ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
4. Exponenciális, logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtleségek.
az órai feladatok szakasz 2., 3c., 3f., 8., 15b., 15c., 15d., 15e., 15g., 15j feladatainak megoldása
(írta: Filipp Zoltán)

4.2.1 Órai Feladatok / 2.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33.$$

Az exponenciális azonosságokat felhasználva alakítsuk az egyenletet az alábbiak szerint:

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 33.$$

Vezessük be az $a := 2^x > 0$ jelölést. Ennek megfelelően *másodfokú egyenletre* vezet a jelzett helyettesítés:

$$8a + \frac{4}{a} = 33 \iff 8a^2 - 33a + 4 = 0 \iff a_{1,2} = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{16} \iff a_1 = 4 \ \vee \ a_2 = 1/8.$$

Visszatérve "x"$-$re:

$$2^x = 4 \iff 2^x = 2^2 \iff (\star) \iff x_1 = 2, \text{ vagy}$$

$$2^x = \frac{1}{8} \iff 2^x = 2^{-3} \iff (\star) \iff x_2 = -3.$$

Itt $(\star)$ azt jelöli, hogy az $f(x) := 2^x \ (x \in \mathbb{R})$ exponenciális függvény szigorúan monoton növő, ezért az függvényértékek egyenlősége ekvivalens az argumentumok egyenlőségével. Az egyenlet megoldásai tehát:

$$x \in M := \{-3; 2\}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 3c.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$$

Az exponenciális azonosságokat felhasználva alakítsuk az egyenletet az alábbiak szerint:

$$9 \cdot 6^x - 2 \cdot (6^x)^2 + 18 = 0.$$

Vezessük be az $a := 6^x > 0$ jelölést. Ennek megfelelően ismét *másodfokú egyenletre* vezet a jelzett helyettesítés:

$$-2a^2 + 9a + 18 = 0 \iff a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{-4} \iff a_1 = -3/2 < 0 \ \vee \ a_2 = 6 > 0.$$

Visszatérve "x"$-$re az egyetlen jó megoldás:

$$6^x = 6 \iff 6^x = 6^1 \iff (\star) \iff x = 1.$$

Itt $(\star)$ jelöli azt, hogy az $f(x) := 6^x \ \ (x \in \mathbb{R})$ exponenciális függvény szigorúan monoton növő, ezért az függvényértékek egyenlősége ekvivalens az argumentumok egyenlőségével.
Az egyenlet megoldása tehát:

$$\underline{x \in M := \{1\}}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 3f.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$$

Az exponenciális azonosságokat felhasználva alakítsuk az egyenlőtlenséget az alábbiak szerint:

$$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Vezessük be az $a := 2^x > 0$ jelölést. Ennek megfelelően a jelzett helyettesítés *másodfokú egyenlőtlenségre* vezet :

$$(4a^2 - 9a + 2 > 0 \ \wedge \ a > 0) \iff 0 < a < 1/4 \ \vee \ a > 2.$$

Visszatérve "x"$-$re:

$$(0 < 2^x < 1/4 = 2^{-2} \ \vee \ 2^x > 2 = 2^1) \iff (\star) \iff x < -2 \ \vee \ x > 1.$$

Itt $(\star)$ azt jelöli, hogy az $f(x) := 2^x \ \ (x \in \mathbb{R})$ exponenciális függvény szigorúan monoton növő, így az argumentumokra is öröklődik a függvényértékek közötti reláció.
Az egyenlőtlenség megoldásai tehát:

$$\underline{x \in M := (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 8.

Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$E := 3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}.$$

A logaritmus azonosságait használva alakítsuk a kifejezésünket az alábbiak szerint:

$$E = 9 \cdot 3^{\log_9 25} + 25 \cdot 25^{-\log_5 2} + (10^{\lg 4})^{-1} = 9 \cdot (9^{\log_9 25})^{1/2} + 25 \cdot (5^{\log_5 2})^{-2} + (10^{\lg 4})^{-1} =$$

$$= (\star) = 9 \cdot 5 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{103}{2}}.$$

Itt ($\star$) jelöli, a következő azonosságot:

$$a^{\log_a b} = b \ (1 \neq a > 0 \ \wedge \ b > 0).$$

4.2.1. Órai feladatok / 15b.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{25}\left[\frac{1}{5} \cdot \log_3(2 - \log_{1/2} x)\right] = -\frac{1}{2}.$$

A logaritmusok argumentuma pozitív kell legyen, ezért a szükséges kikötések az alábbiak:

- $\frac{1}{5} \cdot \log_3(2 - \log_{1/2} x) > 0;$
- $2 - \log_{1/2} x > 0;$
- $x > 0.$

Most egyszerűbb megoldani az egyeletet és a kapott megoldásokat ellenőrizni, ezért a fenti első két egyenlőtlenséget nem oldjuk meg. A logaritmus definícióját használva egyenletünk ekvivalens az alábbiakkal:

$$\frac{1}{5} \cdot \log_3(2 - \log_{1/2} x) = 25^{-1/2} \iff \frac{1}{5} \cdot \log_3(2 - \log_{1/2} x) = \frac{1}{5} \iff$$

$$\iff \log_3(2 - \log_{1/2} x) = 1 \iff 2 - \log_{1/2} x = 3 \iff \log_{1/2} x = -1 \iff$$

$$\iff x = (1/2)^{-1} = 2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy jó megoldást kaptunk, tehát:

$$\underline{x \in M := \{2\}}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 15c.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3(4.5) - 4.$$

A logaritmusok argumentuma pozitív kell legyen, ezért a szükséges kikötések az alábbiak:

- $x + 1 > 0;$
- $x + 10 > 0.$

A közös pontok, melyekre értelmezhető a fenti egyenlet:

$$x \in D := (-1; +\infty).$$

A logaritmus azonosságait használva egyenletünk az alábbi:

$$\log_3 \frac{x+1}{x+10} = 2 \cdot \log_3 \frac{9}{2} - 4 \iff \log_3 \frac{x+1}{x+10} = 2 \cdot (\log_3 9 - \log_3 2) - 4 \iff$$

$$\iff \log_3 \frac{x+1}{x+10} = 4 - 2 \cdot \log_3 2 - 4 \iff \log_3 \frac{x+1}{x+10} = \log_3 \frac{1}{4}.$$

Mivel a logaritmus alapja $3 > 1$, ezért az $f(x) := \log_3(x)$ $(x \in (0; +\infty))$ függvény szigorúan monoton növő, így az argumentumok meg kell, hogy egyezzenek (ezért a D halmazon):

$$\frac{x+1}{x+10} = \frac{1}{4} \iff 4x + 4 = x + 10 \iff 3x = 6 \iff \underline{x = 2 \in D}.$$

A keresett megoldás:

$$\underline{x \in M := \{2\}}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 15d.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2 \cdot \log_4 3.$$

A logaritmusok argumentuma pozitív kell legyen, ezért most a szükséges kikötések:

- $x - 2 > 0$;
- $x + 3 > 0$.

A közös pontok, melyekre értelmezhető a fenti egyenlet:

$$x \in D := (2; +\infty).$$

A logaritmus azonosságait használva egyenletünk az alábbi:

$$\log_2(x-2) \cdot (x+3) = \log_2 2 + 2 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \log_2 6 \iff \log_2(x-2) \cdot (x+3) = \log_2 6.$$

Mivel a logaritmus alapja $2 > 1$, ezért az $f(x) := \log_2(x)$ $(x \in (0; +\infty))$ függvény szigorúan monoton növő, így az argumentumok meg kell, hogy egyezzenek (ezért a D halmazon):

$$(x-2)(x+3) = 6 \iff x^2 + x - 12 = 0 \iff x_1 = -4 \notin D \ \vee \ x_2 = 3 \in D.$$

Az egyetlen jó megoldás:

$$\underline{x \in M := \{3\}}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 15e.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2 x = 3.$$

A logaritmusok argumentuma pozitív kell legyen, ezért most az egyetlen szükséges kikötés:

- $x > 0$.

