18. Rang, lineáris egyenletrendszerek

18.1. Az elméleti anyag

18.1.1. Vektorrendszer rangja

Ebben a szakaszban jellemezni fogjuk a vektorrendszer „összefüggőségének mértékét”. Például a térvektorok terében úgy érzékeljük, hogy egy háromtagú összefüggő vektorrendszer „jobban összefüggő”, ha egy egyenesen van, mint ha egy síkban van, de nincs egy egyenesen. Ez az észrevétel vezet el a következő definícióhoz:

18.1. Definíció. Legyen V egy vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, \ldots, x_k \in V$.

Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszer által generált altér dimenzióját a vektorrendszer rangjának nevezzük. Jele: $\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k)$. Tehát

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) := \dim \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \,.$$

18.2. Megjegyzések.

1. $0 \leq \operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) \leq k$.

2. A rang az összefüggőség mértékét fejezi ki. Minél kisebb a rang, annál „összefüggőbbek” a vektorok. Speciálisan:

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \ldots = x_k = 0 \quad \text{és}$$

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) = k \quad \Longleftrightarrow \quad x_1,\, \ldots,\, x_k \text{ lineárisan független}\,.$$

3. $\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k)$ megegyezik az $x_1, \ldots, x_k$ rendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számával

18.1.2. Mátrix rangja

18.3. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az A i-edik sorában álló elemek alkotják az i-edik sorvektort:

$$s_i := (a_{i1},\, a_{i2},\, \ldots,\, a_{in}) \in \mathbb{K}^n \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

A sorvektorok által generált ($\mathbb{K}^n$-beli) alteret a mátrix sorvektorterének (sorterének) nevezzük, jele: $\mathrm{S}(A)$.

18.4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az A j-edik oszlopában álló elemek alkotják a j-edik oszlopvektort:

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Az oszlopvektorok által generált ($\mathbb{K}^m$-beli) alteret a mátrix oszlopvektorterének (oszlopterének) nevezzük, jele: $\mathrm{O}(A)$.

18.5. Megjegyzés. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ esetén nyilvánvalóak az alábbiak:

$$\dim \mathrm{S}(A) \le m, \qquad \dim \mathrm{S}(A) \le n, \qquad \dim \mathrm{O}(A) \le n, \qquad \dim \mathrm{O}(A) \le m\,,$$

$$\mathrm{S}(A^T) = \mathrm{O}(A) \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{és} \quad \mathrm{O}(A^T) = \mathrm{S}(A) \subseteq \mathbb{K}^n\,.$$

18.6. Tétel. *Bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix oszlopvektorterének és sorvektorterének dimenziója megegyezik, azaz*

$$\dim \mathrm{O}(A) = \dim \mathrm{S}(A)\,.$$

Bizonyítás. $A = 0$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy $A \ne 0$, és legyen $r := \dim \mathrm{O}(A) \ge 1$. Legyen $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{K}^m$ bázis $\mathrm{O}(A)$-ban, és jelölje $B \in \mathbb{K}^{m\times r}$ a $b_1, \ldots, b_r$ oszlopokból összerakott mátrixot:

$$B := [b_1 \ \ldots \ b_r] \in \mathbb{K}^{m\times r}$$

Ekkor A oszlopai felírhatók a $b_1, \ldots, b_r$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\exists\, d_{ij} \in \mathbb{K}: \quad a_j = \sum_{i=1}^{r} d_{ij} b_i \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Legyen $D = (d_{ij}) \in \mathbb{K}^{r\times n}$. A mátrixszorzás szabályai alapján könnyen látható, hogy

$$A = BD\,.$$

Most tekintsük úgy ezt az egyenletet, hogy A minden sorvektora előáll D sorvektorainak lineáris kombinációjaként (az együtthatók a B megfelelő sorában álló elemek), ezért A minden sorvektora benne van $\mathrm{S}(D)$-ben. Következésképpen $\mathrm{S}(A) \subseteq \mathrm{S}(D)$, amiből következik, hogy

$$\dim \mathrm{S}(A) \le \dim \mathrm{S}(D) \le r = \dim \mathrm{O}(A)\,.$$

Tehát $\dim \mathrm{S}(A) \le \dim \mathrm{O}(A)$. Ha ezt az eredményt A helyett A^T-ra alkalmazzuk, akkor megkapjuk az ellenkező irányú egyenlőtlenséget:

$$\dim \mathrm{O}(A) = \dim \mathrm{S}(A^T) \le \dim \mathrm{O}(A^T) = \dim \mathrm{S}(A)\,.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

18.7. Megjegyzés. A bizonyításban nem volt szükség arra, hogy $O(A)$ bázisát az A oszlopai közül válasszuk. Ha a bázist A oszlopai közül választjuk, akkor D-nek a bázisindexeknek megfelelő r db oszlopa az r db kanonikus egységvektor. Durván úgy mondjuk, hogy D tartalmaz egy $r \times r$-es egységmátrixot. Ez esetben az $A = BD$ felbontást az A (a választott bázishoz tartozó) bázisfelbontásának nevezzük.

18.8. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$\dim \mathrm{O}(A)$ és $\dim \mathrm{S}(A)$ közös értékét az A mátrix rangjának nevezzük, és $\operatorname{rang}(A)$-val jelöljük. Tehát

$$\operatorname{rang}(A) := \dim \mathrm{S}(A) = \dim \mathrm{O}(A)\,.$$

18.9. Megjegyzések.

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Ekkor

1. Az A mátrix rangja megegyezik oszlopvektorrendszerének rangjával, és megyezik sorvektorrendszerének rangjával.
2. $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$
3. $0 \le \operatorname{rang}(A) \le \min\{m, n\}$,

   $\operatorname{rang}(A) = 0 \iff A = 0$.
4. $\operatorname{rang}(A) = m$ akkor és csak akkor, ha a sorvektorok lineárisan függetlenek,

   $\operatorname{rang}(A) = n$ akkor és csak akkor, ha az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

18.1.3. Lineáris egyenletrendszerek

18.10. Definíció. Legyenek m és n pozitív egész számok. Az m egyenletből álló, n ismeretlenes (röviden: $m \times n$-es) lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \hline a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

ahol az $a_{ij} \in \mathbb{K}$ együtthatók és a b_j jobb oldali konstansok adottak. Ezt az alakot a lineáris egyenletrendszer skalár alakjának nevezzük.

