# 26. Korlátosság, szélsőérték, végtelenben vett határérték

## 26.1. Kiegészítés az elmélethez

*Korlátos függvények*

**Definíció :** Azt mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós−valós függvény:

1. *alulról korlátos*, ha az $R_f$ értékkészlet alulról korlátos, azaz

$$\exists\, k \in \mathbb{R}: \;\; f(x) \geq k \;\;\; (\forall\, x \in D_f);$$

2. *felülről korlátos*, ha az $R_f$ értékkészlet felülről korlátos, azaz

$$\exists\, K \in \mathbb{R}: \;\; f(x) \leq K \;\;\; (\forall\, x \in D_f);$$

3. *korlátos*, ha az $R_f$ értékkészlet alulról is és felülről is korlátos, azaz

$$\exists\, k, K \in \mathbb{R}: \;\; k \leq f(x) \leq K \;\;\; (\forall\, x \in D_f).$$

**Megjegyzések:**

1. A fenti definíciókban szereplő $k$ és $K$ számokat az $f$ alsó illetve felső korlátjának nevezzük.

2. Egy fenti típusú $f$ függvény *nem korlátos*, ha alulról vagy felülről nem korlátos.

**Példák:**

1. Legyen $f(x) := x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})$. Világos, hogy

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \;\; 0 \leq f(x) = x^2,$$

azaz $f$ alulról korlátos és például 0 egy alsó korlátja (egyben minimuma is). Könnyű meggondolni, hogy az $f$ felülről nem korlátos: indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy az $f$ felülről korlátos, ami azt jelentené, hogy

$$\exists\, K \in [0; +\infty): \;\; 0 \leq x^2 \leq K \;\;\; (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

ami nyilván nem teljesül például a $x = \sqrt{K+1} \in \mathbb{R}$ szám esetén.

2. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0;1))$. Könnyű meggondolni, hogy ebben az esetben:

$$\forall\, x \in (0;1): \ \ 1 < \frac{1}{x},$$

de itt sem létezik olyan $K > 0$ (elég csupán ezeket meggondolni) szám, melyre

$$\frac{1}{x} \le K \quad (x \in (0;1))$$

igaz, mert például egy ilyen $K$ esetén az $x = \dfrac{1}{K+1} \in (0;1)$ számra nem teljesül a fenti egyenlőtlenség. Jegyezzük meg, hogy ennél a feladatnál az 1 mint alsó korlát nem a legkisebb értéke az $f-$nek (most nincs minimális érték). Ez a függvény tehát alulról korlátos, felülről nem korlátos.

3. Legyen $f(x) := \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \ -1 \le \cos x \le 1,$$

azaz $f$ korlátos. A cos függvényt ismerve tudjuk, hogy a $-1$ és az 1 alsó és felső korlátok egyben a függvény legnagyobb és legkisebb értékei is, amelyeket végtelen sok pontban vesz fel az $f$.

4. Legyen $f(x) := \ln x$ $(x \in (0;1))$. A logaritmusfüggvényről tanultakat használva:

$$\forall\, x \in (0;1): \ \ -\infty < \ln x < 0,$$

azaz $f$ felülről korlátos. Ebben az esetben azonban nincs alsó korlát, ugyanis ha volna ilyen $k < 0$ szám, amelyre igaz lenne, hogy:

$$\forall\, x \in (0;1): \ \ k < \ln x < 0,$$

akkor az $x := e^{k-1} \in (0;1)$ számmal ellentmondásra jutunk.

*Szélsőértékszámítás*

**Definíció :** Azt mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós−valós függvénynek:

1. van *minimuma/legkisebb értéke*, ha az $R_f$ értékkészletnek van legkisebb értéke, azaz

$$\exists\, a \in D_f: \ \ f(x) \ge f(a) \quad (\forall\, x \in D_f);$$

2. van *maximuma/legnagyobb értéke*, ha az $R_f$ értékkészletnek van legnagyobb értéke, azaz

$$\exists\, b \in D_f: \ \ f(x) \le f(b) \quad (\forall\, x \in D_f).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $a$ és $b$ az $f$ *minimumhelye* illetve *maximumhelye* és $f(a)$ illetve $f(b)$ a megfelelő minimális és maximális *értékek*.

