5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Szög, szögmérés (fok, ívmérték).
2. Szögfüggvények értelmezése (hegyesszög, tetszőleges szög).
3. Nevezetes szögek szögfüggvényei.
4. Trigonometrikus függvények értelmezése, grafikonjaik, jellemző tulajdonságaik:

$$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}.$$

5. Alapvető trigonometrikus azonosságok (a többi ezekből levezethető):

   (a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

   (b) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

   (c) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

   (d) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

   (e) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

   (f) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

   (g) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

   (h) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad$ (*Linearizáló formulák*).

   Itt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok (ívmértékben megadott szögek).

5.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mekkora radiánban kifejezve a $120°-$os szög?
2. Adja meg a következő kifejezések pontos értékét:

$$\sin\pi/3;\ \ \cos\pi;\ \ \sin\pi/4;\ \ \cos\pi/2;\ \ \mathrm{tg}\,\pi/4;\ \ \mathrm{ctg}\,\pi/6;\ \ \mathrm{tg}\,\pi/3.$$

3. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$(\sin\pi/7 + \cos\pi/7)^2 - \sin 2\pi/7.$$

4. Számítsa ki $\sin^3 \pi/3 - \cos^3 \pi/3$ pontos értékét.

5. Milyen $a \in \mathbb{R}$ valós számmal teljesül az alábbi azonosság a megadott x valós számokra:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{a}{\sin^2(2x)} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})?$$

6. Számítsa ki az addíciós tétellel $\sin(x - y)$ értékét.

7. Számítsa ki az addíciós tétellel $\cos(x + y)$ értékét.

8. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\sin \pi/7 \cdot \cos \pi/42 + \sin \pi/42 \cdot \cos \pi/7.$$

9. Számísa ki $\sin \pi/8$ pontos értékét.

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x.$$

11. Ábrázolja az $f(x) := \sin^4 x - \cos^4 x \quad (x \in [0; \pi])$ függvényt.

12. Hozza a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$E(x) := (\sin x + \cos x)^4 - (\sin x - \cos x)^4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Milyen x valós számokra teljesül, hogy:

$$E(x) = -2\,?$$

13. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a $[\pi/2; \pi]$ intervallumon:

$$\sin 2x > \cos x.$$

14. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyeit.

15. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\frac{\sin^2 \dfrac{4037\pi}{4}}{1 - \cos^3 7\pi}.$$

5.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Ábrázolja az $f(x) := \sin x \quad (x \in [0; 3\pi])$ függvényt.
2. Ábrázolja a $g(x) := \cos x \quad (x \in [-\pi; 3\pi])$ függvényt.
3. Definiálja és ábrázolja a tg függvényt.
4. Írja le a *linearizáló* formulákat.
5. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\cos 9\pi/20 \cdot \cos \pi/5 + \sin 9\pi/20 \cdot \sin \pi/5.$$

5.2. Feladatok

5.2.1. Órai feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/12$ pontos értékét.

2. Vezessünk le linearizáló formulát a $\cos^3 \alpha$ kifejezésre, ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\sin x = -\frac{1}{2}; \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \qquad \operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1; \qquad \operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{3}.$$

4. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

(a) $\sin 4x = \sin x$;

(b) $\cos 10x = \cos 2x$;

(c) $\cos 4x = \sin 3x$;

(d) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;

(e) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$;

(f) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{3}{2}$;

(g) $\dfrac{4}{\cos^2 x} - 5\operatorname{tg}^2 x = 1$;

(h) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

(i) $\sqrt{2}\cdot\sin x\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{1+\cos x}$;

(j) $2\sin^2 x+\sin x+\dfrac{1}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2\sin x}=1$;

(k) $\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\cdot\sin^2 3x$;

(l) $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6$?

(m) $\cos 2x=\cos x-\sin x$?

Egyenlőtlenségek

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\sin x<-\frac{1}{2};\qquad \sin x>-\frac{1}{2};\qquad \cos x\le-\frac{1}{2};\qquad \cos x\ge-\frac{1}{2}.$$

6. Milyen $x\in\mathbb{R}$ esetén lesz

$$-\sqrt{2}\le\sin x+\cos x\le\sqrt{2}\ ?$$

7. Határozzuk meg azokat az $x\in\mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $2\sin^2 x-\sin x-1>0$;

(b) $2\cos^2 x+\sin x-1<0$;

(c) $\dfrac{2\sin x+1}{2\cos x}\le 0$;

(d) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x-\sin^2 x}{\mathrm{ctg}^2 x-\cos^2 x}>1$;

(e) $\left|\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|\le 1$.

