ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
26. Korlátosság, szélsőérték, végtelenben vett határérték
az "Órai feladatok" szakasz 1., 3., 12. feladatainak megoldása
(írta: Chripkó Ágnes)

26.2.1. Órai feladatok / 1a.

Alakítsunk teljes négyzetté:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Innen világos, hogy

$$f(x) \geq -1 = f(2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért a függvény legkisebb helyettesítési értéke $f(2) = -1$.

Legnagyobb helyettesítési értéke nincsen, mert f felülről nem korlátos. Ugyanis ha lenne olyan $K > 0$ szám, amellyel

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \leq K \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az $x = \sqrt{K+2} + 2 \in \mathbb{R}$ számmal ellentmondásra jutnánk.

26.2.1. Órai feladatok / 1b.

A függvényt ismét teljes négyzetes alakra hozva:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right).$$

Mivel

$$-\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 2 \leq x - 2 \leq 3 - 2 = 1 \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért

$$0 \leq (x-2)^2 \leq \frac{9}{4} \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

így f legkisebb helyettesítési értéke $f(2) = -1$, legnagyobb helyettesítési értéke pedig

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

26.2.1. Órai feladatok / 3.

Jelölje a téglalap oldalait a és b. A szöveg alapján az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$2a + b = 24.$$

A téglalap területe:

$$T = ab = a(24 - 2a) = -2(a^2 - 12a) = -2\left((a-6)^2 - 36\right) = -2(a-6)^2 + 72.$$

Ez akkor lesz maximális, ha $a = 6$. Ekkor $b = 12$, és a maximális terület $T = 72$.

26.2.1. Órai feladatok / 12a.

Azt kell belátni, hogy

$$\forall\, P > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, x > K : \quad f(x) := \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 7}{x^3 + x + 1} > P.$$

Legyen $P > 0$ rögzített. Becsüljük a törtet alulról:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 7}{x^3 + x + 1} \geq \frac{x^4 - 2x^3}{3x^3} \geq \frac{\frac{1}{2}x^4 + x^3\left(\frac{1}{2}x - 2\right)}{3x^3} \geq \frac{\frac{1}{2}x^4}{3x^3} = \frac{x}{6} \quad (x > 4).$$

Itt

$$\frac{x}{6} > P \quad \Longleftrightarrow \quad x > 6P,$$

azaz ha

$$x > K := \max\{4, 6P\},$$

akkor

$$f(x) \geq \frac{x}{6} > P,$$

tehát ezzel a K választással teljesül a definíció.

26.2.1. Órai feladatok / 12b.

Legyen

$$f(x) := \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5}.$$

Azt kell belátni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, x > K : \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Alakítsuk az abszolút értékes kifejezést:

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{-x^2 - 4x + 13}{x^3 + 2x - 5} \right| = \frac{x^2 + 4x - 13}{x^3 + 2x - 5} \quad (x > 3).$$

Becsüljünk felülről:

$$\frac{x^2 + 4x - 13}{x^3 + 2x - 5} \le \frac{5x^2}{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 5} \le \frac{5x^2}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{10}{x} \quad (x > 3).$$

Itt

$$\frac{10}{x} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{10}{\varepsilon},$$

ezért a

$$K := \max\left\{3, \frac{10}{\varepsilon}\right\}$$

választással teljesül a definíció.

(Az abszolút érték elhagyásához a számlálóban használható a háromszög-egyenlőtlenség is: $|-x^2 - 4x + 13| \le x^2 + 4x + 13$, ha $x > 0$.)

26.2.1. Órai feladatok / 12c.

Azt kell belátni, hogy

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, x > K : \quad f(x) := \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} < p.$$

Legyen $p < 0$ rögzített. Mivel

$$f(x) < p \quad \Longleftrightarrow \quad -f(x) > -p,$$

ahol $-p > 0$, ezért becsüljük a $-f(x)$ törtet alulról:

$$-f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{4x^2 - 9} \ge \frac{x^3 - 5x}{4x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x(\frac{1}{2}x^2 - 5)}{4x^2} \ge \frac{\frac{1}{2}x^3}{4x^2} = \frac{x}{8} \quad (x > 4).$$

Itt

$$\frac{x}{8} > -p \quad \Longleftrightarrow \quad x > -8p > 0,$$

ezért a

$$K := \max\{4, -8p\}$$

választással teljesül a definíció.
