

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 2. zárthelyi
2020. november 20.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. a) (7 pont) Határozzuk meg a $z + w$ komplex számot (az eredményt algebrai alakban kérjük), ha:

$$z = \frac{(3-i)^5}{(2+i)^4} \qquad w = \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

- b) (4 pont) Oldjuk meg az $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. Adott az $f(x) := x^2 + 2x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$) polinom, a $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter és az alábbi mátrix :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) (2 pont) Milyen $p \in \mathbb{R}$ mellett lesz az A mátrix reguláris?
(b) (4 pont) Milyen $p \in \mathbb{R}$ mellett lesz az $f(A)$ mátrix szinguláris?
(c) (4 pont) Számítsuk ki az $f(A)$ mátrix inverzét, ha $p = 2$.

3. (4 pont) Altér-e \mathbb{R}^4 -ben az alábbi részhalmaz?

$$S := \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+y)^2 - (x-y)^2 = 3xy - 2z + u \right\}$$

4. Tekintsük az \mathbb{R}^4 vektortér alábbi alterét:

$$W := \left\{ (2x-y+3z-u, x-y+3u, -x-z, u+y+2z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z, u \in \mathbb{R}, 4x+3y-2z+u = 0 \right\}$$

- (a) (8 pont) Adjunk meg bázist W -ben. Hány dimenziós a W altér?
(b) (2 pont) Altere-e a W vektortérnek a $G = \text{Span}((1, -5, 0, -1), (0, 0, 0, 0))$ halmaz?

5. (8 pont)

a) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval, írjuk fel a megoldást skalár alakban.

b) Írjuk fel a megoldást vektor alakban is.

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 7x_5 & = & 4 \\ \hline x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \end{array}$$