25. Kép, őskép, értékkészlet, inverz függvény

25.1. Kiegészítés az elmélethez

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A, B$ tetszőleges nemüres halmazok.

$\boxed{\textit{Kép, értékkészlet}}$

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény és $C \subseteq A$ adott halmaz. Ekkor a C halmaz f függvény által létesített *képe* az alábbi halmaz:

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\} \subseteq B.$$

Megjegyzések:

1. Egyezzünk meg abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.
2. Világos, hogy az f értékkészlete az értelmezési tartomány f által létesített képe, azaz
$$R_f = f[D_f].$$

Például:

1. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ és $C := [-1; 2]$. Határozzuk meg az $f[C]$ képhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

   $$f[[-1; 2]] = \{f(x) \mid x \in [-1; 2]\} = \{x^2 \mid -1 \leq x \leq 2\} = (\star) = [0; 4],$$

   ahol $(\star)$ az alábbi levezetéseket helyettesíti (két halmaz egyenlőségéhez igazolnunk kell a kétirányú tartalmazást):

   $$\text{Ha } 0 \leq x \leq 2 \implies 0 \leq x^2 \leq 4;$$

   $$\text{Ha } -1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1.$$

   Összefoglalva tehát:
   $$\text{Ha } x \in [-1; 2] \implies x^2 \in [0; 4].$$

   Ezzel igazoltuk, hogy
   $$f[[-1; 2]] \subseteq [0; 4].$$

   A fordított irányhoz be kell látnunk, hogy:

   $$\forall\ y \in [0; 4] :\ y \in f[[-1; 2]] \iff \forall\ y \in [0; 4]\ \exists\, x \in [-1; 2] :\ x^2 = y.$$

   Rögzítsünk tehát egy $y \in [0; 4]$ értéket. Keresünk olyan $x \in [-1; 2]$ számot, melyre:

   $$x^2 = y \in [0; 4] \iff x = \pm\sqrt{y}.$$

Világos, hogy

$$x = \sqrt{y} \in [0;2] \subseteq [-1;2] \text{ megfelel.}$$

Beláttuk, hogy:

$$[0;4] \subseteq f[[-1;2]].$$

2. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$. Határozzuk meg az R_f értékkészletet.

Megoldás: A definícióból indulva:

$$R_f = f[D_f] = \{f(x) \mid x \in D_f\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq [0;+\infty),$$

hiszen

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : y = x^2 \geq 0.$$

A fordított irányhoz be kell látnunk, hogy:

$$\forall\ y \in [0;+\infty) :\ y \in R_f \iff \forall\ y \in [0;+\infty)\ \exists\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 = y.$$

Rögzítsünk tehát egy $y \in [0;+\infty)$ értéket. Keresünk olyan $x \in \mathbb{R}$ valós számot, melyre:

$$x^2 = y \in [0;+\infty) \iff x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}.$$

Két megfelelő x értéket is találtunk, tehát:

$$[0;+\infty) \subseteq R_f.$$

Összevetve a két tartalmazási relációt kapjuk, hogy:

$$R_f = [0;+\infty).$$

Őskép

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény és $D \subseteq B$ adott halmaz. Ekkor a D halmaz f függvény által létesített *őskképe* az alábbi halmaz:

$$f^{-1}[D] := \{x \in D_f \mid f(x) \in D\} \subseteq A.$$

Megjegyzések:

1. Egyezzünk meg abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

2. Világos, hogy az f értelmezési tartománya az értékkészlet f által létesített őskképe, azaz

$$D_f = f^{-1}[R_f].$$

Például:

1. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ és $D := [1;2]$. Határozzuk meg az $f^{-1}[D]$ ősképhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

$$f^{-1}[[1;2]] = \{x \in D_f \mid f(x) \in [1;2]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 2\} = (\star) =$$
$$= [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}],$$

   ahol $(\star)$ a fenti egyenlőtlenséglánc alábbi megoldását jelöli:

$$1 \leq x^2 \leq 2 \iff (x^2 - 1 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - \sqrt{2} \leq 0) \iff x \in [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}].$$

