10. Teljes indukció

10.1. Kiegészítés az elmélethez

Teljes indukció:

Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások. Ha

1. $A(0)$ igaz és
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz , akkor

$A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

Megjegyzések:

1. A fenti tételben az "$A(0)$ igaz" feltételt *kezdő lépésnek* nevezzük.
2. A "Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz" feltételben $A(n)$ az úgynevezett *indukciós feltevés*, és az itteni implikáció az *indukciós lépés*, vagy az indukciós tulajdonság öröklődése.
3. Igen gyakrori a feladatokban, hogy az indukció kezdő lépése nem $0-$ról indul, hanem például 1 vagy $2-$ről, vagy egy a feladat által megadott $m \in \mathbb{N}$ értékről. Így is megfogalmazva az állítást:

   Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások és $m \in \mathbb{N}$ egy rögzített természetes szám. Ha

   (a) $A(m)$ igaz és
   (b) Minden $n \in \mathbb{N}, \ \ n \geq m$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \quad A(n+1)$ is igaz , akkor

   $A(n)$ igaz minden $m \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

4. Egy további kiterjesztés is lehetséges, amivel most nem fogunk dolgozni, nevezetesen a természetes számok halmaza kicserélhető a fenti állításban $\mathbb{Z}-$re, azaz az egész számok halmazára.

Binomiális együtthatók:

Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ és

$$0! := 1 \ , \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (1 \leq n) \ , \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

A binomiális együtthatók nevezetes tulajdonságai:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

továbbá

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad (k = 1, \dots, n)\ .$$

Példák:

Egyenlőségek igazolása

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 \le n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n = 2-$re:

$$A(2): \quad 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \iff \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is:

$$A(n+1): \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő szorzat helyére a neki megfelelő "jobb oldalt", azaz:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \underline{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = A(n)\ (\text{ind.felt.}) =$$

$$= \underline{\frac{n+1}{2n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n \cdot (n+2)}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{2n+2}\ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A feladat megoldható indukció nélkül is az alábbi észrevétellel (teleszkópikus szorzat):

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{k^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1\leq n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n):\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\quad (1\leq n\in\mathbb{N}).$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n=1$–re:

$$A(1):\quad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1\leq n\in\mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés). Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n+1)$ teljesülését is:

$$A(n+1):$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot(n+1)}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő összeg helyére a neki megfelelő "jobb oldalt", azaz:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\text{ind.felt.}=$$

$$=\left(\underline{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\underline{\frac{1}{2n+2}}=$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\quad\surd.$$

A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1\leq n\in\mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A fenti összefüggést *Catalan* egyenlőségnek nevezik.

Egyenlőtlenségek igazolása

1. Adjuk meg az összes $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, melyre igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5.$$

Megoldás: Ellenőrizve $n = 7-$re teljesül először, azaz:

$$A(7): \quad 2^7 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 \iff 128 > 82 \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $7 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad 2^{n+1} > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (\text{ind.felt.}) > 2 \cdot (n^2 + 4n + 5) = 2n^2 + 8n + 10.$$

Összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

Ez utóbbit tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > n^2 + 6n + 10 \iff n^2 + 2n > 0,$$

ami bőven teljesül, ha $n \geq 7$. Ezt összevetve a korábbiakkal, az alábbi becsléslánc adódik:

$$2^{n+1} > 2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5 \implies A(n+1) \ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $7 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra:

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{5n-2}{2n}.$$

Megoldás: Nézzük az induló lépést $n = 1-$re:

$$A(1): \quad \frac{1}{1!} \leq \frac{3}{2} \iff 1 \leq \frac{3}{2} \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!} \leq \frac{5n-2}{2n}.$$

Ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$\underline{\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!}\right)} + \frac{1}{(n+1)!} \leq (\text{ind.felt.}) \leq \underline{\frac{5n-2}{2n}} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Összevetve ezt a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$\frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Ez utóbbit ekvivalens módon tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2} - \frac{5n-2}{2n} = \frac{4}{4n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n\cdot(n+1)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad n\cdot(n+1) \leq (n+1)! \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq (n-1)!,$$

ami nyilván teljesül, ha $n \geq 1$. Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0; +\infty)$ pozitív valós számok esetén, melyekre:

