ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
18. Rang, lineáris egyenletrendszerek
az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 1c., 2. feladatainak megoldása
(írta: Csörgő István)

18.2.1. Órai feladatok / 1a.

(egyértelmű megoldás esete)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

a)

$m = 3$, $n = 3$, az egyenletrendszer 3×3-as. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

b) Gauss-Jordan eliminációval:

Írjuk fel az eredeti egyenletrendszert ábrázoló táblázatot, és az 1. lépésben válasszuk generáló elemnek az első sor második elemét. Ezzel az első sor lett a generáló sor, a második oszlop a generáló oszlop, az x_2 ismeretlen a generáló ismeretlen.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} .$$

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis az első sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 1-gyel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Ez után következik a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\dfrac{5}{1} = 5$-szörösét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\dfrac{3}{1} = 3$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ 2 & 0 & 8 & 22 \end{array} .$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sor az 1. sor, a megjelölt oszlop a 2. oszlop, a megjelölt ismeretlen az x_2.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (a 4, 13, 2, 8 közül választhatunk), legyen ez a harmadik sor első eleme:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ \boxed{2} & 0 & 8 & 22 \end{array}.$$

Ezzel a harmadik sor lett a generáló sor, az első oszlop a generáló oszlop, az x_1 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a harmadik sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 2-vel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már két megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{0}{2} = 0$-szorosát, majd a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{4}{2} = 2$-szörösét. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}.$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 3. sor is, megjelölt oszloppá válik az 1. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_1 is. Most már két megjelölt elemünk, két megjelölt sorunk, két megjelölt oszlopunk, és két megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (csak a -3 -at választhatjuk):

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}.$$

Ezzel a második sor lett a generáló sor, a harmadik oszlop a generáló oszlop, az x_3 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a második sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis -3-mal), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már három megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\frac{-3}{-3} = 1$-szeresét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}.$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 2. sor is, megjelölt oszloppá válik a 3. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_3 is. Most már három megjelölt elemünk, három megjelölt sorunk, három megjelölt oszlopunk, és három megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet. Azt tapasztaljuk, hogy minden sor megjelölt, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden sor megjelölt ($r = m$ eset), ezért van megoldás, a redukált táblázat megegyezik az utolsó táblázattal:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}.$$

Most állítsuk elő az összes megoldást. Mivel minden oszlop megjelölt ($r = n$ eset), ezért egyetlen megoldás van, ezt az utolsó táblázatból így olvassuk ki:

Az első sornak megfelelő egyenlet: $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 4$, amiből $x_2 = 4$.

A második sornak megfelelő egyenlet: $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3$, amiből $x_3 = 3$.

A harmadik sornak megfelelő egyenlet: $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, amiből $x_1 = -1$.

Látjuk, hogy ha felülről lefelé haladunk, akkor az ismeretleneket nem a természetes x_1, x_2, x_3 sorrendben kaptuk. Ha a természetes sorrendben szeretnénk leolvasni az ismeretlenek értékét, akkor a redukált táblázat sorait rendezzük át úgy, hogy a függőleges vonaltól balra eső rész egységmátrix legyen:

$$\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array}.$$

Ha eltekintünk a menet közbeni magyarázatoktól, a Gauss-Jordan elimináció az alábbi táblázat-sorozatot jelenti:

$$\begin{array}{ccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\
4 & 5 & -2 & 10 \\
2 & 3 & -1 & 7 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
4 & 0 & 13 & 35 \\
\boxed{2} & 0 & 8 & 22 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\
\underline{1} & 0 & 4 & 11 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3 \\
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
\hline\hline
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3
\end{array}.$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_2, x_3. Szabad ismeretlen nincs.

$\boxed{\text{c)}}$

Három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$\boxed{\text{d)}}$

A b) pontban kiszámított

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 4; \qquad x_3 = 3\,.$$

megoldást vektorba rendezve kapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (-1,\, 4,\, 3)\,.$$

e)

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza egyelemű halmaz:

$$\mathcal{M} = \{(-1,\, 4,\, 3)\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

f)

A homogén egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0\,, \quad \text{vektor alakban:} \quad (0,\, 0,\, 0) \in \mathbb{R}^3\,,$$

megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h = \{(0,\, 0,\, 0)\} = \operatorname{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

Ennek az altérnek bázisa nincs, dimenziója: $\dim \mathcal{M}_h = 0$, ami azonos a szabad ismeretlenek számával.

18.2.1. Órai feladatok / 1b.

(végtelen sok megoldás esete)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\
2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\
-x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 8 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 6 \\
\hline
\end{array}$$

a)

$m = 4$, $n = 5$, az egyenletrendszer 4×5-ös. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}\,, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4\,.$$

b) Gauss-Jordan eliminációval:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-3 & 1 & \boxed{1} & -1 & -2 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\
\hline\hline
-3 & 1 & \underline{1} & -1 & -2 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\
5 & -1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\
\hline\hline
1 & -1 & \underline{1} & -1 & 0 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\
\boxed{-1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
-1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
\hline\hline
0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & 6 \\
0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & 8 \\
\underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden nem megjelölt sor utolsó eleme 0 (csak a negyedik sor ilyen), ezért van megoldás. A redukált táblázatot a negyedik sor elhagyásával kapjuk:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & 6 \\
0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & 8 \\
\underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & -4
\end{array}.$$

Állítsuk elő az összes megoldást a redukált táblázatból:

Az első sornak megfelelő egyenlet: $0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 0x_5 = 6$, amiből kifejezzük a kötött ismeretlent: $x_3 = 6 - x_2 - 2x_4$.

