11. Komplex számok

11.1. Az elméleti anyag

11.1.1. A komplex szám fogalma

A másodfokú egyenletek megoldásánál találkoztunk azzal a problémával, hogy ha a diszkrimináns negatív, akkor a gyök alatt negatív szám áll és így nincs valós megoldása a kérdéses egyenletnek. Például az

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenlet ilyen. Tehát a valós számok körében nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, melynek a négyzete -1 lenne. Vajon ez akkor is igaz marad, ha valamilyen más számhalmazra térnénk át a valós számok helyett? Az eddigi középiskolai ismereteink szerint a valós számok kimerítették a legbővebb számhalmazt. Egy merész gondolattal vezessük be az úgynevezett imaginárius egységet: egy $i-$vel jelölt objektumot, melyről tételezzük fel, hogy éppen azt tudja, amit a fent említett x valós számok nem teljesítettek, nevezetesen, hogy:

$$i^2 = -1.$$

Ezzel az imaginárius egységgel tudunk definiálni új típusú számokat, úgynevezett komplex számokat az alábbiak szerint:

Definíció: Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok és i a fent bevezett imaginárius egység, tehát $i^2 = -1$. Ekkor a

$$z := x + i \cdot y$$

alakú kifejezéseket *komplex (összetett) számoknak* fogjuk nevezni. A komplex számokra gyakran használjuk a $z, w, \varepsilon, ...$ vagy az indexelt $z_1; z_2, w_1; ...$ jelöléseket.

Például:

$$z = 1 + 2 \cdot i; \ \ w = -3 - \sqrt{2} \cdot i; \ \ \varepsilon = \frac{2}{3} - i;$$

$$z_1 = 2 + 0 \cdot i = 2; \ \ z_2 = 0 - 6 \cdot i = -6 \cdot i; \dots$$

Ha például

$$z = x + i \cdot y$$

egy komplex szám, akkor azt mondjuk, hogy x a z *valós része* és y a z *képzetes része.* Jelölésben

$$z = x + i \cdot y \Longleftrightarrow x = \mathrm{Re}(z) \ \ \wedge \ \ y = \mathrm{Im}(z).$$

A fenti példákban

$$\mathrm{Re}(1 + 2 \cdot i) = 1 \ \ \wedge \ \ \mathrm{Im}(1 + 2 \cdot i) = 2;$$

$$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -3 \ \ \wedge \ \ \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -\sqrt{2};$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{3} - i\right) = \frac{2}{3} \ \wedge\ \mathrm{Im}(\varepsilon) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{3} - i\right) = -1;$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(2 + 0 \cdot i) = 2 \ \wedge\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(2 + 0 \cdot i) = 0;$$

Látható, hogy itt a képzetes rész 0, ilyenkor $z = x + 0 \cdot i = x \ \ (x \in \mathbb{R})$ valós szám. Ennek megfelelően tehát a valós számok is speciális komplex számoknak tekinthetőek, nevezetesen a képzetes részük 0.

$$\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = 0 \ \wedge\ \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = -6.$$

Ebben az esetben a valós rész 0. Az ilyen komplex számokat, tehát amelyek

$$z = 0 + y \cdot i = yi \quad (y \in \mathbb{R})$$

alakúak, tiszta vagy tisztán *képzetes számoknak* nevezzük. Jelölje $\mathbb{C}$ a fent bevezetett komplex számok halmazát, vagyis:

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y \ \Big| \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A komplex számok precíz bevezetésére és a $\mathbb{C}$ számhalmaz mélyebb vizsgálatára a későbbi tanulmányaikban fognak kitérni. Jelenlegi célunk mindössze annyi, hogy a komplex számokat bevezessük, néhány fontos tulajdonságukat megmutassuk, illetve a velük végzett algebrai számolásokat begyakoroljuk. A fenti észrevételt formálisan is megfogalmazva, a valós számok egyben komplex számok is, tehát:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

de $\mathbb{C}$ bővebb halmaz mint az $\mathbb{R}$, ugyanis például $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Két komplex számot pontosan akkor tekintünk egyenlőnek, ha valós és képzetes részeik rendre megegyeznek, tehát ha $z = x + iy$ és $w = a + ib \ \ (x, y, a, b \in \mathbb{R})$ komplex számok, akkor:

$$z = w \iff x + iy = a + ib \iff (x = a \ \wedge\ y = b).$$

Ez lehetővé tesz számunkra egy egyértelmű megfeleltetést a $z = x + iy$ komplex számok és az ennek megfelelő $(x; y)$ rendezett párok között. Ez utóbbi pontok (síkbeli vektorok) már ismertek a koordináta geometria köréből és szemléletes tartalmuk átvihető a komplex számok szemléltetéséhez és a Gauss-féle komplex számsík modellezéséhez.

