ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
11. Komplex számok
az "Órai feladatok" szakasz 2.a, 2.b, 2.c, 2.e, 2.g, 2.h, 3.a, 12.a, 12.b, 12.c, 12.d
feladatainak megoldása
(írta: Tóth Viktória)

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.a}}$

$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.b}}$

$\frac{1+5i}{3+2i} = \frac{(1+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1\cdot 3-5\cdot 2\cdot i^2-2i+15i}{9+4} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.c}}$

$(1-2i)(5+i) = 1\cdot 5 - 2i\cdot i - 10i + i = 7-9i$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.e}}$

$(2-i)^2 + (2+i)^3 = (3-4i) + (2+11i) = 5+7i$

Mellékszámítások:
$(2-i)^2 = 2^2 - 2\cdot 2i + i^2 = 3-4i$
$(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 = 2+11i$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.g}}$

Közös nevezőre hozunk, összevonunk, majd egyszerűsítünk:

$\frac{1+i}{3-i} + \frac{3-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)+(3-i)(3-i)}{(3-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1+9-6i-1}{3-i^2+3i-i} = \frac{8-4i}{4+2i} = \frac{4-2i}{2+i} = \frac{(4-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-2-4i-4i}{4+1} = \frac{6-8i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 2.h}}$

Közös nevezőre hozunk, összevonunk, majd egyszerűsítünk:

$\frac{(1+i)^2}{1-i} + \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2} = \frac{(1+i)^4+(1-i)^4}{(1-i)(1+i)^2} = \frac{-4-4}{2+2i} = \frac{-8}{2+2i} = \frac{-4}{1+i} = \frac{-4(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$

Mellékszámítások:
$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$
$(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (-2i)^2 = (-2)^2\cdot i^2 = 4i^2 = -4$

$\boxed{\text{11.2.1. Órai feladatok / 3.a}}$

Behelyettesítéssel igazoljuk:
$(1+3i)^2 = 1+6i+9i^2 = -8+6i$

$(1+3i)^3 = (1+3i)^2 \cdot (1+3i) = (-8+6i)(1+3i) = -26-18i$
$(1+3i)^3 - (1+3i)^2 + 8(1+3i) + 10 = (-26-18i) - (-8+6i) + (8+24i) + 10 = 0$, tehát gyök.

11.2.1. Órai feladatok / 12.a

$x^3 - 1 = 0$

$x_1 = 1$ az egyik megoldás, ennek segítségével (gyöktényező leválasztásával) szorzattá alakítunk (pl Horner-eljárást használva):

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Így az egyenlet többi gyökét megkapjuk, ha megoldjuk a másodfokú egyenletet:

$x^2 + x + 1 = 0$

$x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm i\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

11.2.1. Órai feladatok / 12.b

$x^4 - 1 = 0$

$(x^2-1)(x^2+1) = 0$

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$

$x = 1$ vagy $x = -1$ vagy ($x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm i$)

Tehát az egyenletnek 4 megoldása lett.

11.2.1. Órai feladatok / 12.c

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-20}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\pm 2\sqrt{3}i}{2}$

11.2.1. Órai feladatok / 12.d

$x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$

$x_1 = -1$ gyöke az egyenletnek, ennek segítségével (gyöktényező leválasztásával) szorzattá alakítunk (pl Horner-eljárást használva):

$(x+1)(x^2 - 10x + 28) = 0$

Így az egyenlet többi gyökét megkapjuk, ha megoldjuk a másodfokú egyenletet:

$x_{2,3} = \frac{10\pm\sqrt{100-112}}{2} = \frac{10\pm i\sqrt{12}}{2} = \frac{10\pm i\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 5 \pm \sqrt{3}i$