24. Függvények, elemi függvények, műveletek függvényekkel

24.1. Kiegészítés az elmélethez

A függvény fogalmának a definiálásához először bevezetjük a rendezett pár fogalmát, halmazok Descartes szorzatát és az ezek nemüres részhalamazaiként definiált relációkat. A középiskolában bevezett függvény fogalma szépen vissza fog tükröződni ezekben a pontosan megfogalmazott definíciókban. A teljes bevezetés analízisből fog megtörténni a későbbi tanulmányaik során.

Rendezett pár

Def: Legyenek x, y tetszőleges "objektumok". Ekkor az

$$(x; y) := \{\{x\}; \{x; y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük, melynek *első komponense* x a *második komponense* y. Igazolható, hogy két ilyen rendezett pár pontosan akkor egyenlő, ha komponenseik rendre megegyeznek, azaz:

$$(x; y) = (a; b) \iff x = a \ \wedge \ y = b.$$

Halmazok Descartes szorzata

Def: Legyenek $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok. Ekkor az

$$A \times B := \{(x; y) \mid x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

halmazt az A és B *Descartes szorzatának* nevezzük. $A \times B$ elemei tehát olyan rendezett párok, melyeknek az első komponense $A-$ból van, második komponense pedig $B-$beli.

Megjegyzések:

1. Ha $A = B$, akkor gyakran jelöljük az $A \times A$ halmazt A^2-tel. Például ismert a Descartes$-$féle koordináta sík:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

   Hasonlóan bevezethető 3 halmaz Descartes$-$féle szorzata, mint rendezett számhármasok halmaza. Ennek megfelelően

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

   a szokásos 3$-$dimenziós tér pontjainak a halmaza.

2. **Például:** $(2; 1); (-2; 0); (0; 0); (0; -\pi) \in \mathbb{R}^2$ a sík néhány pontja és $(1; 2; 3); (-1; 0; 7) \in \mathbb{R}^3$ két térbeli pont.

3. Ha $A := \{1; 2\}$ és $B := \{-1; 3; 7\}$, akkor

$$A \times B = \{(1; -1); (1; 3); (1; 7); (2; -1); (2; 3); (2; 7)\}$$

és

$$B \times A = \{(-1; 1); (-1; 2); (3; 1); (3; 2); (7; 1); (7; 2)\}.$$

4. A fenti példa alapján világos, hogy általában

$$A \times B \neq B \times A,$$

azaz a Descartes$-$szorzat nem felcserélhető, nem kommutatív.

5. Az alábbi halmaz a sík olyan pontjait tartalmazza, melyekre a második komponens az első komponens négyzete és ez utóbbi befutja a valós számok halmazát:

$$P := \{(x; x^2) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy a fenti ponthalmaz az $y = x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})$ egyenletű parabola pontjainak a halmaza, vagy másképp fogalmazva (a középiskolából hozott szemlélettel) az előbb megadott *függvény* grafikonja. Itt megadtunk egy olyan hozzárendelési módot, kapcsolatot x és y között, amivel "kijelöltük" $\mathbb{R}^2-$nek egy részhalmazát, nevezetesen:

$$P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Mondhatnánk azt is, hogy a fenti részhalmaz pontjainak x és y komponensei között az $y = x^2$ kapcsolat érvényes, vagy x és y a megadott relációban vannak egymással. Definiáljuk ezek után a *reláció* fogalmát.

Relációk

Def: Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok. Ekkor minden

$$\emptyset \neq R \subseteq A \times B$$

nemüres részhalmazt *relációnak* nevezünk. Ennek elemei tehát rendezett párok és azt mondjuk, hogy ezen elemek komponensei R relációban vannak egymással. Ha tehát $(x; y) \in R$ akkor azt mondjuk, hogy x R relációban van $y-$nal. A fenti P parabola esetében ennek minden $(x; y)$ pontjára x P relációban van $y-$nal azt jelenti, hogy a második komponens az elsőnek a négyzete.

Megjegyzések:

1. Legyen $A; B := \mathbb{N}$ és $R := \{(n; m) \in \mathbb{N}^2 \;\Big|\; m = 2n \;\; (n \in \mathbb{N})\}$. Tehát itt egy $(n; m)$ rendezett pár pontosan akkor van R relációban egymással, ha a második komponens az elsőnek a duplája. Szemléltessük az R reláció pontjait a síkon!

2. $E := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = 2x \;\; (x \in \mathbb{R})\}$. Ekkor E a sík egy egyenese. Szemléltessük az E reláció pontjait!

3. Legyen $K := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben K pontjai az origó középű, 1 sugarú körvonal pontjai. Vegyük észre, hogy például: $(0;1) \in K$ és $(0;-1) \in K$ vagyis a 0 első komponenssel két második komponens is relációban van (az 1 és a -1 és csak ezek). A fenti P parabola esetében ez nem mondható el, nevezetesen ott

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists !\ y \in \mathbb{R}\ y = x^2 :\ (x;y) \in P.$$

Itt tehát minden relációbeli pont első komponenséhez egyetlen második komponens tartozik. Az ilyen tulajdonságú relációkat fogjuk függvényeknek nevezni.

