ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
20. Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai
az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 1c., 1d. feladatainak megoldása
(írta: Pap Viktória)

20.2.1. Órai feladatok / 1.a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Elsőként számítsuk ki a következő determinánst (kifejtés pl. az első oszlop szerint):

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) = (2-\lambda) * \Big[(-2-\lambda)(2-\lambda) - (-3)(1)\Big] - \\ -(3) * \Big[(-1)(2-\lambda) - (-1)(1)\Big] + \\ (-1) * \Big[(-1)(-3) - (-1)(-2-\lambda)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (-2-\lambda)(2-\lambda)^2 + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) - 3 - 3 - (-2-\lambda) = \\ &= (-2-\lambda)(2-\lambda)^2 + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) - 3 - 3 + (2+\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \\ &= -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek a megoldásai a következők:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 1$
- $\lambda_3 = 1$

Ezek alapján az algebrai multiplicitások:

- $a(\lambda_1) = 1$
- $a(\lambda_2) = 2$

1. $\lambda_1 = 0$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{gathered}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 - x_3 \\ 3x_1 - 2(2x_1 - x_3) - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + (2x_1 - x_3) + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből már csak a második kettő egyenlet marad:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Innen kifejezhető pl. x_3: $x_3 = -x_1$, ekkor $0 * x_1 = 0$. Így kaptunk egy darab szabad paramétert, az x_1-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 \in \mathbb{R}$
- $x_3 = -x_1$
- $x_2 = 2x_1 + x_1 = 3x_1$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \to W_{\lambda_1}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_1) = dimW_{\lambda_1} = 1$$

2. $\lambda_1 = 1$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + x_3 \\ 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Így kaptunk két darab szabad paramétert, pl. az x_2 és x_3-at, vagyis a megoldások a következők:

- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_3 \in \mathbb{R}$
- $x_1 = x_2 + x_3$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow W_{\lambda_2}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_2) = dim W_{\lambda_2} = 2$$

Mivel

λ	0	1
a(λ)	1	2
g(λ)	1	2

így létezik sajátvektorokból álló bázis:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

20.2.1. Órai feladatok / 1b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Elsőként számítsuk ki a következő determinánst (kifejtés pl. az első oszlop szerint):

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) = (1-\lambda) * \Big[(1-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1)\Big] - \\ -1 * \Big[(-1)(2-\lambda) - (-1)(1)\Big] + \\ +0 * \Big[(-1)(-1) - (1-\lambda)(1)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1(1-\lambda) + (2-\lambda) - 1 = \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1(2-\lambda) + (2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)\Bigg[(1-\lambda)^2 - 1 + 1\Bigg] = \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \end{aligned}$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek a megoldásai a következők:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 1$
- $\lambda_3 = 2$

Ezek alapján az algebrai multiplicitások:

- $a(\lambda_1) = 2$
- $a(\lambda_2) = 1$

1. $\lambda_1 = 1$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 \\
x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 &= x_2 \\
0x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_2-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_2 \in \mathbb{R}$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow W_{\lambda_1}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_1) = dimW_{\lambda_1} = 1$$

2. $\lambda_2 = 2$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$
\begin{gathered}
-x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\
-x_2 = 0
\end{gathered}
$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_3 = 0 &\rightarrow x_3 = x_1 \\
x_1 - x_3 = 0 &\rightarrow 0x_1 = 0
\end{aligned}
$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_1-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 \in \mathbb{R}$
- $0 * x_1 \in \mathbb{R}$
- $x_1 \in \mathbb{R}$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow W_{\lambda_2}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_2) = dimW_{\lambda_2} = 1$$

Mivel

λ	2	1
a(λ)	2	1
g(λ)	1	1

Mivel $g(\lambda_1) < a(\lambda_1)$, ezért nem létezik sajátvektorokból álló bázis.

20.2.1. Órai feladatok / 1c.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elsőként számítsuk ki a következő determinánst (kifejtés pl. az első oszlop szerint):

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) = (1-\lambda) * \Big[(1-\lambda)(-\lambda) - (-1)(-1)\Big] - \\ -1 * \Big[(-1)(-\lambda) - (-1)(1)\Big] + \\ +2 * \Big[(-1)(-1) - (1-\lambda)(1)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1(1-\lambda) - \lambda - 1 + 2 - 2(1-\lambda) = \\ &= (-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1(1-\lambda) + (1-\lambda) - 2(1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)\Bigg[(1-\lambda)(-\lambda) - 2\Bigg] = \\ &= (-1)(\lambda-1)(1+\lambda)(\lambda-2) = 0 \end{aligned}$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek a megoldásai a következők:

- $\lambda_1 = 2$
- $\lambda_2 = 1$

- $\lambda_3 = -1$

Ezek alapján az algebrai multiplicitások:

- $a(\lambda_1) = 1$
- $a(\lambda_2) = 1$
- $a(\lambda_3) = 1$

1. $\lambda_1 = 2$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{gathered}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} & x_3 - x_2 = x_1 \\ & x_3 - x_2 - x_2 - x_3 = 0 \rightarrow -2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe x_2-t:

$$x_3 = x_1$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_1-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 \in \mathbb{R}$
- 0
- $x_1 \in \mathbb{R}$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow W_{\lambda_1}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_1) = dim W_{\lambda_1} = 1$$

2. $\lambda_2 = 1$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{gathered} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{gathered}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} & x_2 = x_3 \\ & x_1 - x_2 = 0 \to x_1 = x_2 = x_3 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_1-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 \in \mathbb{R}$
- $x_1 \in \mathbb{R}$
- $x_1 \in \mathbb{R}$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to W_{\lambda_2}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_2) = dimW_{\lambda_2} = 1$$

3. $\lambda_3 = -1$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_3 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= 0\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$x_2 = 2x_1 + x_3$$
$$x_1 + 2(2x_1 + x_3) - x_3 = 0 \rightarrow 5x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -5x_1$$
$$2x_1 - (2x_1 + x_3) + x_3 = 0 \rightarrow 0x_1 + 0x_3 = 0$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_1-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 \in \mathbb{R}$
- $x_3 = -5x_1$
- $x_2 = 2x_1 - 5x_1 = -3x_1$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow W_{\lambda_3}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_3) = dimW_{\lambda_3} = 1$$

Mivel

λ	0	1	-1
a(λ)	1	1	1
g(λ)	1	1	1

Mivel $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$ (ha $i = 1, 2, 3$), ezért létezik sajátvektorokból álló bázis, mely a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

20.2.1. Órai feladatok / 1d.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elsőként számítsuk ki a következő determinánst (kifejtés pl. az első oszlop szerint):

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) = (1-\lambda) * \Big[(1-\lambda)(1-\lambda) - (0)(0)\Big] - \\ -1 * \Big[(-1)(1-\lambda) - (-1)(0)\Big] + \\ +3 * \Big[(-1)(0) - (1-\lambda)(-1)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)^3 + (1-\lambda) + 3(1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)\Big[(1-\lambda)^2 + 4\Big] = \\ &= (1-\lambda)\Big[\lambda^2 - 2\lambda + 5\Big] = 0 \end{aligned}$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek a megoldásai a következők:

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 1 + 2i$
- $\lambda_3 = 1 - 2i$

Ezek alapján az algebrai multiplicitások:

- $a(\lambda_1) = 1$
- $a(\lambda_2) = 1$
- $a(\lambda_3) = 1$

1. $\lambda_1 = 1$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{aligned}$$

A fentieket felhasználva:

$$x_3 = -x_2$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_2-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 = 0$
- x_2
- $x_3 = -x_2$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \to W_{\lambda_2}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_2) = dim W_{\lambda_2} = 1$$

2. $\lambda_2 = 1 + 2i$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{gathered} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2ix_2 = 0 \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0 \end{gathered}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} & x_3 = -2ix_1 - x_2 \\ & x_1 = 2ix_2 \\ & 3x_1 - 2i(-2ix_1 - x_2) = -x_1 + 2ix_2 = 0x_1 = 0 \end{aligned}$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_2-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 = 2ix_2$
- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_3 = 3x_2$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} 2ix_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to W_{\lambda_2}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_2) = dim W_{\lambda_2} = 1$$

3. $\lambda_3 = 1 - 2i$ **esetén a következő egyenletrendszert kell megoldani**:

$$(A - \lambda_3 I)x = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixalakban:

$$\begin{bmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\begin{gathered} 2ix_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 = 0 \\ 3x_1 + 2ix_3 = 0 \end{gathered}$$

Az egyenletrendszer többféleképpen meg lehet oldani, ebben a segédanyagban a behelyettesítő módszerrel fogunk dolgozni:

$$\begin{aligned} & x_3 = 2ix_1 - x_2 \\ & x_1 + 2ix_2 = 0 \to x_1 = -2ix_2 \\ & 3x_1 + 2i(2ix_1 - x_2) = 0 \to 0x_2 = 0 \end{aligned}$$

Így kaptunk egy darab szabad paramétert, pl. az x_2-et, vagyis a megoldások a következők:

- $x_1 = -2ix_2$
- $x_2 \in \mathbb{R}$
- $x_3 = 3x_2$

Ezek után a sajátvektorok is felírhatók:

$$x = \begin{bmatrix} -2ix_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to W_{\lambda_3}$$

A sajátaltér dimenziója pedig ezek alapján:

$$g(\lambda_3) = dimW_{\lambda_3} = 1$$

Mivel

λ	0	1	-1
a(λ)	1	1	1
g(λ)	1	1	1

Mivel $g(\lambda_i) = a(\lambda_i)$ (ha $i = 1, 2, 3$), ezért létezik sajátvektorokból álló bázis, mely a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$