ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
16. Lineáris függetlenség
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3. feladatainak megoldása
(írta: Németh Zsolt)

16.2.1. Órai feladatok / 1.

A $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorrendszer pontosan akkor összefüggő, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ skalárok, amikkel

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

egyenlőség teljesül, miközben nem mindegyikük 0.

a) A konkrét vektorrendszerre (oszlopvektoros jelöléssel) a

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 9\lambda_3 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

feltételt teljesítő $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ skalárokat kell meghatároznunk. A fenti egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 && (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 && (2) \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 && (3) \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

egyenlőségek mindegyike egyidejűleg fennáll. Az előző órán tárgyalt módszerrel ekkor az alábbiaknak is teljesülni kell:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 && (1) \\ -5\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 && (2) - 2 \cdot (1) \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 && (3) - 2 \cdot (1) \\ 0 &= 0 && (4) + (1) \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség tehát a skalárok értékétől függetlenül mindig teljesül, viszont a középső két feltétel egyidejűleg csak akkor állhat fenn, ha $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Következésképpen az első egyenletből $\lambda_1 = -4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0$ kell legyen, vagyis az eredeti vektorrendszer egy lineáris kombinációja pontosan akkor lehet 0, ha mindhárom skaláregyüttható $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Tehát ez a vektorrendszer lineárisan független.

b) Az előző feladatrészhez hasonlóan most

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

feltétel teljesülését kell vizsgálnunk, ami ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 && (1) \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 && (2) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 && (3) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Az első egyenletet használva λ_1 eliminálására:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 && (1) \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 && (2) - 2 \cdot (1) =: (5) \\ -5\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0 && (3) - 3 \cdot (1) =: (6) \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 && (4) - (1) =: (7) \end{aligned}$$

Most a (7) egyenletet használva λ_2 eliminálására:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_3 &= 0 && (1) - 2 \cdot (7) \\ 0 &= 0 && (5) + 2 \cdot (7) \\ 0 &= 0 && (6) + 5 \cdot (7) \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 && (7) \end{aligned}$$

Tehát látjuk, hogy az első és utolsó egyenletek teljesülése esetén a középső két egyenlőség automatikusan igaz. Az első egyenletből $\lambda_1 = -3\lambda_3$, az utolsóból $\lambda_2 = 2\lambda_3$ feltételek adódnak, melyek teljesülése esetén a kiinduló egyenletrendszer is teljesül, vagyis a három vektor lineáris kombinációjának eredménye a $0 \in \mathbb{R}^4$ vektor.

Így például $\lambda_3 = 1$ választással $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 2$ kell legyen, és ezekkel az együtthatókkal

$$-3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0,$$

így a vektorrendszer lineárisan összefüggő.

16.2.1. Órai feladatok / 2.

Az előző feladatban beláttuk, hogy a megadott vektorrendszer lineárisan összefüggő, mivel a $0 \in \mathbb{R}^4$ vektor előáll például az alábbi lineáris kombináció eredményeként:

$$-3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0.$$

Ugyanezt az összefüggést használjuk a másik kérdés megválaszolásához is.

A vektorrendszer által generált altér elemei az összes lineáris kombinációként előálló $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Így egy $x \in \mathbb{R}^4$ vektorra pontosan akkor teljesül, hogy $x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) =: W$, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ együtthatók, hogy

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Használjuk fel az első összefüggésünket, hogy kifejezzük a generátorrendszer egyik elemét a másik két elem lineáris kombinációjaként, például

$$v_3 = 3v_1 - 2v_2.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in W$ pontosan akkor teljesül, ha

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3(3v_1 - 2v_2) = (\lambda_1 + 3)v_1 + (\lambda_2 - 2)v_2,$$

vagyis x minden esetben előáll v_1 és v_2 vektorok kombinációjaként. Az is nyilvánvaló, hogy W tartalmazza v_1 és v_2 összes lineáris kombinációit, így összességében beláttuk, hogy

$$W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2),$$

vagyis v_3 elhagyásával továbbra is ugyanazt az alteret generálja a vektorrendszer.

Ennek a gondolatmenetnek az általános megfogalmazása a **16.6. Tétel (összefüggő vektorrendszer szűkítése**.

16.2.1. Órai feladatok / 3.

Először meg kell bizonyosodnunk róla, hogy a megadott v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független, különben bármilyen vektorral is bővítjük, a kapott rendszer biztosan továbbra is összefüggő marad. A korábbi feladatokkal analóg gondolatmenettel $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlet alapján $\lambda_1 = 0$ kell legyen, így a további egyenletek pontosan akkor teljesülnek, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Következésképpen v_1, v_2 lineárisan független.

a) Ha a rendszert egy olyan $x \in \mathbb{R}^3$ vektorral bővítjük, melyre $x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ teljesül, akkor nyilván összefüggő rendszert kapunk (lásd még **16.10. Tétel**). Így például

$$x := v_1 + v_2 = (3, -1, 1)$$

vektorral v_1, v_2, x rendszer összefüggő.

Alternatív megoldásként emlékezhetünk arra, hogy bármely vektorrendszer, ami tartalmazza a nullvektort, lineárisan összefüggő, így $x := 0 \in \mathbb{R}^3$ vektorral bővítve a $v_1, v_2, 0$ rendszer összefüggő.

b) Hasonlóan azt is tudjuk, hogy ha $x \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, akkor v_1, v_2, x független. A $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ altér elemei pontosan a következő vektorok:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2,\ -2\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1) \in \mathbb{R}^3, \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Az, hogy egy $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektor nem állítható elő ilyen alakban, pontosan akkor teljesül, ha a

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= a \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 &= b \\ \lambda_1 &= c \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása λ_1, λ_2 együtthatókra.

Mivel most elég egyetlen ilyen x vektort megadnunk, próbáljuk meg praktikusan a $c = 0$ választást: ekkor $\lambda_1 = 0$ kellene legyen a megoldhatósághoz, így az első két feltétel:

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 &= a \\ \lambda_2 &= b \end{aligned}$$

Így viszont már könnyen el tudjuk érni, hogy ne létezzen megoldás, például $b = 1$ esetén bármilyen $a \neq 2$ megfelelő választás. Legyen mondjuk $x := (1, 1, 0)$, ekkor $x \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, tehát v_1, v_2, x független rendszer.