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$$

igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Megoldás: Bizonyítsuk az állítást a megadott pozitív számok számára (n-re) vonatkozó indukcióval. Ellenőrizzük a kezdő lépést $n = 1$−re, tehát tekintsünk egyetlen $x_1 > 0$ pozitív valós számot, melyre igaz az, hogy $x_1 = 1$. Ekkor a bizonyítandó állítás az alábbi:

$$A(1): \quad x_1 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geq 1. \ \checkmark.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz bárhogyan is választunk n darab pozitív valós számot, melyeknek a szorzata 1 igaz lesz, hogy az összegük legalább n. Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n+1)$ teljesülését is, vagyis azt, hogy, ha az

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} > 0$$

számok szorzata 1, akkor:

$$A(n+1): \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq n+1.$$

Két eset lehetséges. Az egyik esetben mind az $n+1$ darab szám egyenlő $1-$el. Ekkor készen vagyunk az $A(n+1)$ állítással is, hiszen ez azt jelenti ebben az esetben, hogy

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ darab}} = n+1 \geq n+1,$$

ami nyilván igaz.

A második eset az, amikor nem mindegyik szám 1. Ekkor lesz köztük legalább egy olyan szám amelyik kisebb mint 1. Legyen ez x_n. Ekkor azonban kell olyan számnak is lennie, amelyik nagyobb mint egy (ha ilyen nem lenne a többiek közt, akkor a szorzatuk $-$ itt használjuk, hogy pozitívak a számaink$-$ kisebb lenne mint 1, ami nem lehet) . Legyen tehát ez az $1-$nél nagyobb szám például az x_{n+1}. Tehát adottak most az

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} > 0$$

számok úgy, hogy

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \;\; \wedge \;\; x_n < 1 \;\; \wedge \;\; x_{n+1} > 1.$$

Alkalmazzuk most az indukciós feltevést az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}.$$

Ezekre tehát igaz az $A(n)$, azaz:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n.$$

Induljunk ki a bizonyítandó $A(n+1)$ állítás bal oldalából és a fenti egyenlőtleségből becsüljük az első $n-1$ tag összegét az alábbiaknak megfelelően:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} = \underline{(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}+x_n+x_{n+1} \geq \underline{n - x_n \cdot x_{n+1}}+x_n+x_{n+1}.$$

Ezt összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt igazolnunk, hogy:

$$n - x_n \cdot x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n+1.$$

Ez utóbbi pedig ekvivalens tovább az alábiakkal:

$$-x_n \cdot (x_{n+1} - 1) + x_{n+1} - 1 \geq 0 \iff (1 - x_n) \cdot (x_{n+1} - 1) \geq 0.$$

A korábban x_n és $x_{n+1}-$re tett feltételeket figyelembe véve:

$$1 - x_n > 0 \;\; \wedge \;\; x_{n+1} - 1 > 0,$$

tehát a szorzatuk pozitív, így nemnegatív is egyben. Ezzel beláttuk az $A(n+1)$ állítást. A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és mondott tulajdonságú pozitív valós számok esetén.

Megjegyzés: a bizonyításból az is könnyen kiderül, hogy egyenlőség pontosan akkor áll elő, ha mindegyik szám 1. Formálisan tehát, ha $x_1, x_2 \cdots x_n > 0$ számok szorzata 1, akkor:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$$

Alkalmazás: Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0; +\infty)$ tetszőlegesen rögzített pozitív valós számok. Alkalmazzuk a most bizonyított állítást az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \cdots ; \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}.$$

Ekkor a **2.** feladat alapján azt állíthatjuk, hogy:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \geq n$$

továbbá, itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \cdots = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = 1 \iff$$

$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Az itt kapott állításokat kicsit átrendezve és összefoglalva: tetszőleges $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és

$$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$$

pozitív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Könnyű meggondolni ha a fenti számokat a *nemnegatív* számkörből választjuk és ha valamelyik szám (akár mindegyik) esetleg 0, akkor is fennáll a fenti egyenlőtlenség és az egyenlőségre tett ekvivalencia, tehát igaz az alábbi tétel:

Tétel: (Számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség)

Tetszőleges $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0; +\infty)$ nemnegatív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

10.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét.
2. Definiálja az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatót.
3. Számítsa ki $\binom{5}{2}$ pontos értékét.
4. Számítsa ki $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ pontos értékét.
5. Határozza meg $\binom{n+2}{n}$−et .
6. Mennyi lesz $\binom{2018}{1111}\Big/\binom{2018}{907}$?
7. Mennyi lesz $\binom{100}{2}+\binom{100}{3}+\binom{101}{4}+\binom{102}{5}$?
8. Mennyi lesz $\binom{1}{0}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\dots\cdot\binom{2018}{2017}$?
9. Hogyan szól a számtani−mértani közepek közti egyenlőtlenség?
10. Fejtsük ki az $(a-2b)^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$ hatványt.
11. Számítsuk ki a $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^3$ hatványozást.
12. Végezze el a következő binomiális kifejtést $(a+b)^5 \quad (a,b\in\mathbb{R})$, kiszámolva az együtthatókat is.

