ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
3. Algebrai és gyökös kifejezések II.
az órai feladatok szakasz 1b., 1c., 1e., 2a., 2b., 2c., 3b., 3e., 3f., 3g., 6a., 6k., 6n. feladatainak megoldása
(írta: Filipp Zoltán)

3.2.1 Órai Feladatok / 1b.

Alakítsuk szorzattá a számlálóban és a nevezőben lévő polinomokat és egyszerűsítsünk:

$$\frac{x^4+5x^2+4}{x^4-16} = \frac{(x^2+1)\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)\cdot(x^2+4)} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{x^2+1}{(x-2)\cdot(x+2)}}.$$

3.2.1. Órai feladatok / 1c.

$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1} = \frac{(x-7)\cdot(2x+1)}{(2x+1)\cdot(4x^2-2x+1)} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{x-7}{4x^2-2x+1}}.$$

Megjegyzés:

• A számláló felbontásához használhatjuk a másodfokú polinomok gyöktényezős alakját:

$$P(x) := ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

ahol x_1, x_2 a P valós gyökei (ha vannak). Ezt alkalmazva:

$$2x^2-13x-7=0 \iff x_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{169+56}}{4} \iff x_1=7;\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

Ennek megfelelően:

$$2x^2-13x-7 = 2\cdot(x-7)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-7)\cdot(2x+1).$$

• A nevezőt alakítsuk szorzattá az alábbi azonossággal:

$$a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2),$$

$$8x^3+1 = (2x)^3+1 = (2x+1)\cdot(4x^2-2x+1).$$

3.2.1. Órai feladatok / 1e.

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)} - \frac{3}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(x^2+x+1)-3\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)} = \frac{2x^2-x-1}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(2x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+x+1)} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2x+1}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)}}.$$

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 2a.}}$

Gyöktelenítsünk, majd a polinomokat alakítsuk szorzattá, végül egyszerűsítsünk ahol lehet:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{x^2-1}{(x^3-1)\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} =$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \frac{x+1}{(x^2+x+1)\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}.$$

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 2b.}}$

$$\frac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1} = \frac{(x+3)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{(x+3)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = (\star) =$$

$$= \frac{(x+3)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(x+3)\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2} =$$

$$= (x+3)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}+1\right)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2}).$$

Itt $(\star)$ jelöli a nevező gyöktelenítését.

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 2c.}}$

Köbgyöktelenítéshez használjuk fel az alábbi azonosságo(ka)t:

$$(\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\cdot((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2).$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\cdot((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2).$$

Bővítsük a törtet az első azonnoságnak megfelelően az alábbi módon:

$$\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{(x^2-64)\cdot((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{(x-8)\cdot(x+8)\cdot((\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} =$$

$$= (x+8)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4).$$

3.2.1. Órai feladatok / 3b.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$|2x-7|+|2x+7|=x+15.$$

Szükséges az abszolút értékek felbontása, ezért a definíciót felhasználva:

$$|2x-7|=\begin{cases}2x-7, & \text{ha } x\geq 7/2,\\ -2x+7, & \text{ha } x<7/2;\end{cases} \quad \text{illetve} \quad |2x+7|=\begin{cases}2x+7, & \text{ha } x\geq -7/2,\\ -2x-7, & \text{ha } x<-7/2.\end{cases}$$

Az előjelviszonyokat figyelembe véve az alábbi eseteket kapjuk:
I. eset: Ha $x\in H_1:=(-\infty;-7/2)$, akkor az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$-2x+7-2x-7=x+15 \iff 5x=-15 \iff x=-3.$$

A kapott eredmény $x_1:=-3\notin H_1=(-\infty;-7/2)$, tehát ebben az esetben nincs megoldás.
II. eset: Ha $x\in H_2:=[-7/2;7/2)$, akkor az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$-2x+7+2x+7=x+15 \iff x=-1.$$

A kapott eredmény $x_2:=-1\in H_2=[-7/2;7/2)$, tehát -1 egy jó megoldás.
III. eset: Ha $x\in H_3:=[7/2;+\infty)$, akkor az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$2x-7+2x+7=x+15 \iff 3x=15 \iff x=5.$$

A kapott eredmény $x_3:=5\in H_3=[7/2;+\infty)$, tehát 5 is egy jó megoldás.
Összefoglalva a három eset eredményeit az egyenlet megoldásai:

$$x\in M:=\{-1;5\}.$$

Megjegyzés: Az egyenlet megoldható grafikusan is a két oldal (mint függvény) ábrázolásával.

