4. Exponenciális, logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek

4.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Exponenciális azonosságok, kifejezések használata.
2. Exponenciális függvények és tulajdonságaik.
3. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek.
4. Logaritmus definíciója, azonosságok.
5. Logaritmusfüggvények és tulajdonságaik.
6. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek.

4.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja $\log_a b$−t, megadva az a, b−re vonatkozó feltételeket is.
2. Milyen x valós számra igaz, hogy $2^x = 3$?
3. Milyen x valós szám esetén teljesül, hogy : $\dfrac{1}{2^{\sqrt{3x}}} = 4^{-3/2}$?
4. Írja fel a szorzat logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
5. Írja fel a hányados logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
6. Írja át az $\log_5 2$ számot 3−as alapú logaritmusok segítségével.
7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$13^{\dfrac{\lg(\ln 13)}{\lg 13}}.$$

8. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\sqrt[4]{x^{4+\log_x 36}} \quad (1 \neq x \in (0; +\infty)).$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln^2 x - \ln x^3 + \ln e^2 = 0.$$

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x + \log_2(9 - 2^x) = 3.$$

11. Milyen valós x számokra igaz, hogy:

$$|\lg(x-1) - 10| < 1\,?$$

12. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := e^{1-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := 3^{|x|+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

14. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \log_2 x^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

15. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \sqrt{\ln x + 1} - \sqrt{\ln x - 1} \quad (x \in [e; e^2]).$$

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$2^x = 128; \qquad 2^x \geq 128; \qquad 2^x < 128; \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^x = 81; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{25}{9}.$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33.$$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $9 \cdot 3^{x-2} + 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1} + 18\,;$

(b) $16 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^{2x}\,;$

(c) $3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0\,;$

(d) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}\,;$

(e) $\sqrt{(17-12\sqrt{2})^x} + \sqrt{(17+12\sqrt{2})^x} = \frac{10}{3}\,;$

(f) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0\,.$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet az $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} (t \in \mathbb{R})$ helyettesítés felhasználásával:

$$4x^3 - 3x - a = 0 \quad (a > 1).$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$e^x + e^{-x} > 3.$$

6. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2^x+2} - \sqrt{2^x-2}} \quad (x \in [1;2]).$$

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} + 5^{1+\log_{125} 8}.$$

8. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}.$$

9. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_x \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \cdot y^{-1}}}}} \quad (1 \neq x \in (0;+\infty); y > 0).$$

10. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\frac{1}{2} \cdot \lg 52 + 3 \cdot \lg 2 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13.$$

11. Fejezze ki x–et az a, b, c segítségével, ha:

$$\log_a x = 3 \cdot (\log_a b - \log_{a^2} c) \quad (1 \neq a > 0; b, c > 0).$$

12. Tudva, hogy $\log_{16}(54) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_{12}(18)$–at.

13. Tudva, hogy $20x^2 - y^2 + 8xy = 0$ teljesül számítsuk ki $\lg x - \lg y$ pontos értékét.

14. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\log_5 x = -1; \qquad \log_5 x \leq -1; \qquad \log_5 x \geq -1;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x > -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x = -2.$$

15. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_3(\log_2(\lg(2x))) = 0\,;$

(b) $\log_{25}\left[\frac{1}{5} \cdot \log_3\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\frac{1}{2}\,;$

(c) $\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2\log_3 4,5 - 4\,;$

(d) $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2\log_4 3\,;$

(e) $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3\,;$

(f) $\log_x(8) - \log_{4x}(8) = \log_{2x}(16)\,;$

(g) $x^{(2\cdot\lg^2 x - 1,5\cdot\lg x)} = \sqrt{10}$

(h) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} > 1\,;$

(i) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} < 1\,;$

(j) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0\,;$

(k) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \leq 0\,;$

(l) $\log_x(\lg(x)) > 0\,;$

(m) $\log_{1/x} \dfrac{2x-1}{x-1} \leq -1\,.$

16. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f : [1; 64] \to \mathbb{R} \quad f(x) = (\log_2 x)^4 + 12 \cdot (\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x}.$$

17. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{1-x}}}{\ln(x^2 - 1)}\ ?$$

18. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \ln\frac{1}{x} \quad (x \in (0; +\infty)).$$

