7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

7.1. Kiegészítés az elmélethez

Kijelentések

Az „*állítás*” és a „*kijelentés*” szavakat azonos értelemben használjuk, és alapfogalomnak tekintjük. Jelölésben gyakran használjuk a $p, q, r \dots$ vagy az $A, B, C \dots$ betűket. Szintén alapfogalomnak tekintjük az állítások *igazságtartalmá*nak, más szóval *logikai értéké*nek fogalmát, ami kétféle lehet: igaz, hamis. Néhány példa:

1. $5 > 4$. Logikai értéke: igaz. Más szóval: az állítás *igaz.*

2. $10 \geq 25$. Ez az állítás *hamis.*

Néha a kijelentés egy vagy több változótól függ, amely változók egy megadott halmazból (ez az ún. *alaphalmaz*) vehetik értéküket. Például:

1. $x + 3 \leq 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

2. $x^2 + y^2 > 1 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

Az ilyen kijelentéseket *nyitott*nak is szokás nevezni. A nyitott kijelentés igazságtartalma attól függ, hogy a változója helyére milyen értéket írunk. Például az előbb felírt $x+3 \leq 5$ állítás $x = 1$ esetén igaz, $x = 8$ esetén hamis.

A változók azon értékeinek halmazát, amelyre a kijelentés igaz, *igazsághalmaz*nak nevezzük.

Műveletek kijelentésekkel, igazságtábla

Kijelentésekkel újabb kijelentéseket definiálhatunk a következő alaműveletek segítségével: *tagadás* vagy *negáció* ($\neg$), *konjunkció* ($\wedge$), *diszjunkció* ($\vee$),*implikáció* ($\Longrightarrow$) és *ekvivalencia* ($\Longleftrightarrow$). Ezeket szokás egy úgynevezett *igazságtábla* segítségével bevezetni, ahol az oszlopokban megadjuk a műveletekben előforduló logikai állítások és az új kijelentések logikai értékét, figyelembe véve a szóbanforgó kijelentések összes lehetséges értékét.

p	q	$\neg$ p	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Longrightarrow$ q	p $\Longleftrightarrow$ q
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

Az igazságtáblát jól fogjuk tudni használni összetettebb kijelentések kiértékeléséhez is (lásd órai feladatok).

Kvantorok

Vezessük be a $\forall$ jelet a „minden”, a $\exists$ jelet a „létezik” („van olyan”) szó rövidítésére. Ezeket a jeleket *kvantorjelek*nek, röviden *kvantorok*nak nevezzük. A kvantorok segítségével egy nyitott kijelentésből új állítások képezhetőek. Példák:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x^2 + 1 > 0.$

   Logikai értéke nyilvánvalóan igaz.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Logikai értéke hamis, mivel pl. $x = 6$ esetén nem igaz.

3. $\exists\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Ez az állítás igaz, mivel pl. $x = 0$ esetén igaz.

4. $\exists\, x \in [7, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   Az állítás hamis, mivel $x \geq 7$ esetén $x + 3 \geq 10$.

5. $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Logikai értéke: hamis, mivel pl. $(x, y) = (0, 0)$ esetén nem igaz.

6. $\forall\, y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Az állítás nyitott, változója $x \in \mathbb{R}$.

7. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   E kijelentés logikai értéke: igaz. Ugyanis pl. $x = 2$ esetén az egyenlőtlenség így néz ki:
   $$4 + y^2 > 1,$$
   ami minden $y \in \mathbb{R}$ esetén igaz.

8. $\forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5 \qquad (y \in \mathbb{R}).$

   Az állítás nyitott, változója y.

