14. Vektorok, vektorterek

Ebben a fejezetben a vektor fogalmát általánosítjuk.

14.1. Az elméleti anyag

14.1.1. Vektortér fogalma

Középiskolában megismerkedtünk a vektor fogalmával, a vektorokkal végezhető műveletekkel, ezek tulajdonságaival. Megállapítottuk, hogy a vektorok összeadása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, akkor $\underline{a}+\underline{b}$ is vektor
2. $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ (kommutativitás)
3. $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ (asszociativitás)
4. $\underline{a}+\underline{0}=\underline{a}$ (a nullvektort jellemző tulajdonság)
5. $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$ (az ellentett vektort jellemző tulajdonság)

A vektorok valós számmal szorzásának legfontosabb tulajdonságai pedig az alábbiak (λ, μ valós számokat jelöl):

1. Ha λ valós szám, és $\underline{b}$ vektor, akkor $\lambda\underline{a}$ is vektor
2. $\lambda(\mu\underline{a})=(\lambda\mu)\underline{a}$ (szorzat szorzása)
3. $(\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a}$ (disztributivitás)
4. $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$ (disztributivitás)
5. $1\underline{a}=\underline{a}$

Ugyanezeket a tulajdonságokat láttuk a mátrixokkal kapcsolatban is, a 12.5 tételben.

A továbbiakban a vektor fogalmát általánosítjuk úgy, hogy tekintünk egy nem üres halmazt (ennek elmei lesznek a vektorok), egy számhalmazt (ezt skalártartománynak fogjuk nevezni), s két műveletet (vektorösszeadás és vektor szorzása számmal), mely két művelet rendelkezik a fenti 10 tulajdonsággal. Az így keletkezett „struktúrát” fogjuk vektortérnek nevezni. Az egyes tulajdonságokat vektortér-axiómáknak fogjuk nevezni.

Még egy megjegyzés szükséges a pontos definíció kimondása előtt. A számok, amivel a középiskolában a vektorokat szorozzuk, a valós számok, azaz a középiskolában tanult vektorok esetén a skalártartomány a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$). Időközben megismerkedtünk a komplex számokkal is ($\mathbb{C}$), ezért természetes módon adódik a felvetés, hogy lehessen vektorokat komplex számmal is szorozni, azaz lehessen $\mathbb{C}$ is a skalártartomány. Mivel később mindkét esetre szükség lesz, ezért az előző fejezetekhez hasonlóan továbbra is használjuk a $\mathbb{K}$ jelölést, ami a valós számok halmazának és a komplex számok halmazának egyikét jelöli. Így nem kell mindent külön megfogalmazni a valós és külön a komplex skalártartomány esetére.

Ezen bevezető után lássuk a vektortér definícióját:

14.1. Definíció. Legyen $V \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy V $\mathbb{K}$ feletti vektortér, ha léteznek az $x + y$ (összeadás) és $\lambda x = \lambda \cdot x$ (szorzás számmal) műveletek úgy, hogy teljesülnek a következő axiómák:

I.
1. $\forall\, x, y \in V : \quad x + y \in V$
2. $\forall\, x, y \in V : \quad x + y = y + x$
3. $\forall\, x, y, z \in V : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists\, 0 \in V \quad \forall\, x \in V : \quad x + 0 = x$
   Bebizonyítható, hogy 0 egyértelmű, neve: nullelem vagy nullvektor.
5. $\forall\, x \in V \quad \exists\, (-x) \in V : \quad x + (-x) = 0.$
   Bebizonyítható, hogy $(-x)$ egyértelmű, neve: x ellentettje.

II.
1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, x \in V : \quad \lambda x \in V$
2. $\forall\, x \in V \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
3. $\forall\, x \in V \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. $\forall\, x, y \in V \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
5. $\forall\, x \in V : \quad 1x = x$

V elemeit vektoroknak, $\mathbb{K}$ elemeit skalároknak nevezzük. $\mathbb{K}$-t pedig a V skalártartományának nevezzük.

