ELTE-IK Matematikai alapok 2020. Őszi félév
24. Függvények, elemi függvények, műveletek függvényekkel
az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 4a., 4b., 4g., 5a. feladatainak megoldása
(Írta: Fábián Gábor)

24.2.1. Órai feladatok / 1a.

Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg?

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^3-1}{x}} \qquad (x \in D)$$

Az f függvény definícióját vizsgáljuk át ,,belülről kifelé", hogy megértsük, az egyes műveletek mely x értékek esetén értelmezhetők. A polinomokat bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezzük, ezért

$$\begin{aligned} x \quad &\Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \\ 2x^3-1 \quad &\Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Az osztás akkor értelmes, ha a nevező nullától különböző:

$$\frac{2x^3-1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Végül a gyökvonás akkor értelmes, ha a gyök alatt álló kifejezés nemnegatív:

$$\sqrt{\frac{2x^3-1}{x}} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \wedge \quad \frac{2x^3-1}{x} \geq 0$$

A keresett D halmaz elemeire tehát a következő teljesül:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{2x^3-1}{x} \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2x^3-1}{x} \geq 0 \right\}$$

A D halmaz elemei tehát a fenti egyenlőtlenség megoldásai. Mivel a tört akkor és csak akkor nemnegatív, ha a számláló 0, vagy a nevezővel azonos előjelű, a következő két lehetőség van:

i) $2x^3 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0$

Ez esetben:

$$2x^3 - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^3 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 \geq \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Ezért a feltétel akkor teljesül, ha

$$x \in (0, +\infty) \cap \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$$

ii) $2x^3 - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad x < 0$

Ekkor pedig:

$$2x^3 - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Ezért a feltétel akkor teljesül, ha

$$x \in (-\infty, 0) \ \cap \ \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right] = (-\infty, 0)$$

A D halmaz a most meghatározott két intervallum uniója:

$$D = (-\infty, 0) \ \cup \ \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty \right)$$

24.2.1. Órai feladatok / 1b.

Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg?

$$f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - 5x + 7)} \qquad (x \in D)$$

Az előző feladatrészhez hasonlóan járunk el. A „legbelső” függvény polinom, ezért ez minden valós x esetén értelmezve van:

$$x^2 - 5x + 7 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

A logaritmusfüggvény argumentuma pozitív kell legyen, ezért

$$\lg(x^2 - 5x + 7) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x + 7 > 0$$

Végül a gyökjel alatt nemnegatív kifejezésnek kell állnia, ezért

$$\sqrt{\lg(x^2 - 5x + 7)} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x + 7 > 0 \quad \wedge \quad \lg(x^2 - 5x + 7) \geq 0$$

Ezért

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \quad x^2 - 5x + 7 > 0 \quad \wedge \quad \lg(x^2 - 5x + 7) \geq 0 \right\}$$

Oldjuk meg a D-ben szereplő két egyenlőtlenséget, ehhez előbb határozzuk meg a szóban forgó parabola gyökeit:

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Ebből következően

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 5x + 7 > 0$$

Tekintsük most a másik egyenlőtlenséget. Felhasználva a logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedését:

$$\lg(x^2 - 5x + 7) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 7 \geq 10^0 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Az így kapott parabola gyökei:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2)(x-3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{2, 3\}$$

Tehát

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

A D halmaz tehát a két egyenlőtlenség megoldáshalmazának metszete:

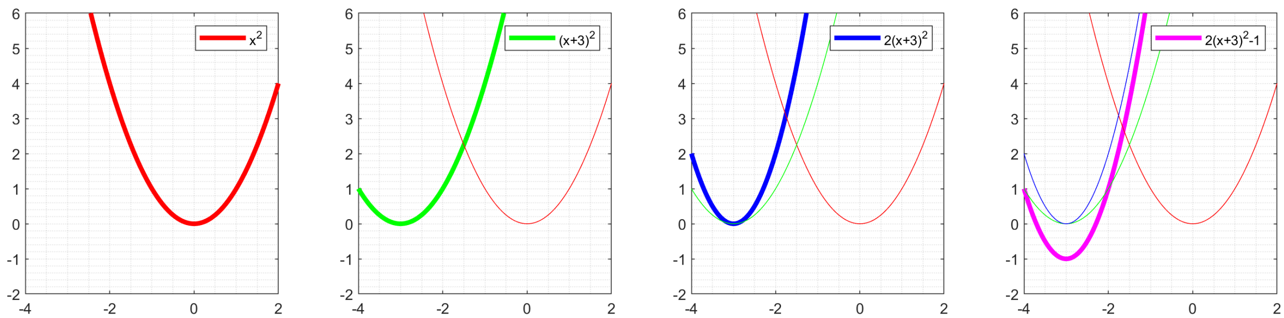
$$D = \mathbb{R} \cap \Big((-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \Big) = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

24.2.1. Órai feladatok / 4a.

Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

A függvényábrázolás lépései megtekinthetők a következő ábrán.



A lépések rendre:

1. Ábrázoljuk az x^2 függvény grafikonját.
2. A grafikont toljuk el balra 3 egységgel.
3. Nyújtsuk kétszeresére függőleges irányban.
4. Végül toljuk el lefelé 1 egységgel.

24.2.1. Órai feladatok / 4b.