9. $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   A kapott kijelentés már nem nyitott, logikai értéke eldönthető, mégpedig: hamis. Vegyünk ugyanis egy $y \in \mathbb{R}$ számot. Ha $y \leq 2$, akkor pl. $x := 3$ választással $3 \in [y, +\infty)$, de $3 + 3 \leq 5$ nem igaz. Ha pedig $y > 2$, akkor pl. $x := y + 1$ választással $y + 1 \in [y, +\infty)$, de $y + 1 + 3 \leq 5$ nem igaz. Tehát valóban nem létezik ilyen $y \in \mathbb{R}$.

Kvantoros kifejezések tagadása

Tekintsük az utolsó példában szereplő

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5$$

állítást. Könnyen meggondolható, hogy ennek tagadása:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in [y, +\infty): \quad x+3>5.$$

Formálisan: a kvantorjeleket megcseréljük, s a végén az állítás tagadását vesszük.

„Ha-akkor" szerkezetű állítások (következtetések, implikációk)

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol az x változó az Ω alaphalmazból veheti az értékeit. Ekkor a

„ha az $A(x)$ állítás igaz, akkor a $B(x)$ állítás is igaz"

kijelentést *következtetés*nek nevezzük, és röviden így jelöljük:

$$A(x) \Longrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazásai:

- „Az $A(x)$ állításból következik a $B(x)$ állítás."
- „$A(x)$-ből következik $B(x)$."
- „Az $A(x)$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $B(x)$ igaz legyen."
- „$A(x)$ elégséges feltétele $B(x)$-nek." Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ bal oldalán áll az elégséges feltétel.
- „A $B(x)$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $A(x)$ igaz legyen."
- „$B(x)$ szükséges feltétele $A(x)$-nek." Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ jobb oldalán áll a szükséges feltétel.
- „Minden olyan $x \in \Omega$ esetén, amelyre az $A(x)$ állítás igaz, igaz a $B(x)$ állítás is."

  Ezt tömören is felírhatjuk a $\forall$ kvantorral:

  $$\forall\, x \in \Omega,\ A(x): \quad B(x).$$

Megjegyezzük, hogy a „ha-akkor" szerkezetű állításnak a $\forall$ kvantorral való átfogalmazása sokszor megkönnyíti a megértést, a bizonyítást, továbbá az állítás tagadását.

Például: tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ következtetést. Ennek néhány megfogalmazása:

- Ha $x \geq 3$, akkor $x > 1$.
- $x \geq 3$-ból következik, hogy $x > 1$.
- Az $x \geq 3$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $x > 1$ igaz legyen.
- $x \geq 3$ elégséges feltétele $x > 1$-nek.

- Az $x > 1$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $x \geq 3$ igaz legyen.
- $x > 1$ szükséges feltétele $x \geq 3$-nak.
- Minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre az $x \geq 3$ állítás igaz, igaz az $x > 1$ állítás is. Tömör felírása:
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 : \quad x > 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a vizsgált következtetés igaz.

„Akkor és csak akkor" szerkezetű állítások (ekvivalenciák):

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol $x \in \Omega$. A „$B(x) \Longrightarrow A(x)$" állítást az „$A(x) \Longrightarrow B(x)$" állítás *megfordításá*nak nevezzük. Ha egy igaz következtetés megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy a következtetés *megfordítható.*

Példaként tekintsük az előbbiekben vizsgált

$$x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$$

(igaz) következtetést. Ennek megfordítása az $x > 1 \Longrightarrow x \geq 3$ állítás, ami szintén sokféleképpen fogalmazható meg. Például így:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 1 : \quad x \geq 3.$$

Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy hamis állításhoz jutottunk, mivel pl. $x = 2$ esetén $2 \in \mathbb{R}$ és $2 > 1$ is teljesül, azonban $2 \geq 3$ már nem igaz. Tehát az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ állítás nem fordítható meg.

Ha az $A(x) \Longrightarrow B(x)$ következtetés is és a megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy

„$A(x)$ *ekvivalens* $B(x)$-szel".

