ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek
az „Órai feladatok” szakasz 1., 4a., 4d., 4e., 4i., 4m., 7a., 7c. feladatainak megoldása
(írta: Lócsi Levente)

5.2.1. Órai feladatok / 1.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

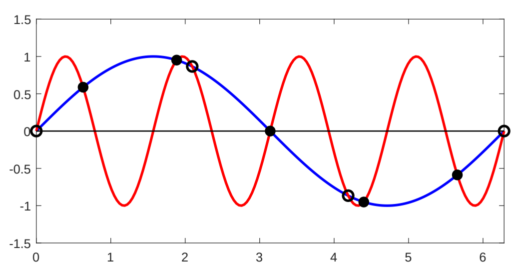
5.2.1. Órai feladatok / 4a.

$\sin\alpha=\sin\beta$

- $\alpha=\beta+k\cdot 2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$
- $\alpha+\beta=\pi+k\cdot 2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin 4x=\sin x$

- $4x=x+k\cdot 2\pi, \qquad 3x=k\cdot 2\pi, \qquad \underline{\underline{x=k\cdot\frac{2\pi}{3}}} \qquad (k\in\mathbb{Z})$
- $4x+x=\pi+k\cdot 2\pi, \qquad 5x=\pi+k\cdot 2\pi, \qquad \underline{\underline{x=\frac{\pi}{5}+k\cdot\frac{2\pi}{5}}} \qquad (k\in\mathbb{Z})$



$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 4d.}}$

$$\begin{aligned}
\cos 2x - 3\cos x + 2 &= 0 \\
\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 &= 0 \\
\cos^2 x - (1-\cos^2 x) - 3\cos x + 2 &= 0 \\
2\cos^2 x - 3\cos x + 1 &= 0 \qquad t := \cos x
\end{aligned}$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \qquad t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}, \qquad \underline{t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1}$$

- $\cos x = \dfrac{1}{2}, \qquad \underline{\underline{x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi}} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 1, \qquad \underline{\underline{x = k\cdot 2\pi}} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 4e.}}$

Ért.: $x \neq k\cdot\dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>1. út</u> (melyen elakadunk)

$$\text{ctg } x - \text{tg } x = 2\sqrt{3}, \qquad \frac{1}{\text{tg } x} - \text{tg } x = 2\sqrt{3}, \qquad 1 - \text{tg }^2 x = 2\sqrt{3}\cdot \text{tg } x$$

$$\text{tg }^2 x + 2\sqrt{3}\cdot\text{tg } x - 1 = 0, \qquad t := \text{tg } x, \qquad t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0, \qquad \dots$$

<u>2. út</u> (melyen célba érünk)

$$\begin{aligned}
\text{ctg } x - \text{tg } x &= 2\sqrt{3} \\
\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= 2\sqrt{3} \\
\cos^2 x - \sin^2 x &= 2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x \\
\cos 2x &= \sqrt{3}\cdot\sin 2x \\
\frac{\cos 2x}{\sin 2x} &= \sqrt{3} \\
\text{ctg } 2x &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\text{ctg } 2x = \sqrt{3}, \qquad 2x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi, \qquad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{2}}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 4i.}}$

Ért.: a négyzetgyök miatt $1 + \cos x \geq 0$ szükséges, de ez minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{1 + \cos x} \\
\sin x \cdot \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad y := \frac{x}{2} \\
\sin 2y \cdot \cos y &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2y}{2}} = \sqrt{\cos^2 y} \\
\sin 2y \cdot \cos y &= |\cos y|
\end{aligned}$$

- 1. eset: $\cos y = 0$, azaz $y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ekkor

$$\begin{aligned}
\sin 2y \cdot \cos y &= |\cos y| \\
\sin 2y \cdot 0 &= |0| = 0
\end{aligned}$$

  azonosság, vagyis minden $\underline{y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ megoldás.

- 2. eset: $\cos y > 0$, azaz $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < y < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ekkor

$$\begin{aligned}
\sin 2y \cdot \cos y &= |\cos y| \\
\sin 2y \cdot \cos y &= \cos y \\
\sin 2y &= 1 \\
2y &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\
y &= \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

  ezek közül a megengedett intervallumokban vannak: $\underline{y = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

- 3. eset: $\cos y < 0$, azaz $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < y < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ekkor

