23. Valós euklideszi terek II.

23.1. Az elméleti anyag

23.1.1. A felbontási tétel

Az előző szakaszban megvizsgáltuk – véges dimenziós W altér esetén – egy $x \in W$ vektor előállítását, ha az altér $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszere ortonormált. Így jutottunk el az x Fourier-kifejtéséhez. Mivel x Fourier-együtthatói nem csak $x \in W$ esetén képezhetők, hanem bármely $x \in V$ esetén, ezért természetesen vetődik fel a kérdés, hogy $x \notin W$ esetén mit ad meg a

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i$$

összeg (az ún. Fourier-összeg). Ezzel a kérdéssel foglalkozunk ebben a szakaszban.

23.1. Tétel. **(Felbontási tétel)**

Legyen $e_1, \ldots, e_n \in V$ *egy O.N.R., továbbá* $W := \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ *a rendszer által generált altér. (Fontos megjegyeznünk, hogy ekkor* $e_1, \ldots, e_n$ *O.N.B.* W*-ben.)*

Ekkor bármely $x \in V$ *vektor egyértelműen felbontható* $x = x_1 + x_2$ *alakban, ahol* $x_1 \in W$ *és* $x_2 \perp W$*. Nevezetesen*

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i \quad \textit{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i \,.$$

Bizonyítás. Először a felbontás létezését igazoljuk úgy, hogy megmutatjuk, hogy a megadott képletek egy helyes felbontást adnak. Jelölje ismét c_i az i-edik Fourier-együtthatót, azaz legyen $c_i = \langle x,\, e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ezzel a jelöléssel

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \quad \text{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \,.$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 \in W$ (mivel x_1 az e_i-k lineáris kombinációja).

Az is nyilvánvaló, hogy $x = x_1 + x_2$ (mivel $x_2 = x - x_1$).

Csak azt kell igazolnunk, hogy $x_2 \perp W$. Mivel W altér, a rá való merőlegesség ekvivalens az $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszerre való merőlegességgel (22.14 tétel). Ez viszont egyszerűen adódik az alábbi számolásból:

$$\begin{aligned} \langle x_2,\, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j,\, e_i \rangle = \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle e_j,\, e_i \rangle = \\ &= \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_j \langle e_j,\, e_i \rangle - c_i \langle e_i,\, e_i \rangle = \\ &= \langle x,\, e_i \rangle - 0 - c_i \cdot 1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Második lépésként igazoljuk az egyértelműséget.

Tegyük fel, hogy

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{és} \quad x = x_1' + x_2'$$

is a követelményeknek megfelelő felbontások. Ebből következően

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \quad \text{átrendezve} \quad x_1 - x_1' = x_2' - x_2\,. \tag{23.1}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\langle x_1 - x_1',\, x_1 - x_1'\rangle &= \langle x_2' - x_2,\, x_1 - x_1'\rangle = \\ &= \langle x_2',\, x_1\rangle - \langle x_2,\, x_1\rangle - \langle x_2',\, x_1'\rangle + \langle x_2,\, x_1'\rangle = 0 - 0 - 0 + 0 = 0\,,\end{aligned}$$

amiből a skaláris szorzat utolsó axiómája alapján $x_1 - x_1' = 0$, azaz $x_1 = x_1'$ következik. Ekkor viszont (23.1) alapján $x_2 = x_2'$ is azonnal adódik. □

23.2. Megjegyzések.

1. Az x_1 vektort az x vektor W-vel párhuzamos összetevőjének (komponensének) nevezzük, jele $P(x)$. Az x_2 vektor neve: az x vektor W-re merőleges összetevője (komponense), jele $Q(x)$.

2. A $P(x) = x_1$ vektor más elnevezése: az x vektor W altérre eső merőleges vetülete (projekciója). Ha ezt akarjuk hangsúlyozni, akkor $P(x)$ helyett szokás a $\mathrm{proj}_W(x)$ jelölés is. Tételünkből következik, hogy

$$\mathrm{proj}_W(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle \cdot e_i\,.$$

Ezzel megkaptuk a szakasz elején feltett kérdésre a választ:

$x \in V$ esetén a Fourier-kifejtésben szereplő összeg az x vektornak a $W = \mathrm{Span}\,(e_1, \dots, e_n)$ altérre való merőleges vetületét állítja elő.