Keressük az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek összes olyan ($\mathbb{K}$-beli) értékét, amelyre mindegyik egyenlőség igaz. Egy ilyen $x_1, \ldots, x_n$ értékrendszert a lineáris egyenletrendszer egy megoldásának nevezzük.

18.11. Definíció. A lineáris egyenletrendszert konzisztensnek nevezzük, ha van megoldása, inkonzisztensnek (ellentmondásosnak), ha nincs megoldása.

Vezessük be az

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^m$-beli vektorokat. Ezzel egyenletrendszerünk az alábbi, egyszerűbb alakba írható:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b, \tag{18.1}$$

amit az egyenletrendszer vektoros alakjának nevezünk. A vektoros alak alapján a feladat így is megfogalmazható: Előállítható-e a b vektor az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, és ha igen, akkor adjuk meg az összes lehetséges előállítás együtthatóit.

Ha pedig bevezetjük az

$$A := [a_1 \ldots a_n] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

mátrixot (melyet az egyenletrendszer mátrixának, vagy együtthatómátrixának nevezünk) valamint az $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vektort, akkor egyenletrendszerünk legtömörebb alakja:

$$Ax = b\,. \tag{18.2}$$

Ezt az alakot az egyenletrendszer mátrixos alakjának nevezzük.

A feladat tehát az összes olyan $\mathbb{K}^n$-beli vektor megkeresése, melyet x helyébe írva a (18.2) egyenlőség igaz. Egy ilyen vektort (amennyiben létezik) az egyenletrendszer egy megoldásának, vagy megoldásvektorának nevezünk.

18.12. Megjegyzés. Az (18.1) vektoros alakból azonnal adódik, hogy

$$\text{az egyenletrendszernek létezik megoldása} \quad \Longleftrightarrow \quad b \in \mathrm{O}(A)\,.$$

Így a lineáris rendszer megoldhatósága egyenértékű azzal, hogy b benne van-e az A oszlopterében. Következésképpen minél szűkebb az oszloptér (azaz minél kisebb az együtthatómátrix rangja), annál nagyobb az esélye annak, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása (inkonzisztens). Ha pl. $\operatorname{rang}(A) = m$, akkor $\mathrm{O}(A)$ a lehető legnagyobb altér $\mathbb{K}^m$-ben, azaz $\mathrm{O}(A) = \mathbb{K}^m$. Ez esetben biztosan $b \in O(A)$, tehát az egyenletrendszer megoldható. Ha tehát az együtthatómátrix rangja megegyezik sorainak számával, akkor az egyenletrendszernek bármely jobb oldal esetén létezik megoldása.

Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásvektorainak halmazát, azaz a megoldáshalmazt:

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \subseteq \mathbb{K}^n\,.$$

18.13. Definíció. Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldáshalmazuk ugyanaz.

18.14. Megjegyzések.
Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

1. Az egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható (konzisztens), ha $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

2. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza a benne szereplő egyenletek megoldáshalmazainak metszete.

3. Ha az egyenletrendszerben van legalább egy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = q \qquad (q \neq 0)$$

alakú egyenlet, akkor az egyenletrendszer inkonzisztens (nincs megoldása).

4. Az alábbi átalakítások ekvivalens egyenletrendszert eredményeznek:

   (a) Egy egyenletet megszorzunk egy nem nulla konstanssal,
   (b) Az egyik egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet konstans-szorosát,
   (c) A rendszerből elhagyunk egy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

   alakú egyenletet.

18.15. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Ekkor az $Ax = 0$ lineáris egyenletrendszert homogén rendszernek nevezzük. Azt is szoktuk mondani, hogy $Ax = 0$ az $Ax = b$ -hez tartozó homogén rendszer.

Jegyezzük meg, hogy a homogén rendszer mindig megoldható, mivel a nullvektor biztosan megoldása ($0 \in \mathrm{O}(A)$).

18.16. Tétel. *Jelölje $\mathcal{M}_h$ a homogén rendszer megoldáshalmazát, azaz*

$$\mathcal{M}_h := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n \,.$$

Ekkor $\mathcal{M}_h$ altér $\mathbb{K}^n$-ben.

Bizonyítás. Mivel $0 \in \mathcal{M}_h$, ezért $\mathcal{M}_h \neq \emptyset$.
$\mathcal{M}_h$ zárt az összeadásra nézve, mivel ha $x, y \in \mathcal{M}_h$, akkor $Ax = Ay = 0$, ezért

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0\,,$$

amiből következik, hogy $x + y \in \mathcal{M}_h$.
Továbbá $\mathcal{M}_h$ zárt a skalárral való szorzásra nézve is, mivel ha $x \in \mathcal{M}_h$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $Ax = 0$, ezért

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

amiből $\lambda x \in \mathcal{M}_h$ következik. $\square$

18.17. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az $\mathcal{M}_h$ alteret az A mátrix nullterének vagy magjának nevezzük, jelölése: $\mathrm{Ker}\,(A)$. Tehát

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \mathcal{M}_h = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n \,.$$

Most rátérünk a konzisztens lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazának vizsgálatára.

