ELTE-IK Matematikai alapok 2020. Őszi félév
14. Vektorok, vektorterek
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3. feladatainak megoldása
(Írta: Fábián Gábor)

14.2.1. Órai feladatok / 1.

Adottak az alábbi $\mathbb{R}^5$-beli vektorok:

$$x = (-3, 4, 1, 5, 2) \qquad y = (2, 0, 4, -3, -1) \qquad z = (7, -1, 0, 2, 3)$$

továbbá az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$

mátrix. Számítsuk ki az alábbiakat!

$$x + y = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 4+0 \\ 1+4 \\ 5-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y - z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 \\ 0+1 \\ 4-0 \\ -3-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$4x = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-3) \\ 4\cdot 4 \\ 4\cdot 1 \\ 4\cdot 5 \\ 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z =& x + y + 2y - 2z = \\ & (x+y) + 2\cdot(y-z) = \\ & \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\cdot(-5) \\ 4+2\cdot 1 \\ 5+2\cdot 4 \\ 2+2\cdot(-5) \\ 1+2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 13 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot(-3) + 1\cdot 4 + (-4)\cdot 1 + (-2)\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 4\cdot 1 + (-3)\cdot 5 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -5 \end{pmatrix}$$

14.2.1. Órai feladatok / 2.

Alterek-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok? Mely nevezetes ponthalmazokról van szó (nevezzük meg geometriailag):

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \qquad N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

A $W \subset \mathbb{R}^2$ halmaz akkor és csak akkor altere $\mathbb{R}^2$-nek, ha zárt az összeadásra és a számmal való szorzásra, azaz ha tetszőleges $u, v \in W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $u + v \in W$ és $\lambda u \in W$. Továbbá felhasználhatjuk, hogy ha W altere $\mathbb{R}^2$-nek, akkor szükségképpen tartalmazza a nullvektort.

A K halmaz elemei az origó középpontú egység sugarú kör (egységkör) pontjai. K nem altere $\mathbb{R}^2$-nek, ugyanis K nem tartalmazza a nullvektort, mivel $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$ miatt $(0, 0) \notin W$. Könnyen belátható, hogy K nem zárt sem az összeadásra sem a számmal való szorzásra, pl. $(1, 0), (0, 1) \in K$ de $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin K$, és $2 \cdot (1, 0) = (2, 0) \notin K$.

Az N halmaz elemei az első síknegyed pontjai. N szintén nem altere $\mathbb{R}^2$-nek. N ugyan tartalmazza a nullvektort és zárt az összeadásra, de a számmal való szorzásra nem, pl. $(1, 0) \in N$, de $(-1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin N$, mivel $-1 \not\geq 0$.

14.2.1. Órai feladatok / 3. a)

Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi halmazok? Nevezzük meg e halmazokat geometriailag is!

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Az S_1 halmaz elemei az origó középpontú egység sugarú gömb pontjai. Az S_1 nem altere $\mathbb{R}^3$-nek, mivel $(0, 0, 0) \notin S_1$.

14.2.1. Órai feladatok / 3. b)

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$$

Az S_2 halmaz elemei az első térnyolcad pontjai. Az S_2 nem altere $\mathbb{R}^3$-nek, mivel nem zárt a számmal való szorzásra, pl. $(1, 0, 0) \in S_2$, de $(-1) \cdot (1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin S_2$, mivel $-1 \not\geq 0$.

14.2.1. Órai feladatok / 3. c)

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$$

Adott $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek mellett az $ax + by + cz = d$ egy $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú sík egyenlete, melynek origótól vett előjeles távolsága $\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Az S_3 halmaz elemei tehát éppen a $(2, -3, 1)$ normálvektorú origón átmenő sík pontjai. Vegyünk egy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ számot és két tetszőleges S_3-beli vektort: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S_3$. Vizsgáljuk meg, hogy S_3 zárt-e az összeadásra és a számmal való szorzásra.

$$(x_1, y_1, z_1) \in S_3 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(2x_1 - 3y_1 + z_1) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$2(\lambda x_1) - 3(\lambda y_1) + (\lambda z_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in S_3 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(x_1, y_1, z_1) \in S_3$$

Tehát S_3 zárt a számmal való szorzásra.

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S_3 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \ \wedge \ 2x_2 - 3y_2 + z_2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(2x_1 - 3y_1 + z_1) + (2x_2 - 3y_2 + z_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \quad \Longrightarrow$$

$$(x_1 + x_2, \ \ y_1 + y_2, \ \ z_1 + z_2) \in S_3 \quad \Longrightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in S_3$$

Vagyis S_3 zárt az összeadásra is, ezért S_3 az $\mathbb{R}^3$ egy altere.

14.2.1. Órai feladatok / 3. d)

$$S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ 2x - 3y + z = 5\}$$

Az előző feladatrészhez hasonlóan az S_4 halmaz elemei egy $(2, -3, 1)$ normálvektorú sík pontjai, most azonban a sík előjeles távolsága az origótól nem 0, ezért az nem megy át az origón. Vagyis $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 5$ miatt $(0, 0, 0) \notin S_4$, így S_4 nem lehet $\mathbb{R}^3$ altere. Könnyen ellenőrizhető azonban az is, hogy S_4 nem zárt sem az összeadásra, sem a szorzásra, pl. $(0, 0, 5), (2, 0, 1) \in S_4$ de $2 \cdot (0, 0, 5) = (0, 0, 10) \notin S_4$ és $(0, 0, 5) + (2, 0, 1) = (2, 0, 6) \notin S_4$.

14.2.1. Órai feladatok / 3. e)

$$S_5 = \{(x - y, 3x, 2x + y) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Az S_5 halmaz elemei a következő alakúak:

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Azaz az S_5 halmaz elemei azon sík pontjai, melyet az $(1, 3, 2)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítenek ki. Észrevehető, hogy $x = y = 0$ választás mellett éppen a $(0, 0, 0)$ vektort kapjuk, ezért az S_5 halmaz tartalmazza az origót. Mutassuk meg, hogy S_5 zárt az összeadásra és a számmal való szorzásra. Legyen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok. Ekkor a

$$v_1 := x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad v_2 := x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

az S_5 halmaz két tetszőleges eleme. Ekkor

$$\lambda v_1 = \lambda \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (\lambda x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\lambda y_1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tekintve, hogy $\lambda x_1, \lambda y_1 \in \mathbb{R}$, így $\lambda v_1 \in S_5$.

$$v_1 + v_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (y_1 + y_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mivel $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, így $v_1 + v_2 \in S_5$. Tehát S_5 zárt az összeadásra és a számmal való szozásra is, ezért S_5 altér $\mathbb{R}^5$-ben.