14.2. Megjegyzések.

1. A vektorokat sokszor jelöljük aláhúzott kisbetűkkel, de ez nem kötelező.

2. Látható, hogy a definícióban szereplő követelményeket (axiómákat) a középiskolában tanult síkbeli geometriai vektorok tulajdonságaiból vonatkoztattuk el. Ezzel meg is van az első példánk vektortérre:

   A sík egy rögzített pontjából induló vektorok a középiskolában tanult vektorösszeadás és számmal való szorzás műveletére nézve $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkotnak.

   A rögzített kezdőpontra azért van szükség, hogy ne legyen probléma a vektorok egyenlőségével.

3. Időnként használjuk a számmal való jobbról szorzás, a nem 0 számmal való osztás, továbbá a kivonás műveletét is, melyek definíciója rendre

$$x \cdot \lambda := \lambda \cdot x, \qquad \frac{x}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot x \qquad x - y := x + (-y).$$

   Ezen műveletek tulajdonságai egyszerűen levezethetők az összeadás és a számmal való szorzás tulajdonságaiból.

4. Egy vektortér csak akkor adott, ha a V halmazon kívül ismeretes a skalártartomány, továbbá a két művelet. Az utóbbiakat nem szükséges minden esetben feltüntetni, a gyakran használt vektorterek esetében ezek valamilyen alapértelmezés szerint adottak.

14.3. Példák.

1. A sík rögzített kezdőpontú irányított szakaszai (a sík helyvektorai) $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. A műveletek a középiskolában tanult vektorműveletek. Ezt a vektorteret röviden a síkvektorok terének nevezzük.

   Mivel a helyvektorok és végpontjaik – a középiskolában tanult módon – megfeleltethetők egymásnak, szokás a sík pontjainak vektorteréről is beszélni.

2. A tér rögzített kezdőpontú irányított szakaszai (a tér helyvektorai) $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. A műveletek a középiskolában tanult vektorműveletek. Ezt a vektorteret röviden a térvektorok terének nevezzük.

   Mivel a helyvektorok és végpontjaik – a középiskolában tanult módon – megfeleltethetők egymásnak, szokás a tér pontjainak vektorteréről is beszélni.

3. $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\mathbb{C}$ pedig vektortér $\mathbb{C}$ felett, összefoglalva: $\mathbb{K}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett.

   Érdekességképpen megjegyezzük, hogy $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ felett is vektortér.

4. Rögzített $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $m \times n$-es mátrixok $\mathbb{K}^{m\times n}$ halmaza $\mathbb{K}$ feletti vektortér. Ez azonnal következik a 12.5 tételből.

A továbbiakban V egy $\mathbb{K}$ feletti vektorteret jelöl.

A következő tételben a vektorterek néhány – igen szemléletes – alaptulajdonságát soroljuk fel. A bizonyítások az axiómák alkalmazásával végezhetők el.

14.4. Tétel. *Legyen $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor*

1. $0 \cdot x = 0$ *(a bal oldali* 0 *a* $\mathbb{K}$*-beli nulla számot, a jobb oldali* 0 *pedig a* V*-beli nullvektort jelöli).*

2. $\lambda \cdot 0 = 0$ *(itt mindkét* 0 *a* V*-beli nullvektort jelöli).*

3. $(-1) \cdot x = -x.$

4. $\lambda \cdot x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{vagy} \quad x = 0.$

14.1.2. A $\mathbb{K}^n$ vektortér

Ebben a szakaszban egy nagyon fontos vektortérről, a $\mathbb{K}^n$-ről lesz szó.

Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}$ elemeiből alkotott n-tagú sorozat, más néven rendezett szám n-es egy

$$x : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

függvény. Az $x(i) \in \mathbb{K}$ számot az x i-edik komponensének nevezzük, és x_i-vel jelöljük ($i = 1, \ldots, n$). Magát a rendezett szám n-est így jelöljük:

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n) .$$

Például $(1, -3, 5, 8)$ egy rendezett számnégyes.

Jelölje $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}$ elemeiből alkotott rendezett n-esek halmazát:

$$\mathbb{K}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$$

Az előző példa nyomán tehát pl. $(1, -3, 5, 8) \in \mathbb{R}^4$.