Függvények

Def: Legyenek $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok. Ekkor az

$$\emptyset \neq f \subseteq A \times B$$

relációt *függvénynek* nevezzük, ha igaz az alábbi:

$$\forall\ (x;y)\ \wedge\ (x;z) \in f \implies y = z.$$

Def: $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok és $f \subseteq A \times B$ egy függvény. Ekkor:

$$D_f = \{x \in A \mid \exists\, y \in B :\ (x;y) \in f\} \subseteq A$$

az f *értelmezési tartománya* és

$$R_f = \{y \in B \mid \exists\, x \in D_f :\ (x;y) \in f\} \subseteq B$$

az f *értékkészlete.*

Megjegyzések:

1. Ha $f \subseteq A \times B$ egy függvény, akkor azt mondjuk, hogy f az A halmazból képez a B halmazba (Vigyázzunk, itt az értelmezési tartomány nem feltétlenül a teljes A halmaz, hanem annak egy részhalmaza). Ennek külön jelölést vezetünk be, nevezetesen legyen:

$$f \in A \longrightarrow B \iff f \subseteq A \times B \text{ függvény.}$$

Ha pedig $D_f = A$ akkor az alábbi jelölést fogjuk alkalmazni:

$$f : A \longrightarrow B,$$

ami azt jelenti, hogy $f \subseteq A \times B$ egy függvény és $D_f = A$.

2. Általában az R_f értékkészlet is különbözik a B képhalmaztól (annak szűkebb részhalmaza). Ha $R_f = B$ akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *szürjektív.*

3. Legyen $f : A \longrightarrow B$ egy függvény. Ekkor egy $(x; y) \in f$ rendeztt pár esetén azt mondjuk, hogy y az $x-$hez rendelt *függvényérték* és úgy fogjuk jelölni, hogy:

$$y = f(x).$$

Ezek után készen állunk bevezetni a ”szokásos” jelöléseket és megadási módokat:

$$f : A \longrightarrow B \;\; y = f(x), \;\text{ vagy}$$
$$y = f(x) \;\; (x \in D_f), \;\text{ vagy}$$
$$D_f \ni x \longrightarrow y := f(x) \in B, \;\text{ vagy}$$
$$f := \{(x; y) \in D_f \times B \;\Big|\; y := f(x)\}.$$

Például: A fenti parabola esetén az f megadási módjai:

$$y = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \;\text{ vagy}$$
$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \;\text{ vagy}$$
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; f(x) := x^2, \;\text{ vagy}$$
$$f : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}, \;\text{ vagy}$$
$$f := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = x^2\}.$$

4. A fenti jelölésekkel egy $f : A \longrightarrow B$ függvény értékkészletét az alábbi módon is fel tudjuk írni:

$$R_f := \{f(x) \in B \;\Big|\; x \in D_f\}.$$

Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; f(x) := x^2$ függvény esetében:

$$R_f = \{x^2 \in \mathbb{R} \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\} = (?) = [0; +\infty).$$

A kérdőjel itt arra utal, hogy bizonyítanunk kell a jelzett egyenlőséget, amit a következő fejezetben meg is teszünk.

5. Ha $A = B := \mathbb{R}$ akkor az $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeket *valós-valós* függvényeknek fogjuk nevezni.

6. Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény. Az alábbi síkbeli ponthalmazt az f *grafikonjának* nevezzük:

$$\mathrm{Graf}(f) := \Big\{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in D_f\Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\boxed{\textit{Néhány elemi függvény}}$

Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan elemi függvényt, amelyeknek a definícióit, garfikonjaikat és tulajdonságaikat ismertnek tételezzük fel. Amennyiben valaki nem találkozott volna velük, akkor most érdemes megtanulni őket.

1. Konstans függvények: rögzített $a \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) := a \ (x \in \mathbb{R})$.

2. Elsőfokú függvények (egyenesek): rögzített $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esetén

$$f(x) := ax + b \ (x \in \mathbb{R}).$$

3. Másodfokú függvények (parabolák): rögzített $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esetén

$$f(x) := ax^2 + bx + c \ (x \in \mathbb{R}).$$

4. Hatványfüggvények: rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x) := x^n \ (x \in \mathbb{R})$. Különösen az $n = 0, 1, 2, 3$ esetek.

5. Gyökfüggvények: rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) := \sqrt[2n]{x} \ (x \in [0; +\infty)) \ \wedge \ g(x) := \sqrt[2n+1]{x} \ (x \in \mathbb{R}).$$

Különösen az $n = 1$ esetén fellépő négyzetgyök és köbgyök függvények.

6. Speciális törtfüggvények: rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) := \frac{1}{x^n} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Különösen az $n = 1, 2$ esetek.

7. Exponenciális függvények: rögzített $0 < a \neq 1$ alappal

$$f(x) := a^x \ (x \in \mathbb{R}).$$

Speciálisan az $a = e$ eset, tehát $f(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R})$.

8. Logaritmus függvények: rögzített $0 < a \neq 1$ alappal

$$f(x) := \log_a(x) \ (x \in (0; +\infty)).$$

Speciálisan az $a = e$ eset, tehát

$$f(x) := \ln x := \log_e(x) \ (x \in (0; +\infty)).$$

9. Az ismert trigonometrikus függvények: $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$.

10. Abszolútérték függvény:

$$f(x) := \mathrm{Abs}(x) := |x| = \begin{cases} -x \ , \text{ha } x < 0; \\ x \quad , \text{ha } x \geq 0 \end{cases} ;$$

11. Egészrész függvény: $f(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R})$; ahol $[x]$:=az x számhoz legközelebb lévő nála nem nagyobb egész szám.

12. Törtrész függvény: $f(x) := \{x\} := x - [x]\ \ (x \in \mathbb{R})$.

13. Előjel vagy Szignum függvény:

$$f(x) := \mathrm{Sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{,ha } x < 0; \\ 0 & \text{,ha } x = 0; \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

14. Dirichlet függvény:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Függvények egyenlősége}}$

Def: Legyenek adottak az $\emptyset \neq A, B, C, D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f \in A \longrightarrow B$ és $g \in C \longrightarrow D$ függvények. Ekkor $f = g$ (vagyis a két függvény megegyezik) pontosan akkor, ha:

$$D_f = D_g \ \wedge \ (\forall\ x \in D_f = D_g : f(x) = g(x)).$$

Például:

1. Adottak

$$f(x) = \sqrt{x^3}\ \ (x \in [0; +\infty));\ \ g(x) = x \cdot \sqrt{x}\ \ (x \in [0; +\infty)).$$

Ekkor $D_f = D_g = [0; +\infty)$ és

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt{x} = (x \geq 0) = x \cdot \sqrt{x} = g(x)\ \ \forall\ x \in [0; +\infty) \Longrightarrow f = g.$$

2. Legyenek:

$$f(x) = \sqrt{x^2}\ \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) = x\ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $D_f = D_g = \mathbb{R}$, de $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x) = x$, ha $x \in (-\infty; 0) \Longrightarrow f \neq g$.

