ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
10. Teljes indukció
az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 1c., 4a., 4b., 4c., 4d. feladatainak megoldása
(írta: Csörgő István)

10.2.1. Órai feladatok / 1a.

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 1:$

$$A(1): \qquad \sum_{k=1}^{1} k \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)}{2}$$

Itt az egyenlőség mindkét oldalának értéke 1, tehát $A(1)$ igaz. Úgy is szoktuk mondani, hogy a bizonyítandó egyenlőség $n = 1$-re igaz.

$n \to n+1:$ Igazolni kell, hogy $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, amelyre $A(n)$ igaz, tehát amelyre fennáll, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(indukciós feltevés)}$$

Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

A bal oldali összeg utolsó tagját leválasztjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

A bal oldalon szereplő szumma éppen az indukciós feltevés bal oldala, ezért az indukciós feltevést alkalmazhatjuk. Így ezt kell igazolni:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{1}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &\stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad / : (n+1) \\ \frac{n}{2} + 1 &\stackrel{?}{=} \frac{n+2}{2} \\ n+2 &\stackrel{?}{=} n+2\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

Megjegyzés: Az (1) egyenlőséget úgy is igazolhatjuk, hogy a bal oldalát addig alakítjuk, amig el nem jutunk a jobb oldalig:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\text{jobb oldal}$$

A most következő két feladatban az $A(n)$ jelölést már nem használjuk (de érdemes meggondolni, hogy mit jelöl $A(n)$), továbbá az indukciós feltevést sem fogjuk leírni, mivel az *formailag* azonos a bizonyítandó állítás megfelelő részével (mégpedig $A(n)$-nel).

10.2.1. Órai feladatok / 1b.

Állítás: $\forall\, n\in\mathbb{N}^+ : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n=1:$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

Itt az egyenlőség mindkét oldalának értéke 1, tehát a bizonyítandó egyenlőség $n=1$-re igaz.

$n\to n+1:$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőség valamely $n\in\mathbb{N}^+$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+1+1)(2\cdot(n+1)+1)}{6}$$

A bal oldali összeg utolsó tagját leválasztjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+(n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

A bal oldalon szereplő szumma éppen az indukciós feltevés bal oldala, ezért az indukciós feltevést alkalmazhatjuk. Így ezt kell igazolni:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &\overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad\qquad / : (n+1)\\
\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1) &\overset{?}{=} \frac{(n+2)(2n+3)}{6}\\
n(2n+1)+6(n+1) &\overset{?}{=} (n+2)(2n+3)\\
2n^2+7n+6 &\overset{?}{=} 2n^2+7n+6\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}
\end{aligned}$$

10.2.1. Órai feladatok / 1c.

Állítás: $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 1:$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1+1}$$

Itt az egyenlőség mindkét oldalának értéke $\frac{1}{2}$, tehát a bizonyítandó egyenlőség $n = 1$-re igaz.

$n \to n+1:$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőség valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+1+1}$$

A bal oldali összeg utolsó tagját leválasztjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{n+2}$$

A bal oldalon szereplő szumma éppen az indukciós feltevés bal oldala, ezért az indukciós feltevést alkalmazhatjuk. Így ezt kell igazolni:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\stackrel{?}{=} \frac{n+1}{n+2} \qquad / \cdot (n+1)(n+2) \\ n(n+2)+1 &\stackrel{?}{=} (n+1)^2 \\ n^2+2n+1 &\stackrel{?}{=} n^2+2n+1\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

1.2.1. Órai feladatok / 4a. jobb oldali egyenlőtlensége

Állítás: $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} - 1}_{A(n)}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$\underline{n = 1:}$

$$A(1): \qquad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{1} - 1$$

Itt az egyenlőtlenség mindkét oldalának értéke 1, tehát $A(1)$ igaz. Más szóval: a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 1$-re igaz.

$\underline{n \to n+1:}$ Igazolni kell, hogy $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, amelyre $A(n)$ igaz, tehát amelyre fennáll, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \qquad \text{(indukciós feltevés)}$$

Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{n+1} - 1$$

A bal oldali összeg utolsó tagját leválasztjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{n+1} - 1$$

A bal oldalon szereplő szumma éppen az indukciós feltevés bal oldala. Ha helyére beírjuk az indukciós feltevés jobb oldalát, akkor ezzel a bal oldalt növelni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} - 1$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\overset{?}{\leq} 2\sqrt{n+1} - 1 \qquad / +1, \cdot\sqrt{n+1} \\
2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 &\overset{?}{\leq} 2(n+1) \\
2\sqrt{n^2+n} + 1 &\overset{?}{\leq} 2n+2 \\
2\sqrt{n^2+n} &\overset{?}{\leq} 2n+1 \\
4(n^2+n) &\overset{?}{\leq} (2n+1)^2 \\
4n^2+4n &\overset{?}{\leq} 4n^2+4n+1\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}
\end{aligned}$$

