

1.2.1. Órai feladatok / 1.

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 &= 3 \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{3a^2 + 6ab + 3b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{4} = a^2 + ab + b^2 = \text{bal oldal} \end{aligned}$$

Ennek alapján:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = (a-b) \cdot \left[ 3 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right] = \\ &= 2 \cdot \left[ 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \right] = 2 \cdot \left( 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{4}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{19}{2}}} \end{aligned}$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 3b.

A bal oldal nevezőinek legkisebb közös többszöröse  $a^4 - b^4$ , mivel:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a-b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ a^4 - b^4 &= (a+b) \cdot (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a bal oldalt közös nevezőre hozzuk:

$$\begin{aligned} \frac{a(a-b) + b(a+b) + 1(a^2 + b^2) - 1(a^2 - b^2) - (a^2 + 3b^2)}{a^4 - b^4} &= \\ &= \frac{a^2 - ab + ab + b^2 + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - a^2 - 3b^2}{a^4 - b^4} \end{aligned}$$

A számlálóban minden tag kiesik, így a tört értéke valóban 0.

---

1.2.1. Órai feladatok / 4b.

Mivel  $a + b + c = 0$ , ezért  $c = -(a + b)$ . Ezt behelyettesítjük a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + (-(a + b))^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = \\ &= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = \\ &= -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3ab \cdot (-(a + b)) = 3abc = \text{jobb oldal} \end{aligned}$$

1.2.1. Órai feladatok / 6.

A számlálót szorzattá alakítjuk:

$$\begin{aligned} x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y &= (x^3 - y^3) - (x - y) - (x^2y - xy^2) = \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y) - xy(x - y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1 - xy) = \\ &= (x - y)(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

Hasonló módon a nevezőt is szorzattá alakítjuk:

$$\begin{aligned} x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y &= (x^3 - y^3) + (x - y) - (x^2y - xy^2) = \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x - y) - xy(x - y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1 - xy) = \\ &= (x - y)(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

Ezzel:

$$E(x, y) = \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{(x - y)(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

A feladat második részéhez először számítsuk ki az  $x^2 + y^2$  összeget:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left( \frac{k(1 - z^2)}{1 + z^2} \right)^2 + \left( \frac{2kz}{1 + z^2} \right)^2 = \frac{k^2(1 - z^2)^2}{(1 + z^2)^2} + \frac{4k^2z^2}{(1 + z^2)^2} = \\ &= k^2 \cdot \frac{1 - 2z^2 + z^4 + 4z^2}{(1 + z^2)^2} = k^2 \cdot \frac{1 + 2z^2 + z^4}{1 + 2z^2 + z^4} = k^2 \end{aligned}$$

Tehát:

$$E(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1},$$

ami valóban független  $z$ -től.

---

1.2.1. Órai feladatok / 9.

$$f(g(x)) = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1-\frac{1+x}{1-x}}{1+\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\frac{1-x-1-x}{1-x}}{\frac{1-x+1+x}{1-x}} = \frac{-2x}{2} = -x$$

továbbá:

$$g(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x+1-x}{1+x}}{\frac{1+x-1+x}{1+x}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

Ezeket az eredményeket beírjuk a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába:

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) + 1 = -x \cdot \frac{1}{x} + 1 = -1 + 1 = 0 = \text{jobb oldal}$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 12c.

A szorzat első tényezője:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \\ &= \frac{x + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

A szorzat második tényezője:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} = \\ &= \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} = \frac{x - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + y + 2 \cdot \sqrt{xy}}{x - y} = \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{x - y} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \end{aligned}$$

Szorzatuk:

$$AB = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y} = \underline{\underline{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 13.

Célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket:

$$a = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}, \quad b = y^{1/6} = \sqrt[6]{y}$$

Ezzel:

$$a^2 = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}, \quad b^2 = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}$$

Az első tényezőben a hatvány alapja:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^{-1/6} - \frac{5}{\sqrt[6]{y}}}{\frac{1}{x^{1/3}} - y^{-1/3}} - 5 \cdot \frac{x^{-1/6} - y^{-1/6}}{x^{-1/3} - \sqrt[3]{y^{-1}}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{5}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - 5 \cdot \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{a} - \frac{5}{b} - \frac{5}{a} + \frac{5}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{-\frac{4}{a}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{-\frac{4}{a}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}} = -\frac{4}{a} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} = \frac{4ab^2}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Ezzel:

$$E(x, y) = A^{-1} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{a^2 - b^2}{4ab^2} \cdot \frac{6a}{a^2 - b^2} = \frac{3}{2b^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{y}}}}$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 19a.

1. Megoldás (Függelék 27.1):

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2 - 7x + 2 \\ P(2) &= 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 12 - 14 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(2) = 3(x^2 - 2^2) - 7(x - 2) = 3(x - 2)(x + 2) - 7(x - 2) = \\ &= (x - 2)(3x + 6 - 7) = \underline{\underline{(x - 2)(3x - 1)}} \end{aligned}$$

2. Megoldás (Függelék 27.2, Horner-táblázat):

A táblázat:

	3	-7	2
$x_0 = 2$	3	-1	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 2 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 19b.

1. Megoldás (Függelék 27.1):

$$\begin{aligned}P(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 18 \\P(3) &= 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 18 = 54 - 36 - 18 = 0\end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\begin{aligned}P(x) - P(3) &= 2(x^3 - 3^3) - 4(x^2 - 3^2) = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 4(x - 3)(x + 3) = \\&= (x - 3)(2x^2 + 6x + 18 - 4x - 12) = \underline{\underline{(x - 3)(2x^2 + 2x + 6)}}\end{aligned}$$

2. Megoldás (Függelék 27.2, Horner-táblázat):

A táblázat:

	2	-4	0	-18
$x_0 = 3$	2	2	6	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 3 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x - 3)(2x^2 + 2x + 6)$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 19c.

1. Megoldás (Függelék 27.1):

$$\begin{aligned}P(x) &= 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \\P(-1) &= 2 \cdot (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 2 + 5 - 6 - 3 + 2 = 0\end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\begin{aligned}P(x) - P(-1) &= 2(x^4 - 1) - 5(x^3 + 1) - 6(x^2 - 1) + 3(x + 1) = \\&= 2(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) - 5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 6(x + 1)(x - 1) + 3(x + 1) = \\&= (x + 1)(2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 - 5x^2 + 5x - 5 - 6x + 6 + 3) = \underline{\underline{(x + 1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)}}\end{aligned}$$

## 2. Megoldás (Függelék 27.2, Horner-táblázat):

A táblázat:

	2	-5	-6	3	2
$x_0 = -1$	2	-7	1	2	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a  $-1$  gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$$

---

1.2.1. Órai feladatok / 20a.
------------------------------

A "Kiegészítés az elmélethez" szakaszban említett állítás szerint az  $x + 3$  gyöktényező akkor és csak akkor emelhető ki a  $P$  polinomból, ha a  $-3$  gyöke  $P$ -nek, azaz, ha  $P(-3) = 0$ .

Jelen esetben  $P(x) = 2x^2 + x + k$ , tehát a feltétel:

$$\begin{aligned} P(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + (-3) + k &= 0 \\ 15 + k &= 0 \\ k &= -15 \end{aligned}$$

A gyöktényező alak (többféle módszerrel is megkapható):

$$P(x) = 2x^2 + x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5)$$