19. Igazolja, hogy tetszőleges a, b pozitív valós számok esetén:

$$\ln\frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

20. Igazolja, hogy tetszőleges a, b valós számok esetén:

$$\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{(a+b)/2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

4.2.2. További feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Adjuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ valós számokat, amelyekre

(a) $8^{x-1} - 2^{3x-2} + 8 = 0;$

(b) $2^{3x+1} + 3^{2x+2} = 11\ .$

(c) $2^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 0.01^{-x};$

(d) $2^x - 0.5^x = 3.75;$

(e) $3^x + 3^{-x} = p \qquad (p \in \mathbb{R}$ paraméter);

(f) $(x-1)^x = \sqrt[3]{x-1}\ .$

(g) $5^{3x-4} < \dfrac{1}{25}\,;$

(h) $\dfrac{3}{7}^{4-3x} \geq \dfrac{49}{9}\,;$

(i) $2^x + 2^{1-x} < 3\,.$

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

2. Tudva, hogy $\log_{12}(27) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_6(16)-$ot.

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln(10x) = \lg(ex).$$

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^{\ln x} = e.$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2^x + 2)^{1/x} = 4.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_{4-x}(x^2+16) + \log_{4-x}(2x+1) = \log_{4-x}(2x) + \log_{4-x}(x^2+21)$;

(b) $\log_{x+1}(2x^2+8x+6) = 2$;

(c) $\log_3(x^3-1) - \log_3(x^2+x+1) = 2$;

(d) $\lg(x^4) + \lg(x^2) = 6$;

(e) $\log_{x-1}(x^2-2x+1) = 2$;

(f) $\lg(x+24) = 2 - 2\lg(\sqrt{x+3})$;

(g) $4\log_a(x) - 4\log_{a^2}(x) + 4\log_{a^4}(x) = 3 \quad (a \in \mathbb{R})$;

(h) $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$;

(i) $2 \cdot \lg(2) + \lg(2x+1) - \lg(-12x) = \lg(1-2x)$;

(j) $\dfrac{\log_3(2x)}{\log_3(4x-15)} = 2$;

(k) $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$;

(l) $\log_2(x) + 2 \cdot \log_4(x) = 3 \cdot \log_8(x) + 1$;

(m) $(\log_2(x)) \cdot (\log_4(2x)) = 2 \cdot \log_4(2)$;

(n) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;

(o) $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5\,$;

(p) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10\,$;

(q) $x^{\lg(x)} = 0.1 \cdot x^2$;

(r) $\log_3\left(\log_3^2(x) - 3 \cdot \log_2(x) + 5\right) = 2\,$.

(s) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+x-30) < 0$;

(t) $\log_{1-x}\dfrac{2x+3}{4(2x+1)} \geq 1$;

(u) $\log_3 x \geq \log_x 3\,$.

7. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_{1/2}(x^2-1) + \log_2(x-1) < \log_4(x+1).$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) \geq -\ln x.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(\ln x)^x > e^x.$$

10. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\log_2(\pi)} + \frac{1}{\log_\pi(2)} > 2.$$

11. Mutassuk meg, hogy

$$\log_a(a^2+1) + \log_{a^2+1}(a^2) > 3 \quad (a \in (1, +\infty)) .$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (0;1)$, akkor :

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

13. Igazoljuk, hogy:

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

14. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2^x - 1}}{\log_x(|x| - 3)} \ ?$$

15. Legyen adott az $a \in (0;1)$ paraméter és az $f(x) := a^x + (1-a)^x \ (x \in \mathbb{R})$ függvény. Igazoljuk, hogy:

(a) Ha $x > 1 \implies f(x) < 1$;

(b) Ha $x < 1 \implies f(x) > 1$.

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0; +\infty)$ valós számokra:

$$a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a.$$

17. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0; +\infty)$ és $\alpha \in (0;1)$ valós számokra:

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} < a + b.$$

18. Bizonyítsuk be, hogy :

$$\exists!\, x \in [1; +\infty) : 1 + 2 \cdot \ln x = e^{1-x}.$$

19. Határozza meg az alábbi függvény legkisebb értékét és helyét:

$$f(x) := \log_2^2 x + \log_x^2 2 \quad (x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}).$$

20. Milyen valós x, y számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\log_x(\pi - \sqrt{y})} + 2\cos(3\pi \cos \sqrt{y}) + \sqrt{\log_{\pi - \sqrt{y}} x} \leq 0?$$