10.2. Feladatok

E szakasz feladatait teljes indukcióval oldjuk meg. Megjegyezzük, hogy köztük több feladat is van, ami teljes indukció nélkül is megoldható, sőt olyan is, melynek az indukció nélküli megoldása még egyszerűbb is. Adott esetben bemutatjuk az indukciótól eltérő megoldást is, ha annak tanulsága fontos lehet a későbbiekben.

10.2.1. Órai feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ $(1 \le n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

2. (**Binomiális tétel.**)

(a) Bizonyítsuk be a binomiális tételt: Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

(b) A binomiális tétel alkalmas szereposztásával lássuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ ; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}^+) \ .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $q \in \mathbb{R}$, $q \ne 1$, akkor

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(a mértani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Igazoljuk, hogy

(a) $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} - 1$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$;

(d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots \dfrac{1}{3n+1} > 1$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$;

(e) $|\sin(nx)| \le n \cdot |\sin x|$ $(\forall x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$.

5. (**Bernoulli–egyenlőtlenség.**) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Következmény: Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $h := \frac{1}{n}$ szereposztással kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

6. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli–egyenlőtlenség $-2 \leq h < -1$ valós számokra is igaz!

Megjegyzés: Itt nem működik a klasszikus indukciós bizonyítási módszer.

Sorozatok

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \ a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$.

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét! Az explicit formulát használva igazoljuk a (b) állítást.

8. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \ a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$;

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

"Vezessük le" a fenti explicit formulát felhasználva, hogy $2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ és, hogy $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Igazoljuk a (c) $\Longrightarrow$ (b) implikációt.

9. Tekintsük az $a_1 := \frac{1}{2}$; $a_2 := \frac{1}{3}$ és $a_{n+2} := \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy:

$$a_n = \frac{1}{1 + 2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható 23−mal:

$$2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}.$$

11. Tegyük fel, hogy az $A_2, A_3, \ldots, A_n$ független eseményekre

$$P(A_k) = \frac{1}{2k^2} \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Mennyi annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \ldots, A_n$ közül páratlan sok következik be?

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén, ha $x = (2 + \sqrt{3})^n$, akkor $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{12}$ teljes négyzet.

13. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

10.2.2. További feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$;

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$;

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$;

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \cdot \cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(1 \le n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

2. Lássuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + 2^{2^k}) = 2^{2^{n+1}} - 1 \; .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $d \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} \left[\, 2a_1 + (n-1)d \,\right]$$

(a számtani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $2^n > n^2 \quad (4 < n \in \mathbb{N})$;

(b) $3^n > n^3 \quad (4 \le n \in \mathbb{N})$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2n-1}{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{1}{2} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(f) $\displaystyle\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)! > ((n+1)!)^n \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$;

(i) $2^n > 1 + n \cdot \sqrt{2^{n-1}} \quad (2 \le n \in \mathbb{N})$.

5. (**Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség**). Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n \in [-1, +\infty)$, továbbá az $x_1, \ldots, x_n$ számok azonos előjelűek, akkor

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \,.$$

6. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad (2 \leq n \in \mathbb{N});$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \quad (3 \leq n \in \mathbb{N}).$

Sorozatok

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n > a_{n+1};$

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{2} < a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét!

8. Tekintsük az $a_1 := \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n < a_{n+1};$

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2};$

9. Legyen az (a_n) sorozat első három eleme $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. A sorozat további elemeit az alábbi szabály segítségével képezzük:

$$a_n \cdot a_{n+3} - a_{n+1} \cdot a_{n+2} = n! \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Adjuk meg a sorozat a_n elemét n függvényében.

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható 9−cel

$$4^n + 15n - 1.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha α olyan valós szám, melyre $\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{3}$, akkor α irracionális.