16. Lineáris függetlenség

16.1. Az elméleti anyag

16.1.1. Lineáris függetlenség fogalma

16.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer a V vektortérben. Ezt a vektorrendszert lineárisan függetlennek (röviden: függetlennek) nevezzük, ha lineáris kombinációi közül csak a triviális lineáris kombináció eredményez nullvektort, azaz ha

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0\,.$$

A rendszert lineárisan összefüggőnek (röviden: összefüggőnek) nevezzük, ha nem független, azaz, ha:

$$\exists\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots\, \lambda_k \in \mathbb{K},\; \lambda_i \text{ nem mind } 0 : \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0\,.$$

16.2. Megjegyzések.

1. A $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$ egyenletet összefüggőségi egyenletnek nevezzük.
2. Egyszerűen megmutatható, hogy az a vektorrendszer, amely tartalmaz azonos vektorokat, vagy pedig tartalmazza a nullvektort, lineárisan összefüggő. Ezért lineárisan független rendszerben nem lehet nullvektor, és nem lehetnek benne azonos vektorok.
3. A vektortereknél felírt alapvető tulajdonságokból következik, hogy az egyetlen vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a benne lévő egyetlen vektor nem a nullvektor.
4. Két nem nullvektor akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha egyik a másik konstans-szorosa.
5. $\mathbb{R}$ feletti vektorterekben a lineárisan összefüggő két nem nullvektort párhuzamosaknak nevezzük. A két vektort azonos irányúnak nevezzük, ha egymás pozitív konstans-szorosai, ellentétes irányúnak, ha egymás negatív konstans-szorosai.

16.3. Példák.

1. Elemi geometriai módszerekkel megmutatható, hogy a tér helyvektorainak terében:
   - Két, egy egyenesbe eső vektor lineárisan összefüggő.
   - Két, nem egy egyenesbe eső vektor lineárisan független.
   - Három, egy síkba eső vektor lineárisan összefüggő.

– Három, nem egy síkba eső vektor lineárisan független.

2. $\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok $e_1, \dots, e_n$ rendszere (l. az 15.8. példák 3. pontját) lineárisan független, ugyanis az összefüggőségi egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

amiből következik, hogy $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

16.4. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha egy lineárisan független rendszerből elhagyunk (de nem minden tagját), akkor a visszamaradó rendszer lineárisan független marad, ha pedig egy lineárisan független rendszert bővítünk, nem minden esetben kapunk lineárisan független rendszert. Ilyen értelemben a lineárisan független rendszerek a „kis” rendszerek. A későbbiek során fontos szerepet kapnak a „maximális” független rendszerek (v.ö. még 15.9. megjegyzés).

A független rendszerek egyik jellemző tulajdonsága, hogy ha egy vektort elő lehet állítani a független rendszer lineáris kombinációjaként, akkor csak egyféleképpen lehet előállítani. Ezt fejezi ki a következő tétel:

16.5. Tétel. (egyértelmű előállítás tétele) *Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, továbbá $x \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k)$. Ekkor*

a) Ha az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer lineárisan független, akkor x egyértelműen (azaz csak egyféleképpen) állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

b) Ha az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor x végtelen sokféleképpen állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. a)
Tegyük fel, hogy

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \,,$$

és rendezzük át a jobb oldali egyenlőséget (0-ra redukálás, közös szumma, kiemelés):

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0 \,.$$

Ebből – az $x_1, \dots x_k$ rendszer függetlenségét felhasználva – azt kapjuk, hogy $\lambda_i - \mu_i = 0$, azaz, hogy $\lambda_i = \mu_i \quad (i = 1, \dots, k)$.

b)

Legyen x egy előállítása:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \,.$$

Mivel a rendszer linárisan összefüggő, ezért léteznek a nem mind 0 α_i együtthatók úgy, hogy

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \,.$$

Szorozzuk be ezt az egyenletet egy tetszőleges $\beta \in \mathbb{K}$ számmal, majd adjuk össze az x-et előállító egyenlettel:

$$\begin{aligned} x + 0 &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta\alpha_i x_i \\ x &= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta\alpha_i) x_i \,. \end{aligned}$$

A lineáris összefüggőség miatt van olyan j index, hogy $\alpha_j \neq 0$. Ekkor viszont a $\lambda_j + \beta\alpha_j$ együttható végtelen sokféle értéket vesz fel, ha β befutja $\mathbb{K}$-t.