8. Keressük meg a $0\le x\le 2\pi$ intervallumba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a kövtkező egyenlőtlenséget:

$$2\cos x\le|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|\le\sqrt{2}.$$

Egyéb típusok

9. a) Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x)=\frac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+x\right)+\cos 3x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5x\right)}{\sin 3x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sin 5x}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x)+\frac{1}{E(x)}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény konstans a megadott halmazon:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\cos^2 x - \sqrt{\cos 2x}} \quad (x \in [-\pi/4; \pi/4]).$$

11. Határozzuk meg azt a legbővebb D halmazt, melynek x elemeire értelmezhető az alábbi kifejezés:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \quad (x \in D).$$

Az így kapott f függvény utasítását hozzuk a legegyszerűbb alakra, majd oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$f(x) + (2 + \sqrt{3})f(-x) = 0.$$

12. A cos függvény tulajdonságait felhasználva határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$f(x) := \cos\frac{1}{x} \quad \left(x \in \left[\frac{3}{2\pi}; \frac{2}{\pi}\right)\right).$$

13. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := (\sqrt{\mathrm{tg}} - \sqrt{\mathrm{ctg}\, x})^2 \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legnagyobb és legkisebb értékét és annak helyeit a $[\pi/8; 5\pi/12]$ intervallumon.

14. Határozza meg az $f(x) := \sin^2\frac{x}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2}$ $(x \in [0; \pi/4])$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét. Hol veszi fel ezeket a függvény?

15. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre és bármely $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n; \lambda$ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes az alábbi azonosság:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}\, 2^n x.$$

16. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét, ahol $1 \leq n \in \mathbb{N}$ darab négyzetgyök szerepel a kifejezésben:

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

5.2.2. További feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Fejezze ki $\operatorname{tg}(x+y)$ értékét $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$ segítségével.

2. Számísa ki $\operatorname{tg} \pi/8$ pontos értékét.

3. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/16 + \operatorname{ctg} \pi/16$ pontos értékét.

4. Vezessen le *linearizáló* formulát a $\sin^3 \alpha$ kifejezésre. (Fejezze ki $\sin 3\alpha$ értékét $\sin \alpha$ segítségével.)

5. Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol az alábbi egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \cos 4x$.

(c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;

(d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$;

(e) $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $0 < z < \dfrac{\pi}{2}$ valós szám, hogy

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5} \cdot \sin(z + x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

7. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0$;

(b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$;

(c) $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$;

(d) $\sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x - 3\cos^2 x = 0$;

(e) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;

(f) $2\cos 2x + 4\sin x + 1 = 0$;

(g) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2$.

8. Az $y \in \mathbb{R}$ paramétertől függően oldjuk meg a

$$2 \cdot \sin x = y + \frac{1}{y}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

9. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \cdot x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x} \, .$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sqrt{2}\cos x}} \, .$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{\cos^2 x} = \sin x.$$

Egyenlőtlenségek

13. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

$$\cos x < \cos^4 x \, .$$

14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|\sin x - \cos x| \le \sqrt{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \dfrac{1}{2}$;

(c) $\dfrac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1$;

(d) $\sin x \cos 6x > \cos x \sin 6x$;

(e) $\sin^2 x - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \cdot |\sin x| + \dfrac{\sqrt{6}}{4} < 0.$

Egyéb típusok

15. a) Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x) = \frac{\sin 6x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) + 2\sin x \cos x}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 2x\right) + \cos 6x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x) - \frac{1}{E(x)} = -2.$$

16. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyét a $[0; \pi/4]$ intervallumon.

17. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f(x) := \sin\frac{\pi}{x} \cdot \cos\frac{x}{\pi} + \sin\frac{x}{\pi} \cdot \cos\frac{\pi}{x} \quad (x \in [\pi; 2\pi]).$$

18. Ábrázolja az $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in [0; \pi/2])$ függvényt.

19. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi\cos^2 x}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi\sin^2 x}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

20. Valamely x értékre teljesül az alábbi egyenlet:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az

$$a = 4, b = 2, c = -1$$

esetben.

21. Egy háromszög α, β, γ szögei olyanok, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ egymást követő természetes számok. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

22. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ valós állandók és x jelentsen valós változót, végül pedig

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(a_k + x)}{2^{k-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor van olyan m egész szám, hogy $x_2 - x_1 = m\pi$.