11.1.2. Komplex számok szemléltetése a Gauss-féle számsíkon

Tekintsünk egy $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex számot. Ekkor a valós és a képzetes részek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok. Ábrázoljuk ezeket egy Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer vízszintes és függőleges tengelyein (mint valós számegyeneseken). A vízszintes tengelyen jelöljük a valós részt és a függőleges tengelyen a képzetes részt. Mivel egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ rendezett számpárhoz egyértelműen hozzárendelhető egy és csakis egy komplex szám (nevezetesen $z = x + iy$), illetve egy és csakis egy pont a Descartes-féle koordináta síkunkon, ezért feleltessük meg ennek egy (x, y) pontját a Gauss-sík $z = x + iy$ komplex pontjának.

A vektorok hosszának mintájára vezessük be a komplex szám hosszát (modulusát, abszolút értékét) és a komplex szám konjugáltját (a valós tengelyre vett tükörképét):

Definíció: Legyen $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tetszőleges komplex szám. Ekkor a hossza, vagy abszolút értéke (modulusa) a

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0; +\infty)$$

nemnegatív valós szám, illetve a konjugáltja a

$$\overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

komplex szám.

Például:

$$|7 - 4i| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}; \ \ | - 1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \ \ |i| = \sqrt{1} = 1;$$

$$\overline{1 - 2i} = 1 + 2i; \ \ \overline{-1 + 2i} = -1 - 2i; \ \ \overline{-5i} = 5i;$$

Megjegyzés: A bevezetésben felvetett analógia a vektorok és a komplex számok között, illetve a megfelelő szemléltetés lehetőséget ad a komplex számok további átírására egy másik alakra, amit *trigonometrikus alaknak* nevezünk, de jelen tárgy keretei között erre nem fogunk kitérni. Itt és most a komplex számokat csupán a bevezetett, úgynevezett *algebrai alakjukban* fogjuk használni.

11.1.3. Műveletek algebrai alakú komplex számokkal

Definíció: Vezessük be a négy alapműveletet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás). Legyenek ehhez $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ komplex számok. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i;$$

$$z_1 - z_2 := (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) := (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i;$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i;$$

$$z_1/z_2 := \frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} := \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i;$$

A műveletek eredményét : az új komplex számot (összeg, különbség, szorzat, hányados) algebrai alakban tüntettük fel (leolvasható a valós és a képzetes részük). Vajon hogyan jött ki ez a definíció?

Például: Legyenek $z_1 := 2 + 3i$ és $z_2 := -1 + 5i$. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (-1+5i) = 1+8i; \ \wedge \ z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+5i) = 2+3i+1-5i = 3-2i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-1 + 5i) = -2 + 10i - 3i + 15i^2 = -2 + 7i - 15 = -17 + 7i;$$

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+5i} = \frac{(2+3i)\cdot(-1-5i)}{(-1+5i)\cdot(-1-5i)} = \frac{13-13i}{1-25i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$3z_1 := 3\cdot z_1 = 3\cdot(2+3i) = 6+9i;$$

$$iz_1 := i\cdot z_1 = i\cdot(2+3i) = 2i+3i^2 = -3+2i;$$

$$z_1^2 = (2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = -5+12i;$$

$$2z_1 = 2\cdot(2+3i) = 4+6i;$$

$$\frac{1}{z_1+2z_2} = \frac{1}{(2+3i)+2\cdot(-1+5i)} = \frac{1}{13i} = \frac{i}{13i^2} = -\frac{1}{13}\cdot i;$$

Megjegyzés: Megfigyelhető, hogy a komplex számok összeadása és kivonása, illetve a valós skalárral (számmal) való szorzása megfeleltethető a vektoroknál tanult hasonló műveleteknek. Más a helyzet a szorzással. A vektoroknál tanult skaláris és vektoriális szorzás nincs kapcsolatban a megfelelő komplex számok szorzásával. Osztásról a vektorok esetében nem is beszélhetünk.