18.18. Tétel. (Lineáris egyenletrendszerek alaptétele)
Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $r = \mathrm{rang}\,(A) \geq 1$ (azaz: $A \neq 0$), $b \in \mathbb{K}^m$, és tekintsük az

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszernek van megoldása.
Legyen az A oszlopvektorokra particionált alakja:

$$A = [a_1 \ \ldots \ a_n] \,, \quad \textit{ahol} \quad a_j \in \mathbb{K}^m \,.$$

Tudjuk, hogy A oszlopvektorai generátorrendszert alkotnak $\mathrm{O}(A)$-ban, valamint, hogy $\dim \mathrm{O}(A) = r$. Ezért A oszlopai közül kiválasztható r db vektor, ami bázist alkot $\mathrm{O}(A)$-ban. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy az első r db oszlop, $a_1, \ldots, a_r$ alkotja ezt a bázist.
Legyen b egyértelmű előállítása (kifejtése) ezen a bázison:

$$b = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i \,.$$

Ekkor
a) az $r = n$ esetben a lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, mégpedig:

$$x_i = c_i \qquad (i = 1, \ldots, r = n) \,.$$

b) az $1 \leq r < n$ esetben tekintsük az $a_{r+1}, \ldots, a_n \in \mathrm{O}(A)$ oszlopok egyértelmű előállítását az $a_1, \ldots, a_r$ bázison:

$$a_j = \sum_{i=1}^{r} d_{ij} a_i \qquad (j = r+1, \ldots, n) \,.$$

Ekkor a lineáris egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, r) \,, \quad x_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n \,,$$

ahol az $x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ számok tetszőlegesek.

Bizonyítás. a) $r = n$ eset

Nyilvánvaló az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok függetlensége és az egyértelmű előállítás tétele miatt.

b) $1 \leq r < n$ eset

Az alábbi ekvivalens átalakításokkal juthatunk el az összes megoldásig:

$$Ax = b$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b$$
$$\sum_{i=1}^{r} x_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j a_j = b$$

beírjuk b és az a_j-k előállítását:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{r} d_{ij} a_i = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

az összegzés sorrendjét felcseréljük, majd rendezünk:

$$\sum_{i=1}^{r} \left(x_i + \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \right) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

az a_i-k függetlensége és az egyértelmű előállítás tétele miatt

$$x_i + \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j = c_i \quad (i = 1, \ldots, r)$$
$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, r)\,.$$

□

18.19. Megjegyzések.

1. Ha megállapodunk abban, hogy az üres összeg értékét 0-nak tekintjük, akkor az $r = n$ és az $r < n$ esetek egységesen összefoglalhatók az

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} x_j d_{ij} \quad (i = 1, \ldots, r), \qquad x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \tag{18.3}$$

képlettel.

2. A tetszőlegesen választható $x_{r+1}, \ldots, x_n$ ismeretleneket szabad ismeretleneknek, az ezektől egyértelműen függő $x_1, \ldots, x_r$ ismeretleneket pedig kötött ismeretleneknek nevezzük. Az $n - r$ szám neve: az egyenletrendszer szabadsági foka.

3. Látható, hogy $r = n$ esetben a szabadsági fok 0, nincs szabad ismeretlen, minden ismeretlen kötött, a megoldás egyértelmű. Az $r < n$ esetben végtelen sok megoldás van, $n - r$ db szabad ismeretlennel.

4. Ha $\mathrm{O}(A)$-ban az első r db oszlop helyett másik bázist választunk, akkor hasonló tételhez jutunk, csak az indexelés lesz bonyolultabb.

A következőkben a megoldásokat vektorba rendezzük, így jutunk el a vektor-alakú megoldásokhoz. Felhasználva (18.3) egyenleteit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - d_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{1n}x_n \\ c_2 - d_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \cdot \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ -d_{2,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ -d_{2,n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Röviden:

$$x = x^B + x_{r+1} \cdot v_{r+1} + \ldots + x_n \cdot v_n = x^B + \sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j \,, \tag{18.4}$$

ahol

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

és

$$v_{r+1} = \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ -d_{2,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ -d_{2,n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{18.5}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{M} = \left\{ x^B + \sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j \;\middle|\; x_j \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n \,. \tag{18.6}$$

18.20. Megjegyzés. Láthatjuk, hogy x^B a lineáris egyenletrendszerünk egy megoldása, sőt $r = n$ esetben ez az egyetlen megoldás.

A megoldáshalmaz szerkezetéről szól az alábbi tétel:

18.21. Tétel. (a megoldáshalmaz szerkezete)
A 18.18 tétel feltételei mellett

1. *Az $Ax = 0$ homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza $n - r$ dimenziós altér $\mathbb{K}^n$-ben. Ennek az altérnek egy bázisa a* (18.5) *képletekkel értelmezett $v_{r+1}, \ldots, v_n$ vektorrendszer.*

2. *Ha az $Ax = b$ rendszer megoldható, akkor $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza az $\mathcal{M}_h$ altér x^B-vel való eltolása.*

Bizonyítás.

1. Homogén egyenletrendszer esetén $b = 0$, ezért $c_1 = \ldots = c_r = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x^B = 0$. Helyettesítsük ezt (18.6) képletbe:

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j \mid x_j \in \mathbb{K} \right\},$$

   ami $r = n$ esetben azt jelenti, hogy $\mathcal{M}_h = \{0\}$ (üres összeg esete), $r < n$ esetben pedig azt jelenti, hogy $v_{r+1}, \ldots, v_n$ generátorrendszer $\mathcal{M}_h$-ban.

   Másrészt – a 0-1 komponensek miatt – a $v_{r+1}, \ldots, v_n$ rendszer lineárisan független.

   Így tehát a $v_{r+1}, \ldots, v_n$ rendszer bázis $\mathcal{M}_h$-ban, következésképpen $\dim \mathcal{M}_h = n - r$.

2. Közvetlenül következik a (18.6). képletből.

□

18.22. Megjegyzések.

1. Az $r = n$ esetben az $\mathcal{M}$ és az $\mathcal{M}_h$ képletében szereplő szummák üresek, ezért

$$\mathcal{M}_h = \{0\}, \quad \dim \mathcal{M}_h = 0, \quad \mathcal{M} = \{x^B\}.$$

2. Felhasználva, hogy $\operatorname{Ker}(A) = \mathcal{M}_h$ és $\dim \mathcal{M}_h = n - r$ és $\dim \mathrm{O}(A) = r$, az alábbi fontos egyenlőséghez jutunk:

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \mathrm{O}(A) = n.$$

Az itt kifejtett elmélet nem alkalmas a lineáris egyenletrendszer gyakorlati megoldására, mivel nem adott eljárást a megoldhatóság eldöntésére, $\mathrm{O}(A)$-ban a bázis megtalálására, a c_i és a d_{ij} számok meghatározására. A következő szakaszban lesz szó a gyakorlati megoldásról.

