6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

Az óra első felében a polinomok és racionális törtfüggvények növekedési ütemével foglalkozunk: úgynevezett nagyságrend-őrző becsléseket adunk.

Az óra második felében pedig az analízisben is fontos szerepet játszó további becsléseket fogunk átnézni néhány függvény esetében.

6.1. Kiegészítés az elmélethez

Ismétlés: polinomok

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együtthatói*), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyütthatója*. x jelöli a polinom ún. *változóját*, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Polinomok nagyságrendi becslése

Tekintsünk egy *pozitív főegyütthatós* polinomot.
Érzéseink azt sugallják, hogy ha az x változó „nagy” pozitív szám, akkor a polinom „nagyságrendileg úgy viselkedik”, mint a legmagasabb fokú tagja. Ezen pontosabban a következőt értjük. Ha

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n > 0),$$

akkor megadhatók olyan $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok, hogy minden $x \geq R$ esetén

$$m \cdot x^n \leq P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Kissé lazábban fogalmazva: Elég nagy x-ek esetén $P(x)$ értéke az x^n hatvány konstansszorosai közé esik.

Az $m \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) a P *nagyságrend-őrző alsó becslésének* (NRA-becslésének), az $M \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) pedig a P *nagyságrend-őrző felső becslésének* (NRF-becslésének) nevezzük. Nevezzük e két becslés együttesét NR-becslésnek (*nagyságrend-őrző becslés*).
A becslés végrehajtására (vagyis az $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok megkeresésére) a Függelék 27.3. szakaszában adunk módszert és példát.

Racionális törtkifejezések becslése

Két polinom hányadosát racionális törtkifejezésnek (röviden: törtkifejezésnek) nevezzük. Az ilyen típusú kifejezésekre is adhatunk nagyságrend-őrző (NR) becsléseket. Ha ugyanis P_1 n-edfokú és P_2 k-adfokú pozitív főegyütthatós polinomok, melyeknek NR-becsléseit már előállítottuk:

$$m_1 \cdot x^n \leq P_1(x) \leq M_1 \cdot x^n \qquad (x \geq R_1) \qquad \text{és}$$

$$m_2 \cdot x^k \leq P_2(x) \leq M_2 \cdot x^k \qquad (x \geq R_2),$$

akkor $x \geq \max\{R_1, R_2\}$ esetén nyilvánvalóan

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \leq \frac{M_1 \cdot x^n}{m_2 \cdot x^k} = \frac{M_1}{m_2} \cdot x^{n-k},$$

továbbá

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \geq \frac{m_1 \cdot x^n}{M_2 \cdot x^k} = \frac{m_1}{M_2} \cdot x^{n-k}.$$

6.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy alkalmas P polinom NRA *becslését.*

2. Definiálja egy alkalmas P polinom NRF *becslését.*

3. Felhasználva a P, Q polinomok NR becsléseit definiálja a P/Q racionális tört NR becsléseit.

4. Adjon NRA és NRF becslést a $P(x) := x^5+3x^3-2x^2+7x+21$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomra.

5. Adjon NRA és NRF becslést az $f(x) := \dfrac{2x^7 - 3x^4 + 5x^2 - x + 6}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ racionális törtfüggvényre.

6. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := n^4 - 2n^3 - +7n^2 - n + 13$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.

7. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := \dfrac{n^5 - 2n^4 + 3n^3 - 4n^2 + 5n + 111}{n^3 - 2n + 3}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.

8. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$
teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := x^4 + 2x^2 + x - 5000$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$f(x) > 80000$$
teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4 + 2x^3 - x + 12}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$f(x) > 1000$$
teljesüljön, ha $x > K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x) - f(1)|$$
eltérésre, ha $|x - 1| < \dfrac{1}{100}$.

12. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x) - f(2)|$$
eltérésre, ha $|x - 2| < \dfrac{1}{100}$.

13. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - f(2)| \le K \cdot |x - 2|$$
teljesüljön, ha $|x - 2| < \dfrac{1}{100}$.

14. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $\delta > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - f(2)| \le \frac{1}{1000}$$
teljesüljön, ha $|x - 2| < \delta$.

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

NR-becslések

1. Adjunk NRF−becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $M > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \ge R$ esetén igaz legyen a $P(x) \le M \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $M > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \le M \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,.$

2. Adjunk NRA−becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $m > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $m > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,.$

3. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 10x^2 + 20x - 15}{7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 9}\,.$

4. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = 7n^3 - 4n^2 + 5n - 17 \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{3n^4 + 7n^3 - 10n^2 - 13n + 6}{2n^5 - 8n^3 + 5n^2 + 9n - 7} \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

5. Tekintsük az $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 2| < \frac{1}{10}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 7| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 7|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x - 2| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := x^2 + x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x + 1| < \frac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\frac{1}{100}$, hacsak $|x + 1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \frac{2x + 1}{x - 3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(2)|$ eltérésre, ha $|x - 2| < \frac{1}{10}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(2)|$ eltérés legyen kisebb mint $\frac{1}{10}$, hacsak $|x - 2| < \delta$.

8. Tekintsük az $f(x) := \frac{x + 1}{x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := x^3 - 2x^2 + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 200$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \frac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 100$$

teljesüljön, ha $x > K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

6.2.2. További feladatok

1. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi polinomokra:

(a) $P(x) = 7x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x - 10\,;$

(b) $P(x) = 12x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 6x - 20\,;$

(c) $P(x) = x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 10^2 + 11x + 33\,;$

(d) $P(x) = 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 10x + 5\,;$

(e) $P(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 20\,;$

(f) $P(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - 99x^4 - 88x^3 - 67x^2 - 61x - 60\,.$

2. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + x + 8}{3x^2 - 5x - 7}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 9x^2 + 8x - 12}{4x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 3x + 6}\,.$

3. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = n^3 - 7n^2 + 9n - 13 \quad (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{5n^4 + 3n^3 - 14n^2 - 9n + 7}{2n^5 + 11n^3 - 4n^2 + 5n - 17} \quad (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

4. Tekintsük az $f(x) := 5x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 1| < \frac{1}{100}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 3| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 3|$ eltérés kisebb legyen mint $\frac{1}{100}$, hacsak $|x - 1| < \delta$?

5. Tekintsük az $f(x) := 4 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x + 1| < 1$?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés kisebb legyen mint $\frac{1}{10}$, hacsak $|x + 1| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1-3x}{x+2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(1)|$ eltérésre, ha $|x-1| < \dfrac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x-1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^2+x+8}{x^3+2x^2+1}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

8. Tekintsük az $f(x) := 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 2018$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4 - x + 13}{x^2 + x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 1000$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x^2+1} - x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.