**Megjegyzések:**

1. Ha egy valós$-$valós $f$ függvénynek van szélsőértéke (minimuma, vagy maximuma, vagy mindkettő), akkor ezeket akár több helyen is felveheti. Például az ismert sin és cos függvények végtelen sok helyen veszik fel az 1 maximumot és a $-1$ minimális értéket. Hasonlóan az $f(x) := 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ konstansfüggvény esetében: minden valós helyen egyszerre van minimum és maximum.

**Példák:** Az alábbi esetekben határozzuk meg az $f$ szélsőértékeit és azok helyeit (ha léteznek).

1. Legyen $f(x) := x^2 \quad (x \in [-1;3])$. Világos, hogy
$$\forall\, x \in [0;3] : f(0) = 0 \le x^2 \le 9 = f(3),$$
és
$$\forall\, x \in [-1;0] : -1 \le x \le 0 \iff 0 \le -x \le 1 \Longrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) \in [0;1].$$
Összefoglalva tehát:
$$\forall\, x \in [-1;3] : f(0) = 0 \le x^2 \le 9 = f(3),$$
tehát a minimum 0 amit $x = 0-$ban vesz fel az $f$ és a legnagyobb érték 9 ami $x = 3-$ban teljesül.

2. Legyen $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0;1])$. Először alakítsuk át az $f(x)$ kifejezést az alábbiak szerint (így jobban leolvashatóak lesznek a szélsőértékek):
$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (x \in [0;1]).$$
Világos, hogy az $x$ legynagyobb értékét beírva a tört a legkisebb és $x$ legkisebb értékére a tört a legnagyobb lesz. Ennek megfelelően:
$$\forall\, x \in [0;1] : f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \le \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = f(x) \le \frac{1}{\sqrt{0+1} + \sqrt{0}} = 1 = f(0),$$
tehát a minimum $\sqrt{2} - 1$ amit $x = 1-$ben vesz fel az $f$ és a legnagyobb érték 1 ami $x = 0-$ban teljesül.

3. Legyen $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$. Vegyük észre, hogy:
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ f(-1) = -\frac{1}{2} \le \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2} = f(1),$$
ugyanis:
$$-\frac{1}{2} \le \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2} \iff -1 - x^2 \le 2x \le 1 + x^2 \iff$$
$$\iff 0 \le (x+1)^2 \ \wedge \ 0 \le (x-1)^2 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$
Tehát $f$ maximuma $\dfrac{1}{2}$ az $x = 1$ helyen, minimuma pedig $-\dfrac{1}{2}$ az $x = -1$ helyen. Észre lehet venni, hogy $f$ *páratlan* függvény, így elég lett volna csak a pozitív $x$ értékekre keresni szélsőértékeket majd az origóra tükrözve kaptuk volna a további eredményeket.

*Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határéréték*

Ebben a részben valós-valós függvények viselkedését fogjuk tanulmányozni az értelmezési tartomány elég nagy $x$ valós értékei mellett. Ebben a fejezetben csak olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal:

$$\forall K > 0 \; D_f \cap (K; +\infty) \neq \emptyset.$$

Erre a tulajdonságra úgy fogunk hivatkozni, hogy $+\infty$ az $f$ értelmezési tartományának torlódási pontja. A későbbi tanulmányok során mindezt pontosan definiálni fogjuk. Ezen feltételezés mellett értjük az összes további definíciót. Bevezetjük valós-valós függvények határértékének három speciális esetét, nevezetesen a $+\infty-$ben vett végtelen/véges/mínusz végtelen határérték fogalmát.

**Def:** *(Végtelenben vett végtelen határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós-valós függvény és $D_f-$nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az $f$ határértéke $+\infty-$ben $+\infty$, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, P > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;: \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; f(x) > P.$$

**Def:** *(Végtelenben vett véges határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény és $D_f-$nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az $f$ határértéke $+\infty-$ben az $L \in \mathbb{R}$ valós szám, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;: \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Def:** *(Végtelenben vett mínusz végtelen határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény és $D_f-$nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az $f$ határértéke $+\infty-$ben $-\infty$, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;: \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; f(x) < p.$$

### 26.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvénynek van *maximuma*?
2. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvény *alulról korlátos*?
3. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvény *felülről korlátos*?