18.1.4. Lineáris egyenletrendszer gyakorlati megoldása

A középiskolában lineáris egyenletrendszerek megoldására két módszert tanultunk: a behelyettesítő módszert és az egyenlő együtthatók módszerét.

A behelyettesítő módszer lényege, hogy a rendszer valamelyik egyenletéből kifejezünk egy ismeretlent, a rá kapott kifejezést behelyettesítjük az összes többi egyenletbe. Így egy eggyel kevesebb egyenletből álló, eggyel kevesebb ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez jutunk. Az ismeretlent kifejező egyenletet félretesszük. Ezt az eljárást ismételjük, amíg lehet. A megálláskor kapott eredményből először leolvassuk, hogy van-e megoldás. Ha van megoldás, akkor a félretett egyenleteket is felhasználva, fokozatos visszahelyettesítéssel kapjuk az ismeretlenek értékét.

Az egyenlő együtthatók módszerének lényege, hogy kiragadva a rendszerből két olyan egyenletet, melyekben ugyananannak az ismeretlennek azonos az együtthatója, a két egyenletet kivonjuk egymásból. Ezzel a közös együtthatójú ismeretlen kiesik. Az így kapott, eggyel kevesebb ismeretlenes egyenletre cserélve a két kiragadott egyenlet egyikét, az eredetivel ekvivalens rendszerhez jutunk. Ez lényegében ugyanaz, mintha a behelyettesítő módszerrel az egyik kiragadott egyenletből kifejezünk egy ismeretlent, és behelyettesítjük a másikba. Az alábbi példa ezt illusztrálja:

Legyen a két kiragadott egyenlet pl.:

$$\begin{array}{c} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ \underline{5x_1 + \ x_2 \ + \ x_3 \ = 3} \end{array}$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat (egyenlő együtthatók módszere):

$$-4x_2 + x_3 = 4\,.$$

Ha a behelyettesítő módszert alkalmazzuk, akkor az első egyenletből fejezzük ki x_1-et:

$$x_1 = \frac{3x_2 - 2x_3 + 7}{5}\,,$$

majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3x_2 - 2x_3 + 7}{5} + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_2 - x_3 &= -4 \\ -4x_2 + x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy ugyanazt az egyenletet kaptuk, mint az egyenlő együtthatók módszerénél.

Ha az egyenlő együtthatók módszerét szeretnénk alkalmazni, de nem találunk két olyan egyenletet, amelyben valamely ismeretlen együtthatója közös, akkor az egyenletek nem 0 konstanssal való beszorzásával érhetjük el a közös együtthatókat.

Az egyenlő együtthatók módszerét úgy is felfoghatjuk, hogy a rendszer egyik egyenletéhez hozzáadtuk egy másik egyenlet konstans-szorosát, s így elértük, hogy egy ismeretlen eltűnjön az egyenletből. Ha ezt a gondolatot úgy fejlesztjük tovább, hogy egy rögzített egyenlet megfelelő konstans-szorosait levonjuk a rendszer több másik (esetleg az összes többi) egyenletéből, akkor több egyenletből is el tudjuk tüntetni (más szóval: ki tudjuk küszöbölni, latinosan: eliminálni) ezt az ismeretlent. Ez az alapja az ún. eliminációs (kiküszöböléses) módszereknek. Ezekről részletesen felsőbb évfolyamon, a „Numerikus módszerek" tantárgyban lesz szó.

Itt csupán egy változatot, a Gauss-Jordan-féle eliminációs módszert fogjuk röviden ismertetni.

Az első lényeges megjegyzés, hogy az egyenletrendszert és annak átalakított változatait nem fogjuk leírni, hanem csak az együtthatókat és a jobb oldalon álló konstansokat tüntetjük fel egy táblázatban, az alábbi módon:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \hline a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad \text{helyett} \quad \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}.$$

Ha valamelyik ismeretlen hiányzik egy egyenletből, akkor a megfelelő táblázat-elem 0. Ez összhangban van azzal, hogy az egyenletből hiányzó ismeretlen valójában ott van az egyenletben, csak éppen 0-val szorzódik, és a rövidségre törekvés miatt ezeket a tagokat nem kötelező kiírni.

Látható, hogy ez a táblázatos ábrázolás máris lényegesen lecsökkenti az írásmunkát („együttható, ismeretlen, annak indexe, műveleti jel" helyett csupán az együtthatót írjuk le), ha pl. egyetlen együttható sem 0, akkor kb. a negyedére. Az egyenleteket a sorokkal azonosíthatjuk, az ismeretleneket a táblázat függőleges vonaltól balra eső oszlopaival, a jobb oldali konstanst pedig a táblázatnak a függőleges vonaltól jobbra eső oszlopával.

Az egyenletrendszerből könnyen kialakítható a táblázat, a táblázatból pedig azonnal látható az egyenletrendszer, akár fejben is. Az egyenletekkel végzett műveletek pedig megfelelnek a táblázat soraival végzett hasonló műveleteknek.

Tegyük fel, hogy az együtthatómátrix nem a nullmátrix (a 0 együtthatómátrixú egyenletrendszert könnyen meg tudjuk vizsgálni közvetlenül is). Ez esetben a Gauss-Jordan elimináció lényege a táblázaton végzett alábbi lépéssorozatok ismétlése, majd pedig a leállás után az utolsó táblázatból az eredmények kiolvasása:

1. A függőleges vonaltól balra eső területen választunk egy olyan elemet, amely nem 0, és amely nincs sem megjelölt sorban, sem pedig megjelölt oszlopban (kezdetben nincs megjelölt sor és nins megjelölt oszlop). A választott elemet elnevezzük generáló elemnek (főelemnek, pivot elemnek). Ennek sorát generáló sornak, oszlopát generáló oszlopnak, az oszlopához tartozó ismeretlent pedig generáló ismeretlennek nevezzük. Ha nem tudunk generáló elemet választani, az eljárás leáll.

2. A generáló sort leosztjuk a generáló elemmel. A generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük (megjelölt elem lesz belőle).

