22. Valós euklideszi terek I.

Ebben és a következő fejezetben a középiskolában megismert „vektorok skaláris szorzata” műveletet általánosítjuk vektorterekre. Az egyszerűség kedvéért most csak valós (azaz $\mathbb{R}$ feletti vektorterekről lesz szó.

22.1. Az elméleti anyag

22.1.1. Valós euklideszi tér fogalma

Az eddigi lineáris algebrai fejezetekben a vektor fogalmát általánosítottuk, így jutottunk el a vektorterekhez. A középiskolában azonban a vektorok összeadásán és számmal való szorzásán kívül megismerkedtünk még egy vektorművelettel: a vektorok skaláris szorzatával. Megállapítottuk, hogy a vektorok skaláris szorzata rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, akkor $\underline{a} \cdot \underline{b}$ egy valós szám (innen ered a skaláris szorzat elnevezés)

2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ (kommutativitás)

3. $(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$ (szorzat szorzása)

4. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$ (összeg szorzása, disztributivitás)

5. $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$, s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\underline{a} = \underline{0}$

A továbbiakban a skaláris szorzás fogalmát általánosítjuk úgy, hogy tekintünk egy $\mathbb{R}$ feletti vektorteret, s a két vektortér-műveleten kívül egy harmadik műveletet (skaláris szorzás), mely rendelkezik a fenti 5 tulajdonsággal. Az így keletkezett „struktúrát” fogjuk euklideszi térnek nevezni. A fenti 5 tulajdonságot pedig a skaláris szorzat axiómáinak fogjuk nevezni.

Ezen bevezető után lássuk az euklideszi tér definícióját:

22.1. Definíció. Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett az $x + y$ (összeadás) és a λx (számmal szorzás) műveletekkel.

A V vektorteret ($\mathbb{R}$ feletti) euklideszi térnek nevezzük, ha létezik egy

$$xy = x \cdot y = \langle x, y \rangle$$

harmadik művelet (ezt skaláris szorzásnak nevezzük), melyre teljesülnek a következő axiómák:

1. $\forall\, x, y \in V: \quad \langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}$

2. $\forall\, x, y \in V: \quad \langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$ (kommutatív)

3. $\forall\, x, y \in V\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda \langle x,\, y\rangle$ (szorzat szorzása számmal)

4. $\forall\, x, y, z \in V: \quad \langle x,\, y+z\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, z\rangle$ (disztributív)

5. $\forall\, x \in V: \quad \langle x,\, x\rangle \geq 0$,
és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $x = 0$ (a skalárszorzat pozitív definit)

Az $\mathbb{R}$ feletti euklideszi tér más elnevezése: valós euklideszi tér.

22.2. Példák.

1. A síkvektorok és a térvektorok tere valós euklideszi tér a középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = \underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$$

skalárszorzattal, ahol γ az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok közbezárt szögét jelenti.

2. Az $\mathbb{R}^n$ tér is euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett az alábbi skalárszorzattal:

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)\,,$$

ez az alapértelmezett skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

A következő tétel az axiómák alapján könnyen igazolható:

22.3. Tétel. (a skalárszorzat alaptulajdonságai)
Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti euklideszi tér. Ekkor minden $x,\, x_i,\, y,\, y_j,\, z \in V$ vektor és minden $\lambda,\, \lambda_i,\, \mu_j \in \mathbb{R}$ skalár esetén igaz, hogy

a) $\langle x,\, \lambda y\rangle = \lambda\cdot\langle x,\, y\rangle$;

b) $\langle x+y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$;

c) $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j y_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i\mu_j \langle x_i,\, y_j\rangle$;

d) $\langle x,\, 0\rangle = \langle 0,\, x\rangle = 0$.

22.1.2. Vektor hossza (normája)

A középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = |\,\underline{a}| \cdot |\,\underline{b}| \cdot \cos\gamma$$

skalárszorzat képletéből adódik, hogy

$$\langle \underline{a},\, \underline{a}\rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos 0 = |\underline{a}|^2 \quad \text{azaz} \quad |\underline{a}| = \sqrt{\langle \underline{a},\, \underline{a}\rangle}\,.$$

Ezek után általánosíthatjuk a középiskolában megismert „vektor abszolút értéke” fogalmat:

22.4. Definíció. Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett, és legyen $x \in V$. Az x vektor normáját (más elnevezések: x hossza, x abszolút értéke) így értelmezzük:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}\,.$$

A $\|.\| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$ leképezést szintén normának hívjuk.