3. Legyenek most:

$$f(x) = x - 1\ \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),$$

Világos, ha $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ akkor $g(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1} = x - 1 = f(x)$, de

$$D_f = \mathbb{R} \neq D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Longrightarrow f \neq g.$$

$\boxed{\textit{Függvények számszorosa, összege, különbsége, szorzata, hányadosa}}$

Def: Legyenek adottak az $\emptyset \neq A, B, C, D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f \in A \longrightarrow B$ és $g \in C \longrightarrow D$ függvények és $c \in \mathbb{R}$ egy valós szám. Ekkor definiálhatóak az alábbi új függvények (feltéve, hogy a megfelelő értelmezési tartományok nem egyenlőek az üres halmazzal):

$$D_{c\cdot f} := D_f \ \wedge \ (c\cdot f)(x) := c\cdot f(x) \ (\forall\, x\in D_{c\cdot f});$$

$$D_{f+g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f+g)(x) := f(x)+g(x) \ (\forall\, x\in D_{f+g});$$
$$D_{f-g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f-g)(x) := f(x)-g(x) \ (\forall\, x\in D_{f-g});$$
$$D_{f\cdot g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) \ (\forall\, x\in D_{f\cdot g});$$
$$D_{f/g} := \{x\in D_f\cap D_g \ \big|\ g(x)\neq 0\}\neq\emptyset \ \wedge \ \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ (\forall\, x\in D_{f/g}).$$

Az így definiált függvények: $c\cdot f$ *számszoros* vagy *konstansszoros függvény*, $f+g$ az *összegfüggvény*, $f-g$ a *különbségfüggvény*, $f\cdot g$ a *szorzatfüggvény*, f/g a *hányadosfüggvény.*

Például:

1. Adottak
$$f(x)=\sqrt{x-1} \ (x\in[1;+\infty)); \ g(x)=\sin x \ (x\in[0;2\pi]).$$
$$D_{2\cdot f}=[1;+\infty) \ \wedge \ (2\cdot f)(x)=2\cdot f(x)=2\cdot\sqrt{x-1} \ (x\in[1;+\infty)).$$
$$D_{f+g}=[1;+\infty)\cap[0;2\pi]=[1;2\pi] \ \wedge \ (f+g)(x):=f(x)+g(x)=\sqrt{x-1}+\sin x;$$
$$D_{f-g}=[1;+\infty)\cap[0;2\pi]=[1;2\pi] \ \wedge \ (f-g)(x):=f(x)-g(x)=\sqrt{x-1}-\sin x;$$
$$D_{f\cdot g}=[1;+\infty)\cap[0;2\pi]=[1;2\pi] \ \wedge \ (f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sin x;$$
$$D_{f/g}=\{x\in[1;2\pi] \ \big|\ \sin x\neq 0\}=[1;\pi)\cup(\pi;2\pi) \ \wedge \ \frac{f}{g}(x):=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sin x};$$
$$D_{g/f}=\{x\in[1;2\pi] \ \big|\ \sqrt{x-1}\neq 0\}=(1;2\pi] \ \wedge \ \frac{g}{f}(x):=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}.$$

$\boxed{\textit{Függvények kompozíciója}}$

Def: Legyenek adottak az $\emptyset\neq A,B,C,D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f\in A\longrightarrow B$ és $g\in C\longrightarrow D$ függvények. Ekkor vezessük be az alábbi $f\circ g$ *kompozíció*, vagy *összetett* függvényt:

$$D_{f\circ g} := \{x\in D_g \ \big|\ g(x)\in D_f\}\neq\emptyset \ \wedge \ (f\circ g)(x):=f(g(x)) \ (x\in D_{f\circ g}).$$

Például:

1. Az előbbi függvényeket idézve adjuk meg az $f\circ g$ függvényt:

$$f(x)=\sqrt{x-1} \ (x\in[1;+\infty)); \ g(x)=\sin x \ (x\in[0;2\pi]).$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in[0;2\pi] \ \big|\ \sin x\in[1;+\infty)\}=(\star)=\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \ \wedge$$
$$\wedge \ (f\circ g)(x):=f(g(x))=\sqrt{\sin x-1} \ \left(x\in\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right).$$

Az itteni levezetésben $(\star)$ jelöli az alábbi feltételnek megfelelő x értékek meghatározását a $[0;2\pi]$ halmazban:

$$\sin x \in [1;+\infty) \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezen értékek közül egyetlen pont a $\pi/2$ van a $[0;2\pi]$ intervallumban. Tehát az $f \circ g$ kompozíció egyetlen pontban értelmezhető:

$$D_{f \circ g} = \{\pi/2\} \ \wedge \ (f \circ g)(\pi/2) = \sqrt{\sin(\pi/2) - 1} = 0.$$

Ez esetben az $f \circ g$ grafikonja egyetlen pontból áll, nevezetesen a $(\pi/2;0)$ pontból.