Ez a vetület $x \in W$ esetén természetesen maga az x vektor.

3. Később (ld. 23.6 következmény) meg fogjuk mutatni, hogy bármely véges dimenziós altér generálható véges O.N.R.-rel, így a felbontás tetszőleges véges dimenziós altér esetén elvégezhető.

A felbontási tétel és annak képletei könnyen általánosíthatók arra az esetre, amikor a W alteret egy ortogonális (tehát nem feltétlenül ortonormált) rendszer generálja. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a generáló ortogonális rendszerben nincs nullvektor.

Legyen tehát $u_1, \dots, u_n \in V \setminus \{0\}$ egy O.R., $W := \mathrm{Span}\,(u_1, \dots, u_n)$ a rendszer által generált altér, továbbá $x \in V$. Ekkor normálással kapjuk az

$$\frac{u_1}{\|u_1\|},\ \frac{u_2}{\|u_2\|},\ \dots\ \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

O.N.R.-t, amely nyilvánvalóan a W alteret generálja. Erre már alkalmazhatjuk a felbontás levezetett képleteit:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, \frac{u_i}{\|u_i\|} \rangle \cdot \frac{u_i}{\|u_i\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_i\|^2} \cdot \langle x,\, u_i \rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,\, u_i \rangle}{\langle u_i,\, u_i \rangle} \cdot u_i$$

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,\, u_i \rangle}{\langle u_i,\, u_i \rangle} \cdot u_i$$

23.3. Tétel. (vetület hosszának becslése) *A felbontási tétel feltételei mellett:*

$$\| P(x)\| \leq \| x\| \,.$$

Itt egyenlőség akkaor és csk akkor áll, ha $Q(x) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x \in W$.

Bizonyítás. Mivel $P(x) \perp Q(x)$, alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, majd hagyjuk el a nemnegatív $\| Q(x)\|^2$ tagot:

$$\| x\|^2 = \| P(x) + Q(x)\|^2 = \| P(x)\|^2 + \| Q(x)\|^2 \geq \| P(x)\|^2 \,,$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk a bizonyítandó állítást. Nyilvánvaló, hogy az utolsó becslésnél akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $Q(x) = 0$. □

23.4. Megjegyzés. Hasonlóan igazolhatjuk a $\| Q(x)\| \leq \| x\|$ egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $P(x) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x \perp W$.

23.1.2. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás

Legyen $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n \in V$ egy véges lineárisan független vektorrendszer. Az alábbiakban ismertetjük a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást, amellyel ebből a rendszerből kiindulva létrehozunk egy olyan

$$u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n \in V \setminus \{0\}$$

ortogonális rendszert, amely ekvivalens az eredeti rendszerrel abban az értelemben, hogy

$$\forall\, k \in \{1, 2, , \ldots, n\} : \quad \mathrm{Span}\,(b_1,\, \ldots,\, b_k) = \mathrm{Span}\,(u_1,\, \ldots,\, u_k)\,.$$

Speciálisan ($k = n$ esetén): a két rendszer ugyanazt az alteret generálja.

Az eljárás a következő:

1. lépés: $u_1 := b_1$

2. lépés: $u_2 := b_2 - \dfrac{\langle b_2,\, u_1 \rangle}{\langle u_1,\, u_1 \rangle} \cdot u_1$

3. lépés: $u_3 := b_3 - \dfrac{\langle b_3,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 - \dfrac{\langle b_3,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2$

$\vdots$

n. lépés: $u_n := b_n - \dfrac{\langle b_n,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 - \dfrac{\langle b_n,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2 - \ldots - \dfrac{\langle b_n,\, u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1},\, u_{n-1}\rangle} \cdot u_{n-1}.$

Igazolható, hogy ez az eljárás olyan $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$ rendszerhez vezet, amelyet a feladat követelményei előírnak.

