ELTE IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
19. Kapcsolat az inverz mátrixszal
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3., 4. feladatainak megoldása
(írta: Nagy Gábor)

19.2.1. Órai feladatok / 1.

Elevenítsük fel a múlt alkalommal a Gauss–Jordan-elimináció során kapott táblázatsorozatot:

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\
4 & 5 & -2 & 10 \\
2 & 3 & -1 & 7 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
4 & 0 & 13 & 35 \\
\boxed{2} & 0 & 8 & 22 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\
\underline{1} & 0 & 4 & 11 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3 \\
\underline{1} & 0 & 0 & -1
\end{array}
$$

Mivel a leálláskor kapott táblázatban 3 megjelölt elem van, ezért az együtthatómátrix reguláris (hiszen 3x3-as).
Az együtthatómátrix rangja 3 (a megjelölt elemek száma).

(A válaszokat a következő indoklással is megkaphatjuk:
- Mivel az egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, ezért a 19.1 Tétel értelmében az együtthatómátrix rangja 3.
- Mivel az együtthatómátrix rangja 3, ezért a 19.2 Tétel értelmében reguláris.)

19.2.1. Órai feladatok / 2./*a*)

Amikor egy mátrix inverzét Gauss–Jordan-elimináció segítségével akarjuk meghatározni, akkor az induló táblázatban a függőleges vonaltól balra a mátrix szerepel, a függőleges vonaltól jobbra pedig az egységmátrix:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

A Gauss–Jordan-elimináció lépései a következő táblázatsorozatban láthatók:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
3 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-1 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\
3 & \underline{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\
11 & 0 & -10 & 0 & 3 & 1 \\
\hline\hline
-1 & 0 & \underline{1} & 1 & -2 & 0 \\
1 & \underline{1} & 0 & 2 & -3 & 0 \\
\boxed{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1 \\
\hline\hline
0 & 0 & \underline{1} & 11 & -19 & 1 \\
0 & \underline{1} & 0 & -8 & 14 & -1 \\
\underline{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1
\end{array}
$$

Az eljárás leállt, mert már nem lehet generáló elemet választani. Mivel 3 megjelölt elem van, ezért a mátrix reguláris. A kapott táblázat sorait rendezzük át úgy, hogy a függőleges vonaltól balra az egységmátrix szerepeljen! Ekkor a függőleges vonaltól jobbra a mátrix inverze jelenik meg:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\underline{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1 \\
0 & \underline{1} & 0 & -8 & 14 & -1 \\
0 & 0 & \underline{1} & 11 & -19 & 1
\end{array}
$$

Ez alapján:

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -17 & 1 \\ -8 & 14 & -1 \\ 11 & -19 & 1 \end{bmatrix}
$$

19.2.1. Órai feladatok / 2./b)

Ebben az esetben is az induló táblázatban a függőleges vonaltól balra a mátrix szerepel, a függőleges vonaltól jobbra pedig az egységmátrix:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
-3 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

A Gauss–Jordan-elimináció lépései a következő táblázatsorozatban láthatók:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
-3 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
1 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
-4 & 0 & -6 & -1 & 0 & 1 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -5/2 & 1 & -1/2 & 0 \\
\underline{1} & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1
\end{array}
$$

Az eljárás leállt, mert már nem lehet generáló elemet választani. Mivel nincs meg a 3 db megjelölt elem, ezért a mátrixnak nincs inverze, a mátrix szinguláris. (Mivel 2 megjelölt elem van, ezért a mátrix rangja 2.)

19.2.1. Órai feladatok / 3.

Amikor a Gauss–Jordan-elimináció segítségével akarjuk meghatározni egy mátrix rangját, akkor az induló táblázatban csupán a mátrixot vesszük fel, nincs sem függőleges vonal, sem attól jobbra eső rész:

$$\begin{array}{cccc} 5 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{array}$$

A Gauss–Jordan-elimináció lépései a következő táblázatsorozatban láthatók:

$$\begin{array}{cccc} 5 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} \\ \underline{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az eljárás leállt, mert már nem lehet generáló elemet választani. Mivel 2 megjelölt elem van, ezért a mátrix rangja 2, így szinguláris ($2 \neq 4$).

19.2.1. Órai feladatok / 4.

Mivel $\mathrm{rang}(A) = 2 < 4$, ezért A 19.1 Tétel alapján tudjuk, hogy mind az $Ax = b_1$, mind az $Ax = b_2$ egyenletrendszernek vagy nem létezik megoldása, vagy pedig végtelen sok megoldása létezik, tehát elég azt vizsgálni, hogy megoldható-e az egyenletrendszer, ami a Gauss–Jordan-módszer használata esetén azon múlik, keletkezik-e redukált táblázat.

a) A Gauss–Jordan-elimináció lépései a következő táblázatsorozatban láthatók:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} & 3 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 0 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az eljárás leállt, mert már nem lehet generáló elemet választani. 2 nem megjelölt sor van. Mindkettő esetén a függőleges vonaltól jobbra eső elem 0, ezért keletkezik redukált táblázat, vagyis megoldható az egyenletrendszer. A bevezető rész alapján tehát tényleg végtelen sok megoldás van.

b) A Gauss–Jordan-elimináció lépései a következő táblázatsorozatban láthatók:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \boxed{1} & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 4 & 1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} & 5 \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 0 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 2 & 1 & \underline{1} & 5 \\ \underline{1} & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}$$

Az eljárás leállt, mert már nem lehet generáló elemet választani. 2 nem megjelölt sor van. Van olyan (mindkettő), amelyben a függőleges vonaltól jobbra eső elem nem 0, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása (redukált táblázat nem keletkezik).