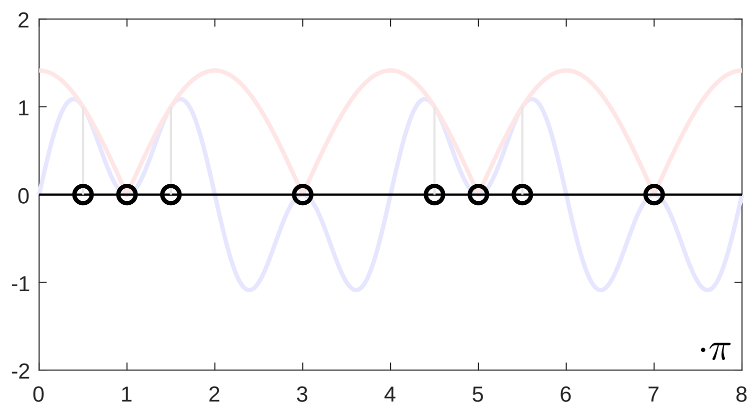
$$\begin{aligned}
\sin 2y \cdot \cos y &= |\cos y| \\
\sin 2y \cdot \cos y &= -\cos y \\
\sin 2y &= -1 \\
2y &= -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\
y &= -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

  ezek közül a megengedett intervallumokban vannak: $\underline{y = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$y = \dfrac{x}{2}$ volt, így $x = 2y$, visszatérve:

$$\underline{\underline{\bullet\ x = \pi + k\cdot 2\pi \qquad \bullet\ x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 4\pi \qquad \bullet\ x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 4\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})}}$$

Számegyenesen a megoldások (halványan függvényként az egyenlet két oldala):



$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 4m.}}$

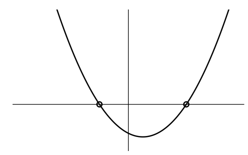
$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos x - \sin x \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos x - \sin x \\ (\cos x + \sin x)\cdot(\cos x - \sin x) &= \cos x - \sin x \end{aligned}$$

- 1. eset: $\cos x - \sin x = 0, \qquad \cos x = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
  - $\frac{\pi}{2} - x = x + k\cdot 2\pi, \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \qquad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi}} \qquad (k\in\mathbb{Z})$
  - $\frac{\pi}{2} - x + x = \pi + k\cdot 2\pi, \qquad 0\cdot x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}), \qquad$ nincs ilyen $x\in\mathbb{R}$
- 2. eset: $\cos x - \sin x \neq 0$, leoszthatunk vele

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- $\circ\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi,\qquad \underline{\underline{x=k\cdot 2\pi}}\qquad (k\in\mathbb{Z})$
- $\circ\ x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi,\qquad \underline{\underline{x=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi}}\qquad (k\in\mathbb{Z})$

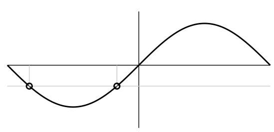
$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 7a.}}$



$2\sin^2 x-\sin x-1>0,\qquad y:=\sin x$

$$2y^2-y-1>0,\qquad y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{4}=\frac{1\pm 3}{4},\qquad y_1=-\frac{1}{2},\quad y_2=1$$

$\underline{y<-\dfrac{1}{2}\text{ vagy }y>1}\qquad$ (másképp: $y\in(-\infty,-1/2)\cup(1,+\infty)$)

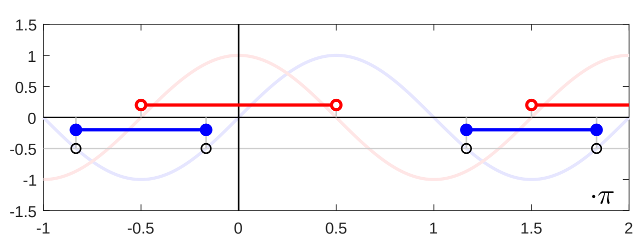
- $\sin x<-\dfrac{1}{2},$  $\underline{\underline{-\dfrac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi<x<-\dfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi}}\qquad (k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x>1,\qquad$ nincs ilyen $x\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{5.2.1. Órai feladatok / 7c.}}$

$$\frac{2\sin x+1}{2\cos x}\le 0$$

- 1. eset:

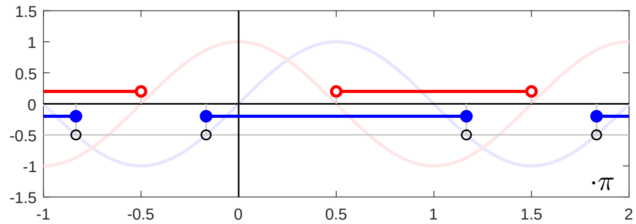
$$\left.\begin{aligned}2\sin x+1\le 0\\ 2\cos x>0\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sin x\le -1/2\\ \cos x>0\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}-\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi\le x\le -\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\\ -\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi< x< \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\end{aligned}\quad (k\in\mathbb{Z})\right\}$$



$$\underline{\underline{-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi<x\le -\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi}}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

- 2. eset:

$$\left.\begin{aligned} 2\sin x + 1 \geq 0 \\ 2\cos x < 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \sin x \geq -1/2 \\ \cos x < 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$



$$\underline{\underline{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A teljes megoldás ezek uniója.

Érdemes lehet (legalább) egy periódusnyi előjelet táblázatban is összefoglalni.

	$-\pi$		$-\frac{5}{6}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{6}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		π
$2\sin x + 1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$2\cos x$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Továbbá érdemes lehet a végső megoldást, az intervallumokat szemléltetni is. Esetleg a számlálót és a nevezőt mint függvényeket is.