15. Generált alterek

Ebben a fejezetben véges számú vektor segítségével fogunk altereket megadni.

15.1. Az elméleti anyag

A továbbiakban sokszor fog szerepelni a (véges) vektorrendszer fogalma. (Véges) vektorrendszerről van szó, ha egy vektortérből kiválasztunk véges számú vektort, s ugyanaz a vektor többször is választható. Pontosan ez a „többször választhatóság" különbözteti meg a vektorrendszer fogalmát a vektorhalmaz fogalmától.

15.1.1. Lineáris kombináció

15.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$. A

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

vektort (ill. magát a kifejezést is) az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszer (vagy egyszerűen csak vektorok) $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

A lineáris kombinációt triviálisnak nevezzük, ha minden együtthatója 0 (ennek eredménye nyilván a nullvektor), nem triviálisnak, ha van nem 0 együtthatója.

15.2. Megjegyzések.

1. Az 15.1. definícióban nem tettük fel, hogy az x_i vektorok különbözők, s azt sem, hogy a λ_i számok különbözők.

2. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy ha W altér V-ben, $x_1, \ldots, x_k \in W$, $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W$, vagyis, hogy az alterek zártak a lineáris kombináció képzésére nézve.

15.1.2. Generált altér fogalma

Legyen $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \in V$ egy vektorrendszer. Tekintsük V következő részhalmazát:

$$W^* := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in V \mid \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_k \in \mathbb{K}\}\,. \tag{15.1}$$

W^* elemei tehát az $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k$ vektorrendszer összes lehetséges lineáris kombinációi.

15.3. Tétel. *1. W^* altér V-ben.*

2. *W^* lefedi az x_1, x_2, $\ldots$, x_k vektorrendszert, amin azt értjük, hogy*

$$x_i \in W^* \quad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

3. *Minden olyan $Z \subseteq V$ altér esetén, amely a fenti értelemben lefedi az x_1, x_2, $\ldots$, x_k vektorrendszert, fennáll, hogy $W^* \subseteq Z$.*

A bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy a tétel állítása röviden úgy foglalható össze, hogy W^* az x_1, x_2, $\ldots$, x_k vektorrendszert lefedő legszűkebb altér.

Bizonyítás.

1. Legyen $a = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$. Ekkor

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) x_i \in W^*\,.$$

   Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\lambda a = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda\lambda_i) x_i \in W^*\,.$$

   Tehát W^* valóban altér V-ben.

2. Bármely rögzített $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén:

$$x_i = 0x_1 + \ldots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \ldots + 0x_k \in W^*\,.$$

3. Legyen Z egy, a tételben leírt altér, és legyen $a = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$. Mivel Z lefedi a vektorrendszert, ezért

$$x_i \in Z \qquad (i = 1, \ldots, k)\,.$$

   Azonban Z altér, ezért zárt a linéris kombináció képzésére, amiből azonnal adódik, hogy $a \in Z$. Tehát valóban $W^* \subseteq Z$.

□

15.4. Definíció. Az (15.1) formulával értelmezett W^* alteret az x_1, x_2, $\ldots$, x_k vektorrendszer által generált (vagy kifeszített) altérnek nevezzük, és $\mathrm{Span}\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$-val jelöljük.

15.5. Definíció. Legyen W a V egy altere. Azt mondjuk, hogy W-nek van véges generátorrendszere, ha

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_k \in V : \qquad \mathrm{Span}\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = W\,.$$

Ez esetben az x_1, x_2, $\ldots$, x_k vektorrendszert a W altér egy (véges) generátorrendszerének nevezzük.

15.6. Definíció. Amennyiben $\mathrm{Span}\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_k) = V$, az $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_k$ vektorrendszert röviden csak generátorrendszernek nevezzük.

15.7. Megjegyzés. Az a tény, hogy egy x vektor benne van az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok által generált altérben, egyenértékű azzal, hogy x felírható az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok lineáris kombinációjaként. Úgy is szokták mondani, hogy az x vektor lineárisan függ az $x_1, \ldots, x_k$ vektoroktól.

15.8. Példák.

1. A sík helyvektorainak (pontjainak) vektorterében legyen v egy rögzített vektor. Ekkor
$$\mathrm{Span}\,(v) = \begin{cases} \{0\} & \text{ha } v = 0, \\ v \text{ irányvektorú, origón átmenő egyenes} & \text{ha } v \neq 0. \end{cases}$$
Elemi geometriai módszerekkel igazolható az is, hogy a síkvektorok vektorterében bármely két, egymással nem párhuzamos vektor generátorrendszert alkot.

2. A tér helyvektorainak (pontjainak) vektorterében legyen v_1 és v_2 két rögzített vektor. Ekkor
$$\mathrm{Span}\,(v_1, v_2) = \begin{cases} \{0\} & \text{ha } v_1 = v_2 = 0, \\ v_1 \text{ és } v_2 \text{ közös egyenese} & \text{ha } v_1 \parallel v_2 \\ v_1 \text{ és } v_2 \text{ közös síkja} & \text{ha } v_1 \nparallel v_2. \end{cases}$$
Elemi geometriai módszerekkel igazolható, hogy a térvektorok vektorterében bármely három, nem egy síkba eső vektor generátorrendszert alkot.

3. A $\mathbb{K}^n$-beli i-edik (kanonikus) egységvektort (jelöljük e_i-vel) úgy értelmezzük, hogy i-edik komponense legyen 1, a többi komponense pedig legyen 0 $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor az $e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszer generátorrendszer a $\mathbb{K}^n$ térben, ugyanis tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ esetén:
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 0 \\ \vdots \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$
tehát x valóban felírható az $e_1, \ldots, e_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

15.9. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha a V vektortér egy generátorrendszerét bővítjük (V-beli vektorokat veszünk hozzá), akkor a kibővített rendszer továbbra is generátorrendszer, ha pedig elhagyunk belőle (de nem az összes tagját), akkor nem minden esetben kapunk generátorrendszert. Ilyen értelemben tehát a generátorrendszerek a „nagy” rendszerek. A későbbiek során fontos szerepet kapnak a „minimális” generátorrendszerek.