23.5. Megjegyzések.

1. Az eljárás lényege – s ez egyúttal egy szemléletes „igazolását" is adja az eljárás helyességének – az, hogy

   - u_2 a b_2 merőleges komponense a Span (u_1) altérre vonatkozóan
   - u_3 a b_3 merőleges komponense a Span $(u_1,\, u_2)$ altérre vonatkozóan

     $\vdots$

   - u_n a b_n merőleges komponense a Span $(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_{n-1})$ altérre vonatkozóan.

2. Szintén ekvivalens O.R.-hez jutunk, ha a k-adik lépésben kapott u_k vektort megszorozzuk egy $c_k \neq 0$ konstanssal, és a továbbiakban ezt a $c_k u_k$ vektort használjuk u_k helyett. Ha pl. $c_k = \dfrac{1}{\|\, u_k\|}$-val szorzunk, akkor ekvivalans O.N.R.-hez jutunk (normalizált Gram-Schmidt eljárás).

23.6. Következmény. Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett, $1 \leq \dim V = n < \infty$. Ekkor V-ben létezik ortogonális bázis is és ortonormált bázis is.

Vegyük ugyanis a tér egy $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ bázisát, és alkalmazzuk rá a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást. Így egy $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$ ortogonális bázishoz jutunk. Ennek normálásával pedig ortonormált bázist kapunk.

Ezzel megkaptuk a 23.2 megjegyzésben előre jelzett eredményt: minden véges dimenziós, nem zéró altér generálható véges O.N.R.-rel, tehát a párhuzamos és merőleges komponensekre bontás minden véges dimenziós altér esetén elvégezhető.

23.1.3. Háromszög-egyenlőtlenség

Az elemi geometriában tanultuk, hogy a háromszög két oldalának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal. Vektorokkal megfogalmazva ez azt jelenti, hogy bármely $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor esetén

$$|\,\underline{a}+\underline{b}| \leq |\,\underline{a}| + |\,\underline{b}|$$

Ebben a szakaszban bebizonyítjuk a fenti, ún. háromszög-egyenlőtlenséget tetszőleges euklideszi térben. Ehhez először egy önmagában is fontos alapvető egyenlőtlenséget igazolunk.

23.7. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség) *Legyen $x, y \in V$. Ekkor*

$$|\,\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Bizonyítás. $y = 0$ esetén az állítás egyenlőség formájában teljesül. Tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Ekkor alkalmazhatjuk a felbontási tételt az $u_1 := y$ egyetlen tagból álló O.R.-re:

$$x = P(x) + Q(x), \quad \text{ahol} \quad P(x) = \sum_{i=1}^{1} \frac{\langle x,\, u_i\rangle}{\langle u_i,\, u_i\rangle} \cdot u_i = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle} \cdot y = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \cdot y$$

A vetület hosszának becsléséről szóló 23.3 tételbe írjuk be $P(x)$ képletét, majd rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$\left\| \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \cdot y \right\| \leq \|\,x\|$$

$$\left| \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \right| \cdot \|\,y\| \leq \|\,x\|$$

$$\frac{|\,\langle x,\, y\rangle|}{\|\,y\|^2} \cdot \|\,y\| \leq \|\,x\|$$

$$|\,\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

□

23.8. Megjegyzés. A bizonyításból kiderül, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha x és y lineárisan összefüggők (egyik a másik skalárszorosa). Könnyen kiszámolható az is, hogy ha x és y egyirányú (azaz $\exists\, \lambda > 0 :\; x = \lambda y$), akkor az egyenlőség

$$\langle x,\, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$$

formában, ha pedig x és y ellentétes irányú (azaz $\exists\, \lambda < 0 :\; x = \lambda y$), akkor az egyenlőség

$$\langle x,\, y\rangle = -\|x\| \cdot \|y\|$$

formában teljesül.

A Cauchy-egyenlőtlenség segítségével igazolhatjuk a norma harmadik alapvető tulajdonságát, a háromszög-egyenlőtlenséget. Az első két alapvető tulajdonságot a 22.7 tételben tárgyaltuk.