□

16.1.2. Tételek vektorrendszerekről

Lássunk néhány tételt a független, az összefüggő és a generátorrendszerek kapcsolatáról.

16.6. Tétel. (összefüggő rendszer szűkítése)
Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy lin. összefüggő rendszer. Ekkor

$$\exists\, i \in \{1,\, 2,\, \ldots\, k\} : \quad \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \,.$$

Szavakban: Összefüggő rendszerből elhagyható valamely vektor úgy, hogy a generált altér nem változik. Másképpen fogalmazva: összefüggő rendszerben legalább egy vektor felesleges a generált altér szempontjából.

Bizonyítás. A rendszer összefüggősége miatt léteznek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ nem mind 0 számok úgy, hogy

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0 \,.$$

Legyen i egy olyan index, amelyre $\lambda_i \neq 0$. Legyen továbbá

$$W_1 := \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \quad \text{és} \quad W_2 := \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \,.$$

Azt kell igazolnunk, hogy $W_1 = W_2$.

A $W_1 \subseteq W_2$ tartalmazás nyilvánvaló, ugyanis:

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k) = W_2$$

miatt a W_2 altér lefedi az $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$ vektorrendszert. Mivel W_1 e rendszer legszűkebb lefedő altere, ezért $W_1 \subseteq W_2$.

A fordított irányú, $W_2 \subseteq W_1$ tartalmazás igazolásához induljunk ki abból, hogy nyilvánvalóan

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = W_1\,.$$

Most igazolni fogjuk, hogy $x_i \in W_1$. Ehhez a már felírt

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0\,.$$

összefüggőségi egyenletből rendezzük ki x_i-t ($\lambda_i \neq 0$ miatt ez lehetséges):

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) \cdot x_j\,.$$

Azt kaptuk, hogy x_i kifejezhető az $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát x_i valóban benne van a $\operatorname{Span}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = W_1$ altérben.

Így tehát a W_1 altér lefedi az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszert, s mivel W_2 e rendszer legszűkebb lefedő altere, következésképpen $W_2 \subseteq W_1$.

A $W_1 \subseteq W_2$ és a $W_2 \subseteq W_1$ tartalmazási relációk pedig együtt azt jelentik, hogy $W_1 = W_2$

□

16.7. Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderült, hogy az a vektor biztosan felesleges (vagyis elhagyható), amelyiknek az együtthatója valamelyik összefüggőségi egyenletben nem 0.

16.8. Tétel. (összefüggő rendszerré bővítés) *Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, továbbá $x \in V$. Ekkor*

$$x \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1,\ \dots,\ x_k,\ x \text{ lineárisan összefüggő}.$$

Bizonyítás. Mivel $x \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k)$, ezért x felírható a generátorrendszer lineáris kombinációjaként:

$$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}: \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k\,.$$

Átrendezés után:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + (-1) \cdot x = 0\,.$$

Mivel $-1 \neq 0$, ezért a rendszer valóban összefüggő. □

16.9. Következmény. (független rendszer szűkítése) Lineárisan független rendszerből (tegyük fel, hogy legalább két tagú) bármely vektort elhagyva, a visszamaradó rendszer nem ugyanazt az alteret generálja, mint az eredeti rendszer.

16.10. Tétel. (független rendszer bővítése) *Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy lineárisan független rendszer, továbbá legyen $x \in V$. Ekkor*

a) $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \quad \Longrightarrow \quad x_1, \ldots, x_k, x$ *lineárisan összefüggő*

b) $x \notin \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \quad \Longrightarrow \quad x_1, \ldots, x_k, x$ *lineárisan független*

Bizonyítás. Az a) rész az előző tétel speciális esete.

A b) rész bizonyításához induljunk ki az összefüggőségi egyenletből:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda \cdot x = 0\,,$$

és mutassuk meg, hogy itt minden együttható 0.

