ELTE IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
21. Mátrixok diagonalizálhatósága
az "Órai feladatok" szakasz 1. feladatának megoldása
(írta: Nagy Gábor)

21.2.1. Órai feladatok / 1./a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Idézzük fel az előző alkalom eredményeit:
Az A mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1.$$

A $\lambda_1 = 0$ sajátérték algebrai multiplicitása 1: $a(0) = 1$, a $\lambda_2 = 1$ sajátérték algebrai multiplicitása 2: $a(1) = 2$.

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_1} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_1} = 1$, így $g(0) = 1$.

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \text{nem mindkettő } 0 \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_2} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_2} = 2$, így $g(1) = 2$.

Mivel a sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege ($a(0)+a(1) = 1+2 = 3$) megegyezik a mátrix sorainak/oszlopainak számával (3), továbbá a sajátértékek geometriai multiplicitásai rendre megegyeznek az algebraiakkal ($g(0) = a(0) = 1, g(1) = a(1) = 2$), ezért van sajátbázis, amit úgy kaphatunk, hogy sajátértékenként maximális számú lineáris független sajátvektorból

álló vektorrendszereket egyesítünk, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egyes sajátértékekhez tartozó sajátalterek bázisait egyesítjük.
Tehát $(1, 3, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$ sajátbázis.

(b) A 21.6 Tétel értelmében a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy van sajátbázis. Ez alapján A diagonalizálható.

A sajátbázis segítségével el tudjuk készíteni a diagonalizáló mátrixot, hiszen az a mátrix jó lesz, amelynek oszlopvektorai a sajátbázis vektorai:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix diagonális alakját úgy kapjuk meg C segítségével, hogy vesszük azt a diagonálmátrixot, amelynek minden egyes főátlóbeli eleme a diagonalizáló mátrix megfelelő oszlopához tartozó sajátérték:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Hiszen az $(1, 3, -1)$-hoz tartozó sajátérték 0, az $(1, 1, 0)$-hoz tartozó sajátérték 1, végül az $(1, 0, 1)$-hoz tartozó is 1.)
Az így kapott C és D mátrixokra teljesül a következő összefüggés:

$$C^{-1}AC = D$$

Mi mondható abban az esetben, ha A-t komplex számokból álló mátrixnak tekintjük?

A karakterisztikus polinom és annak gyökei változatlanok, így a sajátértékek és azok algebrai multiplicitásai is ugyanazok.
Különbözik viszont a sajátvektorok halmaza, mert bár ugyanazokat az egyenletrendszereket kell megoldanunk, de ebben az esetben a komplex számok halmazán. Így a $\lambda_1 = 0$, illetve $\lambda_2 = 1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmazai:

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \text{ illetve } \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{C}, \text{nem mindkettő } 0 \right\}.$$

A sajátalterek bázisai ugyanakkor változatlanok, így a sajátértékek geometriai multiplicitásai sem változnak, aminek következtében a diagonalizálhatóság sem, így az előbb meghatározott C diagonalizáló mátrix ismét megfelelő, a diagonális alak pedig ugyanúgy a D mátrix.

$\boxed{\text{21.2.1. Órai feladatok / 1./}b)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Idézzük fel az előző alkalom eredményeit:
Az A mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátérték algebrai multiplicitása 2: $a(1) = 2$, a $\lambda_2 = 2$ sajátérték algebrai multiplicitása 1: $a(2) = 1$.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_1} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_1} = 1$, így $g(1) = 1$.

A $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_2} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_2} = 1$, így $g(2) = 1$.

A sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege ($a(1)+a(2) = 2+1 = 3$) megegyezik ugyan a mátrix sorainak/oszlopainak számával (3), viszont van olyan sajátérték, amely geometriai multiplicitása és algebrai multiplicitása különböző ($g(1) = 1 \neq 2 = a(1)$), ezért nincs sajátbázis (ld. 20.12. Tétel).

(b) A 21.6 Tétel értelmében a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy van sajátbázis. Ez alapján A nem diagonalizálható, hiszen nincs sajátbázis.

Mi mondható abban az esetben, ha A-t komplex számokból álló mátrixnak tekintjük?

A karakterisztikus polinom és annak gyökei változatlanok, így a sajátértékek és azok algebrai multiplicitásai is ugyanazok.
Különbözik viszont a sajátvektorok halmaza, mert bár ugyanazokat az egyenletrendszereket kell megoldanunk, de ebben az esetben a komplex számok halmazán. Így a $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmazai:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \text{ illetve } \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

A sajátalterek bázisai ugyanakkor változatlanok, így a sajátértékek geometriai multiplicitásai sem változnak, aminek következtében nincs sajátbázis, így a mátrix nem diagonalizálható.

$\boxed{\text{21.2.1. Órai feladatok / 1./}c)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Idézzük fel az előző alkalom eredményeit:
Az A mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Mindhárom sajátérték algebrai multiplicitása 1 ($a(1) = a(2) = a(-1) = 1$).

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_1} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_1} = 1$, így $g(1) = 1$.

A $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_2} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_2} = 1$, így $g(2) = 1$.

A $\lambda_3 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_3 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_3} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_3} = 1$, így $g(-1) = 1$.