3. A generáló soron kívüli összes sorból levonjuk a generáló sor annyiszorosát, hogy a generáló oszlopba eső elem 0-vá váljon (úgy is szokták mondani, hogy kinullázzuk a generáló elem alatti és fölötti elemeket). Így elértük, hogy a generáló oszlopban a megjelölt elem 1, az összes többi elem 0. Ezt a lépést röviden „a generáló oszlop nullázása” néven fogjuk nevezni.

Az egyenletrendszerre nézve ez azt jelenti, hogy egy ismeretlent a generáló soron kívüli sorokból elimináltunk, a generáló sorban pedig 1-es együtthatóval bent hagytuk.

4. A „generáló” jelzőket (elem, sor, oszlop, ismeretlen) átváltoztatjuk „megjelölt”-re (az elem esetén ez már megtörtént), majd az 1. pontra lépünk.

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg az 1. pontban leírt megállási kritérium alapján meg nem áll, azaz amíg találunk generáló elemet. Az eljárás nyilvánvalóan véges, mivel a megjelölt elemek száma (de a megjelölt sorok, oszlopok száma is) minden ciklusban 1-gyel nő, és az elemek, sorok, oszlopok száma véges. Tegyük fel, hogy a megálláskor r db megjelölt elem van. Ekkor természetesen a megjelölt sorok (ezek a megjelölt elemet tartalmazó sorok) száma is r, a megjelölt oszlopok (ezek a megjelölt elemet tartalmazó oszlopok) száma is r, és a megjelölt ismeretleneké is r.

A megállás után két esetet különítünk el:

1. eset, ha $r = m$, azaz minden sorban van megjelölt elem (minden sor megjelölt sor), ezért már nem lehet generáló elemet választani. Ekkor az utolsó táblázatot elnevezzük redukált táblázatnak.

2. eset, ha $r < m$, azaz vannak nem megjelölt sorok, azonban minden ilyen sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani.

Ebben az esetben egy nem megjelölt sorhoz tartozó egyenlet így néz ki:

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = q\,.$$

Nyilvánvaló, hogy $q \neq 0$ esetén ennek az egyenletnek nincs megoldása (ún. tilos sor), következésképpen az egyenletrendszernek sincs. $q = 0$ esetben pedig az egyenletnek minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor megoldása, tehát az egyenlet a rendszerből elhagyható. Ezért az $r < m$ esetben:

- Ha van olyan nem megjelölt sor, aminek az utolsó eleme, azaz a függőleges vonaltól jobbra eső eleme nem 0, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása (inkonzisztens). Redukált táblázat nem keletkezik.

- Ha minden nem megjelölt sor utolsó eleme, azaz a függőleges vonaltól jobbra eső eleme 0, akkor a nem megjelölt sorokat töröljük, és a megmaradt táblázatot elnevezzük redukált táblázatnak.

Megmutatjuk, hogy ha a redukált táblázat létezik (amint láttuk, ez két esetben lehetséges), akkor az egyenletrendszernek van megodása.

A redukált táblázat jellemzői:

1. r db sora van, és mindegyik sora megjelölt sor (minden sorában van megjelölt elem, ami mint tudjuk 1).

2. A függőleges vonaltól balra n db oszlopa van, ezek között pontosan r db megjelölt oszlop van, s ezekben a megjelölt oszlopokban az r db r-dimenziós kanonikus egységvektor áll. A függőleges vonaltól balra 1 db oszlopa van.

3. Az előző pontból következik, hogy minden sorában az r db megjelölt ismeretlen közül pontosan 1 db van, ennek együtthatója 1, és ez a megjelölt ismeretlen másik sorban már nem fordul elő (az r db megjelölt ismeretlen szétválasztódott az r db egyenletben).

Ezek után az eljárás úgy fejeződik be, hogy a redukált táblázat minden sorának megfelelő egyenletből a benne szereplő egyetlen megjelölt ismeretlent kifejezzük a jobb oldalon álló konstans és az esetleges nem megjelölt ismeretlenek segítségével. Ez nagyon egyszerű, mivel ha nincs nem megjelölt ismeretlen ($r = n$ eset), akkor a megjelölt ismeretlen értéke a jobb oldalon álló konstans, így az átrendezés nélkül leolvasható. Ha pedig van nem megjelölt ismeretlen, akkor azokat csak át kell vinni az egyenlet jobb oldalára.

Látható tehát, hogy a redukált táblázat létezése esetén mindig van megoldás, mégpedig $r = n$ esetben egyértelmű, $r < n$ esetben pedig végtelen sok, $n - r$ szabad paraméterrel.

Igazolható (ld. pl. Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából c. jegyzet elemi bázistranszformációról szóló fejezete), hogy a Gauss-Jordan-elimináció során kapott eredmények az alábbi módon vannak összhangban az elméletben tárgyaltakkal (a Gauss-Jordan-eliminációs módszer és az elemi bázistranszformációs módszer ugyanaz):

1. Az együtthatómátrix rangja r. Következésképpen a Gauss-Jordan-eliminációban kapott r szám független a generáló elemek megválasztásától.

2. Az egyenletrendszer szabadsági foka $n - r$.

3. A kötött ismeretlenek a megjelölt ismeretlenek.

4. A szabad ismeretlenek a nem megjelölt ismeretlenek (ha nincs nem megjelölt ismeretlen, akkor nincs szabad ismeretlen).

5. A c_i számok a redukált táblázatban a függőleges vonaltól jobbra eső oszlopból olvashatók ki, megfelelő módon.

6. A d_{ij} számok a redukált táblázatban a függőleges vonaltól balra eső területről olvashatók ki, megfelelő módon.

18.23. Megjegyzések.

1. Homogén egyenletrendszer esetén a fentieken kívül még az is igaz, hogy minden táblázatban a függőleges vonaltól jobbra csupa 0 áll. Ezért minden esetben van redukált táblázat (összhangban azzal, hogy $\mathcal{M}_h \neq \emptyset$), és ott is csupa 0 áll a függőleges vonaltól jobbra.