Egy érdekes összefüggés vezethető le a komplex szám, annak hossza és konjugáltja között, ami sokszor használható a számolások során is. Legyen ehhez $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ a szokásos jelölésű komplex számunk. Ekkor:

$$z\cdot\overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - y^2\cdot i^2 = x^2+y^2 = |z|^2 \quad (z\in\mathbb{C}),$$

tehát bármely z komplex szám esetén:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2 \quad (z\in\mathbb{C}),$$

vagy

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} \quad (z\in\mathbb{C}).$$

Speciálisan, ha $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor a fenti azonosság az alábbi ismerős alakot ölti:

$$|z| = |x| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x^2},$$

azaz

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Kérdés: Mit jelent geometriailag az alábbi nemnegatív szám, ha z_1 és z_2 két tetszőlegesen rögzített komplex szám:

$$|z_1 - z_2|\,?$$

11.1.4. Valós együtthatós polinomok és komplex gyökök

Végül egy utolsó pontban térjünk vissza a kiindulásként felvetett problémához, nevezetesen például olyan valós együtthatós másodfokú egyenletekhez és megoldásaikhoz, ahol a diszkrimináns negatív. Például oldjuk meg az

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

másodfokú egyenletet. Alkalmazva a tanult megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Ahogy annak idején megállapítottuk a gyök alatt nem állhat negatív szám (ezért nincs valós megoldás) és mit értsünk akkor a $\sqrt{-3}$ szám alatt?
Most, hogy bevezettük az i imaginárius egységet, melyre $i^2 = -1$ alakítsuk az alábbi módon a fenti egyenletet (teljes négyzet alak):

$$(x+1)^2+3 = 0 \iff (x+1)^2 = -3 \iff (x+1)^2 = 3\cdot i^2 \iff (x+1)^2-(\sqrt{3}\cdot i)^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x + 1 - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + 1 + \sqrt{3} \cdot i) = 0.$$

Innen már leolvasható a két gyök:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i.$$

Látható, hogy ilyenkor a két megoldás egymásnak komplex konjugáltja. Összevetve a kapott megoldásokat a megoldóképletben kapott eredménnyel egy kérdés marad: mit értsünk a $\sqrt{-3}$ szám alatt? Ez itt a komplex gyökvonás fogalmát igényli, amit a későbbi tanulmányok során fognak tanulni. Jelenleg egyezzünk meg abban, hogy

$$\sqrt{-1} = i$$

és, hogy

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i.$$

Ezzel az "egyezménnyel" kikerülhető a szorzattá alakításos levezetés és használhatjuk az ismert megoldóképletet.

Megjegyzések:

1. A komplex gyökvonás bevezetésével látni fogjuk, hogy például -1–nek a négyzetgyöke két érték lehet, nevezetesen: $\pm i$, hiszen mindkettőre igaz, hogy

   $$(\pm i)^2 = i^2 = -1.$$

   Egyezzünk meg jelenleg abban, hogy $\sqrt{-1} = i$.

2. A $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ egyenlőség általában nem igaz a komplex számok körében, azaz ha $z, w \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok, akkor általában **nem igaz**, hogy

$$\sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}.$$

A minket érintő mostani témakörben előforduló $x > 0$ valós esetekben igazolható az alábbi egyenlőség:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1}.$$

Az általános esethez, legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ rögzített valós számok és tekintsük az ezekkel képzett másodfokú egyenletet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\; (x \in \mathbb{C}),$$

ahol tehát x most a komplex számok köréből vehet fel értékekeket és tegyük fel, hogy a diszkrimináns negatív, tehát:

$$b^2 - 4ac < 0.$$

A korábban megismert megoldóképlet teljesen analóg módon vezethető le és a fenti egyezménnyel az alábbi (konjugált) komplex gyököket kapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1}}{2a} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Megjegyzés:

1. Jegyezzük meg, hogy a magasabb fokú valós együtthatós polinomok első vagy a valós számhalmazon tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára bonthatóak (hogyan?) és ha ez megvan innen már könnyű a valós és a komplex gyökök megadása.

   Például oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:

   $$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0.$$

   Megoldás: Vegyük észre (nem mindig egyszerű), hogy:

   $$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0 \iff x^4 - 9x^2 - x^3 + 9x + x^2 - 9 = 0 \iff$$

   $$\iff x^2 \cdot (x^2 - 9) - x \cdot (x^2 - 9) + (x^2 - 9) = 0 \iff (x^2 - 9) \cdot (x^2 - x + 1) = 0 \iff$$

   $$\iff x^2 = 9 \;\vee\; x^2 - x + 1 = 0.$$

   Tehát a keresett megoldások az alábbiak:

