8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

8.1. Kiegészítés az elmélethez

Lásd a **7. fejezet** elméleti összefoglalóját.

8.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \vee q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
2. Adja meg a p, q állítások esetén a $q \Longrightarrow p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
3. Adja meg a p, q állítások esetén a $\neg p \vee q$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott $\neg p \vee q$ kijelentés?
4. Adottak az $f(x) := x^2 - 2x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := a \ (x \in \mathbb{R})$ függvények, ahol a tetszölegesen rögzített valós paraméter. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} = \emptyset \iff A(a)$;
   (b) $\exists\, !\, x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \iff A(a)$;
   (c) Az $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ halmaz pontosan kételemű $\iff A(a)$.
5. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):
   $$A(n) : \quad \frac{n^4 + n + 1}{n^2 + 2} > 100.$$
   Igazak-e az allábbi állítások:
   (a) $A(0); A(1); A(2)$.
   (b) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \ A(N)$ igaz.
   (c) $\exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n \geq N : \ A(n)$ igaz.
6. Adja meg az alábbi állítás tagadását:
   $$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in N\ n \geq N : \frac{1+n}{1+n^2} < \varepsilon.$$

7. Igaz-e az alábbi állítás:

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in (-\infty; y] : x - 5 < 21?$$

8. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz:

$$\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} : x \leq K.$$

9. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(-1; 0), B(1; 0)$ és $C(x; y)$ pontok egy ABC szabályos háromszöget alkossanak.

10. Legyen $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter és tekintsük az $x^2 + y^2 = 1$ és az $y = x + a$ $(x, y \in \mathbb{R})$ egyenletű görbéket. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

    (a) A fenti két görbének nincs közös pontja $\iff$ $A(a)$;

    (b) A fenti két görbének pontosan egy közös pontja van $\iff$ $A(a)$;

    (c) A fenti két görbének pontosan két közös pontja van $\iff$ $A(a)$;

11. Írja le matematikai jelöléssekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

    (a) Az $x > 1$ egyenlőtlenség elégséges feltétele annak, hogy az x abszolút értéke $1-$nél nagyobb legyen. Igaz-e az állítás megfordítása?

    (b) Egy szám $5-$tel való oszthatósága szükséges feltétele annak, hogy $10-$zel is osztható legyen ez a szám. Igaz-e a megfordított állítás?

    (c) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor ezen szám négyzete legalább 4.

    (d) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor reciproka legfeljebb 2^{-1}. Igaz-e a megfordított állítás?

    (e) Vannak olyan x, y valós számok, melyekre $3x + 2y$ éppen -1.

    (f) Vannak olyan x, y valós számok, melyeknek a négyzetösszege kisebb mint 9.

    (g) Az $x^2 - y^2 = 0$ egyenlőség teljesülése szükséges feltétele annak, hogy az $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ pont rajta legyen $y = -x$ egyenletű egyenesen. Igaz-e a megfordítás?

12. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\Box$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\iff$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\iff$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x^2 < 1 \quad \Box \quad x < 1;$

    (b) $x^3 - 4x = 0 \quad \Box \quad x = 2;$

    (c) $x(x-2) < 0 \quad \Box \quad x < 2\ ;$

13. Igaz-e az alábbi állítás (itt x valós számot jelöl):

$$|x-1| < x \iff x > \frac{1}{2}.$$

14. Igaz-e az alábbi implikáció (x valós szám):

Ha $|x-2| < 1 \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$?

15. Tagadja le az alábbi állítást és döntse el, hogy az eredeti állítás igaz, vagy a tagadása:

$$\exists\, K > 0 \ \forall\, x \in (K; +\infty) : \ \frac{x^3 + 2x^2 + x + 10}{x^2 + x + 1} > 2018.$$

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $a + b = 0 \iff a^2 + b^2 = -2ab$?

(b) $a + b = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 - 2ab$?

(c) $x = -1 \iff x^2 + x = 0$?

(d) $x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2$?

(e) $x^2 + y^2 - 2(x-y) = 7 \iff$

$\iff$ (x, y) rajta van az $(1; -1)$ közepű 3 sugarú körvonalon ?

(f) $\exists\, a \in \mathbb{R} : e = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax \ \ (x \in \mathbb{R})\} \iff$ Az e síkbeli ponthalmaz egy origón átmenő egyenes ?