2. A Gauss-Jordan eliminációt használhatjuk egy $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mátrix rangjának meghatározására is. Ekkor az induló táblázatban csupán az A mátrixot vesszük fel, nincs sem függőleges vonal, sem függőleges vonaltól jobbra eső rész. Elvégezzük az eliminációs lépéseket (az 1-4. lépések ismételgetése, amíg lehet). Az A mátrix rangja egyenlő a megjelölt elemek számával: $\operatorname{rang}(A) = r$.

A Gauss-Jordan eljárásra példákat, és összehasonlítását a behelyettesítő módszerrel a következő szakaszban tárgyalunk.

18.1.5. Három példa

Az alábbiakban a lineáris egyenletrendszerekről és a mátrix rangjáról tanultakat szemléltetjük három számpéldával. Mindhárom esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.

e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).

f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

A b) és az f) kérdést először Gauss-Jordan eliminációval, majd a behelyettesítő módszerrel oldjuk meg. A Gauss-Jordan eliminációnál a generáló elemeket bekeretezéssel, a megjelölt elemeket aláhúzással fogjuk jelölni.

1. Példa. *(egyértelmű megoldás esete)*

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$

Láthatóan $m = 3$, $n = 3$, tehát egyenletrendszerünk 3×3-as. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$

Írjuk fel az eredeti egyenletrendszert ábrázoló táblázatot, és az 1. lépésben válasszuk generáló elemnek az első sor második elemét. Ezzel az első sor lett a generáló sor, a második oszlop a generáló oszlop, az x_2 ismeretlen a generáló ismeretlen.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} .$$

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis az első sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 1-gyel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Ez után következik a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\frac{5}{1} = 5$-szörösét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\frac{3}{1} = 3$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ 2 & 0 & 8 & 22 \end{array} .$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sor az 1. sor, a megjelölt oszlop a 2. oszlop, a megjelölt ismeretlen az x_2.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (a 4, 13, 2, 8 közül választhatunk), legyen ez a harmadik sor első eleme:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ \boxed{2} & 0 & 8 & 22 \end{array}\,.$$

Ezzel a harmadik sor lett a generáló sor, az első oszlop a generáló oszlop, az x_1 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a harmadik sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 2-vel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már két megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{0}{2} = 0$-szorosát, majd a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{4}{2} = 2$-szörösét. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}\,.$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 3. sor is, megjelölt oszloppá válik az 1. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_1 is. Most már két megjelölt elemünk, két megjelölt sorunk, két megjelölt oszlopunk, és két megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (csak a -3 -at választhatjuk):

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}\,.$$

Ezzel a második sor lett a generáló sor, a harmadik oszlop a generáló oszlop, az x_3 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a második sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis -3-mal), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már három megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\frac{-3}{-3} = 1$-szeresét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\,.$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 2. sor is, megjelölt oszloppá válik a 3. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_3 is. Most már három megjelölt elemünk, három megjelölt sorunk, három megjelölt oszlopunk, és három megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet. Azt tapasztaljuk, hogy minden sor megjelölt, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden sor megjelölt ($r = m$ eset), ezért van megoldás, a redukált táblázat megegyezik az utolsó táblázattal:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array} .$$

Most állítsuk elő az összes megoldást. Mivel minden oszlop megjelölt ($r = n$ eset), ezért egyetlen megoldás van, ezt az utolsó táblázatból így olvassuk ki:

Az első sor alapján: $x_2 = 4$.

A második sor alapján: $x_3 = 3$.

A harmadik sor alapján: $x_1 = -1$.

Látjuk, hogy ha felülről lefelé haladunk, akkor az ismeretleneket nem a természetes x_1, x_2, x_3 sorrendben kaptuk. Ha a természetes sorrendben szeretnénk leolvasni az ismeretlenek értékét, akkor a redukált táblázat sorait rendezzük át úgy, hogy a függőleges vonaltól balra eső rész egységmátrix legyen:

$$\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array} .$$

Ha eltekintünk a menet közbeni magyarázatoktól, a Gauss-Jordan elimináció az alábbi táblázat-sorozatot jelenti:

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\
4 & 5 & -2 & 10 \\
2 & 3 & -1 & 7 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
4 & 0 & 13 & 35 \\
\boxed{2} & 0 & 8 & 22 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\
\underline{1} & 0 & 4 & 11 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3 \\
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
\hline\hline
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3
\end{array}
$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_2, x_3. Szabad ismeretlen nincs.

18.24. Megjegyzés. Amint a példából látszik, a generáló elemmel osztani kell. Ezért papíros számolásnál igyekszünk olyan generáló elemeket választani, hogy ne keletkezzenek törtek, pl. 1-et vagy -1-et.

$\boxed{\text{b) behelyettesítő módszerrel:}}$

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \quad\longrightarrow x_2 = 3x_3 - 5 \\
4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\
\hline
4x_1 & + & 5(3x_3-5) & - & 2x_3 & = & 10 \\
2x_1 & + & 3(3x_3-5) & - & x_3 & = & 7 \\
\hline
4x_1 & + & & & 13x_3 & = & 35 \\
2x_1 & + & & & 8x_3 & = & 22 \quad\longrightarrow x_1 = 11 - 4x_3 \\
\hline
4(11-4x_3) & + & & & 13x_3 & = & 35 \\
 & & & & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert az egyenletek elfogytak.

Amelyik ismeretlent kifejezzük a többivel, az kötött ismeretlenné válik. Az első lépésben x_2-t fejeztük ki, tehát x_2 kötött lett. Utána x_1-et fejeztük ki, ezért x_1 is kötött lett. Végül x_3-at fejeztük ki, tehát x_3 is kötött.

