

*ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév*  
 2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek  
 az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3b., 3c., 4c., 9. feladatainak megoldása  
 (írta: Csörgő István)

2.2.1. Órai feladatok / 1a.

$$P(x) = x^2 - 6x + 3$$

A középiskolában megismert módszer szerint:

$$P(x) = \underline{x^2 - 6x} + 3 = \underline{(x - 3)^2 - 9} + 3 = (x - 3)^2 - 6$$

Ennek alapján a  $P(x) = 0$  egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ (x - 3)^2 - 6 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 6 \end{aligned} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{aligned} x - 3 &= \sqrt{6} ; & \underline{\underline{x_1 = 3 + \sqrt{6}}} \\ x - 3 &= -\sqrt{6} ; & \underline{\underline{x_2 = 3 - \sqrt{6}}} \end{aligned}$$

2.2.1. Órai feladatok / 1b.

$$P(x) = 2x^2 + 7x - 1$$

Az előző feladathoz képest annyi az eltérés, hogy  $x^2$  együtthatója most nem 1. Ezért az első két tagból kiemeljük  $x^2$  együtthatóját.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 + 7x - 1 = 2 \cdot \left[ x^2 + \frac{7}{2}x \right] - 1 = 2 \cdot \left[ \left( x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} \right] - 1 = \\ &= 2 \cdot \left( x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{49}{8} - \frac{8}{8} = 2 \cdot \left( x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{57}{8} \end{aligned}$$

Ennek alapján a  $P(x) = 0$  egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ 2 \cdot \left( x + \frac{7}{4} \right)^2 - \frac{57}{8} &= 0 \\ \left( x + \frac{7}{4} \right)^2 &= \frac{57}{16} \end{aligned} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{aligned} x + \frac{7}{4} &= \frac{\sqrt{57}}{4} ; & \underline{\underline{x_1 = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}}} \\ x + \frac{7}{4} &= -\frac{\sqrt{57}}{4} ; & \underline{\underline{x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}}} \end{aligned}$$

2.2.1. Órai feladatok / 2.

Emlékeztető, *Viète*-képletek: Ha az  $ax^2 + bx + c$  polinom gyökei  $x_1$  és  $x_2$ , akkor

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Először oldjuk meg az (a) – (e) feladatokat a  $P(x) = x^2 - 6x + 3$  polinom esetén:

(a)  $x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} = \underline{\underline{6}}$

(b)  $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$

(c)  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6^2 - 2 \cdot 3 = 36 - 6 = \underline{\underline{30}}$

(d)  $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{30 - 2 \cdot 3} = \sqrt{30 - 6} = \underline{\underline{\sqrt{24}}}$

(e)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$

Ezek után oldjuk meg az (a) – (e) feladatokat a  $P(x) = 2x^2 + 7x - 1$  polinom esetén:

(a)  $x_1 + x_2 = -\frac{7}{2} = \underline{\underline{-\frac{7}{2}}}$

(b)  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

(c)  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{49}{4} + \frac{4}{4} = \underline{\underline{\frac{53}{4}}}$

(d)  $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{\frac{53}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{57}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{57}}{2}}}$

(e)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{7}}$

---

### 2.2.1. Órai feladatok / 3b.

Az egyenlőtlenséget a 0-ra redukálás módszerével fogjuk megoldani. Ez a legelterjedtebb megoldási módszer törtes egyenlőtlenségekre. Az egyenlőtlenséget 0-ra redukáljuk, így a feladat ekvivalens lesz egy tört előjelének vizsgálatával, amit a számláló és a nevező előjelvizsgálatával végzünk el.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} &< 2 \\ \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} - \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 2x - 3} &< 0 \\ \frac{3x^2 + 7x - 4 - 2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 2x - 3} &< 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} &< 0\end{aligned}$$

Egy tört pontosan akkor negatív, ha

- vagy számlálójá negatív és nevezője pozitív  $\left(\frac{-}{+} \text{ eset}\right)$
- vagy pedig számlálójá pozitív és nevezője negatív  $\left(\frac{+}{-} \text{ eset}\right)$

Ennek megfelelően:

1. eset,  $\frac{-}{+}$ :

$$x^2 + 3x + 2 < 0 \quad (1)$$

$$\text{és } x^2 + 2x - 3 > 0 \quad (2)$$

(1) bal oldalának gyökei:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = -1 \\ \searrow x_2 = -2 \end{array}$$

Ezért (1) megoldása:  $-2 < x < -1$ .