Ez tehát az alábbit jelenti:

$$(\,A(x) \Longrightarrow B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,B(x) \Longrightarrow A(x)\,).$$

Az így kapott állítást *ekvivalenciá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazások:

- „$A(x)$ és $B(x)$ ekvivalensek."
- „Az $A(x)$ állítás *akkor és csak akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."
- „Az $A(x)$ feltétel *szükséges és elégséges* ahhoz, hogy a $B(x)$ állítás igaz legyen."
- „Az $A(x)$ állítás *pontosan akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."

Mivel az ekvivalencia két „ha-akkor” szerkezetű állításból épül fel, a „ha-akkor” szerkezetű állítások pedig megfogalmazhatóak a $\forall$ kvantorjellel, ezért az ekvivalencia is megfogalmazható kvantorjelekkel. Az

$$A(x) \iff B(x)$$

ekvivalencia így fogalmazható át:

$$(\,\forall\, x \in \Omega,\ A(x): \quad B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,\forall\, x \in \Omega,\ B(x): \quad A(x)\,).$$

Ez az átfogalmazás különösen az ekvivalenciák bizonyításánál hasznos.

Példaként tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$$

következtetést. Ennek megfordítása az $x^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 0$ állítás. Könnyen megmutatható, hogy az állítás is és a megfordítása is igaz. Tehát igaz az alábbi ekvivalencia:

$$x \neq 0 \iff x^2 > 0\ .$$

Néhány megfogalmazása:

- Az $x \neq 0$ és az $x^2 > 0$ állítások ekvivalensek.
- $x \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $x^2 > 0$.
- Az $x \neq 0$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy $x^2 > 0$ igaz legyen.
- $x \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 > 0$.

7.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \wedge q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
2. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \Longrightarrow q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
3. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \iff q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
4. Adja meg a p állítás esetén a $\neg p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
5. Adja meg az A, B állítások esetén az $A \vee \neg B$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott

   $$A \vee \neg B$$

   kijelentés?
6. Adottak az $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(x)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

(a) $f(x) = g(x) \iff A(x)$;
(b) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x) \iff A(x)$;
(c) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x) \iff A(x)$.

7. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):

$$A(n): \quad 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

Igazak-e az allábbi állítások:

(a) $A(0), A(1), A(2)$.
(b) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \; A(N)$ hamis.
(c) $\exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \in \mathbb{N}\, n \geq N : \; A(n)$ igaz.

8. Adja meg a fenti (c) állítás tagadását, azaz tagadja le az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \in \mathbb{N}\;\; n \geq N : 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

9. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás, vagy a tagadása igaz:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\;\; \exists\, y \in [x; +\infty) : y - 5 < 21.$$

10. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(0; 1), B(1; 0), C(-1; 0)$ és $D(x+y; x-y)$ pontok egy $ABCD$ négyzetet alkossanak.

11. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy a $C(x; y)$ pont egyenlő távolságra legyen az $A(-1; 0)$ és $B(1; 2)$ pontoktól.

12. Írja le matematikai jelöléssekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

(a) Két négyzetszám összege pontosan akkor nulla, ha mindkét szám nulla;
(b) Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két megfelelő oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.
(c) Egy szám 6−tal való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy osztható legyen 2−vel is és 3−mal is.
(d) Egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pont akkor és csak akkor van rajta az origó közepű 2 sugarú körvonalon, ha koordinátáinak négyzetösszege 4.
(e) Ha egy szám négyzete 4, akkor ez a szám 2.
(f) Egy szám négyzete ponotsan akkor 4, ha ennek a számnak az abszolút értéke 2.
(g) Egy valós szám távolsága 1−től akkor és csak akkor legfeljebb 3, ha a szám legalább −2 és legfeljebb 4.
(h) A természetes számok halmazának van legkisebb eleme.

13. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x = \sqrt{16} \quad \square \quad x = 4$;

    (b) $4x^2 = 16 \quad \square \quad x = -2$;

    (c) $x^2 > 0 \quad \square \quad x \neq 0$;

14. Írja fel kvantorokkal az alábbi állítást és döntse el, hogy igaz-e a kapott állítás. Írja fel ennek tagadását is.

    Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy:
    $$\frac{n^4 - n^2}{n+1} > 4000.$$

15. Döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás. Írja fel ennek tagadását is.
    $$\exists\, K > 0 \ \ \forall\, x \in (K; +\infty): \ \ \frac{x^2 + x}{x^3 + 10} < \frac{1}{1000}.$$

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

Kijelentések kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $(A \wedge B) \vee C \ = \ (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

(b) $(A \vee B) \wedge C \ = \ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

(c) $\neg(\neg A) \ = \ A$;

(d) $\neg(A \wedge B) \ = \ \neg A \vee \neg B$;

(e) $\neg(A \vee B) \ = \ \neg A \wedge \neg B$;

(f) $A \Rightarrow B \ = \ \neg A \vee B$;

(g) $\neg A \Rightarrow \neg B \ = \ B \Rightarrow A$;

(h) $(\neg A \vee B) \Rightarrow B \ = \ A \vee B$;

2. Legyen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ és $D(x)$ a következő négy nyitott kijelentés az $\mathbb{R}$ alaphalmazon:

$A(x):$ x pozitív valós szám;

$B(x):$ x olyan valós szám, amelyre igaz, hogy $x^2 + x - 6 = 0$;

$C(x):$ $x = -3$;

$D(x):$ $x = 2$.

Fogalmazzuk meg különféle módokon az alábbi állításokat, és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

1. $C \Longrightarrow B$;	2. $C \Longrightarrow \neg A$;	3. $D \Longrightarrow A$;
4. $D \Longrightarrow B$;	5. $B \Longrightarrow (C \vee D)$;	6. $B \iff (C \vee D)$;
7. $(A \wedge B) \iff D$;	8. $\neg(\neg A \wedge D)$;	9. $(\neg A \wedge B) \iff C$.

3. Tekintsük az alábbi következtetéseket (minden változó a valós számok halmazából veszi az értékét):

(a) $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$;

(b) $xy = xz \Longrightarrow y = z$;

(c) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$;

(d) $x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75 \Longrightarrow 25 \le x^2 + y^2 \le 225$.

Fogalmazzuk meg ezeknek az állításoknak a megfordítását! Mindegyik esetben döntsük el, hogy a következtetés vagy a megfordítása igaz-e, esetleg egyik sem!

4. Tekintsük az

i) $n \ge 5$ $(n \in \mathbb{N})$;

ii) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03$ $(n \in \mathbb{N})$;

iii) $x^2 + x - 1 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

nyitott kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

5. Tekintsük az

$$\frac{1}{n} < 0,01 \ \ (n \in \mathbb{N}^+)$$

nyitott kijelentést!

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\forall\, n \geq N: \ \ \frac{1}{n} < 0,01 \ \ (N \in \mathbb{N}^+).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+ \ \forall\, n \geq N: \ \ \frac{1}{n} < 0,01.$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

6. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat! Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz−e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

Megjegyzés: A (c) pontbeli állítást az alábbi két megfogalmazásban is szokás mondani:

a) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

b) Az $\dfrac{n^2}{10n-7}$ *tört nagyobb* 100*−nál, ha n elég nagy természetes szám.*

7. Fogalmazzuk meg kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntsük el, hogy igazak−e vagy sem! Írjuk fel tagadásukat is!

(a) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$n^4 - 35n^3 - 15n^2 + 13n + 10 > 2000.$$

(b) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0,05.$$

(c) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} > 230.$$

7.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $A \wedge \neg(B \wedge A) \;=\; A \wedge \neg B$;

(b) $A \vee \neg(B \vee A) \;=\; A \vee \neg B$;

(c) $\neg((A \vee B) \wedge \neg A) \;=\; A \vee \neg B$;

(d) $A \Leftrightarrow B \;=\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$;

(e) $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A \;=\; A \vee \neg B$;

(f) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B \;=\; \neg A$;

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén tekintsük az alábbi kijelentéseket:

$A(n):$ n osztható 10-zel;

$B(n):$ n osztható 5-tel;

$C(n):$ n osztható 2-vel.