2. Határozzuk meg a fordított sorrendű kompozíciót is, azaz a $g \circ f$ függvényt:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1;+\infty) \mid \sqrt{x-1} \in [0;2\pi]\} = (\star) = [1;1{+}4\pi^2] \ \wedge$$

$$\wedge \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(\sqrt{x-1}) \ \ (x \in [1;1+4\pi^2]),$$

ahol $(\star)$ jelöli ismét az alábbi levezetést az $[1;+\infty)$ halmazon:

$$\sqrt{x-1} \in [0;2\pi] \iff 0 \le \sqrt{x-1} \le 2\pi \iff 0 \le x-1 \le 4\pi^2 \iff$$

$$\iff 1 \le x \le 1 + 4\pi^2.$$

Ezen intervallumot elmetszve az $[1;+\infty)$ halmazzal maradnak az $[1;4\pi^2]$ halmaz pontjai.

3. Megjegyzés: Az előző két példát összevetve érdemes megjegyezni, hogy általában:

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

tehát a kompozíció művelete nem felcserélhető, nem kommutatív.

Függvénytranszformációk

Az alábbi transzformációkat ismertnek tételezzük fel és a feladatokon keresztüli alkalmazásukat szeretnénk a leginkább viszontlátni.

1. A változó transzformációi

(a) Eltolás az x tengely mentén egy adott $a \in \mathbb{R}$ értékkel (f grafikonját eltoljuk a−val az x tengely mentén, ha $a > 0$ akkor "balra", ha $a < 0$ akkor "jobbra"):

$$g(x) := f(x+a) \ \ (x + a \in D_f);$$

$$g(x) := f(x-a) \ \ (x - a \in D_f);$$

(b) Tükrözés az y tengely mentén (f grafikonját tükrözzük az y tengelyre nézve):

$$g(x) := f(-x) \ \ (-x \in D_f);$$

(c) Nyújtás/zsugorítás az x tengely mentén egy $a > 0$ konstanssal (f grafikonját az x tengely mentén $\frac{1}{a}-$szorosára módosítjuk, ha $0 < a < 1$, akkor nyújtás, ha $a > 1$, akkor zsugorítás):

$$g(x) := f(a \cdot x) \quad (a > 0 \ \wedge \ a \cdot x \in D_f);$$

Megjegyzés: Az $a < 0$ eseteket a fenti transzformációkkal már el tudjuk végezni: először $-a-$val szorzunk (lásd pozitív számszoros esete a változóra), majd az "argumentum $-1-$szerese" egy tükrözés az y tengelyre.

(d) Vágás/tükrözés (az f grafikonjának az y tengelytől balra eső részét levágjuk és a tőle jobbra eső részt megtartva tükrözzük az y tengelyre):

$$g(x) := f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & \text{ha } x < 0; \\ f(x), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad (|x| \in D_f);$$

2. A függvényértékek transzformációi

(a) A függvényértékek eltolása az y tengely mentén egy adott $c \in \mathbb{R}$ értékkel (f grafikonját eltoljuk $c-$vel az y tengely mentén, ha $c > 0$ "felfelé", ha $c < 0$ lefelé):

$$g(x) := f(x) + c \quad (x \in D_f);$$

$$g(x) := f(x) - c \quad (x \in D_f);$$

(b) A függvényértékek tükrözése az x tengely mentén (f grafikonját tükrözzük az x tengelyre nézve):

$$g(x) := -f(x) \quad (x \in D_f);$$

(c) A függvényértékek nyújtása/zsugorítása az y tengely mentén egy $c > 0$ konstanssal (f grafikonját az y tengely mentén $c-$szeresére módosítjuk, ha $0 < c < 1$, akkor zsugorítás, ha $c > 1$, akkor nyújtás):

$$g(x) := c \cdot f(x) \quad (c > 0 \ \wedge \ x \in D_f);$$

Megjegyzés: Az $c < 0$ eseteket a fenti transzformációkkal már el tudjuk végezni: előszőr $-c-$vel szorzunk (lásd a függvényértékek pozitív számszorosa esetet), majd az így kapott értékek $-1-$szerese egy tükrözés az x tengelyre.

(d) Vágás/tükrözés (az f grafikonjának az x tengely alá eső részét (negatív értékeket) tükrözzük az x tengelyre):

$$g(x) := |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{ha } f(x) < 0; \\ f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (x \in D_f);$$

Például: Ábrázoljuk az alábbi f és a megadott transzformált függvényeket (otthoni gyakorlásra):

1. Legyen $f(x) := \sqrt{x}\ (x \geq 0)$:

$$1 \leq x \longrightarrow \sqrt{x-1};\quad -1 \leq x \longrightarrow \sqrt{x+1};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{2x};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{x}-1;$$

$$0 \leq x \longrightarrow 2\cdot\sqrt{x};\quad 0 \leq x \longrightarrow -\sqrt{x};\quad 0 \geq x \longrightarrow \sqrt{-x};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{x}+2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sqrt{|x|};\quad 0 \leq x \longrightarrow |\sqrt{x}|.$$

2. Legyen $f(x) := x^3\ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x-2)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x+1)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (2x)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^3+1;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot x^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -x^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (-x)^3;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^3-8;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (|x|)^3;\quad 0 \leq x \longrightarrow |x^3|.$$

3. Legyen $f(x) := |x|\ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x-2|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x+1|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |2x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x|-1;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot|x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -|x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |-x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x|+2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow ||x|-1|.$$

4. Legyen $f(x) := \sin x\ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(x-\pi/3);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(x+\pi/2);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(2x);$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(-x);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin x-2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 1+\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |\sin x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(|x|).$$

5. Legyen $f(x) := e^x\ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{x-1};\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{x+2};\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x-1;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x+5;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot e^x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -e^x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{-x};$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow |1-e^x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{|x|}.$$

6. Legyen $f(x) := \ln x\ (x \in (0;+\infty))$:

$$-1 < x \longrightarrow \ln(x+1);\quad 2 < x \longrightarrow \ln(x-2);\quad 0 < x \longrightarrow \ln x-1;\quad 0 < x \longrightarrow 5+\ln x;$$

$$0 < x \longrightarrow 2\cdot\ln x;\quad 0 < x \longrightarrow \ln(2x);\quad 0 < x \longrightarrow -\ln x;\quad 0 > x \longrightarrow \ln(-x);$$

$$0 < x \longrightarrow |\ln x|;\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \ln|x|.$$

7. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}\ (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$:

$$\mathbb{R}\setminus\{-1\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x+1};\quad \mathbb{R}\setminus\{1\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x-1};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x}-1;$$

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 1+\frac{1}{x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{2}{x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{2x};$$

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{-x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{|x|};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|.$$

24.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a *függvény* fogalmát.