22.5. Megjegyzés. A norma tekinthető „a vektor önmagával vett skalárszorzatából vont négyzetgyöke” rövidítésének is.

22.6. Példák.

1. A síkvektorok és a térvektorok euklideszi terében a norma azonos a középiskolában megismert „vektor abszolút értéke”, „vektor hossza” fogalommal:

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle a,\, a\rangle} = \sqrt{|\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{a})} = |\underline{a}|\,.$$

2. $\mathbb{R}^n$-ben az alapértelmezett skaláris szorzatból az alábbi norma származik:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots,\, x_n^2}\,,$$

tehát – hasonlóan a középiskolában tanultakhoz – a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök. Ez az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett euklideszi vektornorma.

Az alábbi tételben a norma két egyszerű tulajdonságát fogjuk igazolni.

22.7. Tétel. (**a norma két egyszerű tulajdonsága**)

1. $\|x\| \geq 0 \quad (x \in V)$. *Továbbá* $\|x\| = 0 \iff x = 0$ *(pozitív definit);*

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad (x \in V;\ \lambda \in \mathbb{R})$ *(homogén).*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal adódik a skaláris szorzat ötödik axiómájából.

A második állítás igazolása:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \|x\|^2} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\|x\|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

□

22.8. Megjegyzés. Az első tulajdonság ekvivalens formája:

$$\|\,0\| = 0 \quad \text{és} \quad \forall\, x \in V \setminus \{0\} : \|\,x\| > 0\,.$$

22.9. Definíció. Az $x \in V$ vektort egységvektornak nevezzük, ha normája 1, azaz, ha:

$$\|x\| = 1\,.$$

22.10. Megjegyzés. **(normálás)** Bármely nem nullvektorból készíthető vele azonos irányú egységvektor a következőképen:

Ha $x \in V \setminus \{0\}$, akkor az

$$x^0 := \frac{x}{\|x\|}$$

megfelel a célnak, ugyanis $\frac{1}{\|x\|} > 0$ miatt x és x^0 iránya azonos, továbbá

$$\|x^0\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1\,.$$

Ezt az eljárást (a normával való leosztást) normálásnak nevezzük.

22.1.3. Merőlegesség (ortogonalitás)

A középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$$

skalárszorzat képletéből adódik, hogy ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egyike sem nullvektor, akkor e két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nullával egyenlő. Ezt a tényt használjuk fel a merőlegesség (ortogonalitás) definiálásakor euklideszi térben.

Ebben a szakaszban jelöljön V egy $\mathbb{R}$ feletti euklideszi teret.

22.11. Definíció. Az $x, y \in V$ vektorokat egymásra merőlegesnek (ortogonálisnak) nevezzük, ha skaláris szorzatuk 0, azaz, ha

$$\langle x,\, y\rangle = 0\,.$$

Jelölése: $x \perp y$. (Nyilvánvaló, hogy a merőlegesség szimmetrikus reláció.)

22.12. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a nullvektor a tér minden vektorára (önmagára is) merőleges. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy a nullvektor a tér egyetlen olyan vektora, amelyik önmagára merőleges.

22.13. Definíció. (halmazra való merőlegesség) Legyen $\emptyset \neq H \subseteq V$ és $x \in V$. Azt mondjuk, hogy az x vektor merőleges (ortogonális) a H halmazra (jelölése: $x \perp H$), ha merőleges a H halmaz minden elemére, azaz ha

$$\forall\, y \in H : \quad \langle x,\, y\rangle = 0\,.$$

A következő tételben megmutatjuk, hogy egy véges dimenziós altérre való merőlegességhez elegendő egy generátorrendszerére való merőlegesség.

22.14. Tétel. (altérre való merőlegesség) *Legyen $e_1, \, \dots, \, e_n \in V$ egy vektorrendszer, $W := \operatorname{Span}(e_1, \, \dots, \, e_n)$, és $x \in V$. Ekkor*

$$x \perp W \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x,\, e_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n)\,.$$

Bizonyítás.
„$\Longrightarrow$": Nyilvánvaló az $y := e_i$ választással.
„$\Longleftarrow$": Legyen $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in W$ egy tetszőleges vektor. Ekkor

$$\langle x,\, y\rangle = \langle x,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x,\, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0\,.$$