23.9. Tétel. (háromszög-egyenlőtlenség)

$$\forall\, x,\, y \in V: \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Bizonyítás.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \langle y,\, x\rangle + \langle y,\, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\cdot|\langle x,\, y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\,,$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. (Az utolsó becslésnél a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk.) □

23.10. Megjegyzés. Figyelembe véve azt is, hogy mikor van a Cauchy-egyenlőtlenségben egyenlőség, megállapíthatjuk, hogy a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = 0$ vagy $y = 0$ vagy egyikük sem nullvektor, de egyirányúak (egymás pozitív konstans-szorosai).

23.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mondja ki a felbontási tételt

2. Írja fel a vetület hosszának becsléséről szóló tételt

3. Írja le a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást

4. Írja fel a Cauchy-egyenlőtlenségről szóló tételt (az egyenlőség esetéről nem kell írni)

5. Írja fel a háromszög-egyenlőtlenségről szóló tételt (az egyenlőség esetéről nem kell írni)

23.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A felbontási tétel

2. A vetület hosszának becsléséről szóló tétel

3. A Cauchy-egyenlőtlenségről szóló tétel (az egyenlőség esetéről nem kell írni)

4. A háromszög-egyenlőtlenségről szóló tétel (az egyenlőség esetéről nem kell írni)

23.2. Feladatok

23.2.1. Órai feladatok

1. (részben az előző leckéhez tartozó feladat) Adott az

$$u_1 := (1,1,1,1),\ u_2 := (1,-1,-1,1),\ u_3 := (-1,0,0,1)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben.

(a) Mutassuk meg, hogy az $u_1,\ u_2,\ u_3$ vektorrendszer O.R.

(b) Ellenőrizzük a Pitagorasz-tétel állítását az $u_1,\ u_2,\ u_3$ ortogonális vektorrendszeren.

(c) Bontsuk fel az $x = (2,1,3,1) \in \mathbb{R}^4$ vektort a

$$W := \operatorname{Span}(u_1,\ u_2,\ u_3) \subset \mathbb{R}^4$$

altér szerinti párhuzamos és merőleges komponensekre.

2. Állítsunk elő az $\mathbb{R}^4$ térben a

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

lineárisan független vektorrendszerrel ekvivalens ortogonális rendszert (O.R.-t) és ekvivalens ortonormált rendszert (O.N.R.-t).

3. Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

vektorai által generált W alterében.

4. (a) Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 = 0,\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

alterében.

(b) Bontsuk fel az $x := (3, 4, -3, 5) \in \mathbb{R}^4$ vektort az előző pontbeli W altérrel párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

(c) Melyik mátrix nulltere (magja) a fenti W altér?

23.2.2. További feladatok

1. Számítsuk ki az $x = (1, 2, 0, -2) \in \mathbb{R}^4$ vektor merőleges vetületét az $\mathbb{R}^4$ alábbi ortogonális rendszerei által generált alterekre:

a) $u_1 = (0, 1, -4, -1),\ u_2 = (3, 5, 1, 1)$.

b) $u_1 = (1, -1, -1, 1),\ u_2 = (1, 1, 1, 1),\ u_3 = (1, 1, -1, -1)$.

2. A Gram-Schmidt eljárással alakítsuk át a

$$b_1 = (0, 2, 1, 0),\ b_2 = (1, -1, 0, 0),\ b_3 = (1, 2, 0, -1),\ b_4 = (1, 0, 0, 1)$$

$\mathbb{R}^4$-beli bázist

(a) ortogonális bázissá:

(b) ortonormált bázissá

3. Adottak $\mathbb{R}^4$ alábbi alterei:

(a) $W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0,\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0\}$

(b) $W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$

Mindkét altér esetén

(a) Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist a W altérben.

(b) Határozzuk meg az $x := (0, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektor merőleges vetületét a W altérre.

(c) Melyik mátrix nulltere (magja) a W altér?

4. Igazoljuk a Bessel-egyenlőtlenséget:

Ha $e_1, \ldots, e_n$ O.N.R. a V valós euklideszi térben, akkor:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$