21. Mátrixok diagonalizálhatósága

21.1. Az elméleti anyag

21.1.1. Mátrixok hasonlósága

21.1. Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy a B mátrix hasonló az A mátrixhoz (jele: $A \sim B$), ha

$$\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n}: \quad C \text{ invertálható, és } B = C^{-1}AC\,.$$

21.2. Megjegyzés. A hasonlósági reláció szimmetrikus, azaz $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Ezért a hasonlóságot így is mondhatjuk: A és B hasonlók (egymáshoz).

21.3. Tétel. *Ha $A \sim B$, akkor $P_A = P_B$, vagyis karakterisztikus polinomjuk megegyezik. Következésképpen megegyeznek a sajátértékek (algebrai multiplicitással) és a determinánsok is.*

Bizonyítás. Legyenek $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $B = C^{-1}AC$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC) = \det(C^{-1}(A-\lambda I)C) = \\
&= \det(C^{-1})\cdot\det(A-\lambda I)\cdot\det(C) = \det(C^{-1})\cdot\det(C)\cdot\det(A-\lambda I) = \\
&= \det(C^{-1}C)\cdot\det(A-\lambda I) = \det(I)\cdot P_A(\lambda) = 1\cdot P_A(\lambda) = P_A(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

□

21.1.2. Diagonalizálhatóság

A következő definícióban mátrixok egy fontos osztályát értelmezzük.

21.4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy A diagonalizálható ($\mathbb{K}$ felett), ha hasonló egy diagonálmátrixhoz, azaz, ha

$$\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n},\ C \text{ invertálható}: \quad C^{-1}AC \text{ diagonálmátrix}\,.$$

A C mátrixot diagonalizáló mátrixnak, a $D = C^{-1}AC$ diagonálmátrixot pedig az A diagonális alakjának nevezzük.

21.5. Megjegyzés. Ha A diagonalizálható, akkor diagonális alakjának főátlójában az A sajátértékei állnak, mindegyik sajátérték annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása.

Az alábbi tétel lényege, hogy a diagonalizálhatóság egyenértékű a sajátvektorokból álló bázis (S.B.) létezésével.

21.6. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ($\mathbb{K}$ felett), ha létezik S.B. $\mathbb{K}^n$-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A diagonalizálható. Legyenek $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}^n$ a diagonalizáló C mátrix oszlopvektorai:

$$C = [c_1 \; \dots \; c_n] \, .$$

Megmutatjuk, hogy $c_1, \dots, c_n$ egy S.B.

Mivel C invertálható, ezért $c_1, \dots, c_n$ egy n-tagú lineárisan független rendszer, tehát bázis $\mathbb{K}^n$-ben.

Annak igazolásához, hogy a c_j vektorok sajátvektorok, induljunk ki a

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

egyenlőségből, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Szorozzuk be az egyenletet C-vel balról:

$$A \cdot [c_1 \dots c_n] = C \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = [c_1 \dots c_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[Ac_1 \dots Ac_n] = [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n]$$

Az oszloponkénti egyenlőséget felírva:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

tehát a bázis valóban sajátvektorokból áll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $c_1, \dots, c_n$ egy S.B. $\mathbb{K}^n$-ben. Legyen $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a $c_1, \dots, c_n$ oszlopokból felépített mátrix. C nyilvánvalóan invertálható, mivel oszlopai lineárisan függetlenek.

Írjuk fel a sajátérték-egyenleteket:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \dots, n)\, ,$$

majd végezzük el visszafelé a bizonyítás első felében tett átalakításokat. Az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Tehát A valóban diagonalizálható. $\square$

21.7. Megjegyzések.

1. Láthatjuk, hogy a sajátvektorok mint oszlopok sorrendje C-ben ugyanaz, mint a megfelelő sajátértékek sorrendje $C^{-1}AC$ főátlójában.

2. Ha az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixnak n db különböző sajátértéke van $\mathbb{K}$-ban, akkor a megfelelő (n db) sajátvektor lineárisan független. Ezért ezek S.B.-t alkotnak, tehát A diagonalizálható.

A most igazolt tételt, és korábbi tételeinket is figyelembe véve, egy $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix ($\mathbb{K}$ feletti) diagonalizálhatóságát a következőképpen célszerű vizsgálni: Először meghatározzuk a mátrix sajátértékeit az algebrai multiplicitásukkal együtt (a karakterisztikus egyenlet megoldása). Ha az algebrai multiplicitások összege kisebb, mint n, akkor már meg is állhatunk, a mátrix nem diagonalizálható. Ha az algebrai multiplicitások összege n, akkor továbblépünk, elkezdjük meghatározni sajátértékenként a geometriai multiplicitásokat. Ezt tehetjük pl. a megfelelő lineáris egyenletrendszerek megoldásával is, vagy egyéb más módon. Ha valamelyik sajátértéknél azt észleljük, hogy a geometriai multiplicitás kisebb az algebrainál, akkor megállunk, a mátrix nem diagonalizálható. Ha a geometriai és az algebrai multiplicitások mindegyik sajátérték esetén azonosak, akkor a mátrix diagonalizálható. Ez esetben a diagonalizáló mátrixot és a diagonális alakot a 21.7. megjegyzés alapján kapjuk.