□

22.15. Definíció. Legyen $x_1, \, \dots, \, x_n \in V$ egy véges vektorrendszer.

1. Az $x_1, \, \dots, \, x_n$ rendszert ortogonális rendszernek (O.R.) nevezzük, ha bármely két tagja egymásra merőleges, azaz, ha

$$\forall\, i, j \in \{1, \dots n\}, \; i \neq j : \quad \langle x_i,\, x_j\rangle = 0\,.$$

2. Az $x_1, \, \dots, \, x_n$ rendszert ortonormált rendszernek (O.N.R.) nevezzük, ha ortogonális rendszer, és minden tagja egységvektor, azaz, ha:

$$\forall\, i, j \in \{1, \dots n\} : \qquad \langle x_i,\, x_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ ha } i \neq j \\ 1 \text{ ha } i = j\,. \end{cases}$$

3. Ha egy O.R. egyúttal bázis is, akkor ortogonális bázisnak (O.B.) nevezzük.

4. Ha egy O.N.R. egyúttal bázis is, akkor ortonormált bázisnak (O.N.B.) nevezzük.

22.16. Megjegyzések.

1. Egyszerűen belátható, hogy

- egy O.R.-ben lehet nullvektor
- egy O.N.R.-ben nem lehet nullvektor
- egy O.R.-ben a nullvektor többször is előfordulhat, de minden más vektor csak legfeljebb egyszer
- egy O.N.R.-ben nincs két azonos vektor

2. (O.R. normálása) Egy O.R.-ből könnyen előállíthatunk olyan O.N.R.-t, amelyik ugyanazt az alteret generálja, mint az eredeti O.R.:

Először hagyjuk el az O.R.-ből az esetleg ott lévő nullvektorokat, majd a visszamaradó rendszer minden vektorát normáljuk (ld. 22.10 Megjegyzés).

22.17. Példák.

1. A síkvektorok euklideszi terében a középiskolában megismert **i**, **j** alapvektorok O.N.B.-t alkotnak.

2. A térvektorok euklideszi terében az **i**, **j**, **k** alapvektorok O.N.B.-t alkotnak.

3. $\mathbb{R}^n$-ben az $e_1, \ldots, e_n$ kanonikus egységvektorok O.N.B.-t alkotnak.

Amint azt a térvektorok körében érzékeljük, az ortogonalitás erősebb, mint a függetlenség. Ezt mondja ki a következő tétel:

22.18. Tétel. (O.R. függetlensége) *Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V \setminus \{0\}$ egy O.R. Ekkor ez a rendszer lineárisan független. Következésképpen minden O.N.R. lineárisan független.*

Bizonyítás.
A

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

összefüggőségi egyenletet szorozzuk be skalárisan az x_j vektorral, ahol $j = 1, \ldots, n$:

$$0 = \langle 0,\, x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i,\, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j,\, x_j \rangle\,.$$

Mivel a rendszerből kizártuk a nullvektort, ezért $\langle x_j,\, x_j \rangle \neq 0$. Következésképpen: $\lambda_j = 0$.

Az összefüggőségi egyenletben minden együttható 0, tehát a rendszer valóban lineárisan független. □

Az ortogonális rendszerek másik alapvető tétele következik, a Pitagorasz-tétel általánosítása. Középiskolában a Pitagorasz-tételt úgy ismertük meg, hogy a derékszögű háromszög átfogójának négyzete megegyezik a befogók négyzetösszegével. Vektorok nyelvén ez úgy is megfogalmazható, hogy ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egymásra merőlegesek, akkor

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 .$$

Ezt általánosítjuk akárhány (de véges számú) vektor esetére.

22.19. Tétel. (Pitagorasz-tétel) *Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V$ egy véges O.R. Ekkor*

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 , \tag{22.1}$$

részletesebben:

$$\|x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ \ldots \ \|x_n\|^2 .$$

Bizonyítás.

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i,\, \sum_{j=1}^{n} x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i,\, x_j \rangle = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \langle x_i,\, x_j \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i = j}}^{n} \langle x_i,\, x_j \rangle =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle x_i,\, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

(Felhasználtuk, hogy $i \neq j$ esetén $\langle x_i,\, x_j \rangle = 0$.) □

22.1.4. Fourier-kifejtés

Vegyünk egy véges dimenziós alteret a V euklideszi térben. Azt már tudjuk, hogy ennek az altérnek a vektorai előállnak az alteret generáló véges számú vektor lineáris kombinációjaként. E szakasz alapkérdése az, hogy ennek az előállításnak az együtthatói hogyan fejezhetők ki a skaláris szorzat segítségével. Látni fogjuk, hogy ortonormált generátorrendszer esetén a keresett kifejezés igen egyszerű.