2. Legyen $g(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Határozzuk meg az $g^{-1}[(-1;1]]$ ősképhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

$$g^{-1}[(-1;1]] = \{x \in D_f \mid g(x) \in (-1;1]\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid -1 < \frac{1}{x} \leq 1 Big\} = (\star) =$$
$$= (-\infty; -1) \cup [1; +\infty),$$

   ahol $(\star)$ a fenti egyenlőtlenséglánc megoldását jelöli:

$$-1 < \frac{1}{x} \leq 1 \ \ (x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)) \iff$$
$$\iff ((x < 0 \Longrightarrow x < -1 \ \wedge \ x \leq 1) \ \vee \ (x > 0 \Longrightarrow x > -1 \ \wedge \ x \geq 1)) \iff$$
$$\iff x < -1 \ \vee \ x \geq 1.$$

Invertálható függvények, inverz függvény

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *invertálható* vagy *injektív*, ha:

$$\forall\, x, t \in D_f : x \neq t \implies f(x) \neq f(t).$$

Megjegyzések:

1. Szóban megfogalmazva tehát: egy f függvény pontosan akkor invertálható, ha a D_f értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe is különböző.

2. A feladatokban gyakran használjuk a fenti definícióval azonos megfogalmazást:

$$f \ \text{ injektív} \iff \forall \ x, t \in D_f : f(x) = f(t) \implies x = t.$$

Például:

1. Legyen $f(x) := 2x - 7 \ (x \in \mathbb{R})$. Invertálható−e az f?

   Megoldás: Legyenek $x \neq t \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített értelmezési tartománybeli különböző pontok. Vizsgáljuk meg az alábbi eltérést:

$$f(x) - f(t) = (2x - 7) - (2t - 7) = 2 \cdot (x - t) \neq 0 \Longrightarrow f(x) \neq f(t),$$

   tehát az f injektív.

2. Legyen $f(x) := \sqrt{9-x^2}$ $(x \in [-3;3])$. Invertálható−e az f?

   Megoldás: Könnyű észrevenni, hogy például:

   $$-1 \neq 1 \in [-3;3] \quad \wedge \quad f(-1) = f(1) = \sqrt{8} \quad \Longrightarrow f \quad \text{nem injektív.}$$

3. Módosítsuk az előző feladat értelmezési tartományát az alábbi módon:

   $$f(x) := \sqrt{9-x^2} \;\; (x \in [0;3]).$$

   Invertálható−e most az f?

   Megoldás: Legyenek most $x, t \in [0;3]$ és tegyük fel, hogy $f(x) = f(t)$. Ekkor:

   $$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-t^2} \quad \Longrightarrow \quad 9-x^2 = 9-t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow \quad (x-t)\cdot(x+t) = 0 \Longrightarrow x = t,$$

   ugyanis

   $$\text{Ha} \quad x, t \in [0;3] \quad \Longrightarrow \quad x+t \in [0;6] \quad \wedge \quad (x+t=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=t=0).$$

   Ezzel beláttuk, hogy az f invertálható.

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ egy invertálható függvény. Definiáljuk ekkor az *inverzét* f^{-1}−et az alábbiak szerint:

$$D_{f^{-1}} := R_f \quad \wedge \quad \forall\, y \in D_{f^{-1}}: \quad f^{-1}(y) := x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Megjegyzések:

1. Könnyű meggondolni, hogy $R_{f^{-1}} = D_f$.

2. A feladatokban az inverz utasítás meghatározása az $f(x) = y$ egyenlet megoldását jelenti az ismeretlen x−re nézve (x−et fejezzük ki az y segítségével). Az is világos, hogy ez az egyenlet pontosan azon y értékek esetén oldható meg D_f−en, ha $y \in R_f$.

Például:

1. Legyen $f(x) := 2x-7$ $(x \in \mathbb{R})$. Adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.

   Megoldás: Korábban már beláttuk, hogy f invertálható. Először is adjuk meg R_f−et:

   $$R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\} = \{2x-7 \mid x \in \mathbb{R}\} = (\star) = \mathbb{R},$$

   ugyanis $(\star)$:

   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2x-7 \in \mathbb{R}, \;\; \text{azaz} \;\; R_f \subseteq \mathbb{R}$$

   és fordítva:

   $$\text{Ha } y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \;\; y = 2x-7 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\; x = \frac{y+7}{2} \in \mathbb{R}: \;\; f(x) = y, \;\; \text{azaz } \mathbb{R} \subseteq R_f.$$

   Ezzel beláttuk, hogy:

   $$D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} \;\; \wedge \;\; f^{-1}(y) = \frac{y+7}{2} \quad (y \in \mathbb{R} = D_{f^{-1}})\,.$$