Mivel a sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege $(a(1)+a(2)+a(-1) = 1+1+1 = 3)$ megegyezik a mátrix sorainak/oszlopainak számával (3), továbbá a sajátértékek geometriai multiplicitásai rendre megegyeznek az algebraiakkal ($g(1) = a(1) = 1, g(2) = a(2) = 1, g(-1) = a(-1) = 1$), ezért van sajátbázis, amit úgy kaphatunk, hogy sajátértékenként maximális számú lineáris független sajátvektorból álló vektorrendszereket egyesítünk, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egyes sajátértékekhez tartozó sajátalterek bázisait egyesítjük.
Tehát $(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, -3, -5)$ sajátbázis.

(b) A 21.6 Tétel értelmében a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy van sajátbázis. Ez alapján A diagonalizálható.

A sajátbázis segítségével el tudjuk készíteni a diagonalizáló mátrixot, hiszen az a mátrix jó lesz, amelynek oszlopvektorai a sajátbázis vektorai:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix diagonális alakját úgy kapjuk meg C segítségével, hogy vesszük azt a diagonálmátrixot, amelynek minden egyes főátlóbeli eleme a diagonalizáló mátrix megfelelő oszlopához tartozó sajátérték:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(Hiszen az $(1, 1, 1)$-hez tartozó sajátérték 1, az $(1, 0, 1)$-hez tartozó sajátérték 2, végül az $(1, -3, -5)$-höz tartozó a -1.)
Az így kapott C és D mátrixokra teljesül a következő összefüggés:

$$C^{-1}AC = D$$

Mi mondható abban az esetben, ha A-t komplex számokból álló mátrixnak tekintjük?

A karakterisztikus polinom és annak gyökei változatlanok, így a sajátértékek és azok algebrai multiplicitásai is ugyanazok.
Különbözik viszont a sajátvektorok halmaza, mert bár ugyanazokat az egyenletrendszereket

kell megoldanunk, de ebben az esetben a komplex számok halmazán. Így a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmazai rendre:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \quad \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \quad \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

A sajátalterek bázisai ugyanakkor változatlanok, így a sajátértékek geometriai multiplicitásai sem változnak, aminek következtében a diagonalizálhatóság sem, így az előbb meghatározott C diagonalizáló mátrix ismét megfelelő, a diagonális alak pedig ugyanúgy a D mátrix.

21.2.1. Órai feladatok / 1./d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Idézzük fel az előző alkalom eredményeit:
Az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixnak egyetlen sajátértéke van (mivel a karakterisztikus polinomnak egyetlen valós gyöke van):

$$\lambda_1 = 1,$$

ennek algebrai multiplicitása: $a(1) = 1$.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_1} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_1} = 1$, így $g(1) = 1$.

Mivel a sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege ($a(1) = 1$) kisebb a mátrix sorainak/oszlopainak számánál (3), ezért nincs sajátbázis (ld. 20.12. Tétel).

(b) A 21.6 Tétel értelmében a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy van sajátbázis. Ez alapján A nem diagonalizálható, hiszen nincs sajátbázis.

Mi mondható abban az esetben, ha A-t komplex számokból álló mátrixnak tekintjük?

A karakterisztikus polinom $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ esetén változatlan, viszont ebben az esetben A-nak 3 sajátértéke van (mivel a karakterisztikus polinomnak ekkor 3 gyöke van):

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 + 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \qquad \lambda_3 = 1 - 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Mindhárom sajátérték algebrai multiplicitása 1 ($a(1) = a(1+2i) = a(1-2i) = 1$).

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza (most x_3 tetszőleges nemnulla komplex szám lehet):

$$\left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_1} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_1} = 1$, így $g(1) = 1$.

A $\lambda_2 = 1 + 2i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_2 = 1 + 2i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_2} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_2} = 1$, így $g(1+2i) = 1$.

A $\lambda_3 = 1 - 2i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

Ezt kiegészítve a nullvektorral kapjuk a $\lambda_3 = 1 - 2i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret:

$$W_{\lambda_3} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

A sajátaltér dimenziója $\dim W_{\lambda_3} = 1$, így $g(1-2i) = 1$.

Mivel a sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege ($a(1) + a(1+2i) + a(1-2i) = 1+1+1 = 3$) megegyezik a mátrix sorainak/oszlopainak számával (3), továbbá a sajátértékek geometriai multiplicitásai rendre megegyeznek az algebraiakkal ($g(1) = a(1) = 1, g(1+2i) = a(1+2i) = 1, g(1-2i) = a(1-2i) = 1$), ezért van sajátbázis, amit úgy kaphatunk, hogy sajátértékenként maximális számú lineáris független sajátvektorból álló vektorrendszereket egyesítünk, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egyes sajátértékekhez tartozó sajátalterek bázisait egyesítjük.
Tehát $(0, -1, 1), (2i, 1, 3), (-2i, 1, 3)$ sajátbázis.

(b) A 21.6 Tétel értelmében a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy van sajátbázis. Ez alapján A diagonalizálható.

A sajátbázis segítségével el tudjuk készíteni a diagonalizáló mátrixot, hiszen az a mátrix jó lesz, amelynek oszlopvektorai a sajátbázis vektorai:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2i & -2i \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix diagonális alakját úgy kapjuk meg C segítségével, hogy vesszük azt a diagonálmátrixot, amelynek minden egyes főátlóbeli eleme a diagonalizáló mátrix megfelelő oszlopához tartozó sajátérték:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(Hiszen a $(0,-1,1)$-hoz tartozó sajátérték 1, a $(2i,1,3)$-hoz tartozó sajátérték $1+2i$, végül a $(-2i,1,3)$-hoz tartozó az $1-2i$.)
Az így kapott C és D mátrixokra teljesül a következő összefüggés:

$$C^{-1}AC = D$$