Megoldáshalmaz:  $\mathcal{M}_1 = (-2, -1)$ .

Hasonlóan, (2) bal oldalának gyökei:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -3 \end{array}$$

Ezért (2) megoldása:  $x < -3$  vagy  $x > 1$ .

Megoldáshalmaza:  $\mathcal{M}_2 = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

Az (1), (2) -ből álló egyenlőtlenségrendszer, azaz az első eset megoldásai azok az  $x \in \mathbb{R}$  számok, melyekre

$$(-2 < x < -1) \quad \text{és} \quad (x < -3 \text{ vagy } x > 1)$$

Ilyen  $x$  nem létezik, tehát az 1. eset nem ad megoldást. Halmazokkal leírva:  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ .

2. eset,  $\frac{+}{-}$ :

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \tag{3}$$

$$\text{és } x^2 + 2x - 3 < 0 \tag{4}$$

A megfelelő egyenleteket már megoldottuk. Ennek alapján:

(3) megoldása:  $x < -2$  vagy  $x > -1$ .

Megoldáshalmaza:  $\mathcal{M}_3 = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ .

(4) megoldása:  $-3 < x < 1$ .

Megoldáshalmaza:  $\mathcal{M}_4 = (-3, 1)$ .

Így a (3), (4) -ből álló egyenlőtlenségrendszer, azaz a második eset megoldásai azok az  $x \in \mathbb{R}$  számok, melyekre

$$(x < -2 \text{ vagy } x > -1) \quad \text{és} \quad (-3 < x < 1)$$

Másképp felírva:

$$-3 < x < -2 \quad \text{vagy} \quad -1 < x < 1$$

Halmazokkal leírva:  $\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4 = (-3, -2) \cup (-1, 1)$ .

A feladat megoldását úgy kapjuk, hogy egyesítjük az 1. és a 2. esetben kapott megoldásokat:

$$\underline{\underline{-3 < x < -2 \quad \text{vagy} \quad -1 < x < 1}}$$

Halmazokkal leírva:

$$(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \cup (\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4) = \emptyset \cup ((-3, -2) \cup (-1, 1)) = \underline{\underline{(-3, -2) \cup (-1, 1)}}$$

---

2.2.1. Órai feladatok / 3c.

Itt is a 0-ra redukálás módszerét fogjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} &> \frac{3x+4}{1-2x} \\ \frac{x-1}{x+1} - \frac{3x+4}{1-2x} &> 0 \\ \frac{(x-1)(1-2x) - (x+1)(3x+4)}{(x+1)(1-2x)} &> 0 \\ \frac{x-1-2x^2+2x-3x^2-3x-4x-4}{(x+1)(1-2x)} &> 0 \\ \frac{-5x^2-4x-5}{(x+1)(1-2x)} &> 0\end{aligned}$$

A számlálóban lévő másodfokú polinom diszkriminánsa:  $(-4)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-5) = 16 - 100 < 0$ , ezért a számlálónak nincs valós gyöke. Mivel e polinomban  $x^2$  együtthatója negatív, ezért a polinom értéke bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén negatív. Ezért a tört értéke pontosan akkor pozitív, ha a nevező negatív:

$$(x+1)(1-2x) < 0$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása:  $x < -1$  vagy  $x > \frac{1}{2}$

Megoldáshalmaz:  $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

---

2.2.1. Órai feladatok / 4c.

A vizsgált egyenlőtlenség:

$$\underbrace{(p^2-1)x^2 + 2(p-1)x + 1}_{f(x)} > 0$$

Az  $f$  függvény  $p^2 - 1 \neq 0$  esetén másodfokú (képe egy függőleges tengelyű parabola), egyébként legfeljebb elsőfokú (képe egy egyenes).