A második sornak megfelelő egyenlet: $0x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 6x_4 + 1x_5 = 8$, amiből kifejezzük a kötött ismeretlent: $x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4$.

A harmadik sornak megfelelő egyenlet: $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0x_5 = -4$, amiből amiből kifejezzük a kötött ismeretlent: $x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4$.

Tehát az egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4, \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4\,.$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_3, x_5. A két nem megjelölt ismeretlen a szabad ismeretlen: x_2, x_4.

$\boxed{\text{c)}}$
Mivel három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$\boxed{\text{d)}}$
A b) pontban kiszámított

$$x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4; \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4; \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

megoldást vektorba rendezve, és az ún. szétválasztási technikát alkalmazva kapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ 6 - x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ 8 - 3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}_{x^B} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}_{v_4}.$$

Ebből leolvasható, hogy

$$x^B = (-4, 0, 6, 0, 8), \qquad v_2 = (2, 1, -1, 0, -3), \qquad v_4 = (3, 0, -2, 1, -6)\,.$$

$\boxed{\text{e)}}$
Az egyenletrendszer megoldáshalmaza végtelen halmaz:

$$\mathcal{M} = \{x^B + x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}\,.$$

$\boxed{\text{f)}}$
A homogén egyenletrendszer összes megoldása (a redukált táblázatban 0-ákat gondolunk a függőleges vonaltól jobbra):

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = -x_2 - 2x_4, \quad x_5 = -3x_2 - 6x_4\,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ -3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}}_{v_4}.$$

A homogén egyenletrendszer $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza (ami egyben az A együtthatómátrix $\operatorname{Ker}(A)$ magja):

$$\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A) = \{x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_2,\, v_4)\,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1,\ v_2,$
$\dim \mathcal{M}_h = \dim \operatorname{Ker}(A) = 2$, ami azonos a szabad ismeretlenek számával.

18.2.1. Órai feladatok / 1c.

(inkonzisztens eset)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

a)

$m = 3$, $n = 4$, az egyenletrendszer 3×4-es. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

b) Gauss-Jordan eliminációval:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & \boxed{1} & 5 & 0 & 1 \\ \hline\hline -10 & 0 & -16 & \boxed{2} & -4 \\ -15 & 0 & -24 & 3 & -2 \\ 4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1 \\ \hline\hline -5 & 0 & -8 & \underline{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Két megjelölt elem van, ezért $r = 2$.

Mivel van olyan nem megjelölt sor, melynek utolsó eleme nem 0 (a második sor ilyen ún. tilos sor), ezért nincs megoldás, az egyenletrendszer ellentmondásos (inkonzisztens).

c)

A Gauss-Jordan módszer esetén két megjelölt ismeretlen van, ezért $\operatorname{rang}(A) = 2$.

d)

Mivel nincs megoldás, ezért a vektor alakú megoldás sem létezik.

e)

A megoldáshalmaz az üres halmaz: $\mathcal{M} = \emptyset$.

$\boxed{\text{f)}}$

Homogén egyenletrendszer esetén a táblázatok csak abban térnek el az inhomogén eset táblázataitól, hogy a függőleges vonaltól jobbra végig csupa 0 áll:

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\
1 & 4 & -4 & 3 & 0 \\
4 & \boxed{1} & 5 & 0 & 0 \\
\hline\hline
-10 & 0 & -16 & \boxed{2} & 0 \\
-15 & 0 & -24 & 3 & 0 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 0 \\
\hline\hline
-5 & 0 & -8 & \underline{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 0
\end{array}$$

A megoldhatóság kritériuma teljesül (homogén egyenletrendszernél mindig teljesül), a redukált táblázat:

$$\begin{array}{cccc|c}
-5 & 0 & -8 & \underline{1} & 0 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 0
\end{array}$$

Innen a megoldást a szokásos átrendezésekkel kapjuk:

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -4x_1 - 5x_3, \quad x_4 = 5x_1 + 8x_3 \,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 - 5x_3 \\ x_3 \\ 5x_1 + 8x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{v_3} .$$

A homogén egyenletrendszer $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza (ami egyben az A együtthatómátrix $\operatorname{Ker}(A)$ magja):

$$\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A) = \{x_1 v_1 + x_3 v_3 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_1,\, v_3) \,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1 = (1, -4, 0, 5)$, $\quad v_3 = (0, -5, 1, 8)$. Továbbá $\dim \mathcal{M}_h = 2$.

$\boxed{\text{18.2.1. Órai feladatok / 2.}}$

Ker (A) azonos az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer megoldáshalmazával, ezért ezt a homogén egyenletrendszert oldjuk meg. Gauss-Jordan eliminációt alkalmazunk:

$$\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 0 \\
2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 8 & 2 & 0 \\
\hline\hline
\underline{1} & 1 & 3 & 1 & 0 \\
0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 5 & 1 & 0 \\
\hline\hline
\underline{1} & 0 & 8 & 2 & 0 \\
0 & \underline{1} & -5 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Innen a szokásos átrendezésekkel kapjuk, hogy:

$$x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = -8x_3 - 2x_4, \quad x_2 = 5x_3 + x_4 \,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_3 - 2x_4 \\ 5x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4} .$$

Ker (A) bázisa: $v_3 = (-8, 5, 1, 0), \quad v_4 = (-2, 1, 0, 1)\,.$
$\dim \operatorname{Ker}(A) = 2.$