3.2.1. Órai feladatok / 3e.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$|x^2-9|+|x^2-4|=5.$$

Szükséges az abszolút értékek felbontása, ezért a definíciót felhasználva:

$$|x^2-9|=\begin{cases}x^2-9, & \text{ha } x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty),\\ -x^2+9, & \text{ha } x\in(-3;3);\end{cases} \quad \text{illetve}$$

$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & \text{ha } x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty),\\ -x^2+4, & \text{ha } x\in(-2;2).\end{cases}$$

Az előjelviszonyokat figyelembe véve, most az alábbi eseteket kapjuk:
I. eset: Ha $x \in H_1 := (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, akkor az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$x^2 - 9 + x^2 - 4 = 5 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9 \iff x_1 = -3 \lor x_2 = 3.$$

A kapott eredményekre $x_1 := -3 \in H_1$ és $x_2 = 3 \in H_1$, tehát jó megoldásai az egyenletnek.
II. eset: Ha $x \in H_2 := (-3; -2] \cup [2; 3)$, akkor az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$-x^2 + 9 + x^2 - 4 = 5 \iff 5 = 5.$$

Egy azonosságot kaptunk, ezért ebben az esetben minden $x \in H_2$ megoldás.
III. eset: Ha $x \in H_3 := (-2; +2)$, akkor az egyenlet és megoldása a következő:

$$-x^2 + 9 - x^2 + 4 = 5 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x_3 = -2 \lor x_4 = 2.$$

Most $x_3, x_4 \notin H_3$, tehát ebben az esetben nincs megoldás.
Összefoglalva a három eset eredményeit az egyenlet megoldásai:

$$\underline{x \in M := [-3; -2] \cup [2; 3].}$$

Megjegyzés: Az egyenlet megoldható grafikusan is a két oldal (mint függvény) ábrázolásával.

3.2.1. Órai feladatok / 3f.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|x - 2| < 3.$$

1. Megoldás: Az abszolút értéket felbontva:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{ha } x \in [2; +\infty), \\ -x + 2, & \text{ha } x \in (-\infty; 2); \end{cases}$$

Az előjelviszonyokat figyelembe véve, most két esetet kapunk:
I. eset: Ha $x \in H_1 := (-\infty; 2)$, akkor az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$-x + 2 < 3 \iff x > -1 \iff x \in (-1; +\infty).$$

Figyelembe véve az esetet meghatározó feltételt:

$$x \in H_1 \cap (-1; +\infty),$$

azaz ebben az esetben a megoldások az

$$x \in M_1 := (-1; 2)$$

számok.

II. eset: Ha $x \in H_2 := [2; +\infty)$, akkor az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$x - 2 < 3 \iff x < 5 \iff x \in (-\infty; 5).$$

Vegyük itt is a feltételhalmazzal a metszetet: $x \in H_2 \cap (-\infty; 5) = [2; 5)$.
Ebben az esetben a megoldáshalmaz az $M_2 := [2; 5)$ intervallum.
Összefoglalva a két eset eredményeit az egyenlőtlenség megoldásai:

$$x \in M_1 \cup M_2 = (-1; 2) \cup [2; 5) = (-1; 5).$$

2. Megoldás: Az abszolútérték függvény grafikonjáról könnyen leolvashatjuk, hogy tetszőleges $R > 0$ szám esetén az $|x| < R$ egyenlőtlenség megoldásai a $-R < x < R$ számok.
Ennek megfelelően:

$$|x - 2| < 3 \iff -3 < x - 2 < 3 \iff -1 < x < 5 \iff x \in (-1; 5).$$

Megjegyzés: A fenti egyenlőtlenség úgy is megfogalmazható, hogy melyek azok az x számok a valós számegyenesen, melyeknek a 2−től vett távolsága kevesebb 3−nál.
Általánosabb formában, ha $a \in \mathbb{R}$ és $R > 0$, akkor

$$|x - a| < R \iff -R < x - a < R \iff a - R < x < a + R \iff x \in (a - R; a + R).$$