(g) Legyenek a és b nemnegatív valós számok. Ekkor:

$$a^2 + b^2 = 0 \iff \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\,?$$

(h) $x \geq 2 \iff |1 - x| = x - 1$?

(i) $|x - 5| < 2 \iff 3 < x < 7$?

(j) $y - x = |x| \iff y = x \cdot (1 + \mathrm{sign}(x))$?

(k) $\exists\, \log_{x^2 - 1/4}(1 - x^2) \in \mathbb{R} \iff \left[\frac{1}{|x|}\right] = 1$,

(ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli)?

(l) $a = b \vee a = 3b \Longleftrightarrow a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3 = 0$?

(m) $x = 0 \vee x = \dfrac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \Longleftrightarrow 27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 8^x = 0$?

(n) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}) \vee \operatorname{tg} x = 3 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 3\cos^3 x = 0 \,?$$

(o) $a + b + c = 0 \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3abc$?

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik "irány" helytálló.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak, fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2 \geq 62$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 6$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-5| + |x-12| \geq 11$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 5$.

(c) Tekintsük az $f(x) := x + |x| \;\; (x \in [-1; 1])$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x) \leq 2$;

b) $f(x) = 2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 1$; illetve

c) f értéke akkor és csak akkor minimális, ha $x = 0$ vagy $x = -1$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \;\; (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2 - 2^{-n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; 0 < a_n \leq 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\; n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{1000}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 2 + 3n \;\; (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = 3 =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{3n^2 + 7n + 4}{2}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (a sorozat szigorúan monoton nő) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 2 \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, K \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le K$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N > K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legkisebb elem a sorozatban;

i) A sorozat legkisebb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > N$ indexre $a_n > K$.

(f) Tekintsük az $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

c) Ha $b_n := a_{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n > b_{n+1}$;

d) Ha $c_n := a_{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n < c_{n+1}$;

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \le a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

g) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_l \le a_n$;

h) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \le K$.

i) $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > m :\ |a_n - 0| < \dfrac{1}{1000}$.

j) $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > m :\ |a_n - 0| < \varepsilon$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + px + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\iff |p| \ge \sqrt{2}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 0 legyen. Mennyi ez a p érték?

e) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény maximumhelye 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

i) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\iff p = \pm\frac{3}{2}$.

j) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 3x \quad (x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

k) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

l) $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) Az $(x_p; y_p) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pontok akkor és csak akkkor lesznek az $f_p \quad (p \in \mathbb{R})$ parabolák "csúcspontjai" , ha az $(x_p; y_p) \quad (p \in \mathbb{R})$ pontok befutják az

$$y = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ egyenletű parabolát.}$$

n) Rögzítsünk egy p valós paramétert. Ekkor

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} \text{ esetén } f_p(m) \in \mathbb{Z} \iff p + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

(h) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0; +\infty))$ függvényt. Ekkor:

$$\forall\, x, t \in [1; +\infty) : \ |f(x) - f(t)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - t|.$$

Milyen felső becslés adható az $|f(x) - f(t)|$ eltérésre, ha $x, t \in [4; +\infty)$? Igaz-e, hogy:

$$\exists\, K > 0 \ \forall\, x, t \in (0; +\infty) : \ |f(x) - f(t)| \leq K \cdot |x - t|?$$

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = |1 - |x|| \quad (x \in [-3; 2)).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \geq 0.$

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq 2.$

(c) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(d) $\exists\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(e) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \le f(a)$.

(f) $\exists!\, b \in D_f$ úgy, hogy $f(b) = 1$.

(g) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0$.

(h) $\exists!\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = x$.

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

(j) Az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása $\Longleftrightarrow c \in [0;2]$.

(k) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 4 darab megoldása, ha $c \in (0;1)$.

(l) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 3 darab megoldása, ha $c = 1$.

(m) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 2 darab megoldása, ha $c = 0$.

(n) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 1 darab megoldása, ha $c \in (1;2]$.

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A \,:\, x \ge 3$;

(b) $B \,:\, |x| = 4$;

(c) $C \,:\, x^2 = 16$;

(d) $D \,:\, \sqrt{x} = 2$;

(e) $E \,:\, x^2 - 4x = 0$;

(f) $F \,:\, 3 \cdot \ln x = \ln(16x)$.

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?

8.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $\sqrt{a^2} = -a \Longleftrightarrow a \le 0$?

