ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
12. Mátrixok
az "Órai feladatok" szakasz 2., 3., 4. feladatainak megoldása
(írta: Czeglédi Gábor, Csörgő István)

12.2.1. Órai feladatok / 2.

$A + B$ kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1+0 & 3+2 \\ 0+1 & 2+3 & 5+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$A - B$ kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3 & 1-0 & 3-2 \\ 0-1 & 2-3 & 5-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$2A - 3B$ kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2\cdot 2 & 1\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ 0\cdot 2 & 2\cdot 2 & 5\cdot 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 0\cdot 3 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 3 & 3\cdot 3 & -1\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4-9 & 2-0 & 6-6 \\ 0-3 & 4-9 & 10-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$A + C$ kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = ...$$

Ez a művelet nem végezhető el, mert a két mátrix mérete nem egyezik meg.

$A \cdot B$ kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = ...$$

Ez a művelet nem végezhető el, mert az A mátrix oszlopszáma nem egyezik meg a B mátrix sorszámaival.

A^T kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$A^T \cdot$ C kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-2\cdot 2)+(0\cdot 5) & (-2\cdot 4)+(0\cdot 4) \\ (1\cdot 2)+(2\cdot 5) & (1\cdot 4)+(2\cdot 4) \\ (3\cdot 2)+(5\cdot 5) & (3\cdot 4)+(5\cdot 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+0 & -8+0 \\ 2+10 & 4+8 \\ 6+25 & 12+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 12 & 12 \\ 31 & 32 \end{bmatrix}$$

<u>Megjegyzés:</u> A szorzás elvégzését megkönnyíti az alábbi, szorzási ábra:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 12 & 12 \\ 31 & 32 \end{bmatrix} \end{array}$$

C^2 kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\cdot 2)+(4\cdot 5) & (2\cdot 4)+(4\cdot 4) \\ (5\cdot 2)+(4\cdot 5) & (5\cdot 4)+(4\cdot 4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4+20 & 8+16 \\ 10+20 & 20+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 30 & 36 \end{bmatrix}$$

12.2.1. Órai feladatok / 3.

Mivel $f(x) := 2x^3 - x^2 - 5x + 3$, ezért

$$f(A) = 2A^3 + (-1)A^2 + (-5)A + 3I$$

Számítsuk ki az egyes értékeket!

$$2A^3 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 20 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)A^2 = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(-5)A = (-5) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$3I = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Így tehát $f(A)$ értéke:

$$\begin{bmatrix} -14 & 20 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 4 \\ -2 & -13 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{12.2.1. Órai feladatok / 4a.}}$

Emlékeztető: Legyen A és C $\mathbb{K}^{nxn}$ eleme. C-t az A inverzének nevezzük, ha $AC = CA = I$."

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 50 \end{bmatrix} \neq I\,,$$

ezért a C mátrix nem inverze az A mátrixnak.

$\boxed{\text{12.2.1. Órai feladatok / 4b.}}$

Emlékeztető: Legyen A és C $\mathbb{K}^{nxn}$ eleme. C-t az A inverzének nevezzük, ha $AC = CA = I$."

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan kiszámítható, hogy

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

ezért a C mátrix az A mátrix inverze.