A feladathoz tartozó értelmezési tartomány:

$$x \in D := (0; +\infty).$$

Térjünk át a közös 2−es alapra felhasználva az alábbi ismert formulát:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \;\; (a, b, c > 0; a \neq 1, c \neq 1).$$

$$\frac{\log_2(2x)}{\log_2 32} - \frac{\log_2(4x)}{\log_2 8} + \log_2 x = 3 \iff \frac{\log_2 2 + \log_2 x}{5} - \frac{\log_2 4 + \log_2 x}{3} + \log_2 x = 3.$$

Az egyszerűbb leírás kedvéért vezessük be az $a := \log_2 x \in \mathbb{R}$ jelölést:

$$\frac{1+a}{5} - \frac{2+a}{3} + a = 3 \iff 13a = 52 \iff a = 4.$$

Visszatérve x−re:

$$\log_2 x = 4 \iff x = 2^4 = 16 \in D.$$

Az egyetlen megoldás:

$$\underset{\sim\sim\sim}{x \in M := \{16\}}.$$

4.2.1. Órai feladatok / 15g.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^{(2\cdot \lg^2 x - 1.5\cdot \lg x)} = \sqrt{10}.$$

A logaritmusok argumentuma és a bal oldali hatvány x alapja pozitív kell legyen, így a szükséges kikötés:

- $x > 0$.

A feladathoz tartozó értelmezési tartomány:

$$x \in D := (0; +\infty).$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát, így az eredetivel ekvivalens az alábbi egyenlet:

$$\lg(x^{(2\cdot \lg^2 x - 1.5\cdot \lg x)}) = \lg(\sqrt{10}) \iff (2\cdot \lg^2 x - 1.5\cdot \lg x)\cdot \lg x = \frac{1}{2}\cdot \lg 10 \iff$$

$$\iff (a := \lg x) \iff (2a^2 - 1.5a)\cdot a = \frac{1}{2} \iff 4a^3 - 3a^2 - 1 = 0.$$

Kaptunk egy harmadfokú egyenletet, melynek könnyen észrevehető módon az 1 gyöke. A korábban tanult Horner táblázattal a polinom felbontható a következő formában:

$$(a-1)\cdot(4a^2 + a + 1) = 0 \iff a = 1.$$

A második tényező diszkriminánsa $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, ezért több valós gyök nincs. Visszatérve az x változóra:

$$\lg x = 1 \iff x = 10^1 = 10 \in D.$$

Az egyetlen megoldás tehát:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in M := \{10\}}.$$

$\boxed{\text{4.2.1. Órai feladatok / 15j.}}$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0.$$

A logaritmus argumentuma pozitív kell legyen és a nevező nem lehet 0, így a szükséges kikötések az alábbiak:

- $\dfrac{3-x}{3x-1} > 0.$
- $3x - 1 \neq 0$

Ezek megoldásai:

$$\mathbb{R} \ni \frac{3-x}{3x-1} > 0 \iff \Big((3-x > 0 \ \wedge\ 3x-1 > 0) \ \vee\ (3-x < 0 \ \wedge\ 3x-1 < 0)\Big) \iff$$

$$\iff \Big((1/3 < x < 3) \ \vee\ (3 < x \ \wedge\ x < 1/3)\Big) \iff x \in D := (1/3; 3).$$

A megoldáshoz írjuk át a jobb oldalt 1/2 alapú logaritmussá, majd használjuk fel azt, hogy az

$$f(x) := \log_{1/2} x \quad (x \in (0; +\infty))$$

függvény szigorúan monoton fogy, ezért az argumentumokra a *fordított irányú* egyenlőtlenség érvényes:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \iff \frac{3-x}{3x-1} \leq 1.$$

Ha $x \in (1/3; 3)$, akkor $3x - 1 > 0$, ezért beszorozva a nevezővel kapjuk, hogy:

$$3 - x \leq 3x - 1 \iff 4x \geq 4 \iff x \geq 1.$$

Összevetve a feltétellel a keresett megoldások:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in M := [1; +\infty) \cap (1/3; 3) = [1; 3)}.$$