Legyen tehát $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy vektorrendszer, $W := \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ a rendszer által generált altér, továbbá $x \in W$. Ekkor

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = x .$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét odalát skalárisan az e_i vektorral ($i = 1, \ldots, n$):

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,\, e_i \rangle = \langle x,\, e_i \rangle .$$

Átalakítva:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle = \langle x,\, e_i\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{22.2}$$

Ez egy $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer az ismeretlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókra.
Az x előállításának együtthatói tehát megoldásai a (22.2) egyenletrendszernek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számok megoldásai a (22.2) egyenletrendszernek. Most „visszafelé" alakítjuk az egyenleteket ($i = 1, \ldots, n$):

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle = \langle x,\, e_i\rangle$$

$$\langle x,\, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle = 0$$

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,\, e_i\rangle = 0\,.$$

Mivel $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszer a W altérben, ezért az utolsó egyenlet azt jelenti, hogy az $x - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in W$ vektor merőleges a W altérre, tehát (mivel benne van az altérben) önmagára is merőleges. Mivel a térben egyedül a nullvektor merőleges önmagára, ezért

$$x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0 \qquad \text{azaz} \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\,.$$

Tehát a (22.2) egyenletrendszer megoldásai valóban az x előállítását adják.

Ezért megállapíthatjuk, hogy az $x \in W$ vektor előállításában az együtthatók keresése ekvivalens a (22.2) lineáris egyenletrendszer megoldásával.

22.20. Definíció. A (22.2) egyenleteket Gauss-féle normálegyenleteknek, együttesüket pedig Gauss-féle normálegyenlet-rendszernek nevezzük.

A Gauss-féle normálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{bmatrix} \langle e_1,\, e_1\rangle & \langle e_2,\, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_1\rangle \\ \langle e_1,\, e_2\rangle & \langle e_2,\, e_2\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1,\, e_n\rangle & \langle e_2,\, e_n\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_n\rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x,\, e_1\rangle \\ \langle x,\, e_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x,\, e_n\rangle \end{pmatrix}. \tag{22.3}$$

Ennek együtthatómátrixa csak az $e_1, \ldots, e_n$ vektoroktól függ, az x vektortól független. Ez vezet el az alábbi definícióhoz:

22.21. Definíció. Az $e_1, \ldots, e_n \in V$ vektorrendszer Gram-mátrixának nevezzük a

$$G := G_n := G(e_1, \ldots, e_n) := \begin{bmatrix} \langle e_1,\, e_1\rangle & \langle e_2,\, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_1\rangle \\ \langle e_1,\, e_2\rangle & \langle e_2,\, e_2\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1,\, e_n\rangle & \langle e_2,\, e_n\rangle & \ldots & \langle e_n,\, e_n\rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{22.4}$$

mátrixot. Ennek determinánsát az $e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszer Gram-determinánsának nevezzük.

22.22. Megjegyzés. Amint az látható, a Gram-mátrix elemeit az alábbi képlet adja meg:

$$(G)_{ij} = \langle e_j,\, e_i\rangle \qquad (i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Tantárgyunknak nem célja Gram-mátrix részletes vizsgálata. Egy érdekes tulajdonságáról a függelékben olvashatunk, „A determináns geometriai jelentése" szakaszban.

Egy $x \in W$ vektor előállításának együtthatóit tehát a Gauss-féle normálegyenlet-rendszer megoldásával kapjuk. Ez általában sok számolással jár.

Azonban ha az $e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszer egyúttal O.N.R. is, akkor a Gram-mátrixa az egységmátrixszal azonos, így a megoldás azonnal és egyértelműen adódik:

$$\lambda_i = \langle x,\, e_i\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

azaz x egyértelmű előállítása:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle \cdot e_i\,.$$

22.23. Definíció. A

$$c_i = \langle x,\, e_i\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

számokat az x Fourier-együtthatóinak, az

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle \cdot e_i$$

előállítást pedig az x Fourier-kifejtésének nevezzük, az $e_1, \ldots, e_n$ O.N.R. szerint.

22.24. Megjegyzések.

1. Az $x \in W$ vektor Fourier-együtthatói tehát azonosak az x koordinátáival a W altér $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázisán.