Azt kaptuk, hogy mindhárom ismeretlenünk kötött, ezért a kötött ismeretlenek száma 3, a szabad ismeretlenek száma 0. Az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

A megoldás meghatározásához visszafelé haladva számítjuk ki a kötött ismeretleneket:

$$x_3 = 3; \qquad x_1 = 11 - 4x_3 = 11 - 4 \cdot 3 = -1; \qquad x_2 = 3x_3 - 5 = 3 \cdot 3 - 5 = 4\,.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 4; \qquad x_3 = 3\,.$$

$\boxed{\text{c)}}$

Három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$\boxed{\text{d)}}$

Mindkét megoldási módszerrel azt kaptuk, hogy

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 4; \qquad x_3 = 3\,.$$

Ezeket vektorba rendezve kapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (-1,\, 4,\, 3)\,.$$

$\boxed{\text{e)}}$

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza egyelemű halmaz:

$$\mathcal{M} = \{(-1,\, 4,\, 3)\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

$\boxed{\text{f) Gauss-Jordan módszer esetén:}}$

A homogén egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0\,, \quad \text{vektor alakban:} \quad (0,\, 0,\, 0)\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h = \{(0,\, 0,\, 0)\} = \operatorname{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Ennek az altérnek bázisa nincs, dimenziója: $\dim \mathcal{M}_h = 0$, ami azonos a szabad ismeretlenek számával.

$\boxed{\text{f) behelyettesítő módszer esetén:}}$

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló -5, 10, 7 konstansok helyett 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyettesítések után a három kötött ismeretlen:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0\,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

2. Példa. *(végtelen sok megoldás esete)*

$$\begin{array}{rrrrrl}
-3x_1 & + x_2 & + x_3 & - x_4 & - 2x_5 & = 2 \\
2x_1 & - x_2 & & & + x_5 & = 0 \\
-x_1 & + x_2 & + 2x_3 & + x_4 & - x_5 & = 8 \\
 & x_2 & + x_3 & + 2x_4 & & = 6 \\
\hline
\end{array}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$

Láthatóan $m = 4$, $n = 5$, tehát egyenletrendszerünk 4×5-ös. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$

(A szükséges magyarázatok az órán ill. az első példa magyarázatainak értelemszerű alkalmazásával.)

$$\begin{array}{cccccc|c}
-3 & 1 & \boxed{1} & -1 & -2 & & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 1 & -1 & & 8 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & & 6 \\
\hline\hline
-3 & 1 & \underline{1} & -1 & -2 & & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & & 0 \\
5 & -1 & 0 & 3 & 3 & & 4 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 2 & & 4 \\
\hline\hline
1 & -1 & \underline{1} & -1 & 0 & & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \underline{1} & & 0 \\
\boxed{-1} & 2 & 0 & 3 & 0 & & 4 \\
-1 & 2 & 0 & 3 & 0 & & 4 \\
\hline\hline
0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & & 6 \\
0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & & 8 \\
\underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0
\end{array}.$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden nem megjelölt sor utolsó eleme 0 (csak a negyedik sor ilyen), ezért van megoldás. A redukált táblázatot a negyedik sor elhagyásával kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & 8 \\ \underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}.$$

Most állítsuk elő az összes megoldást a redukált táblázatból, átrendezéssel:
Az első sor alapján: $x_3 = 6 - x_2 - 2x_4$.
A második sor alapján: $x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4$.
A harmadik sor alapján: $x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4$.
Tehát az egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4, \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4\,.$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_3, x_5. A két nem megjelölt ismeretlen a szabad ismeretlen: x_2, x_4.

$\boxed{\text{b) behelyettesítő módszerrel:}}$

$$\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 8 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow x_3 = 3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2(3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2) + x_4 - x_5 = 8 \\ x_2 + (3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2) + 2x_4 = 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ \hline \end{array} \longrightarrow x_5 = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 3x_4 + 3(-2x_1 + x_2) = 4 \\ 3x_1 + 3x_4 + 2(-2x_1 + x_2) = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ \hline \end{array} \longrightarrow x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4$$

$$-(2x_2 + 3x_4 - 4) + 2x_2 + 3x_4 = 4$$

$$0x_2 + 0x_4 = 0$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert bár az egyenletek nem fogytak el, a megmaradt utolsó egyenletből már nem lehet ismeretlent kifejezni a 0 együtthatók miatt.

A kifejezett ismeretlenek váltak kötötté: x_3, x_5, x_1.

A megmaradt utolsó egyenlet a benne szereplő x_2, x_4 bármely értéke mellett igaz, ezért x_2 és x_4 szabad ismeretlenek. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

A megoldások meghatározásához most is visszafelé haladva számítjuk ki a kötött ismeretleneket:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4; \qquad x_5 = -2(2x_2 + 3x_4 - 4) + x_2 = -3x_2 - 6x_4 + 8;$$
$$x_3 = 3(2x_2 + 3x_4 - 4) - x_2 + x_4 + 2(-3x_2 - 6x_4 + 8) + 2 = -x_2 - 2x_4 + 6\,.$$

Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4; \qquad x_5 = -3x_2 - 6x_4 + 8; \qquad x_3 = -x_2 - 2x_4 + 6 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

c)

Mivel három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

d)

Mindkét megoldási módszerrel azt kaptuk, hogy

$$x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4; \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4; \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

Ezeket vektorba rendezve, és az ún. szétválasztási technikát alkalmazvakapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ 6 - x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ 8 - 3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ebből leolvasható, hogy

$$x^B = (-4, 0, 6, 0, 8), \qquad v_2 = (2, 1, -1, 0, -3), \qquad v_4 = (3, 0, -2, 1, -6)\,.$$

e)

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza végtelen halmaz:

$$\mathcal{M} = \{x^B + x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}\,.$$

f) Gauss-Jordan módszer esetén:

A homogén egyenletrendszer összes megoldása (a redukált táblázatban 0-ákat gondolunk a vonaltól jobbra):

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = x_2 - 2x_4, \quad x_5 = 3x_2 - 6x_4\,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ -3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = x_2 v_2 + x_4 v_4\,.$$

A megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_h = \{x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_2,\, v_4) = \operatorname{Ker}(A)\,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1,\ v_2$, $\dim \mathcal{M}_h = 2$.