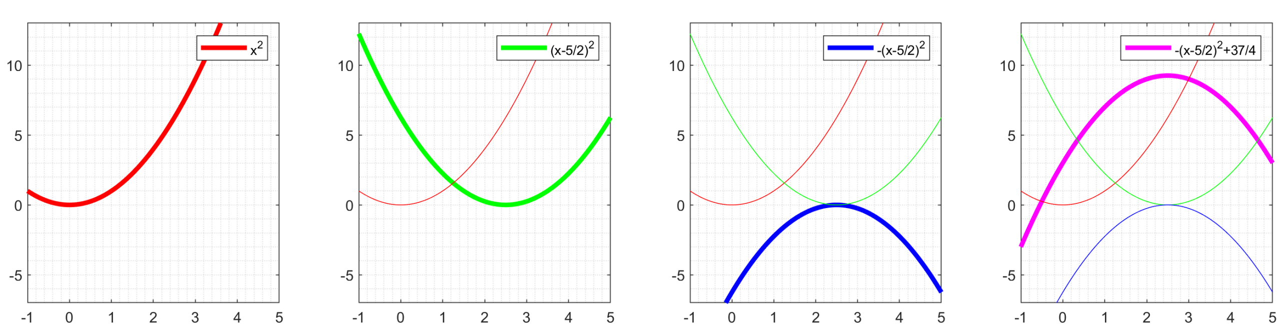
Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f(x) = -x^2 + 5x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Alakítsuk át a kapott kifejetést:

$$f(x) = -(x^2 - 5x) + 3 = -\left[\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \right] + 3 = -\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{37}{4}$$

A függvényábrázolás lépései megtekinthetők a következő ábrán.



A lépések rendre:

1. Ábrázoljuk az x^2 függvény grafikonját.
2. A grafikont toljuk el jobbra $\frac{5}{2}$ egységgel.
3. Tükrözzük az x-tengelyre.
4. Végül toljuk el felfelé $\frac{37}{4}$ egységgel.

24.2.1. Órai feladatok / 4g.

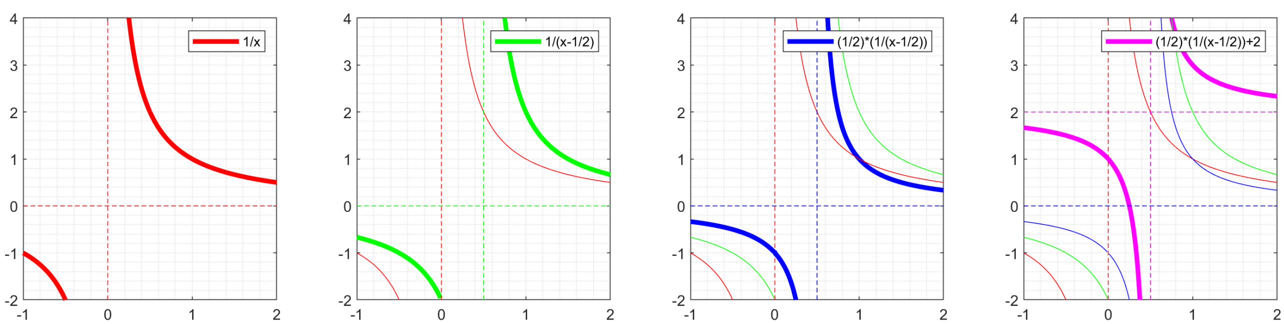
Ábrázoljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x-1} \qquad \left(\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right)$$

Alakítsuk át a kapott kifejezést:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-1}{2x-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4x-1}{2x-1} = 2 \cdot \frac{4x-1}{4x-2} = 2 \cdot \frac{4x-2+1}{4x-2} = \\ & 2\left(1 + \frac{1}{4x-2}\right) = 2 + \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 2 \end{aligned}$$

A függvényábrázolás lépései megtekinthetők a következő ábrán. A tájékozódást megkönnyítendő a hiperbolák aszimptotáit is ábrázoltuk.



A lépések rendre:

1. Ábrázoljuk az $\frac{1}{x}$ függvény grafikonját.
2. A grafikont toljuk el jobbra $\frac{1}{2}$ egységgel.
3. Nyomjuk össze $\frac{1}{2}$-szeresére függőleges irányban.
4. Végül toljuk el felfelé 2 egységgel.

$\boxed{\text{24.2.1. Órai feladatok / 5a.}}$

Legyen

$$f(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad g(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Határozzuk meg, és ábrázoljuk az

$$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad \frac{g}{f}$$

függvényeket!

A függvényeket értelmezési tartományukkal együtt fogjuk megadni:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{f+g} &= \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}, & (f+g)(x) &= x + \sin(x) \\
\mathcal{D}_{f-g} &= \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}, & (f-g)(x) &= x - \sin(x) \\
\mathcal{D}_{f\cdot g} &= \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}, & (f\cdot g)(x) &= x \cdot \sin(x) \\
\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} &= \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\} & & \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}, & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x}{\sin(x)} \\
\mathcal{D}_{\frac{g}{f}} &= \{x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_f \mid f(x) \neq 0\} & & \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{\sin(x)}{x}
\end{aligned}$$

A függvények grafikonja megtekinthető a következő ábrán. Néhány segédvonalat alkalmaztunk: a fekete függőleges vonal jelöli azon x-ek helyét, melyek nincsenek az értelmezési tartományban, zöld vonallal a $\sin(x)$ függvényt ábrázoltuk, pirossal pedig az x függvényt. Az $f \cdot g$ és f/g esetben ugyancsak pirossal a $-x$ függvényt is feltüntettük, a g/f ábrázolásakot pedig ezek reciprokát jelöli a piros vonal, tehát a $\pm\frac{1}{x}$ függvényeket.