \in (0; +\infty))$;

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$.

(c) $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \ge 2 \quad (a \ne 0)$.

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

14. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 8abc$$

egyenlőtlenség! Mikor van itt egyenlőség?

15. Igazoljuk, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $\left|\dfrac{1}{a-b}\right| < \dfrac{2}{|a|} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 2|b| < |a|)$;

(b) $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \ge 2 \quad (a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$;

(c) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \ge 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

(f) $2 < \left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2 \quad (a, b \in (0, +\infty),\ a^2 < 2b^2)$.

16. Bizonyítsuk be, hogy minden $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ *(Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség)*;

(b) $\sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$ *(Minkowski egyenlőtlenség)*;

A fenti egyenlőtlenségekben pontosan akkor van egyenlőség, ha létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy

$$(x = \lambda a \text{ és } y = \lambda b) \quad \text{vagy} \quad (a = \lambda x \text{ és } b = \lambda y)\ .$$

Mi a geometriai jelentése ezeknek az egyenlőtlenségeknek?

2.2.2. További feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x) = x^2 + 10x + 26; \qquad P(x) = -x^2 + 2x + 3; \qquad P(x) = -3x^2 + 8x + 5.$$

2. A $Viète-$ képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\dfrac{2x^2 + 5x - 18}{x - 2} \leq 0;$

(b) $\dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \geq 0\ .$

4. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek

(a) olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke?

(b) minden gyöke olyan, hogy annak a reciproka is gyöke?

(c) minden gyökének a négyzete is gyöke?

(d) minden gyökének az ellentettje is gyöke?

5. Adott $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

(a) $x(x+3) + p(p-3) = 2(px-1)$;

(b) $\dfrac{x(x-p)}{x+p} - x + p = \dfrac{10x}{x+p} - 10.$

6. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén lesz az $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke?

7. Határozzuk meg $\mathbb{R} \ni m-$et úgy, hogy az $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 4 = 0$ egyenletnek két pozitív gyöke legyen!

8. Mi lehet a $p \in \mathbb{R}$ paraméter, ha az $(1-p)x^2 - 4px + 4(1-p) = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van?

9. Adjuk meg $\mathbb{R} \ni q-$t úgy, hogy az $x^2 - 4x + q = 0$ egyenletnek

(a) legyen olyan gyöke, amelynek a háromszorosa is gyöke;

(b) egyetlen gyöke legyen!

10. Melyek azok a $k \in \mathbb{R}$ számok, amelyekkel az

$$x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + x + k = 0$$

egyenletnek van közös gyöke?

11. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$(2x^2 + 7x - 8) \cdot (2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$$

egyenletet!

12. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy az $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ egyenletnek $x_1 = -2$ a gyöke és van olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke. Határozzuk meg az a, b paramétereket!

13. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$4x_1x_2 - 5x_1 - 5x_2 + 4 = 0; \quad (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = \frac{1}{1+a},$$

ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ valós paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a gyökökre teljesüljön az alábbi egyenlőség

$$x_1^2 + x_2^2 = 11.$$