2. Definiálja a g/f *hányadosfüggvényt.*

3. Definiálja a $g \circ f$ *összetett függvényt.*

4. Definiálja egy $f : A \longrightarrow B$ függvény *grafikonját.*

5. Definiálja egy $f \in A \longrightarrow B$ függvény esetén az R_f *értékkészletet.*

6. Ábrázolja a síkon az $(1; 2] \times [-1; 1)$ Descartes szorzat ponthalmazt.

7. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre az $f^2 := f \cdot f$ függvény megegyezik $f-$el.

8. Tegyük fel, hogy az f és g függvények szorzata az azonosan 0 függvény, azaz:

$$f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; (f \cdot g)(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igaz-e, hogy f vagy g az azonosan 0 függvény?

9. Legyenek adottak az $f(x) := \sqrt{x-1}$ $(x \in [1; +\infty))$ és a $g(x) := x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények. Igaz-e, hogy $f^2 = g$?

10. Adja meg az $f \circ f$ függvényt, ha $f(x) := 3^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Mennyi lesz $(f \circ f)(0)$ és $(f \circ f)(-1)$?

11. Adja meg az $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g és g/f függvényeket, ha

$$f(x) := \frac{1}{x^2 - 1} \;\; (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \;\; \wedge \;\; g(x) := \sqrt{e^x - 1} \;\; (x \in [0; +\infty)).$$

12. Adja meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, ha

$$f(x) := \sqrt{x} \;\; (x \in (0; +\infty)) \;\; \wedge \;\; g(x) := x^2 \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

13. Adja meg azt a legbővebb $D \subseteq \mathbb{R}$ halmazt, amellyel az alábbi utasítás függvényt definiál:

$$f(x) := \frac{\ln(3 - \sqrt{x})}{\sqrt{1 - \sin x}} \;\; (x \in D).$$

14. Ábrázolja az $f(x) := 2^{|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

15. Ábrázolja az $f(x) := \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$ $(1 \neq x \in (0; +\infty))$ függvényt.

24.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Definiálja az $(a; b)$ *rendezett pár* fogalmát.

2. Definiálja egy $\emptyset \neq f \subseteq A \times B$ függvény esetén a D_f *értelmezési tartományt.*

3. Mi lesz az $A \times B$ halmaz, ha $A := \{1\}$ és $B := [0; 3]$? Ábrázolja a kapott ponthalmazt.

4. Mi lesz az $A \times B$ halmaz, ha $A := (-1; 1]$ és $B := \{2\}$? Ábrázolja a kapott ponthalmazt.

5. Mit jelent az $f \in A \longrightarrow B$ jelölés?

6. Mit jelent az $f : A \longrightarrow B$ jelölés?

7. Definiálja a *reláció* fogalmát.

8. Mikor mondjuk, hogy az f és g függvények *egyenlőek* egymással?

9. Adja meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, ha

$$f(x) := \ln(-2 - x) \ \ (x \in (-\infty; -2)) \ \ \wedge \ \ g(x) := \cos x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

10. Definiálja két halmaz *Descartes szorzatát.*

11. Definiálja és ábrázolja a *négyzetgyök* és a *köbgyök* függvényeket.

12. Ábrázolja az *identitás* függvényt ($f(x) := x \ \ (x \in \mathbb{R})$).

13. Ábrázolja az $f(x) := 2 - 3x \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

14. Ábrázolja az $f(x) := 2 - x^2 \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

15. Definiálja az $f + g$ *összegfüggvényt.*

16. Definiálja az $g - f$ *különbségfüggvényt.*

17. Definiálja az $f \cdot g$ *szorzatfüggvényt.*

18. Definiálja és ábrázolja az *abszolútérték* függvényt.

19. Definiálja és ábrázolja az *előjel* függvényt.

20. Definiálja és ábrázolja az *egészrész* függvényt.

21. Definiálja és ábrázolja a teljes valós számhalmazon értelmezett konstans 5 függvényt.

22. Ábrázolja a *reciprokfüggvényt*, azaz az $f(x) := \dfrac{1}{x} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

23. Ábrázolja az $f(x) := \dfrac{1}{x^2} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

24. Ábrázolja az $f(x) := x^3 \ (x \in \mathbb{R})$ köbfüggvényt.

25. Ábrázolja az $f(x) := \sin x \ (x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) = \cos x \ \ (x \in [0; 3\pi])$ függvényeket.

26. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

$$f(x) := \mathrm{tg} x \ \ (x \in (-\pi/2; \pi/2)) \ \ \wedge \ \ g(x) = \mathrm{ctg} x \ \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ \Big| \ k \in \mathbb{Z}\}).$$

27. Ábrázolja egy koordináta rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f(x) := e^x \ \ (x \in \mathbb{R}) \ \ \wedge \ \ g(x) = \ln x \ \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

28. Ábrázolja egy koordináta rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f(x) := 2^{-x} \ \ (x \in \mathbb{R}) \ \ \wedge \ \ g(x) = \log_{1/2} x \ \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

29. Ábrázolja az $f(x) := 1 + (x-3)^3 \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

30. Ábrázolja az $f(x) := |1 - x^2| \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

31. Ábrázolja az $f(x) := g(x+1) \ \ (x > -1)$ függvényt, ha $g(x) = \log_2(x) \ \ \ (x > 0)$.