Vezessük be $\mathbb{K}^n$-ben az ún. komponensenkénti műveleteket:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

Másképp felírva:

$$(x + y)_i := x_i + y_i; \quad \text{és} \quad (\lambda \cdot x)_i := \lambda \cdot x_i \quad (i = 1, \ldots, n;\ x, y \in \mathbb{K}^n).$$

14.5. Tétel. *A fent bevezetett műveletekkel $\mathbb{K}^n$ vektortér $\mathbb{K}$ felett.*

E vektortér nullvektora a $(0, 0, \ldots, 0)$ rendezett n-es, az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor ellentettje pedig $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{K}^n$ elemeinek szokásos felírása:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n ,$$

de néha célszerű az oszlop-írásmód használata:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n .$$

Az oszlop-írásmód pl.akkor előnyös, ha $\mathbb{K}^n$-beli elemekkel műveleteket végzünk („számolunk"), ugyanis ekkor az azonos indexű komponensek azonos magasságba kerülnek, így könnyebben áttekinthetők. Pl. $\mathbb{R}^4$-ben:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

14.6. Megjegyzés. Amikor a $\mathbb{K}^n$ vektortérről beszélünk, akkor alapértelmezés szerint a skalártartomány $\mathbb{K}$, a műveletek pedig a komponensenkénti műveletek.

14.7. Megjegyzés. A középiskolában tanultak szerint a sík pontjai rendezett valós számpárokkal, a tér pontjai rendezett valós számhármasokkal jellemezhetők. Ismeretes a kapcsolat a pontok helyvektoraival és a számpárokkal, illetve a számhármasokkal végzett műveletek között is. Ezért $\mathbb{R}^2$ felfogható úgy is, mint a sík pontjainak (illetve a síkvektoroknak), $\mathbb{R}^3$ pedig mint a tér pontjainak (illetve a térvektoroknak) vektortere.

Hasonló indoklással, $\mathbb{R}^1$ az egyenes pontjainak vektortereként fogható fel (számegyenes).

14.8. Megjegyzés. $\mathbb{K}^n$ azonosítható a sormátrixok $\mathbb{K}^{1\times n}$ terével, de azonosítható az oszlopmátrixok $\mathbb{K}^{n\times 1}$ terével is. Ez az oka annak, hogy a sormátrixokat sorvektoroknak, az oszlopmátrixokat pedig oszlopvektoroknak is nevezzük. Egyébként sor-írásmód esetén $\mathbb{K}^n$ elemeit is szoktuk sorvektoroknak, oszlop-írásmód esetén pedig oszlopvektoroknak nevezni.

A mátrixszorzás speciális eseteként foghatjuk fel a mátrix-vektor szorzás műveletét. Ezt így értelmezzük:

14.9. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Az

$$Ax \in \mathbb{K}^m, \qquad (Ax)_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

vektort az A mátrix és az x vektor (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

14.10. Megjegyzés. A definícióból látható, hogy – az előző megjegyzést is figyelembe véve – az Ax vektorhoz úgy is eljuthatunk, hogy összeszorozzuk az A mátrixot és az x-nek megfelelő oszlopmátrixot, s vesszük az így kapott oszlopmátrixnak megfelelő vektort. Ezért röviden úgy mondjuk, hogy a mátrix-vektor szorzás lényegében egy mátrix és egy oszlopmátrix összeszorzását jelenti. Ebből az azonosításból természetes módon adódnak a mátrix-vektor szorzás tulajdonságai.

14.1.3. Alterek

14.11. Definíció. Legyen W a V vektortér egy nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy W altere V-nek (W altér V-ben), ha W vektortér a V-beli műveletekre nézve.

14.12. Tétel. *Legyen $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. W akkor és csak akkor altere V-nek, ha a következő két feltétel teljesül:*

1. $\forall\, x, y \in W : \quad x + y \in W$,
2. $\forall\, x \in W \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} : \quad \lambda x \in W$.

Az első feltételt úgy is szoktuk mondani, hogy az összeadás nem vezet ki W-ből vagy, hogy W zárt az összeadásra nézve. Hasonlóképpen, a második feltételt fogalmazhatjuk úgy is, hogy a számmal való szorzás nem vezet ki W-ből vagy, hogy W zárt a számmal való szorzásra nézve.

Bizonyítás. A két feltétel szükségessége nyilvánvaló.

