ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
23. Valós euklideszi terek II.
az "Órai feladatok" szakasz 1c., 2., 3., 4. feladatainak megoldása
(írta: Csörgő István)

Megjegyzés: Az áttekinthetőbb számítások érdekében a vektorok oszlop-írásmódját is alkalmazni fogjuk.

23.2.1. Órai feladatok / 1c.

Feladat: Adott az

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,-1,-1,1), \qquad u_3 = (-1,0,0,1)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben. Bontsuk fel az $x = (2,1,3,1) \in \mathbb{R}^4$ vektort a

$$W := \operatorname{Span}(u_1,\, u_2,\, u_3) \subseteq \mathbb{R}^4$$

altér szerinti párhuzamos és merőleges komponensekre.

Megoldás:

Az előző alkalommal már ellenőriztük, hogy a megadott u_1, u_2, u_3 vektorrendszer nullvektort nem tartalmazó O. R..

Így az O.R.-re vonatkozó felbontási képletekkel (ld. a 23.3. tétel előtti képleteket) számolhatunk. A párhuzamos komponens:

$$P(x) = \frac{\langle x,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle}\cdot u_1 + \frac{\langle x,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle}\cdot u_2 + \frac{\langle x,\, u_3\rangle}{\langle u_3,\, u_3\rangle}\cdot u_3 =$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{7}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}7-1+2\\7+1-0\\7+1-0\\7-1-2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

A merőleges komponens:

$$Q(x) = x - P(x) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

23.2.1. Órai feladatok / 2.

Feladat: Állítsunk elő az $\mathbb{R}^4$ térben a

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

lineárisan független vektorrendszerrel ekvivalens ortogonális rendszert (O.R.-t) és ekvivalens ortonormált rendszert (O.N.R.-t).

Megoldás:

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazzuk:

$$u_1 = b_1 = (1,1,1,1),$$
$$u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\\3\\-1\\-1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3\\3\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\3\\-1\\-1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\2\\-2\\-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix}$$

Az utolsó lépésben a vektor hosszát felére csökkentettük, azaz megszoroztuk $\frac{1}{2}$-del (ld. 23.5. Megjegyzések/2). Ezt jelöli a $\sim$ jel.

Folytassuk az ortogonalizációt:

$$u_3 = b_3 - \frac{\langle b_3,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 - \frac{\langle b_3,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\\0\\6\\8 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2\\0\\6\\8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2\\0\\6\\8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\\0\\6\\8 \end{pmatrix} - \frac{12}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{-16}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}.$$

Az ekvivalens O.R. tehát

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,1,-1,-1), \quad u_3 = (-1,1,-1,1).$$

Az ekvivalens O.N.R. előállításához végezzük el a normálást. Mivel

$$||u_1|| = ||(1,1,1,1)|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$||u_2|| = ||(1,1,-1,-1)|| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$||u_3|| = ||(-1,1,-1,1)|| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

ezért az ekvivalens O.N.R.:

$$e_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \quad e_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

23.2.1. Órai feladatok / 3.

Feladat: Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

vektorai által generált W alterében.

Megoldás:

Az előző feladatban előállítottunk a megadott b_1, b_2, b_3 rendszerrel ekvivalens O.R.-t:

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,1,-1,-1), \quad u_3 = (-1,1,-1,1)\,.$$

Ez az O.R. tehát generátorrendszer a W altérben. Továbbá ez a rendszer nem tartalmaz nullvektort, ezért lineárisan független is.

Mindezek alapján tehát u_1, u_2, u_3 ortogonális bázis a W altérben.

Hasonló indoklással kapjuk, hogy az előző feladatban meghatározott

$$e_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \quad e_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

O.N.R. egyúttal a W altér ortonormált bázisa.

23.2.1. Órai feladatok / 4.

Feladat:

a) Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 = 0,\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

alterében.

b) Bontsuk fel az $x := (3, 4, -3, 5) \in \mathbb{R}^4$ vektort az előző pontbeli W altérrel párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

c) Melyik mátrix nulltere (magja) a fenti W altér?

Megoldás:

A W altér a

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 &= 0 \\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer $\mathcal{M}_h$ megoldástere. Így az ismert módon meg tudjuk határozni egy bázisát. Fejezzük ki az első egyenletből y_3-at:

$$y_3 = -3y_1 - 2y_2 + 2y_4\,.$$

Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe, rendezzünk, majd fejezzük ki y_2-őt

$$\begin{aligned} 5y_1 + 4y_2 + 3(-3y_1 - 2y_2 + 2y_4) + 2y_4 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 - 4y_4 &= 0 \\ y_2 &= -2y_1 + 4y_4 \end{aligned}$$

Tehát y_2, y_3 kötött ismeretlenek, y_1, y_4 pedig szabad ismeretlenek lettek. Az általános megoldás:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -2y_1 + 4y_4 \\ y_1 - 6y_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

amiből leolvasható a $W = \mathcal{M}_h$ altér egy bázisa:

$$b_1 = (1, -2, 1, 0), \qquad b_2 = (0, 4, -6, 1)\,.$$

Erre a bázisra alkalmazzuk a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást:

$$u_1 = b_1 = (1, -2, 1, 0),$$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-14}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

W egy ortogonális bázisa tehát

$$u_1 = (1, -2, 1, 0), \qquad u_2 = (7, -2, -11, 3)\,.$$

Az O.N.B. előállításához normáljuk az előbb kapott O.B.-t:

$$||u_1|| = ||(1, -2, 1, 0)|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{6}$$

$$||u_2|| = ||(7, -2, -11, 3)|| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-11)^2 + 3^2} = \sqrt{183}\,,$$

ezért a keresett O.N.B.:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1, -2, 1, 0), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{183}} \cdot (7, -2, -11, 3)\,.$$

b) Alkalmazzuk a felbontás képleteit:

$$P(x) = \frac{\langle x,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 + \frac{\langle x,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2 =$$

$$= \frac{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-8}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{61}{183} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{-4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4+7 \\ 8-2 \\ -4-11 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = x - P(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Mivel a W altér a

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 &= 0 \\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer $\mathcal{M}_h$ megoldástere, ezért egyúttal az együtthatómátrix nulltere (magja) is. Tehát

$$W = \mathrm{Ker}\,(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix})$$