32. Ábrázolja az $f(x) := g(x-4) \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt, ha $g(x) = \sqrt[3]{x} \ \ \ (x \in \mathbb{R})$.

33. Ábrázolja az $f(x) := |g(-x)| \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt, ha $g(x) = 2x + 1 \ \ \ (x \in \mathbb{R})$.

34. Ábrázolja az $f(x) := -1 + 2 \cdot \cos(x - \pi) \ \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

35. Ábrázolja az $f(x) := \left|2 - \dfrac{1}{x}\right| \ \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

36. Ábrázolja az $f(x) := \left|2 - \sqrt{1-x}\right| \ \ \ (x \in (-\infty; 1])$ függvényt.

24.2. Feladatok

24.2.1. Órai feladatok

Függvények értelmezési tartománya

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \sqrt{\dfrac{2x^3 - 1}{x}} \ \ \ (x \in D)\,;$

(b) $f(x) := \sqrt{\lg\left(x^2 - 5x + 7\right)} \quad (x \in D)\,;$

(c) $f(x) := \sqrt{2^x - e^x} + \sqrt{3^x - e^x} \quad (x \in D)\,;$

(d) $f(x) := \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\lg(\sin x)} \quad (x \in D)\,?$

Függvények egyenlősége

2. Igaz-e, hogy az alábbi függvények egyenlőek (azaz $f = g$), ha:

(a) $f(x) := \sqrt{x} \;\; (x \in [0;+\infty));\;\; g(x) := \sqrt[4]{x^2} \;\; (x \in \mathbb{R})?$

(b) $f(x) := \sqrt{x} \;\; (x \in [0;+\infty));\;\; g(x) := \sqrt[4]{x^2} \;\; (x \in [0;+\infty))?$

(c) $f(x) := \sqrt{x^2} \;\; (x \in \mathbb{R});\;\; g(x) := |x| \;\; (x \in \mathbb{R})?$

(d) $f(x) := \sqrt{x^2} \;\; (x \in \mathbb{R});\;\; g(x) := (\sqrt{x})^2 \;\; (x \in [0;+\infty))?$

Igaz-e, hogy $f|_{[0;+\infty)} = g$?

(e) $f(x) := \ln(x^2) \;\; (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});\;\; g(x) := 2 \cdot \ln x \;\; (x \in (0;+\infty))?$

(f) $f(x) := \ln(x^2) \;\; (x > 0);\;\; g(x) := 2 \cdot \ln x \;\; (x \in (0;+\infty))?$

(g) $f(x) := \dfrac{x}{|x|} \;\; (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \wedge f(0) := 0;\;\; g(x) := \dfrac{|x|}{x} \;\; (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \wedge g(0) := 0?$

(h) $f(x) := e^{\ln x} \;\; (x \in \mathbb{R}^+);\;\; g(x) := \ln(e^x) \;\; (x \in \mathbb{R})?$

(i) $f(x) := \dfrac{1 - \cos x}{2} \;\; (x \in [0;\pi/2]);\;\; g(x) := \sin^2 \dfrac{x}{2} \;\; (x \in [0;\pi])?$

Igaz-e, hogy $f = g|_{[0;\pi/2]}$?

Ábrázoljuk a fenti függvények mindegyikét.

Függvénytranszformációk, ábrázolás

3. Ábrázoljuk az alábbi *speciális* függvényeket és írjuk fel az *értékkészletüket*:

(a)

$$f(x) := \mathrm{Abs}\,(x) := |x| = \begin{cases} -x \;, \text{ha } x < 0; \\ x \quad, \text{ha } x \geq 0 \end{cases} ;$$

(b) $f(x) := [x] \;\; (x \in \mathbb{R})$; ahol $[x]$:=az x számhoz legközelebb lévő nála nem nagyobb egész szám. (Egészrész függvény);

(c) $f(x) := \{x\} := x - [x] \;\; (x \in \mathbb{R})$; (Törtörész függvény);

(d) Előjel vagy Szignum függvény:

$$f(x) := \mathrm{Sign}(x) := \begin{cases} -1 \;,\text{ha } x < 0; \\ 0 \quad ,\text{ha } x = 0; \\ 1 \quad \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

(e) Dirichlet függvény:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(f) Riemann függvény:

$$R(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \wedge\ (p;q) = 1 \ \wedge\ q > 0; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ábrázoljuk a fenti függvények mindegyikét.

4. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := 2(x+3)^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := -x^2 + 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $f(x) := |x^2 - 5x + 6| \quad (x \in \mathbb{R});$

(e) $f(x) := |2 - |x-1|| \quad (x \in \mathbb{R});$

(f) $f(x) := \dfrac{x+3}{x+5} \quad (-5 \neq x \in \mathbb{R});$

(g) $f(x) := \dfrac{4x-1}{2x-1} \quad \left(\dfrac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right);$

(h) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|} \quad (x \in \mathbb{R});$

(i) $f(x) := \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} + 2 \quad \left(\dfrac{1}{5} \leq x \in \mathbb{R}\right);$

(j) $f(x) := 2 - \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty; 1]);$

(k) $f(x) := \sqrt{|x|} \ (x \in \mathbb{R});$

(l) $f(x) := \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{R});$

(m) $f(x) := \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R})\ ;$

(n) $f(x) := \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R})\ ;$

(o) $f(x) := \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \quad (x \in (-\pi/4; 3\pi/4))\ ;$

(p) $f(x) := 3 \cdot 2^{3x-1} \quad (x \in \mathbb{R})\ ;$

(q) $f(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})\ ;$

(r) $f(x) := \ln(1-x) \quad (x \in (-\infty; 1))\ ;$

(s) $f(x) := \ln \dfrac{e}{x} \quad (x \in (0; +\infty))\ .$

(t)

$$D(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ x^3, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Műveletek függvényekkel

5. Az alábbi feladatokban adottak az f és a g függvények. Határozzuk meg és ahol lehet elemi eszközökkel, ott ábrázoljuk a jelzett műveletekkel definiált h függvényeket:

(a) $f(x) := x \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \sin x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(b) $f(x) := D(x) \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := 1 - D(x) \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

Itt D a fenti Dirichlet függvény.