Először azt fogjuk megmutatni, hogy $\lambda = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor x-et kifejezhetjük az összefüggőségi egyenletből:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k\,.$$

Ebből pedig $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$ következik, ami ellentmond a b) rész feltételének. ezért tehát $\lambda = 0$.

Helyettesítsük a kapott eredményt az összefüggőségi egyenletbe:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + 0x = 0\,.$$

Az eredeti rendszer függetlensége miatt ebből

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

következik, tehát az $x_1, \ldots, x_k, x$ rendszer valóban független. □

16.11. Következmény. Legyen $x_1, \ldots, x_k, x \in V$. Ha $x_1, \ldots, x_k$ lineárisan független és $x_1, \ldots, x_k, x$ lineárisan összefüggő, akkor

$$x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)\,.$$

16.1.3. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a lineáris függetlenség fogalmát véges vektorrendszerre

2. Definiálja a lineáris összefüggőség fogalmát véges vektorrendszerre (az nem elég, hogy „nem lin. független")

3. Adjon meg két példát független, és két példát összefüggő vektorrendszerre

4. Milyen állítást tanultunk a nullvektort tartalmazó rendszer lineáris függetlenségéről?

5. Milyen állítást tanultunk az azonos vektorokat tartalmazó rendszer lineáris függetlenségéről?

6. Mondja ki az egyértelmű előállítás tételét

7. Mondja ki az összefüggő rendszerek szűkítéséről szóló tételt

8. Mondja ki az $x_1, \ldots, x_k, x$ vektorrendszer összefüggőségéről szóló tételt, ahol $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$.

9. Mondja ki a lineárisan független rendszer bővítéséről szóló tételt.

16.1.4. Bizonyítandó tételek

1. A kanonikus egységvektorok függetlensége

2. Az egyértelmű előállításról szóló tétel

3. Az összefüggő rendszerek szűkítéséről szóló tétel

4. Az $x_1, \ldots, x_k, x$ vektorrendszer összefüggőségéről szóló tétel, ahol $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$.

5. A lineárisan független rendszer bővítéséről szóló tétel.

16.2. Feladatok

16.2.1. Órai feladatok

1. Döntsük el, hogy az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek függetlenek vagy összefüggők:
a)
$$v_1 = (1, 2, 2, -1)\ ; \quad v_2 = (4, 3, 9, -4)\ ; \quad v_3 = (5, 8, 9, -5).$$
b)
$$v_1 = (1, 2, 3, 1)\ ; \quad v_2 = (2, 2, 1, 3)\ ; \quad v_3 = (-1, 2, 7, -3).$$

2. Döntsük el, hogy a
$$v_1 = (1, 2, 3, 1), \quad v_2 = (2, 2, 1, 3), \quad v_3 = (-1, 2, 7, -3)$$
$\mathbb{R}^4$-beli vektorok lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

Elhagyható-e valamelyik vektor a fenti v_1, v_2, v_3 vektorrendszerből úgy, hogy a generált altér ne változzon? Ha igen, adjunk meg ilyen vektort.

3. A $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ $\mathbb{R}^3$-beli lineárisan független vektorrendszert bővítsük ki olyan $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorral, hogy a kibővített v_1, v_2, v_3 vektorrendszer

(a) összefüggő legyen
(b) független legyen

16.2.2. További feladatok

1. Legyen $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (5, 6, -1)$, $v_3 = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Döntsük el, hogy ez a vektorrendszer lineárisan független vagy összefüggő

2. Döntsük el, hogy a
$$v_1 = (-1, 0, 2, 1), \quad v_2 = (3, 4, -1, -5), \quad v_3 = (1, 4, 3, -3)$$
$\mathbb{R}^4$-beli vektorok lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

Elhagyható-e valamelyik vektor a fenti v_1, v_2, v_3 vektorrendszerből úgy, hogy a generált altér ne változzon? Ha igen, adjunk meg ilyen vektort.

3. A $v_1 = (1, 4, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 5, 6, 2)$ $\mathbb{R}^4$-beli lineárisan független vektorrendszert bővítsük ki olyan $v_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorral, hogy a kibővített v_1, v_2, v_3 vektorrendszer

(a) összefüggő legyen
(b) független legyen