2. Invertálható-e az alábbi függvény és ha igen,akkor adjuk meg f^{-1}−et:

$$f(x) := \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (x \in [0;+\infty)).$$

Megoldás: Legyenek most $x, t \in [0;+\infty)$ és tegyük fel, hogy $f(x) = f(t)$. Ekkor:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \iff (1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{t}) = (1-\sqrt{t})\cdot(1+\sqrt{x}) \iff \sqrt{x} = \sqrt{t} \implies$$

$$\implies x = t,$$

tehát f injektív. Mi lesz R_f? Ehhez alakítsuk át f utasítását az alábbiak szerint:

$$\text{Ha} \quad x \in [0;+\infty), \quad \text{akkor}: \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2-1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 > -1 \implies$$

$$\implies R_f \subseteq (-1;+\infty).$$

A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $y \in (-1;+\infty)$ tetszőlegesen rögzített érték és keresünk olyan $x \geq 0$ számot, melyre:

$$f(x) = y \iff \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 = y \iff \frac{2}{1+\sqrt{x}} = y+1 \iff (y \neq -1) \iff$$

$$\iff \sqrt{x} = \frac{2}{y+1} - 1.$$

A fenti utolsó egyenlet pontosan akkor oldható meg az eddigi $y > -1$ feltétel mellet, ha:

$$\frac{2}{y+1} - 1 \geq 0 \;\Big|\; \cdot (y+1) > 0 \iff 2 \geq y+1 \iff y \leq 1.$$

Összefoglalva tehát:

$$\forall\ y \in (-1;1]\ \exists\ x = \left(\frac{2}{y+1} - 1\right)^2 \in [0;+\infty):\ f(x) = y \implies$$

$$\implies (-1;1] \subseteq R_f.$$

A korábbi észrevételünket, miszerint $R_f \subseteq (-1;+\infty)$ tovább vizsgáljuk és belátjuk, hogy $R_f \subset (-1;1]$ is igaz! Ehhez elég belátni, hogy:

$$\forall\ x \in [0;+\infty)\ \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 \leq 1 \iff \forall\ x \in [0;+\infty):\ 0 \leq \sqrt{x},$$

ami nyilvánvalóan igaz. Tehát

$$R_f = (-1;1].$$

Ezek után megadható az inverz függvény:

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-1;1] \ \wedge\ f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y+1} - 1\right)^2 \quad (y \in (-1;1]).$$

Megjegyzés: Az értékkészlet megállapítása nem mindig egyszerű, vagy nem feltétlenül "olvasható" le az értékeket definiáló formulából. Az itteni levezetésben csak "később" derült ki, hogy 1 az értékek egy felső korlátja. Természetesen ez előbb is észrevehető, hiszen $x \geq 0$ esetén

$$\frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 \leq \frac{2}{1+\sqrt{0}} - 1 = 1,$$

de talán az $f(x) = y$ egyenlet megoldhatóságát vizsgálva természetesebb módon kaptuk meg az $y \leq 1$ feltételt.

25.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy C halmaz f függvény által létesített *képét*.
2. Definiálja egy D halmaz f függvény által létesített *ősképét*.
3. Halmaz függvény által létesített képét használva definiálja egy f függvény értékkészletét.
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény invertálható?
5. Definiálja egy invertálható függvény inverzét.
6. Adott az $f(x) := 3x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[[-3;4)]$ képhalmazt.
7. Adott az $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[(-2;1]]$ képhalmazt.
8. Adott az $f(x) := 3x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[[-1;5)]$ ősképhalmazt.
9. Adott az $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[(1;7]]$ ősképhalmazt.
10. Adott az $f(x) := \ln x \quad (x \in (0;+\infty))$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[(-1;1)]$ ősképhalmazt.
11. Adott az $f(x) := x^2 + x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[C]$ és $f^{-1}[C]$ halmazokat, ha $C := \{-1\}$.
12. Adott az $f(x) := 1 - 4x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
13. Adott az $f(x) := 1 - 2x - x^2 \quad (x \in (-\infty;-1))$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
14. Adott az $f(x) := |x-1| + (x^2 - 4x + 4) \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
15. Adott az $f(x) := 2^x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.