(c) $f(x) := |x| \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$?

(d) $f(x) := \sin x \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \cos x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(e) $f(x) := \sqrt{x} - 1 \ (x \in [0; +\infty))$; $g(x) := 1 \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(f) $f(x) := x \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

6. Tekintsük az alábbi két függvényt:

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot e^x \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \ (x \in \mathbb{R});$$

a) Határozzuk meg az alábbi függvényeket:

(a) $\mathrm{ch} := f + g$; $\mathrm{sh} := f - g$; $p := f \cdot g$; $l := \dfrac{f}{g}$; $t := \dfrac{g}{f}$.

(b) $w := \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2$; $v := 2 \cdot \mathrm{ch} \cdot \mathrm{sh}$; $r := \mathrm{ch}^2 + \mathrm{sh}^2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden $y \in [1;+\infty)$ esetén a $\mathrm{ch}(x) = y$ egyenlet megoldható ($x-$re nézve) a pozitív valós számok halmazán és adjuk meg a megoldást.

c) Bizonyítsuk be:

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists!\, x \in \mathbb{R} : \mathrm{sh}\, x = y.$$

Adjuk meg a fenti $x-$et.

7. Tekintsük az alábbi f és g függvényeket. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$

(b) $f(x) := \mathrm{Sign}\,(x) \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \ln(2-x) \ (x \in (-\infty; 2));$

(c) $f(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \ln x \ (x \in \mathbb{R}^+)$. Igaz-e, hogy $f \circ g = g \circ f$?

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ 2x, & \text{ha } x \in [0; +\infty); \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \in (-\infty; 1); \\ x - 1, & \text{ha } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

8. Tekintsük az alábbi f és g illetve h függvényeket. Határozzuk meg a $\min\{f, g\}$ és a $\max\{f; g\}$ vagy három függvény esetén a $\min/\max\{f; g; h\}$ alsó és felső burkoló függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x| \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := |1 - |x|| \ (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \ g(x) := 2x \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := 1 \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := x \ (x \in \mathbb{R}); \ h(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}).$

$\boxed{\textit{Egyéb típusok}}$

9. Bizonyítsuk be, hogy az $f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \ f(x) := x + \dfrac{1}{x} \ (x > 0)$ függvény szigorúan monoton csökken a $(0; 1]$ intervallumon és szigorúan monoton nő az $[1; +\infty)$ intervallumon.

10. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$2 \cdot f(x) + 3 \cdot f(1 - x) = 4x - 1 \ (\ \forall\, x \in \mathbb{R}).$$

24.2.2. További feladatok

Függvények értelmezési tartománya

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 2}}{1 - [x/9]} \quad (x \in D)\,;$

(b) $f(x) := \log_{3+x}(x^2 - 1) \quad (x \in D)\,;$

(c) $f(x) := \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 - |x|}} \quad (x \in D)\,;$

(d) $f(x) := \dfrac{\ln(4 - x^2) + \sqrt{1 - x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in D)\,;$

(e) $f(x) := \sqrt{\ln(\cos x)} + \dfrac{1}{\sin x} \quad (x \in D)\,?$

Függvények egyenlősége

2. Igaz-e, hogy az alábbi függvények egyenlőek, azaz $f = g$, ha:

(a) $f(x) := \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\ \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := 1 - x^3 + (x^2 - 3) \cdot (x + 1)\ \ (x \in \mathbb{R})?$

(b) $f(x) := \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}\ \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := (x^2 - 1) \cdot \operatorname{sign}(1 - |x|)\ \ (x \in \mathbb{R})?$

(c) $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\});\ \ g(x) := x - 1\ \ (x \in \mathbb{R})?$

(d) $f(x) := \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \wedge f(1) := 3;\ \ g(x) := (x + 1)^2 - x\ \ (x \in \mathbb{R})?$

(e) $f(x) := \ln|x|\ \ (x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty));\ \ g(x) := \ln(-x)\ \ (x \in (-\infty; 0)?$

(f) $f(x) := \ln\dfrac{x + 1}{x}\ \ (x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty));$

$g(x) := \ln(x + 1) - \ln x\ \ (x \in (0; +\infty))$? Igaz-e, hogy $f|_{(0;+\infty)} = g$?

(g) $f(x) := \ln(\cos^2 x)\ \ (x \in (-\pi/2; \pi/2));$

$g(x) := \ln(1 + \sin x) + \ln(1 - \sin x)\ \ (x \in (-\pi/2; \pi/2))?$

Mi az a legbővebb halmaz, amelyre kiterjesztve f−et és g−t teljesül, hogy $f = g$?

(h) $f(x) := \sin^2 x + \cos^2 x\ \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := 1\ \ (x \in \mathbb{R})?$

(i) $f(x) := \cos(2x)\ \ (x \in \mathbb{R});$

$g(x) := (1 - \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})?$

(j) $f(x) := -\cos(2x)$ $(x \in (0;\pi))$; $g(x) := (1 - \operatorname{ctg}^2 x) \cdot \sin^2 x$ $(x \in (0;\pi))$?

(k) $f(x) := \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$;

$g(x) := \dfrac{2}{\sin(2x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$?

