Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2019. december 16.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.
Az 5. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. *(11 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. Adott az alábbi lineárisan független vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektortérben:

$$b_1 = (1,\ 0,\ -1,\ 1), \quad b_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 1), \quad b_3 = (-1,\ 1,\ 1,\ 0)\,,$$

továbbá legyen $W = \operatorname{Span}(b_1,\ b_2,\ b_3)$.

a) *(8 pont)* Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.

b) *(6 pont)* Bontsuk fel az $x = (2, -1, 0, 1)$ vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. *(8 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1} \qquad (\,x \in (1;+\infty)\,)$$

Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

4. *(8 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 10}{x^3 + x^2 + x + 7} = 2$$

5. *(9 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):*

A felbontási tétel (euklideszi terekben).