25.2. Feladatok

25.2.1. Órai feladatok

Kép, őskép, értékkészlet

1. Adjuk meg az alábbi f függvények és a megadott B, C halmazok esetében az $f^{-1}[B]$ ősképhalmazt, illetve az $f[C]$ képhalmazt :

   (a) $f(x) := 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [1; 2);\ \ C := (1; 2]$;

   (b) $f(x) := 2 - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty));\ \ B := [-1; 1];\ \ C := [2; 9]$;

   (c) $f(x) := |1 - |x - 2|| \quad (x \in [-1; 4]);\ \ B := [1/4; 1/2);\ \ C := [-1; 2]$;

   (d) $f(x) := (\sqrt{2})^{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [\sqrt{2}; 2);\ \ C := [-1; 1)$;

   (e) $f(x) := \dfrac{2 - x}{1 - x} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R});\ \ B := [1/2; +\infty);\ \ C := [0; 1) \cup (1; +\infty)$;

   (f) $f(x) := [\sin x] \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [-1; 0];\ \ C := [-1; 0]$.

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

   (a) $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in [-2; 1])$;

   (b) $f(x) := 1 - 2x \quad (-1 \leq x < 3)$.

   (c) $f(x) := |x - 2| \quad (x \in [-1; 4])$.

3. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

   (a) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (-1 \leq x \leq 6)$.

   (c) $f(x) := 1 - x^2 \quad (-2 \leq x \leq 3)$.

4. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az f értékkészletét, az R_f halmazt.

5. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az a értékeit úgy, hogy az $R_f \subset [-3; 2]$ feltétel teljesüljön.

6. Adott az alábbi függvény és az $m \in \mathbb{R}$ valós paraméter:
$$f(x) := \text{Sign}(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{,ha } xin(-\infty; -1); \\ 1 - x^2 & \text{,ha } x \in [-1; 1]; \\ 1 + x & \text{ha } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$
A paraméter értékeitől függően adjuk meg az $f^{-1}[(m; +\infty)]$ őskephalmazt.

Invertálható függvények, inverz függvény

7. Adott az alábbi függvény:
$$f(x) := \text{Sign}(x) := \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{,ha } x \in (1; +\infty); \\ 1 & \text{ha } x \in (-\infty; 1]. \end{cases}$$
Határozza meg a $g(x) := f(x+1) - f(x-1) \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt, majd a $g[[-1; 3]]$ képhalmazt és a $g^{-1}[[-1; 2]]$ ősképhalmazt. Invertálható$-$e a g függvény? Igazolja, hogy a $g|_{(0;+\infty)}$ függvény invertálható és adja meg az inverzét!

8. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények invertálhatóak$-$e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverz függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):
   (a) $f(x) := 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (b) $f(x) := x^2 - 2x + 2 \quad (x \in (-\infty; 1])$;
   (c) $f(x) := 1 - \sqrt{2 - x} \quad x \in (-\infty; 2]$;
   (d) $f(x) := \dfrac{3x+2}{x-1} \quad (x \in (1; +\infty))$;
   (e) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$;
   (f) $f(x) := |x - 1| + (x + 2)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (g) $f(x) := \dfrac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (h) $f(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (i) $f(x) := x \cdot |x| + 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

25.2.2. További feladatok

Kép, őskép, értékkészlet

1. Adjuk meg az alábbi f függvények és a megadott B, C halmazok esetében az $f^{-1}[B]$ ősképhalmazt, illetve az $f[C]$ képhalmazt :

(a) $f(x) := 4 - 3x \quad (x \in \mathbb{R})$; $B := [-1; 2)$; $C := (-1; 2]$;
(b) $f(x) := 1 + \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty; 1])$; $B := [1/2; 3]$; $C := [0; 1/2]$;
(c) $f(x) := |1 - x^2| \quad (x \in \mathbb{R})$; $B := [-1; 1/2]$; $C := [-2; 3]$;
(d) $f(x) := 3^{1/2-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$; $B := (1/27; 3]$; $C := [-1/4; 1/4)$;
(e) $f(x) := \dfrac{x}{1+x} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$; $B := [0; +\infty)$; $C := (-\infty; -1) \cup (-1; 1]$;
(f) $f(x) := [\cos x] \quad (x \in \mathbb{R})$; $B := [0; 1]$; $C := [0; \pi]$.

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := -x^2 - x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(b) $f(x) := (x-1) \cdot (3-x) \quad (1 \leq x \leq 4)$.
(c) $f(x) := x^2 - 10x + 27 \quad (x \in [0; 6])$.

3. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := 2x - \sqrt{2} \quad (x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}])$;
(b) $f(x) := 1 + 3 \cdot \sqrt{|x-2|} \quad (x \in \mathbb{R})$.
(c) $f(x) := \sqrt{4x^2 - 1} \quad \left(\dfrac{1}{2} \leq x < 1\right)$;
(d) $f(x) := \lg(2x+1) \quad \left(-\dfrac{1}{4} \leq x < \dfrac{9}{2}\right)$;
(e) $f(x) := \dfrac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
(f) $f(x) := 4^x - 2^x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(g) $f(x) := (\sin x + \cos x)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(h) $f(x) := [\sin x] + [\cos x] \quad (x \in [0; 2\pi])$.

4. Milyen $k \in \mathbb{R}$ esetén lesz az

$$f(x) := \sqrt{x^2 + 4x + k} \qquad (|x| \leq 3)$$

függvény értékkészlete a $[0, 5]$ zárt intervallum?

5. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az f értékkészletét, az R_f halmazt.

6. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax - 1}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az a értékeit úgy, hogy az $R_f = [-3; 5]$ feltétel teljesüljön.

7. Adott az alábbi függvény :

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ \sin x, & \text{ha } x \in [0; 2\pi]; \\ 2\pi - x & \text{ha } x \in (2\pi; +\infty). \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi kép és ősképhalmazokat:

$$f^{-1}\Big[[-1;1]\Big];\ f\Big[[-1;\pi]\Big];\ f^{-1}\Big[[0;+\infty)\Big];\ f^{-1}\Big[(-\infty;-1]\Big];$$

$$f\Big[[\pi;3\pi]\Big];\ f^{-1}\Big[\{-1;1\}\Big];\ f^{-1}\Big[\{-1/2\}\Big].$$

8. Határozzuk meg az m valós paraméter értékeit úgy, hogy az

$$f(x) := (m+1)x^2 + 2mx + 1 \ \ (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetén az alábbi feltétel teljesüljön:

$$f^{-1}\Big[(-\infty;0)\Big] = \mathbb{R}$$

Invertálható függvények, inverz függvény

9. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények invertálhatóak−e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverz függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):

   (a) $f(x) := 2 - 5x \quad (x \in \mathbb{R});$

   (b) $f(x) := 1 - 2x - x^2 \quad (x \in [-1; +\infty));$

   (c) $f(x) := x^3 - x \quad (x \in \mathbb{R});$

   (d) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|} \quad (x \in \mathbb{R});$

   (e) $f(x) := \sqrt{x-2} - 1 \quad (x \in [2; +\infty));$

   (f) $f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 5} \quad (x \in \mathbb{R});$

   (g) $f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 5} \quad (x \in (-1; +\infty));$

   (h) $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty));$

   (i) $f(x) := \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\});$

   (j) $f(x) := x \cdot \sin x \quad (x \in (-\pi; \pi/2]);$

   (k) $f(x) := \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\});$

   (l) $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in (0; +\infty));$

(m) $f(x) := x \cdot |x| - 2x - 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

10. Adott az $f(x) := ax+b \ (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol a és b tetszőleges valós paraméterek. Határozzuk meg az a, b értékeit úgy, hogy f invertálható legyen és teljesüljön, hogy $f = f^{-1}$.

11. Bizonyítsuk be, hogy az olyan a, b valós paraméterek esetén, amelyekre $ab \neq -4$ az alábbi függvény invertálható és megegyezik az inverzével, azaz $f = f^{-1}$:

$$f(x) := \frac{2x+a}{bx-2} \ (2/b \neq x \in \mathbb{R}).$$

Egyéb típusok

12. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ f(x) = x^2 + (5m-2)x + m \ (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $m \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az m értékét, ha tudjuk, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet egyik megoldása a másiknak pont a reciproka. A kapott m paraméterrel tekintsük a fenti f , továbbá a $g(x) = |x| \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényeket. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, majd az ezek által létesített $(f \circ g)^{-1}[[-1; 1]]$ ősképhalmazt, illetve a $(g \circ f)[[-1; 1]]$ képhalmazt. Milyen $A \subset \mathbb{R}$ halmazok esetén lesz a $(g \circ f)^{-1}[A]$ ősképhalmaz elemszáma k, ahol $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$?

13. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós x számok halmaza olyan diszjunk intervallumok egyesítése, amelyeknek az összhossza 1988.