$\boxed{\text{f) behelyettesítő módszer esetén:}}$

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló 2, 0, 8, 6 konstansok helyett 0, 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyttesítések után a három kötött ismeretlen:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4; \quad x_5 = -3x_2 - 6x_4; \quad x_3 = -x_2 - 2x_4 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

3. Példa. *(inkonzisztens eset)*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 &+& 3x_2 &-& x_3 &+& 2x_4 &=& -1 \\ x_1 &+& 4x_2 &-& 4x_3 &+& 3x_4 &=& 2 \\ 4x_1 &+& x_2 &+& 5x_3 && &=& 1 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$

Láthatóan $m = 3$, $n = 4$, tehát egyenletrendszerünk 3×4-es. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}\,, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,.$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$

A szükséges magyarázatok az órán ill. az első példa magyarázatainak értelemszerű alkalmazásával.

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\
1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\
4 & \boxed{1} & 5 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-10 & 0 & -16 & \boxed{2} & -4 \\
-15 & 0 & -24 & 3 & -2 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-5 & 0 & -8 & \underline{1} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1
\end{array}$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Két megjelölt elem van, ezért $r = 2$.

Mivel van olyan nem megjelölt sor, melynek utolsó eleme nem 0 (a második sor ilyen ún. tilos sor), ezért nincs megoldás, az egyenletrendszer ellentmondásos (inkonzisztens).

$\boxed{\text{b) behelyettesítő módszerrel:}}$

$$\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\
x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\
\underline{4x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad\quad = 1}
\end{array}
\quad \longrightarrow x_2 = 1 - 4x_1 - 5x_3$$

$$\begin{array}{l}
2x_1 + 3(1 - 4x_1 - 5x_3) - x_3 + 2x_4 = -1 \\
\underline{x_1 + 4(1 - 4x_1 - 5x_3) - 4x_3 + 3x_4 = 2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-10x_1 - 16x_3 + 2x_4 = -4 \quad \longrightarrow x_4 = -2 + 5x_1 + 8x_3 \\
\underline{-15x_1 - 24x_3 + 3x_4 = -2}
\end{array}$$

$$-15x_1 - 24x_3 + 3(-2 + 5x_1 + 8x_3) = -2$$

$$0x_1 + 0x_3 = 4$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert bár az egyenletek nem fogytak el, a megmaradt utolsó egyenletből már nem lehet ismeretlent kifejezni a 0 együtthatók miatt.

A kifejezett ismeretlenek váltak kötötté: x_2, x_4.

A megmaradt utolsó egyenlet a benne szereplő x_1, x_3 semmilyen értéke mellett sem igaz, ezért az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

$\boxed{\text{c)}}$
A Gauss-Jordan módszer esetén két megjelölt ismeretlen van, ezért $\operatorname{rang}(A) = 2$.
A behelyettesítő módszer esetén két kötött ismeretlen van, ezért $\operatorname{rang}(A) = 2$.

$\boxed{\text{d)}}$
Mivel nincs megoldás, ezért a vektor alakú megoldás sem létezik.

$\boxed{\text{e)}}$
A megoldáshalmaz az üres halmaz: $\mathcal{M} = \emptyset$.

$\boxed{\text{f) Gauss-Jordan módszer esetén:}}$
A homogén egyenletrendszer összes megoldása (a redukált táblázatban 0-ákat gondolunk a vonaltól jobbra):

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -4x_1 - 5x_3, \quad x_4 = 5x_1 + 8x_3 \,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 - 5x_3 \\ x_3 \\ 5x_1 + 8x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

A homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h = \{x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_2,\, v_4) = \operatorname{Ker}(A) \,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1 = (1, -4, 0, 5), \quad v_3 = (0, -5, 1, 8)$. Továbbá $\dim \mathcal{M}_h = 2$.

$\boxed{\text{f) behelyettesítő módszer esetén:}}$

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló -1, 2, 1 konstansok helyett 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyttesítések után a két kötött ismeretlen:

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -4x_1 - 5x_3, \quad x_4 = 5x_1 + 8x_3 \,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

18.25. Megjegyzés. A három számpéldát végigkövetve megállapíthatjuk, hogy a Gauss-Jordan módszer táblázatai megfelelnek a behelyettesítő módszer során felírt egyenletrendszereknek. Ezért – leegyszerűsítve – azt mondhatjuk, hogy a két módszer lényegében ugyanazokat a lépéseket csinálja, csak a Gauss-Jordan-módszer táblázatokkal ábrázolja az egyenletrendszereket, a behelyettesítő módszer pedig ténylegesen leírja az egyenleteket. A műveletszám ezért mindkét módszernél kb. ugyanannyi, viszont a Gauss-Jordan módszernél lényegesen kevesebb az írásmunka. Kis méretű rendszereknél az eltérés alig érzékelhető. Nagyobb méretűeknél (pl. a 2. példa 4×5-ös egyenletrendszere már ilyen) a Gauss-Jordan módszer érezhetően hatékonyabb: sokkal kevesebbet kell írni, mint a behelyettesítő módszer esetén, és az adatok tárolása is áttekinthetőbb.

18.1.6. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a vektorrendszer rangját

2. Mondja ki az oszlopvektortér és a sorvektortér dimenziója közti kapcsolatról szóló tételt

3. Definiálja a mátrix rangját

4. Írja fel a lineáris egyenletrendszer skalár, vektor illetve mátrix alakját

5. Definiálja a következő halmazokat: $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_h$, $\mathrm{Ker}\,(A)$.

6. Mondja ki a homogén és az általános lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának szerkezetéről szóló tételt

18.1.7. Bizonyítandó tételek

1. Az oszlopvektortér és a sorvektortér dimenziója közti kapcsolatról szóló tételt

2. $\mathcal{M}_h$ altér

3. A homogén és az általános lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának szerkezetéről szóló tétel

18.2. Feladatok

18.2.1. Órai feladatok

1. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszerek:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 8 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 6 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Mindhárom esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.
b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)
c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?
d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.
e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).
f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzunk meg egy bázist a

$$\operatorname{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$$

altérben. Hány dimenziós $\operatorname{Ker}(A)$?

18.2.2. További feladatok

1. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszerek:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Mindegyik esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.

e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).

f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Határozzunk meg egy bázist a

$$\operatorname{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$$

altérben. Hány dimenziós $\operatorname{Ker}(A)$?

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$