4. Mikor mondjuk, hogy egy valós−valós függvény *korlátos*?

5. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg, hogy egy valós−valós függvény *felülről nem korlátos.*

6. Definiálja egy valós-valós függvény esetén a végtelenben vett végtelen határértéket.

7. Mit jelent az, hogy egy valós-valós $f$ függvény esetében $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$?

8. Mit jelent az, hogy egy valós-valós $f$ függvény esetében $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$?

9. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melynek minden pontban minimuma és maximuma van.

10. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek van alsó korlátja, de felülről nem korlátos.

11. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek van alsó korlátja, nincs minimuma és felülről nem korlátos.

12. Adjon meg olyan $f : (0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely felülről korlátos, de alulról nem korlátos.

13. Van-e legkisebb értéke az $f(x) := x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvénynek és ha igen, hol veszi fel ezt?

14. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+1}{x^2} = +\infty$.

15. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1$.

### 26.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Igazolja, hogy az $f(x) := \dfrac{x^4+1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény felülről nem korlátos.

2. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely alulról és felülről sem korlátos.

3. Igaz-e, hogy ha egy valós−valós függvény felülről korlátos, akkor van maximuma is?

4. Igaz-e, hogy ha egy valós−valós függvénynek van minimuma, akkor alulról korlátos?

5. Mikor mondjuk, hogy egy valós−valós függvénynek van *minimuma* és ilyenkor mi a minimumhely?

6. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg, hogy egy valós−valós függvény *alulról nem korlátos.*

# 26.2. Feladatok

## 26.2.1. Órai feladatok

*Korlátos függvények, szélsőértékszámítás*

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

   (a) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ ;

   (b) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad \left(\frac{1}{2} \le x \le 3\right)$.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $P(x) := x^2 + ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$. Milyen $a, b$ esetén lesz igaz, hogy $P(3) = \min\{P(x) : x \in \mathbb{R}\} = -2$ ?

3. 24 m hosszú kerítéssel téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldalát a ház fala alkotja (tehát azon a szakaszon nincs szükség kerítésre). Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha maximális területű részt akarunk elkeríteni?

4. Egy derékszögű háromszög befogói 10 cm és 15 cm. A háromszögbe téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalap egyik szöge a háromszög derékszögével esik egybe, a téglalap egyik csúcsa pedig az átfogón van. Határozzuk meg e téglalapok közül a legnagyobb területűt (adjuk meg az oldalait)!

5. Az alábbi függvényeket vizsgáljuk meg korlátosság és szélsőérték szempontjából:

   (a) $f(x) := \dfrac{3x^2 + 7}{9x^2 + 3} \quad (x \in [1; +\infty))$ ;

   (b) $f(n) := \dfrac{10n + 7}{15n + 12} \quad (n \in \mathbb{N})$;

   (c) $f(x) := \dfrac{1 - 3\sqrt{x}}{1 + 3\sqrt{x}} \quad (x \in [4; +\infty))$;

   (d) $x(n) := x_n := \dfrac{2^{n+1} + 2}{3 \cdot 2^n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

   (e) $f(x) := \dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (f) $f(x) := \dfrac{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} \quad (x \in (0; \pi/2))$;

   (g) $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$ .

6. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legkisebb értéke és hol veszi fel ezt?

*Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határérérték*

7. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [0;+\infty))$ függvényt.

   a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

   $$f(x) > 1000\,.$$

   b) Igaz-e a következő állítás:

   $$\forall\, P > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \ \ f(x) > P\,?$$

   c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

   d) Igaz-e, hogy

   $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty?$$

8. Tekintsük az $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

   a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

   $$f(x) < -999\,.$$

   b) Igaz-e a következő állítás:

   $$\forall\, p < 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \ \ f(x) < p\,?$$

   c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

   d) Igaz-e, hogy

   $$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^2) = -\infty?$$

9. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

   a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

   $$f(x) > 1000\,.$$

   b) Igaz-e a következő állítás:

   $$\forall\, P > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \ \ f(x) > P\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^2+1} = +\infty.$$

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$ $\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}\right)$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$\left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{600}\ .$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f :\ \left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-1}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3+1}{1-x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -1000.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f :\ \ f(x) < p\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{1-x}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

12. A megfelelő típusú határérték definíciója alapján igazolja a következő állításokat:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x^2+7}{x^3+x+1} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} = -\infty$

### 26.2.2. További feladatok

*Korlátos függvények, szélsőértékszámítás*

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

   (a) $f(x) := x^2 + x - 6 \quad (x \in \mathbb{R})$ ;

   (b) $f(x) := x^2 + x - 6 \quad (x \in [-1; 3])$;

   (c) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (d) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in (-\infty; 0])$;

   (e) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in [-1/2; 2])$.

2. Adjuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy a

   $$P(x) := -x^2 + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   másodfokú polinomra

   $$P(-1) = \max\{P(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 3$$

   legyen!

3. Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyek befogóinak összege 12 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

4. Egy 20 m hosszú $AB$ szakaszon határozzuk meg azt a $C$ pontot amely esetén az $AC$ és $CB$ szakaszok, mint átmérők fölé szerkesztett körök területének összege minimális.

5. Adott kúpba írható hengerek közül melyiknek maximális a térfogata?

6. Az alábbi függvényeket vizsgáljuk meg korlátosság és szélsőérték szempontjából:

   (a) $f(x) := \dfrac{3(x-1)^2 + 7}{9(x-1)^2 + 3} \quad (x \in (-\infty; 2])$ ;

   (b) $f(x) := \dfrac{|x| - 1}{5|x| - 2} \quad (x \in [1; +\infty))$ ;

   (c) $f(x) := \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} \quad (x \in (-\infty; 0])$ ;

(d) $f(x) := \dfrac{x^2+2x+6}{3x^2+6x+9} \quad (x \in \mathbb{R})$ ;

(e) $f(x) := \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$ ;

(f) $f(x) := \dfrac{2x-4\sqrt{x}-1}{5x-10\sqrt{x}+10} \quad (x \in [0;+\infty))$ ;

(g) $f(x) := x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \quad (x \in (0;+\infty))$ ;

(h) $f(x) := \dfrac{7-3\sin^2 x + 6\cos x}{\cos^2 x + 2\cos x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(i) $f(n) := x_n := \dfrac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(j) $f(x) := \dfrac{1-e^{x+1}}{e^x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0;+\infty))$;

(l) $f(x) = \sin x \cdot (\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x) + \cos x \cdot (\sin x - \sqrt{3}\cos x) \quad (x \in \mathbb{R})$ .

7. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^4+x^2+4}{x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvény legkisebb értéke és hol veszi fel ezt?

**Megoldás:**

$$f(x) = x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 6 \cdot \sqrt{x^3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4} = 6$$

Minimum $x = 1$ esetén adódik.

8. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^2}{1+x^4}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legkisebb és legnagyobb értéke és hol veszi fel ezeket?

*Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határérték*

9. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0 \ \exists\, K > 0 \ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \ \ f(x) > P \ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

10. Tekintsük az $f(x) := \ln\dfrac{1}{x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \quad f(x) < p\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^6+1}{x^3+x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0;-1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 4000.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \quad f(x) > P\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+1}{x^3+x^2}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

12. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3+x}{1-x^3}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$|f(x) + 1| < \frac{1}{100}.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \quad |f(x) - (-1)| < \varepsilon\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x}{1-x^3}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

13. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1+x-3x^5}{x^4+16}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \quad f(x) < p\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-3x^5}{x^4+16}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

*Egyéb típusok*

14. Tekintsük az $f : [0;1] \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}; f(x,y) := (x-y)^2$ $((x,y) \in [0;1] \times [0,1])$ kétváltozós függvényt. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\max\nolimits_{y \in [0;1]} \left(\min\nolimits_{x \in [0;1]} f(x,y)\right) < \min\nolimits_{y \in [0;1]} \left(\max\nolimits_{x \in [0;1]} f(x,y)\right).$$

15. Adottak az $f, g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $x, y \in [0; 1]$ valós számok, melyekre:

$$|f(x^2) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$

16. Adott az $f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $a, b$ valós paraméterek és $a \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi számok mindegyike nem lehet kisebb mint 1:

$$|f(0) - 1|; \;\; |f(1) - 3|; \;\; |f(2) - 9|.$$