21.1.3. Két példa

A sajátértékekről, sajátvektorokról, diagonalizálásról tanultak szemléltetésére következik két számpélda.

Mindkét feladatban:

(a) Határozzuk meg a megadott mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását.

(b) Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

(c) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

1. Példa. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

Megoldás.
A karakterisztikus polinom:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)\cdot[(-2-\lambda)(2-\lambda)+3] + 1\cdot[3(2-\lambda)-3] - 1\cdot[3-(2+\lambda)] =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2-1) - 2\lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) - 2(\lambda-1) =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-\lambda^2) = -\lambda(\lambda-1)^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

A sajátértékek e polinom gyökei: $\lambda_1 = 0$, algebrai multiplicitása $a(0) = 1$, mivel egyszeres gyök. $\lambda_2 = 1$, algebrai multiplicitása $a(1) = 2$, mivel kétszeres gyök. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{0;\ 1\}.$$

Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor így is válaszolhatunk a feladat kérdésére:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Keressük meg a sajátvektorokat:
<u>$\lambda_1 = 0$ esetén</u> a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1,\ 3,\ -1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_1 = 0$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(0) = 1$.
<u>$\lambda_2 = 1$ esetén</u> a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x_2, x_3 \in \mathbb{K},\ (x_2, x_3) \neq (0,0)).$$

A megfelelő sajátaltér kétdimenziós (sík), melynek egy bázisa az $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ vektorrendszer. Emiatt a $\lambda_2 = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(1) = 2$.

Következik a diagonalizálhatóság vizsgálata:

A sajátértékek algebrai multiplicitás-összege $a(1)+a(0) = 2+1 = 3$, ezért továbblépünk. A geometriai multiplicitások rendre megegyeznek az algebraiakkal:

$$g(0) = a(0) = 1, \quad g(1) = a(1) = 2.$$

Ezért az A mátrix ($\mathbb{K}$ felett) diagonalizálható. Megjegyezzük, hogy most nem alkalmazható az az elégséges feltétel, hogy „A-nak 3 különböző sajátértéke van”.

A S.B. a sajátértékenként kapott maximális számú lineárisan független sajátvektorok egyesített rendszere:

$$c_1 = (1,3,-1), \qquad c_2 = (1,1,0) \qquad c_3 = (1,0,1).$$

Diagonalizáló mátrixot most is az S.B. vektoraiból építhetünk fel:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

A megfelelő diagonális alak (a sajátértékeket a főátlóba írjuk):

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

2. Példa. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$

Megoldás.

A karakterisztikus polinom (most célszerű az első oszlop szerinti kifejtés):

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(2-\lambda)-1] - 1\cdot[(-1)(2-\lambda)+1] = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+1) + 1 - \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) \qquad\qquad (\lambda\in\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Innen a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, az algebrai multiplicitásuk pedig $a(1) = 2$, $a(2) = 1$. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{1;\, 2\}.$$

Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor így is válaszolhatunk a feladat kérdésére:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

Térjünk rá a sajátvektorokra:
$\underline{\lambda_1 = 1 \text{ esetén}}$ a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (x_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1, 1, 1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_1 = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(1) = 1$.
$\underline{\lambda_2 = 2 \text{ esetén}}$ a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1, 0, 1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_2 = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(2) = 1$.

Következik a diagonalizálhatóság vizsgálata:
A sajátértékek algebrai multiplicitás-összege $a(1)+a(2) = 2+1 = 3$, ezért továbblépünk. Azonban az algebrai és a geometriai multiplicitás nem egyezik meg minden sajátértéknél, mivel:

$$g(1) = 1 < a(1) = 2.$$

Ezért a másik sajátérték geometriai multiplicitásának megállapítása nélkül is kijelenthetjük, hogy az A mátrix ($\mathbb{K}$ felett) nem diagonalizálható, valamint, hogy S.B. sem létezik $\mathbb{K}^n$-ben, sem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén.

21.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a mátrixok hasonlóságát

2. Mondja ki a hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai kapcsolatáról szóló tételt

3. Definiálja a diagonalizálható mátrix fogalmát

4. Mik a diagonális elemei egy diagonalizálható mátrix diagonális alakjának?

5. Mondja ki a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt

21.1.5. Bizonyítandó tételek

1. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai kapcsolatáról szóló tétel

2. A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tétel

21.2. Feladatok

21.2.1. Órai feladatok

1. Az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, stb. az előző alkalommal már megvizsgáltuk.

(a) Idézzük fel az eredményeket

(b) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21.2.2. További feladatok

1. Az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, stb. az előző alkalommal már megvizsgáltuk.

(a) Idézzük fel az eredményeket

(b) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -9 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)\quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$