Ez utóbbi intervallumot úgy fogjuk nevezni analízisből, hogy az a pont R sugarú környezete és sokszor fogunk használni ilyen és hasonló típusú egyenlőtlenségeket.
3. Megoldás: Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért szabad négyzetre emelnünk (ezt akkor érdemes csinálni, ha a négyzetre emeléssel kapott új egyenlet jól kezelhető és így elkerülhető az esetek tárgyalása):

$$|x - 2| < 3 \iff (x - 2)^2 < 9 \iff x^2 - 4x - 5 < 0 \iff x \in (-1; 5).$$

3.2.1. Órai feladatok / 3g.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|2x - 1| < |x - 1|.$$

1. Megoldás: Az abszolút értékek felbontásával:

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ha } x \in [1/2; +\infty), \\ -2x + 1, & \text{ha } x \in (-\infty; 1/2); \end{cases} \quad \text{illetve}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \in [1; +\infty), \\ -x + 1, & \text{ha } x \in (-\infty; 1). \end{cases}$$

Az előjelviszonyokat figyelembe véve, most három esetet kapunk:

I. eset: Ha $x \in H_1 := (-\infty; 1/2)$, akkor az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$-2x + 1 < -x + 1 \iff x > 0 \iff x \in (0; +\infty).$$

Figyelembe véve az esetet meghatározó feltételt:

$$x \in (-\infty; 1/2) \cap (0; +\infty) = (0; 1/2),$$

azaz ebben az esetben a megoldások az

$$x \in M_1 := (0; 1/2)$$

számok.
II. eset: Ha $x \in H_2 := [1/2; 1)$, akkor az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$2x - 1 < -x + 1 \iff 3x < 2 \iff x \in (-\infty; 2/3).$$

Vegyük itt is a feltételhalmazzal (H_2) a metszetet: $x \in [1/2; 1) \cap (-\infty; 2/3) = [1/2; 2/3)$.
Ebben az esetben a megoldáshalmaz az $M_2 := [1/2; 2/3)$ intervallum.
III. eset: Ha $x \in H_3 := (1; +\infty)$, akkor az egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$2x - 1 < x - 1 \iff x < 0 \iff x \in (-\infty; 0).$$

Vegyük itt is a feltételhalmazzal (H_3) a metszetet: $x \in (1; +\infty) \cap (-\infty; 0) = \emptyset$.
Ebben az esetben tehát nincs megoldás.
Összefoglalva a három eset eredményeit az egyenlőtlenség megoldásai:

$$\underline{x \in M_1 \cup M_2 = (0; 1/2) \cup [1/2; 2/3) = (0; 2/3).}$$

2. Megoldás: Az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, így most is szabad <u>négyzetre emelni</u> és az alábbi *lényegesen* rövidebb megoldást kapjuk:

$$|2x - 1| < |x - 1| \iff (2x - 1)^2 < (x - 1)^2 \iff 4x^2 - 4x + 1 < x^2 - 2x + 1 \iff$$

$$\iff 3x^2 - 2x < 0 \iff x \cdot (3x - 2) < 0 \iff \underline{x \in (0; 2/3).}$$

3. Megoldás: <u>Grafikus megoldás:</u> (itt csak vázoljuk) ábrázoljuk az alábbi függvényeket, határozzuk meg a metszéspontokat és "olvassuk" le a megoldást (milyen x számokra igaz az, hogy $f(x) > g(x)$?):

$$f(x). = |2x - 1| \ \ (x \in \mathbb{R}); \quad g(x) := |x - 1| \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 6a.}}$

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{9 - x} = \sqrt{2x - 12}.$$

• A szükséges kikötések (a négyzetgyökök argumentumai nemnegatívak kell, hogy legyenek):

$$x+1 \geq 0 \ \wedge \ 9-x \geq 0 \ \wedge \ 2x-12 \geq 0 \iff \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in D := [6;9]}.$$

• Az egyenlet megoldásához rendezzük át azt az alábbiak szerint, majd emeljünk négyzetre (itt ($\star$) jelzi, hogy ekvivalens egyenletet kapunk mert minkét oldal nemnegatív):

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{9-x} + \sqrt{2x-12} \ \Big|()^2(\star) \iff x+1 = 9-x+2x-12+2\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{2x-12}.$$