1. eset,  $p = 1$ :

$$\begin{aligned}(1^2 - 1)x^2 + 2(1 - 1)x + 1 &> 0 \\ 0x^2 + 0x + 1 &> 0\end{aligned}$$

Ez minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén igaz, tehát  $p = 1$  egy jó paraméterérték.

2. eset,  $p = -1$ :

$$\begin{aligned} ((-1)^2 - 1)x^2 + 2(-1 - 1)x + 1 &> 0 \\ 0x^2 - 4x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Ez nem igaz minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén, tehát  $p = -1$  nem jó paraméterérték.

A  $p^2 - 1 \neq 0$  másodfokú esetet két részre bontjuk aszerint, hogy  $x^2$  együtthatója pozitív (felfelé néző parabola), vagy pedig negatív (lefelé néző parabola). Az  $f(x) > 0$  feltétel egyenértékű azzal, hogy a parabola teljes egészében az  $x$ -tengely feletti félsíkban (felső félsík) van.

3. eset,  $p^2 - 1 > 0$ , azaz  $p < -1$  vagy  $p > 1$ :

Ekkor a parabola felfelé néz, és pontosan akkor van a felső félsíkban, ha  $f$ -nek nincs valós gyöke, azaz, ha diszkriminánsa negatív.

$$D = (2(p - 1))^2 - 4 \cdot (p - 1) \cdot 1 = 4(p^2 - 2p + 1) - 4(p^2 - 1) = 4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 = -8p + 8$$

$$\begin{aligned} -8p + 8 &< 0 \\ p &> 1 \end{aligned}$$

Ez megfelel az esetet kijelölő  $p < -1$  vagy  $p > 1$  feltételnek is, tehát minden  $p > 1$  érték jó.

4. eset,  $p^2 - 1 < 0$ , azaz  $-1 < p < 1$ :

Ekkor a parabola lefelé néz, ezért nem lehet teljesen a felső félsíkban, tehát a  $-1 < p < 1$  paraméterértékek nem jók.

Összefoglalva (vagyis egyesítve az egyes esetekben kapott jó paraméterértékeket), a feladat megoldása:  $p \geq 1$ .

---

#### 2.2.1. Órai feladatok / 9.

Azt kell igazolni, hogy bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén:

$$\frac{7 - \sqrt{52}}{3} \leq \frac{x + 3}{x^2 - x + 1} \leq \frac{7 + \sqrt{52}}{3}$$

A bal oldali egyenlőtlenséget fogjuk igazolni, a jobb oldali igazolása hasonló. Mivel az  $x^2 - x + 1$  polinom minden helyettesítési értéke pozitív, ezért beszorozhatjuk vele az egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \frac{7 - \sqrt{52}}{3} &\leq \frac{x + 3}{x^2 - x + 1} \\ (7 - \sqrt{52})(x^2 - x + 1) &\leq 3(x + 3) \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (7 - \sqrt{52})x + (7 - \sqrt{52}) - 3x - 9 &\leq 0 \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (10 - \sqrt{52})x + (-2 - \sqrt{52}) &\leq 0 \\ (7 - \sqrt{52})x^2 - (10 - \sqrt{52})x + (-2 - \sqrt{52}) &\leq 0 \end{aligned}$$

A bal oldalon  $x^2$  együtthatója negatív, a parabola lefelé néz. Azt kell igazolni, hogy a parabola teljes egészében az zárt alsó félsíkban van, ami azzal egyenértékű, hogy a bal oldal diszkriminánsa  $\leq 0$ .

$$\begin{aligned} D &= \left( -(10 - \sqrt{52}) \right)^2 - 4(7 - \sqrt{52})(-2 - \sqrt{52}) = \\ &= (10 - \sqrt{52})^2 - 4(-14 + 2\sqrt{52} - 7\sqrt{52} + 52) = 100 - 20\sqrt{52} + 52 + 20\sqrt{52} - 152 = \\ &= 152 - 152 = 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Ezzel a bal oldali egyenlőtlenséget igazoltuk.