2. Meggondolásainkat az $x = 0$ esetre alkalmazva lényegében újra eljutunk a 22.18 tételhez, vagyis az ortonormált rendszerek lineáris függetlenségéhez.

22.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a valós euklideszi tér fogalmát

2. Írja fel a skalárszorzat 4 alaptulajdonságát kimondó tételt

3. Definiálja a vektor normáját euklideszi térben

4. Írja fel az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi vektornorma képletét

5. Írja fel az euklideszi téren értelmezett norma két egyszerű tulajdonságát kimondó tételt

6. Mit nevezünk egységvektornak euklideszi térben?

7. Mit jelent a normálás?

8. Definiálja az alábbi fogalmakat: két vektor merőlegessége; vektor merőlegessége halmazra

9. Mondja ki azt a tételt, amely egy véges dimenziós altérre való merőlegességről szól

10. Definiálja az alábbi fogalmakat: ortogonális rendszer (O.R.); ortonormált rendszer (O.N.R.)

11. Mondja ki az ortogonális rendszerek lineáris függetlenségéről szóló tételt

12. Írja fel a Pitagorasz-tételt euklideszi térben

13. Mi az együtthatók képlete, ha egy x vektort felírunk egy $e_1, \ldots, e_n$ O.N.R. vektorainak lineáris kombinációjaként? Hogy nevezzük ezeket az együtthatókat?

22.1.6. Bizonyítandó tételek

1. Az euklideszi téren értelmezett norma két egyszerű tulajdonságáról szóló tétel

2. Véges dimenziós altérre való merőlegességről szóló tétel

3. A Pitagorasz-tétel euklideszi térben

4. Az ortogonális rendszerek lineáris függetlenségéről szóló tétel

22.2. Feladatok

22.2.1. Órai feladatok

1. Legyenek $w_1, \ldots, w_n$ adott pozitív számok (ún. súlyok). Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett az

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

skaláris szorzattal. ($w_i = 1$ esetben kapjuk az alapértelmezett skaláris szorzatot.)

2. Adottak az

$$x := (1, -2, -3, 5), \quad y := (-1, 2, -1, 0), \quad z := (2, -1, 1, 3)$$

vektorok $\mathbb{R}^4$-ben. Számítsuk ki az alábbiakat:

(a) $\langle x,\, y\rangle$

(b) $\|\, x\|$

(c) $\|\, x - z\|$

(d) $\dfrac{\langle x,\, z\rangle \cdot y - \langle y,\, z\rangle \cdot x}{\|\, y\|^2}$

(e) z irányú egységvektor, z-vel ellentétes irányú egységvektor

3. Adott az

$$u_1 := (1, 1, 1, 1),\ u_2 := (1, -1, -1, 1),\ u_3 := (-1, 0, 0, 1)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben.

(a) Mutassuk meg, hogy az $u_1,\ u_2,\ u_3$ vektorrendszer O.R.

(b) Ellenőrizzük a Pitagorasz-tétel állítását az $u_1,\ u_2,\ u_3$ ortogonális vektorrendszeren.

4. Igazoljuk a paralelogramma-azonosságot a V valós euklideszi térben:

$$\forall\, x, y \in V : \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

22.2.2. További feladatok

1. Legyen $x = (3, -2, 1, 1)$, $y = (4, 5, 3, 1)$ $z = (-1, 6, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$ és legyen $\lambda = -4$. A két oldal kiszámításával ellenőrizzük az alábbi egyenlőségeket:

a) $\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$

b) $\langle x + y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$

c) $\langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda\langle x,\, y\rangle$

2. Az előző feladat adataival számítsuk ki:

$$\frac{\langle x,\, x\rangle}{\langle y,\, z\rangle}\cdot x, \qquad \|\, z - y\| \cdot x, \qquad y \text{ irányú egységvektor}$$

3. Legyen $x_1 = (0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (1, -1, 3, 0)$, $x_3 = (4, 0, 9, 2) \in \mathbb{R}^4$. Döntsük el, hogy az $x = (-1, 1, 0, 2)$ merőleges-e a $\mathrm{Span}\,(x_1,\, x_2,\, x_3)$ altérre.

4. Igazoljuk, hogy lineárisan független vektorrendszer Gram-mátrixa reguláris, lineárisan összefüggő vektorrendszer Gram-mátrixa szinguláris. (Útmutatás: használjuk a Gauss-féle normálegyenlet-rendszert.)