ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
22. Valós euklideszi terek I.
az "Órai feladatok" szakasz 2., 3. feladatainak megoldása
(írta: Pap Viktória)

$\boxed{\text{22.2.1. Órai feladatok / 2.}}$

Adottak a következő vektorok:

$$x = \begin{bmatrix}1, & -2, & -3, & 5\end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix}-1, & 2, & -1, & 0\end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix}2, & -1, & 1, & 3\end{bmatrix}$$

Számoljuk ki a következőket:

(a) $\langle x, y\rangle = \langle(1,-2,-3,5),(-1,2,-1,0)\rangle = 1*(-1)+(-2)*2+(-3)*(-1)+5*0 = -1-4+3+0 = -2$

(b) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle(1,-2,-3,5),(1,-2,-3,5)\rangle} = \sqrt{1+4+9+25} = \sqrt{39}$

(c) $\|x-z\| = \sqrt{\langle x-z, x-z\rangle} = \sqrt{\langle(-1,-1,-4,2),(-1,-1,-4,2)\rangle} = \sqrt{1+1+16+4} = \sqrt{22}$

(d) $\dfrac{\langle x, z\rangle * y - \langle y, z\rangle * x}{\langle y, y\rangle} = \dfrac{16(-1,2,-1,0)-(-5)(1,-2,-3,5)}{6} = \dfrac{1}{6}(-11,22,-31,25)$,

$\langle x, z\rangle = \langle(1,-2,-3,5),(2,-1,1,3)\rangle = 16$, és

$\langle y, z\rangle = \langle(-1,2,-1,0),(2,-1,1,3)\rangle = -5$, végezetül

$\langle y, y\rangle = \langle(-1,2,-1,0),(-1,2,-1,0)\rangle = 6$

(e) $(-1)\dfrac{z}{\|z\|} = -\dfrac{(2,-1,1,3)}{\sqrt{15}}$

$\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} = \sqrt{\langle(2,-1,1,3),(2,-1,1,3)\rangle} = \sqrt{4+1+1+9} = \sqrt{15}$

$\boxed{\text{22.2.1. Órai feladatok / 3.}}$

Adott a következő vektorrendszer:

$$u_1 = \begin{bmatrix}1, & 1, & 1, & 1\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix}1, & -1, & -1, & 1\end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix}-1, & 0, & 0, & 1\end{bmatrix}$$

(a) Mutassuk meg, hogy a rendszer OR!

A skalárszorzatok kiszámítása mutatja az ortogonalitás:

$\langle u_1, u_2\rangle = 1*1+1*(-1)+1*(-1)+1*1 = 0$
$\langle u_1, u_3\rangle = 1*(-1)+1*(0)+1*(0)+1*1 = 0$
$\langle u_2, u_3\rangle = 1*(-1)+(-1)*(0)+(-1)*(0)+1*1 = 0$

(b) Ellenőrizzük a Pitagorasz-tétel állítását az u_1, u_2, u_3 ortogális vektorrendszeren!

$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \|(1,1,1,1)+(1,-1,-1,1)+(-1,0,0,1)\|^2 = \|(1,0,0,3)\|^2 = 1^2+3^2 = 10$

$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = 4+4+2 = 10$

$\langle u_1, u_1\rangle = 1*1+1*(1)+1*(1)+1*(1) = 4$

$\langle u_2, u_2\rangle = 1*(1)+(-1)*(-1)+(-1)*(-1)+1*1 = 4$

$\langle u_3, u_3\rangle = (-1)*(-1)+(0)*(0)+(0)*(0)+1*1 = 2$