Az elégségesség igazolásához csak az 14.1. definíció I. 4. és I. 5. pontjai szorulnak bizonyításra, hiszen I. 1. és II. 1. fel van téve, a többi axióma pedig azonosság.

Jelöljük 0_V-vel a V nullvektorát, és legyen $x \in W$. Ekkor $x \in V$, ezért az 14.4. tétel valamint tételünk 2. feltétele alapján

$$0_V = 0 \cdot x \in W.$$

Tehát az I. 4. axióma teljesül W-ben, sőt W és V nullvektora megegyezik. Hasonlóan, ha $(-x)_V$ jelöli az $x \in W$ elem V-beli ellentettjét, akkor – szintén az 14.4. tétel és tételünk 2. feltételének felhasználásával – kapjuk, hogy

$$(-x)_V = (-1) \cdot x \in W,$$

tehát az I. 5. axióma is teljesül W-ben, sőt az x vektor W-beli és V-beli ellentettje megegyezik. □

14.13. Következmény. Ahhoz, hogy egy V-beli részhalmaz altér legyen, szükséges, hogy tartalmazza a nullvektort („átmenjen az origón”).

Az 14.12. tétel alapján könnyen igazolhatók az alábbi példák alterekre:

14.14. Példák.

1. Tetszőleges V vektortérben $\{0\}$ és V alterek. Ezeket triviális altereknek nevezzük.
2. A síkvektorok terének ($\mathbb{R}^2$-nek) alterei: az origóból álló egyelemű halmaz, az origón átmenő egyenesek és maga az $\mathbb{R}^2$.
3. A térvektorok terének ($\mathbb{R}^3$-nak) alterei: az origóból álló egyelemű halmaz, az origón átmenő egyenesek, az origón átmenő síkok és maga az $\mathbb{R}^3$.

14.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a vektortér fogalmát.
2. Adjon 2 példát vektortérre.
3. Sorolja fel a vektortereknél tanult 4 alapvető tulajdonságot

4. Definiálja a $\mathbb{K}^n$ vektorteret (mik az elemei, hogyan értelmezzük a műveleteket).

5. Definiálja a mátrix-vektor szorzás műveletét

6. Definiálja az altér fogalmát.

7. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy nem üres vektorhalmaz altér legyen.

8. Adjon 2 példát altérre.

14.1.5. Bizonyítandó tételek

1. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy nem üres vektorhalmaz altér legyen.

14.2. Feladatok

14.2.1. Órai feladatok

1. Adottak az alábbi, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok:

$$x = (-3, 4, 1, 5, 2) \qquad y = (2, 0, 4, -3, -1) \qquad z = (7, -1, 0, 2, 3)\,,$$

továbbá az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$

mátrix. Számítsuk ki az alábbiakat:

$$x + y\,, \qquad y - z\,, \qquad 4x\,, \qquad x + 3y - 2z\,, \qquad Ax\,.$$

2. Alterek-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok? Mely nevezetes ponthalmazokról van szó (nevezzük meg geometriailag):

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad ; \qquad N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ y \geq 0\}\,.$$

3. Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi halmazok? Nevezzük meg e hamazokat geometriailag is.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
(b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,
(c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$,

(d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 5\}$,

(e) $S_5 = \{(x - y, 3x, 2x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

4. Igazoljuk a vektortér-axiómák teljesülését $\mathbb{K}^n$-ben, azaz a 14.5 tételt. (Ami órán nem fér bele, az HF.)

14.2.2. További feladatok

1. Adottak az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok:

$$x = (1, -2, 3, 4) \qquad y = (-4, 0, 2, 1) \qquad z = (2, -1, 0)\,,$$

továbbá az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

mátrix. Számítsuk ki az alábbit:

$$3x + y + 2Az$$

2. Alterek-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok? Mely nevezetes ponthalmazokról van szó (nevezzük meg geometriailag):

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad ; \qquad N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}\,.$$

3. Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi halmazok? Nevezzük meg e hamazokat geometriailag is.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$,

(b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$,

(c) $S_3 = \{(2x, x + y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z = 0\}$,

(e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z + 1 = 0\}$,

4. Igazoljuk a vektortér-axiómák teljesülését $\mathbb{K}^n$-ben, azaz a 14.5 tételt.