15.1.3. Véges dimenziós vektortér

15.10. Definíció. A V vektorteret véges dimenziósnak nevezzük, ha van véges generátorrendszere, azaz,ha

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \in V : \qquad \mathrm{Span}\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k) = V\,.$$

Azt a tényt, hogy V véges dimenziós, így jelöljük: $\dim V < \infty$.

15.11. Definíció. A V vektorteret végtelen dimenziósnak nevezzük, ha nincs véges generátorrendszere, azaz, ha

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \forall\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \in V : \qquad \mathrm{Span}\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k) \neq V\,.$$

Azt a tényt, hogy V végtelen dimenziós, így jelöljük: $\dim V = \infty$.

15.12. Példák.

1. A síkvektorok tere véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: $i,\, j$).
2. A térvektorok tere véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: $i,\, j,\, k$).
3. A $\mathbb{K}^n$ tér véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: az n db kanonikus egységvektor).
4. Végtelen dimenziós vektortérre a függelékben találunk példát.

15.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a lineáris kombináció fogalmát.
2. Mondja ki a generált altérről (W^*) szóló tételt.
3. Mit nevezünk generátorrendszernek?
4. Adjon 3 példát generált altérre $\mathbb{R}^2$-ben.
5. Adjon 3 példát generált altérre $\mathbb{R}^3$-ban.
6. Definiálja a kanonikus egységvektorokat $\mathbb{K}^n$-ben. Mi az általuk generált altér?
7. Mikor nevezünk egy vektorteret véges dimenziósnak? Adjon rá egy példát.
8. Mikor nevezünk egy vektorteret végtelen dimenziósnak?

15.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A generált altérről (W^*) szóló tétel.

2. Kanonikus egységvektorok definíciója $\mathbb{K}^n$-ben. Az általuk generált altér.

15.2. Feladatok

15.2.1. Órai feladatok

1. Írjuk fel a

$$W := \operatorname{Span}((1,2,-1),(-3,1,1))$$

$\mathbb{R}^3$-beli alteret. Adjuk meg az altér néhány elemét.

Döntsük el, hogy a $(2,4,0)$ és az $(5,-4,-1)$ vektorok benne vannak-e ebben a W altérben.

2. Tekintsük az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorokat:

$$u = (1,2,-1)\ ; \quad v = (6,4,2)\ ; \quad x = (9,2,7)\ ; \quad y = (4,-1,8).$$

(a) Számítsuk ki a $-2u+3v$ lineáris kombináció eredményét.

(b) Írjuk fel a $\operatorname{Span}(u,v)$ altér elemeit.

(c) Döntsük el, hogy $x \in \operatorname{Span}(u,v)$ vagy nem.

(d) Döntsük el, hogy $y \in \operatorname{Span}(u,v)$ vagy nem.

3. Tekintsük az előző órán vizsgált

(a) $S_5 = \{(x-y, 3x, 2x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

altereket, valamint a

(c) $W_1 = \{(x-y+5z, 3x-z, 2x+y-7z, -x) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

(d) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

altereket. Adjuk meg mindegyiknek egy (véges) generátorrendszerét.

Megjegyzés: Ha sikerül felírni a megadott halmazok elemeit egy-egy véges generátorrendszer lineáris kombinációjaként, akkor az már igazolja azt is, hogy altérről van szó. Ez tehát – a múlt órai feladatot tekintve – egy másik igazolási lehetősége annak, hogy egy megadott halmaz altér.

4. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli alterek egy (véges) generátorrendszerét:

(a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\}$,

(b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,

(c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Megjegyzés: Az előző feladathoz fűzött megjegyzést figyelembe véve, nem szükséges előre igazolni, hogy a megadott halmazok valóban alterek. Az ilyen típusú alterekről részletesen lesz még szó a 18 fejezetben.

5. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli altér egy (véges) generátorrendszerét:

$$W = \{(2x-y+z,\ y+3z,\ x+y-2z,\ x-y) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x+2y+z=0\} \subseteq \mathbb{R}^4 .$$

Megjegyzés: Az előző feladatokhoz fűzött megjegyzést figyelembe véve, itt sem szükséges előre igazolni, hogy a megadott halmaz valóban altér.

15.2.2. További feladatok

1. Legyen $a = (1,2,-1),\ b = (-3,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Számítsuk ki a $2a - 4b$ vektort.

(b) Írjuk fel $\mathrm{Span}\,(a,b)$ néhány elemét.

(c) Döntsük el, hogy az $x = (2,4,0)$, $y = (2,4,-3)$ vektorok benne vannak-e a $\mathrm{Span}\,(a,b)$ altérben.

2. Adjunk meg (véges) generátorrendszert az alábbi alterekhez:

(a) $W_1 = \{(x-y, x+2y, 3x, 4x+3y) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(b) $W_2 = \{(x, 5x, -4x, 7x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(c) $W_3 = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 4z + 3u = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(d) $W_4 = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(e) $W_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(f) $W_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(g) $W_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq \mathbb{R}^2$.

3. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli altér egy (véges) generátorrendszerét:

$$W = \{(x{+}y{+}u,\ 3x{-}2y{+}5z{-}u,\ 2x{+}2z{-}u,\ 3z{+}2u) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x,y,z,u \in \mathbb{R},\ x{+}y{+}z{+}u = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4 .$$