3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.1. Kiegészítés az elmélethez

Abszolút érték és tulajdonságai, háromszög egyenlőtlenségek

Idézzük fel az abszolút érték definícióját: legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós szám, ekkor:

$$|x| := \begin{cases} -x \ , \text{ ha } x < 0; \\ x \quad , \text{ ha } x \geq 0 \end{cases}$$

az x valós szám abszolút értéke. Világos, hogy $|x|$ jelenti egyben a számegyenesen az x valós szám távolságát az origótól.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok, akkor $|x - y|$ nemnegatív valós szám méri az x és y geometriai távolságát.

Könnyű a definíció alapján meggondolni, hogy:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ \ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

illetve

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0: \ \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Mindez azonban nem mondható el az összeg és különbség esetén, de érvényesek az alábbi nevezetes egyenlőtlenségek:

Tétel: (*Háromszög egyenlőtlenségek*) Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok esetén:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

3.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy valós x szám abszolút értékét.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ értékeitől függően "bontsa fel" $|x^2 - 1|$–et.
3. Írja le a valós számokra vonatkozó *háromszög egyenlőtlenségeket.*
4. Hol vannak a síkon azok az $(x; y)$ pontpárok, melyekre: $|y - |x|| < 1$?
5. Oldja meg az $|x + 2| = x - 1$ egyenletet.
6. Mely valós számok elégítik ki az $||x - 1| - 2| > 1$ egyenlőtlenséget?

7. Egyszerűsítse az alábbi racionális törtet:

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}.$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{x}.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}<x+\sqrt{x}-1.$$

10. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$|2-\sqrt{1-x}|<1?$$

11. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$\sqrt{x^2}=x+1?$$

12. Adjon meg olyan különböző x, t valós számokat (ha léteznek), amelyekre:

$$(x-2)^2+|x-1|=(t-2)^2+|t-1|.$$

13. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1|<1/2$. Milyen határok közt változhat $|x-1|$?

14. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, melyekre:

$$|x|<2 \quad \wedge \quad |1-x|>1\ .$$

15. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-3|<2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-9|$–re.

3.2. Feladatok

Valamennyi feladatban alapértelmezés, hogy a formulákban szereplő betűk olyan számokat jelentenek, amelyekre a kifejezések értelmesek (kifejezés értelmezési tartománya). Természetesen ez a halmaz tovább szűkülhet, ha a feladatban feltételeket adunk meg ezekre a betűkre.

3.2.1. Órai feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$;

(b) $\dfrac{x^4+5x^2+4}{x^4-16}$;

(c) $\dfrac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}$;

(d) $\dfrac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3}$;

(e) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$;

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}$;

(c) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$;

(d) $\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{\sqrt{x}-1}-1} \quad (x>4)$.

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek ill. egyenlőtlenségek?

(a) $|2x-7|+|2x+7|=14$;

(b) $|2x-7|+|2x+7|=x+15$;

(c) $|x^2-4x-5|+|x-2|=7$;

(d) $|x^2+3x|=|2x-6|$;

(e) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$;

(f) $|x-2|<3$;

(g) $|2x-1|<|x-1|$;

(h) $|x(1-x)| < \dfrac{1}{4}$;

(i) $\dfrac{1+|x-2|}{|x-3|} \leq \dfrac{1}{2}$;

4. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+2| < 1$. Milyen határok közt változhat $|x+1|$?

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-2| < 2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-4|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;

(b) $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$;

(c) $x-1 = \sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$;

(d) $\sqrt{6x^2+8x-8} - \sqrt{3x-2} = 0$;

(e) $\sqrt{x^2-p} + 2\cdot\sqrt{x^2-1} = x \quad (p \in \mathbb{R})$;

(f) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

(g) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 12$;

(h) $\sqrt{|1-x^2|} = \dfrac{x}{2}+1$;

(i) $\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}$;

(j) $\sqrt{3x+13} \leq x+1$;

(k) $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$;

(l) $\sqrt{x^2-1} < 5-x$;

(m) $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$;

(n) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$;

(o) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$;

(p) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} > \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

7. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \quad (x \in [2;17]).$$

8. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{5n^3-3n^2+2n+7}{8n^3+7n-3}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n+1}+3\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2+2}}{\sqrt[3]{n^2}-1}$.

9. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$;

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n-1}}$;

(c) $\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n^2+n+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

10. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \dfrac{3^n\cdot n^2}{(n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n = \dfrac{n^n\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(e) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(1+\sqrt{n})} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

11. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n^2+1)^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{1-n}+2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

3.2.2. További feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{x^2+2x-3}{5x^2+16x+3}$;

(b) $\dfrac{x^4+8x^2+15}{x^4+6x^2+9}$;

(c) $\dfrac{27x^3-1}{6x^2+x-1}$;

(d) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$.

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket, ha lehet:

(a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+5}-2}$;

(b) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}+4}-2}$;

(c) $\dfrac{x^2-26x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$;

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

(a) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right| = 2$;

(b) $||x+1|-2| = ||x-2|+1|$;

(c) $|x+3|+|x-1| = 3x-5$;

(d) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = x+2$;

(e) $|x+3|+\sqrt{x^2-2x+1} = 8$.

(f) $\left|\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2}{3}\right| \le \dfrac{|x-2|}{1+|x-2|}$;

(g) $x^2-6|x|-7<0$;

(h) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \le 2$;

(i) $|\,|x+1|-|x-1|\,| < 1$;

(j) $|x| > |x-1|$;

(k) $|x+2|-|x| \ge 1$.

4. Bizonyítsuk be, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $0 < a+b-ab < 1 \quad (a,b \in (0,1))$;

(b) $a^2+b^2 \ge 2|ab| \quad (a,b \in \mathbb{R})$;

(c) $2x^4-2x^3-x^2+1 \ge 0 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $ab-5a^2-3b^2 \le 0 \quad (a,b \in \mathbb{R})$;

(e) $|a+b| < |1+ab| \quad (a,b \in \mathbb{R},\ |a|,|b| < 1)$;

(f) $|a+b|+|a-b| \ge |a|+|b| \quad (a,b \in \mathbb{R})$;

(g) $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \ge |a+b|+|b+c|+|c+a| \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$;

(h) $\left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2-2 < 2-\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \quad (a,b \in (0,+\infty),\ a^2 < 2b^2)$.

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+5| < 3$. Milyen határok közt változhat $1/|x-2|$?

6. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1| < 1/2$. Adjunk egy felső becslést $|1/x^2-1|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{5+\sqrt{x+1}}+\sqrt{3-\sqrt{x+1}} = \sqrt{7}+1$;

(b) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}$.

(c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3} = 1$;

(d) $\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2-12x+9} = 4$;

(e) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}+\sqrt{2x} = \sqrt{x+3}$;

(f) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$;

(g) $\sqrt{3x^2-|x|-1}=3-2x$;

(h) $\sqrt{3x+10}\le x+4$;

(i) $\sqrt{3x+7}<x-1$;

(j) $\sqrt{5x+16}>x+2$;

(k) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\le 5$;

(l) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\le 5$.

8. Van–e olyan x racionális szám, amelyre

(a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-10}}=\dfrac{\sqrt{3x+22}}{\sqrt{3x-14}}$;

(b) $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x$?

9. Mutassuk meg, hogy minden $1\le n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül az

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenség!

10. Lássuk be, hogy minden $1\le n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül a

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenségpár!

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

11. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{3n^4+5n^3-7n+4}{5n^4-10n^2+2}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{2n^2+5n}}{\sqrt{n^2+6}+3n+1}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}+\sqrt[3]{n^2+6}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^2-1}}$;

12. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^4+n^2+5}-\sqrt{n^4-2n^2-7}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n^2+2}-\sqrt{n^3-n^2+3}}$;

(c) $\sqrt[3]{n^3+n^2+3}-n$;

13. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados−sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{5^{n+2}}{(n+1)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n=\dfrac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n=\dfrac{(n+2)!}{4^n\cdot(n^2+3)} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n=\dfrac{(-n-2)^n}{(2n+2)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

14. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök−sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{3^{2n-1}}{(n^3+1)^{5n}} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{2-n}+3^n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n^2-n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$.