Átrendezés után a következő egyenlet adódik:

$$\sqrt{(9-x)\cdot(2x-12)} = 2 \Big|()^2 \ (\star) \iff 2x^2-30x+112 = 0 \ \Big| : 2 \iff$$

$$\iff x^2-15x+56=0 \iff x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225-224}}{2} = \frac{15\pm 1}{2} \iff x_1 = 8 \ \vee \ x_2 = 7.$$

A fenti négyzetre emeléseknél mindkét oldal nemnegatív, ezért a megfelelő két egyenlet ekvivalens egymással és megoldásaik is megegyeznek. A kapott eredményekről így, mindössze annyit kell ellenőrizni, hogy benne vannak-e a kikötéseknél kapott D halmazban.
Mivel $7, 8 \in [6;9]$, ezért a jó megoldások:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in \{7;8\}}.$$

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 6k.}}$

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x^2+4x} > 2-x.$$

• Az egyetlen szükséges kikötés az alábbi:

$$x^2+4x \geq 0 \iff x\cdot(x+4) \geq 0 \iff \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in D := (-\infty;-4] \cup [0;+\infty)}.$$

• Egyenlőtlenséget pontosan akkor tudunk négyzetre emelni, ha mindkét oldal nemnegatív, ezért esetszétválasztásra van szükségünk. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért elég a jobb oldal előjelét vizsgálni.
I. eset: Ha $2-x<0 \iff x \in (2;+\infty)$ és $x \in D$ is teljesül: tehát, ha $x \in (2;+\infty)$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hiszen a bal oldal pozitív vagy nulla, a jobb oldal pedig negatív. Ebben az esetben a megoldás:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x \in M_1 := (2;+\infty)}.$$

II. eset: Ha $2-x \geq 0 \iff x \in (-\infty;2]$ és $x \in D$ is teljesül: tehát, ha $x \in (-\infty;-4]\cup[0;2]$, akkor szabad négyzetre emelni:

$$\sqrt{x^2+4x} > 2-x \ \Big|()^2 \iff x^2+4x > (2-x)^2 \iff x^2+4x > x^2-4x+4 \iff$$

$$\iff 8x > 4 \iff x > 1/2 \iff x \in (1/2; +\infty).$$

Összevetve a feltétellel, ebben az esetben a megoldások:

$$\underset{\sim\sim\sim}{x \in ((-\infty; -4] \cup [0; 2]) \cap (1/2; +\infty) = (1/2; 2] =: M_2}.$$

A két eset megoldáshalmazait egysítve:

$$\underset{\sim\sim\sim}{x \in M_1 \cup M_2 = (1/2; +\infty)}.$$

$\boxed{\text{3.2.1. Órai feladatok / 6n.}}$

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2.$$

• A szükséges kikötések:

$$3 - x \geq 0 \ \wedge \ x + 1 \geq 0 \iff \underset{\sim\sim\sim}{x \in D := [-1; 3]}.$$

• Rendezzük át az egyenlőtlenséget oly módon, hogy mindkét oldal legyen nemnegatív (és így már lehet is négyzetre emelni):

$$\sqrt{3-x} > 1/2 + \sqrt{x+1} \,\Big|()^2 \iff 3 - x > 1/4 + \sqrt{x+1} + x + 1 \iff$$

$$\iff 7/4 - 2x > \sqrt{x+1}.$$

I. eset: Ha $7/4 - 2x < 0 \iff x \in (7/8; +\infty)$ és $x \in D$ is teljesül, ha tehát $x \in (7/8; 3]$, akkor nincs megoldás ($- > +, 0$ helyzet).
II. eset: Ha $7/4 - 2x \geq 0 \iff x \in (-\infty; 7/8]$ és $x \in D$ is teljesül, ha tehát $x \in [-1; 7/8]$, akkor szabad újra négyzetre emelni:

$$7/4 - 2x > \sqrt{x+1} \,\Big|()^2 \iff 49/16 - 7x + 4x^2 > x + 1 \iff$$

$$\iff 4x^2 - 8x + 33/16 > 0 \iff x \in (-\infty; 1 - \sqrt{31}/8) \cup (1 + \sqrt{31}/8; +\infty).$$

Összevetve a feltétellel, ebben az esetben és egyben a teljes megoldás is:

$$\underset{\sim\sim\sim}{x \in M := [-1; 1 - \sqrt{31}/8)}.$$