(b) $2a + 1 = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2} = a + 1$?

(c) $a < 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2+1} > a+1\,?$

(d) $a + b = 0 \Longleftrightarrow a^3 + b^3 = 0\,?$

(e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 \Longleftrightarrow (x, y)$ rajta van az $(-2; 3)$ középű 2 sugarú körvonalon ?

(f) $|x| + |y| < 1 \Longleftrightarrow (x, y)$ benne van az $(1; 0); (0; 1); (-1; 0); (0; -1)$ csúcspontú négyzetlap belsejében?

(g) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc\,?$

(h) $|x - 3| < 4 \Longleftrightarrow$ ha az x valós szám a 3 számtól 4−nél kisebb távolságra van $\Longleftrightarrow -1 < x < 7\,?$

(i) $|x-4| > 3 \Longleftrightarrow$ ha az x valós szám a 4 számtól 3−nál nagyobb távolságra van $\Longleftrightarrow (x < 1) \vee (x > 7)\,?$

(j) $\neg(|x - 2| > 1) \Longleftrightarrow x \in [1; 3]\,?$

(k) $x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \Longleftrightarrow x^4 + y^4 = 0\,?$

(l) $[\sin x] - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})\,?$

(m) $[\sin x] = -1 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})\,?$

(n) $xy(1 + 2y) = y^3 + 2x^2 \Longleftrightarrow$ az $(x; y)$ pont rajta van az origón átmenő 2 meredekségű egyenesen, vagy az

$$f(x) = \sqrt{x} \;\; (x \geq 0)$$

függvény grafikonján?

(o) $\exists \ln \dfrac{x}{\sin x} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(2k\pi; (2k+1)\pi) \bigcup \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(-(2k+1)\pi; -2k\pi)\,?$

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik "irány" helytálló és adjunk meg szükséges és elégséges feltételt/feltételeket a fenti jobb oldalak teljesüléséhez.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak és lehetséges fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 - (x + 5)^2 - (x - 2)^2 \leq -28$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = -2$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 4$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 2 \vee x = 3$.

(c) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1+x}{1-|x|} \;\; (x \in (-1; 1))$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in (-1; 1) : 1 \leq f(x);$

b) $f(x) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$;

c) $\exists\, K > 0$ melyre $f(x) < K \quad (\forall\, x \in (-1;1))$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{5 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n}{2 \cdot 5^n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 0 < a_n < 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\ n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{100}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 3 - 2n \quad (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n+1) \cdot (3-n)$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N < K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban;

i) A sorozat legnagyobb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n > N$ indexre $a_n < K$.

(f) Tekintsük az $a_n := (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) Ha $b_n := a_{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n < b_{n+1}$; (a páros indexű tagokból képzett sorozat monoton növő)

c) Ha $c_n := a_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n > c_{n+1}$; (a páratlan indexű tagokból képzett sorozat monoton fogyó)

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) ($\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, k \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_k < K$) $\wedge$ ($\forall\, M \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_m > M$);

g) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \leq a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

h) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a_l \leq a_n$;

i) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq K$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = x^2 + (2-p)x - 2p$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\iff p \in \mathbb{R}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ f_p(x) \geq 0$ legyen.

e) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R}:\ f_p(x) < 0$.

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = -3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték? Hol veszi fel a minimumát az f?

i) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek köbösszege -8 legyen. Mennyi ez a p érték?

j) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\iff p \in \mathbb{Z}$.

k) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

l) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a,b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) $\exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a,b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

n) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke akkor és csak akkor negatív, ha $p < 0$.

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}\ \ (x \in [0;1]).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \geq 0.$

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq 1.$

(c) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \leq f(x).$

(d) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq f(a).$

(e) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0.$

(f) $\exists\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = \sqrt{x}.$

(g) $\forall\, x, t \in [1/8; 1/4] : \; |f(x) - f(t)| \leq |x - t|.$

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A \;:\; x \leq 0;$

(b) $B \;:\; \sqrt{x^2} = -x;$

(c) $C \;:\; \ln(-x) > 1;$

(d) $D \;:\; |x - 1| > 3;$

(e) $E \;:\; x^3 = 25x;$

(f) $F \;:\; \ln^2(\sin(\pi x)) + \left(x^3 + x^2 - \dfrac{3}{4}x\right)^2 = 0.$

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?