Fogalmazzuk meg különféle módokon a következő állításokat és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

(a) $A \Longrightarrow B$;

(b) $A \iff B \vee C$.

(c) $A \iff B \wedge C$.

(d) $A \Longrightarrow C$.

Ellenőrizzük, hogy az első állítás megfordítása, azaz a $B \Longrightarrow A$ következtetés nem igaz!

Mi a helyzet a $C \Longrightarrow A$ következtetéssel?

3. Fogalmazzuk meg különféle módokon a megadott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

(a) Két valós szám egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a négyzetük is egyenlő legyen.

(b) Egy másodfokú egyenlet diszkriminánsának a pozitivitása elégséges ahhoz, hogy az egyenletnek legyen valós gyöke.

(c) Egy négyszög oldalainak egyenlősége szükséges ahhoz, hogy az illető négyszög négyzet legyen.

(d) Egy négyszög szögeinek egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a szóban forgó négyszög deltoid legyen.

(e) Három szakasz hosszának az egyenlősége elégséges ahhoz, hogy ebből a három szakaszból, mint oldalakból háromszöget szerkeszthessünk.

(f) Ahhoz, hogy két valós szám összege hét legyen, elégséges, de nem szükséges, hogy az egyik szám öt, a másik pedig kettő legyen.

4. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

(a) egy valós szám négyzete pozitív legyen?

(b) az $ax^2 + bx + c$ másodfokú kifejezés minden x valós szám esetén pozitív (nem-negatív) (negatív) (nem-pozitív) legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok.

(c) az a, b befogójú és c átfogójú háromszög derékszögű legyen?

(d) valamely konvex négyszög érintőnégyszög legyen?

(e) adott szakasz egy térbeli pontból derékszög alatt látsszék?

(f) az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok és $a \neq 0$.

(g) az x valós számhoz legyen olyan y valós szám, hogy $y^2 = x$?

Fogalmazzuk meg különféle módokon a kapott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

5. Az ebben a feladatban szereplő nyitott kijelentések közös alaphalmaza $\mathbb{R}$. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

(a) $x = \sqrt{4} \quad \square \quad x = 2;$

(b) $x^2 = 4 \quad \square \quad x = 2;$

(c) $x^2 > 0 \quad \square \quad x > 0;$

(d) $x^2 < 9 \quad \square \quad x < 3;$

(e) $x(x^2 + 1) = 0 \quad \square \quad x = 0;$

(f) $x(x + 3) < 0 \quad \square \quad x > -3$.

6. Tekintsük az

$$\frac{n^2}{2n+1} > 100 \quad (n \in \mathbb{N})$$

nyitott kijelentést!

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

7. Tekintsük az

i) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03 \quad (n \in \mathbb{N});$

ii) $\dfrac{n^2+5}{2n-1} > 213 \quad (n \in \mathbb{N});$

iii) $\dfrac{n^2}{2n+1} > 308 \quad (n \in \mathbb{N});$

iv) $\dfrac{73+10n-n^2}{2n+1} < -157 \quad (n \in \mathbb{N});$

kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\forall n \geq N : \quad A(n) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\exists N \in \mathbb{N}^+ \; \forall n \geq N : \quad A(n).$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

8. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat. Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz-e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(d) Minden elég nagy természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(e) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{1}{2}n^3 - 25n^2 - 14n + 9 > 1000.$$

(f) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{n^3+4n^2-3n+20}{3n^5-7n^4+4n^3-12n^2-12n+5} < 0,01.$$

(g) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{2n^5-25n^4-17n^3+4n^2+5n-4}{18n^3+17n^2-16n+15} > 185.$$