   $$x_{1,2} = \pm 3; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

11.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mikor igaz, hogy $z = w$, ha $z, w \in C$ komplex számok?
2. Definiálja a $\mathbb{C}$ *komplex számhalmazt.*
3. Definiálja egy z komplex szám *konjugáltját.*
4. Adja meg az $\dfrac{2i-1}{5+3i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
5. Ha $z = x + iy \in C$ komplex szám $(x, y \in \mathbb{R})$, akkor adja meg a z^2 komplex szám valós és képzetes részét.
6. Adottak a $z_1 \neq 0$ és $z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számok. Adja meg a $\dfrac{z_2}{z_1}$ komplex szám valós és képzetes részét.
7. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \;\; |z \cdot w| = |z| \cdot |w|\ ?$$
8. Milyen z komplex számokra igaz, hogy
$$z^2 + \overline{z}^2 = 0\ ?$$
9. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$\mathrm{Re}(\,z - 1 + i) = 2\ ?$$
10. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$-1 < \mathrm{Re}\, z \leq 3\ ?$$
11. Határozza meg a $z = (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt[4]{3})^2$ komplex szám modulusát.
12. Melyek azok a z komplex számok (és ábrázoljuk őket), amelyekre z^3 valós szám?
13. Mennyi $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$?
14. Mennyi lesz $1 + \dfrac{1+i}{1-i} \cdot i$?
15. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 - 1 = 0.$$

11.1.6. További kérdések az elmélethez

1. Számítsa ki a $(2-i)^3$ komplex számot.

2. Adja meg a $\dfrac{2}{3-i}$ komplex szám valós és képzetes részét.

3. Adja meg a $\dfrac{3-i}{i}$ komplex szám valós és képzetes részét.

4. Adja meg a $\dfrac{1}{z}$ komplex szám valós és képzetes részét, ha $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Adja meg az $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$ komplex szám valós és képzetes részét.

6. Definiálja egy z komplex szám *abszolút értékét*.

7. Igaz-e minden z komplex számra, hogy $|z^2| = |z|^2$?

8. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\ ?$$

9. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0: \ \ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\ ?$$

10. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0: \ \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\ ?$$

11. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\ ?$$

12. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}: \ \ |z + w| = |z| + |w|\ ?$$

13. Mikor igaz, hogy $z = \overline{z}$?

14. Fejezzük ki egy z komplex szám valós és képzetes részét z és $\overline{z}$ segítségével.

15. Mit fejez ki geometriailag a $|z - \sqrt{3} + i|$ szám ?

16. Mennyi lesz $|z - \overline{z}|$?

17. Mennyi lesz $|z + \overline{z}|$?

18. Igaz-e, hogy:
$$\forall\, z \in \mathbb{C}: \ \ \overline{\overline{z}} = z\ ?$$

19. Mennyi lesz $\overline{z - \overline{z}}$?

20. Mit ad meg a komplex számsíkon az alábbi ponthalmaz, ha $z \in \mathbb{C}$ egy rögzített komplex szám :
$$L := \{c \cdot z \mid c \in \mathbb{R}\}\ ?$$

21. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\operatorname{Im} z| > 2\ ?$$

22. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\operatorname{Im} z + 1| < 1 \quad \wedge |\operatorname{Re} z - 1| \leq 2 \quad ?$$

23. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

24. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 + 1 = 0.$$

25. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 8 = 0.$$

26. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 - 16 = 0.$$

27. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

11.2. Feladatok

11.2.1. Órai feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $(1 - 2i) \cdot x + (1 + 2i) \cdot y = 1 + i$;

(b) $(2 + i) \cdot x - (2 - i) \cdot y = x - y + 2i$;

(c) $(4 - 3i) \cdot x^2 + (3 + 2i) \cdot xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2) \cdot i$;

(d) $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i.$

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk algebrai alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $\dfrac{1}{2-3i}$;

(b) $\dfrac{1+5i}{3+2i}$;

(c) $(1-2i)\cdot(5+i)$;

(d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+i}}}$;

(e) $(2-i)^2+(2+i)^3$;

(f) $(3-\sqrt{2}i)^3\cdot(3+\sqrt{2}i)$;

(g) $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{1+i}$;

(h) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}+\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$;

(i) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2019}.$

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-x^2+8x+10=0;\quad z_1:=1+3i \;\wedge\; z_2:=1-3i;$

(b) $x^4+x^2+1=0;\quad z_1:=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\wedge\; z_2:=-\dfrac{1}{2}-i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} \;\wedge\; z_2=\frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

$$z_1+z_2;\;\; z_1\cdot z_2;\;\; \frac{z_1}{z_2};\;\; z_1^2+z_2^2;\;\; z_1^3+z_2^3;\;\; z_1^4+z_2^4;\;\; z_1^{-3}\cdot z_2^5.$$

5. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018} = \sum_{k=0}^{2018} i^k;$

(b) $S_{2019} = \sum_{k=0}^{2019} (-1)^k \cdot i^k.$

6. Tegyük fel, hogy a $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számokra $|z| = |w| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\frac{z+w}{1+z\cdot w} \in \mathbb{R}.$$

7. Határozzuk meg $|z|$−et, ha:

$$z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4.$$

8. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss−féle számsíkon, amelyekre z^3 tisztán képzetes szám.

9. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 + i;$

(b) $z^3 = \overline{z}\,?$

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számok esetén igaz az alábbi azonosság:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2 \cdot (|z|^2 + |w|^2).$$

Mi a geometriai jelentése a fenti azonosságnak?

11. Mi lesz $|z - i - 1|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = -2$?

(b) $\operatorname{Im} z = 2 \cdot \operatorname{Re} z$?

(c) $|z+1| = 1$?

Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök

12. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^3 - 1 = 0$;

(b) $x^4 - 1 = 0$;

(c) $x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 5 = 0$;

(d) $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$;

(e) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

11.2.2. További feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $2x + i + x \cdot i \cdot (x + y) = 3 + y \cdot (1 - i)$;

(b) $3 \cdot \sqrt{x^2 - 2y} + (1 - i)x^2 = 2 \cdot (1 + 2i)y + 4 - 19i$;

(c) $\dfrac{2}{3x + iy} - \dfrac{3}{5 + i} = 2$.

(d) $\dfrac{x - 1}{1 + i} + \dfrac{y + 1}{1 - i} = \dfrac{i}{2}$.

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk a legegyszerűbb alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - i}$;

(b) $\dfrac{i - \sqrt{5}}{i + \sqrt{5}}$;

(c) $(i^2 - 7i) \cdot (2 + i)$;

(d) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{i - 1}}}$;

(e) $(2 + i)^2 + (2 - 3i)^3$;

(f) $\dfrac{i - 6}{2 + 5i} + \dfrac{2 - i}{2 + i}$;

(g) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6$;

(h) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^5$;

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^6$;

(j) $\dfrac{(1/\sqrt{2}+i)^3-(1/\sqrt{2}-i)^3}{(1/\sqrt{2}+i)^2-(1/\sqrt{2}-i)^2}$;

(k) $\left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^4+\left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^4$.

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-3\sqrt{2}\cdot x^2+7x-3\sqrt{2}=0;\quad z_1:=\sqrt{2}-i\ \wedge\ z_2:=\sqrt{2}+i;$

(b) $x^4-2x^3+(6+\sqrt{2})x^2-8x+4\cdot(\sqrt{2}+2)=0;\quad z_{1,2}:=\pm 2i\ \wedge\ z_{3,4}:=1\pm i\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{5i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i}\ \wedge\ z_2=\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket és az eredményt adjuk meg algebrai alakban:

$$z_1+z_2;\ z_1\cdot z_2;\ \frac{z_1}{z_2};\ z_1^2+z_2^2;\ z_1^3+z_2^3;\ z_1^4+z_2^4;\ z_1^3\cdot z_2^{-3}-z_1^{-3}\cdot z_2^3\,.$$

5. Milyen $n\in\mathbb{N}^+$ pozitív természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n=(1-i)^n\ ?$$

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbb{R}\,.$$

7. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2018}(1+i)^k$;

(b) $S_{2019}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2019}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{3k}$.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ valós paraméter esetében az alábbi komplex szám abszolút értéke 1:

$$z:=\frac{1+ia}{1-ia}.$$

9. Határozzuk meg $|z|$–et, ha:

$$z = \frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^4}.$$

10. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 valós szám.

11. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 tisztán képzetes szám.

12. Határozzuk meg az alábbi feltételeknek eleget tevő z komplex számokat:

(a) $|z+i| = |\overline{z}-1| = |z-iz|$;
(b) $|z+1-i| = 1 \ \wedge \ |z-1+i| = \sqrt{5}$;
(c) $|z+2+i| = 1 \ \wedge \ |z| = \sqrt{5}-1$;
(d) $|z-1| = |1+iz| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

13. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;
(b) $z^3 = \dfrac{i}{\overline{z}}$?

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

14. Mi lesz $|z-1+i|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = 2$;
(b) $\operatorname{Re} z = -1$;
(c) $|z-i| = 1$;

Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök

15. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
(b) $x^3 + 1 = 0$;
(c) $x^6 + 1 = 0$;
(d) $x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 4x - 4\sqrt{2} = 0$;
(e) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 20x + 25 = 0$.