(l) $f(x) := \sqrt{1 + \cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \sqrt{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$?

Mi a kapcsolat f és g között?

Az (a),(b),(c),(d),(e),(h),(i),(j) és (l) esetekben ábrázoljuk is az f és a g függvényeket.

Függvénytranszformációk, ábrázolás

3. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := 1 - (2x - 4)^2$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := |3x - x^2 - 2|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^2 + x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := 9 - x^3 + 6x^2 - 12x$ $(x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := |x^3 - 1|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := |x^3| - 1$ $(x \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x) := ||x - 2| - 1|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(h) $f(x) := x \cdot |x|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(i) $f(x) := \dfrac{x+3}{x+1}$ $(-1 \neq x \in \mathbb{R})$;

(j) $f(x) := \dfrac{x-4}{3x-3}$ $(1 \neq x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := \dfrac{x}{1-|x|}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$;

(l) $f(x) := \dfrac{\sqrt{16x-4}}{2} + 1$ $\left(\dfrac{1}{4} \leq x \in \mathbb{R}\right)$;

(m) $f(x) := 1 - \sqrt{x-1}$ $(x \in [1 + \infty))$;

(n) $f(x) := \sqrt{|x-1|}$ $(x \in \mathbb{R})$;

(o) $f(x) := |\sqrt{|x|} - 1|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(p) $f(x) := \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$;

(q) $f(x) := \sin|x - \pi| + \sin|x + \pi|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(r) $f(x) := \sin x \cos x + \dfrac{1}{2} \cdot \cos^2 x - \dfrac{1}{2} \cdot \sin^2 x$ $(x \in \mathbb{R})$;

(s) $f(x) := \sin^4 x + \dfrac{1}{2} \cdot \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(t) $f(x) := \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \quad (x \in (-\pi/2; \pi/2))$;

(u) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(v) $f(x) := |\ln(1+x)| \quad (x \in (-1; +\infty))$;

(w) $f(x) := \lg \dfrac{100}{x-1} \quad (x \in (1; +\infty))$.

(x) $f(x) := \operatorname{Sign}(x-1) + x \cdot \operatorname{Sign}(x-2) \quad (x \in \mathbb{R})$.

(y)

$$D(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Műveletek függvényekkel

4. Az alábbi feladatokban adottak az f és a g függvények. Határozzuk meg és ahol lehet elemi eszközökkel, ott ábrázoljuk a jelzett műveletekkel definiált h függvényeket:

(a) $f(x) := x - 1 \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := \cos x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g};\ h := \dfrac{g}{f}$?

(b) $f(x) := -D(x) \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := D(-x) \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g}$?

Itt D a fenti Dirichlet függvény.

(c) $f(x) := |x - 1| \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := 1 - x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g};\ h := \dfrac{g}{f}$?

(d) $f(x) := \ln x \ (x \in (0; +\infty));\ \ g(x) := \ln x^2 \ (0 \neq x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g}\ h := \dfrac{g}{f}$?

(e) $f(x) := \sqrt{x-1} \ (x \in [1; +\infty));\ \ g(x) := \sqrt{1-x} \ (x \in (-\infty; 1])$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g};\ h := \dfrac{g}{f}$?

(f) $f(x) := \dfrac{1}{e^x} \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g;\ h := f - g;\ h := f \cdot g;\ h := \dfrac{f}{g};\ h := \dfrac{g}{f}$?

(g)

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x-1), & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mi lesz: $h := f \pm g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

5. Tekintsük az alábbi f és g függvényeket. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [0; +\infty))$; $g(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Igaz-e, hogy $f \circ g = g \circ f$?

(c) $f(x) := [x]$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \cos(\pi \cdot x)$ $(x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \dfrac{x}{1-|x|}$ $(x \in (-1; 1))$. Igaz-e, hogy $f \circ g = g \circ f$?

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & \text{ha } x \in (-\infty; -3); \\ -2x - 5, & \text{ha } x \in [-3; +\infty); \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{ha } x \in (-\infty; 1]; \\ x^2 - 2x + 4, & \text{ha } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

6. Tekintsük az alábbi f és g illetve h függvényeket. Határozzuk meg a $\min\{f, g\}$ és a $\max\{f; g\}$ vagy három függvény esetén a $\min/\max\{f; g; h\}$ alsó és felső burkoló függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \sqrt{1 - x^2}$ $(x \in [-1; 1])$;

(b) $f(x) := \sqrt{|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \left|\dfrac{1}{x}\right|$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(c) $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$; $h(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$.

Egyéb típusok

7. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) = \frac{3+x}{3-x} \cdot \log_{x^2 - x - 2}(9 - x^2) \quad (x \in D),$$

ahol $D \subset \mathbb{R}$ jelöli a maximális értelmezési tartományt amelyen az f utasítása értelmes. Adjuk meg a D halmazt, majd oldjuk meg ezen az $f(x) > 0$ egyenlőtlenséget.

8. Bizonyítsuk be, hogy az $f : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) := x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény szigorúan monoton csökken a $(0;1]$ intervallumon és szigorúan monoton nő az $[1;+\infty)$ intervallumon.

9. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x \ \ (\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}).$$

10. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy \ \ (\forall\, x, y \in \mathbb{R}).$$

11. Adott az $a \in [0;+\infty)$ paraméter és az $f : (a;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy a $g(x) := \dfrac{1}{x} \cdot f(x)$ $\ (x \in (a;+\infty))$ függvény monoton csökkenő. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény szubadditív, azaz:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \ \ (\forall\, x, y \in (a;+\infty)).$$

12. Adott az $f(x) := ax+b$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol a és b valós paraméterek. Határozzuk meg az alábbi függvényt:

$$g := f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{szer}} \ (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$