A továbbiakban az $A(n)$ jelölést már nem használjuk (de érdemes meggondolni, hogy mit jelöl $A(n)$), továbbá az indukciós feltevést sem fogjuk leírni, mivel az *formailag* azonos a bizonyítandó állítás megfelelő részével (mégpedig $A(n)$-nel).

10.2.1. Órai feladatok / 4a. bal oldali egyenlőtlensége

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \quad 2\sqrt{n+1} - 2 < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 1:$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+1} - 2 &\overset{?}{<} \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ 2\sqrt{2} - 2 &\overset{?}{<} 1 \\ 2\sqrt{2} &\overset{?}{<} 3 \\ 4 \cdot 2 &\overset{?}{<} 9\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 1$-re igaz.

$n \to n+1:$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$2\sqrt{n+1+1} - 2 \overset{?}{<} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

A jobb oldali összeg utolsó tagját leválasztjuk:

$$2\sqrt{n+2} - 2 \overset{?}{<} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

A jobb oldalon szereplő szumma éppen az indukciós feltevés jobb oldala. Ha helyére beírjuk az indukciós feltevés bal oldalát, akkor ezzel a jobb oldalt csökkenteni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$2\sqrt{n+2} - 2 < 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n+2} - 2 &\overset{?}{<} 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad / +2,\ \cdot\sqrt{n+1} \\ 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} &\overset{?}{<} 2(n+1) + 1 \\ 2\sqrt{(n+2)(n+1)} &\overset{?}{<} 2n + 3 \\ 4(n+2)(n+1) &\overset{?}{<} (2n+3)^2 \\ 4(n^2 + 2n + n + 2) &\overset{?}{<} 4n^2 + 12n + 9 \\ 4n^2 + 12n + 8 &\overset{?}{<} 4n^2 + 12n + 9\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

10.2.1. Órai feladatok / 4b.

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \quad (2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 1:$

$$\begin{aligned} (2 \cdot 1)! &\overset{?}{<} 2^{2\cdot 1} \cdot (1!)^2 \\ 2 &\overset{?}{<} 4\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 1$-re igaz.

$n \to n + 1:$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\begin{aligned} (2(n+1))! &\overset{?}{<} 2^{2(n+1)} \cdot ((n+1)!)^2 \\ (2n+2)! &\overset{?}{<} 2^{2n+2} \cdot ((n+1)!)^2 \\ (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) &\overset{?}{<} 2^{2n+2} \cdot ((n+1)!)^2 \end{aligned}$$

A bal oldalon szereplő $(2n)!$ szorzó éppen az indukciós feltevés bal oldala. Ha helyére beírjuk az indukciós feltevés jobb oldalát, akkor ezzel a bal oldalt növelni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) < 2^{2n+2} \cdot ((n+1)!)^2$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} 2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) &\overset{?}{<} 2^{2n+2} \cdot ((n+1)!)^2 \\ 2^{2n} \cdot n! \cdot n! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) &\overset{?}{<} 2^{2n} \cdot 2^2 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1) \\ (2n+1) \cdot (2n+2) &\overset{?}{<} 4 \cdot (n+1)^2 \\ 4n^2 + 2n + 4n + 2 &\overset{?}{<} 4(n^2 + 2n + 1) \\ 4n^2 + 6n + 2 &\overset{?}{<} 4n^2 + 8n + 4\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz} \end{aligned}$$

10.2.1. Órai feladatok / 4c. bal oldali egyenlőtlensége

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 : \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$\underline{n = 2:}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{2}} &\overset{?}{<} \prod_{k=1}^{2} \frac{2k-1}{2k} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} &\overset{?}{<} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \\
4 &\overset{?}{<} 3\sqrt{2} \\
16 &\overset{?}{<} 9 \cdot 2\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}
\end{aligned}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 2$-re igaz.

$\underline{n \to n+1:}$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}$$

A jobb oldali szorzat utolsó tényezőjét leválasztjuk:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \underbrace{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}}_{\text{pozitív}}$$

A jobb oldalon szereplő produktum éppen az indukciós feltevés jobb oldala. Ha helyére beírjuk az indukciós feltevés bal oldalát, akkor ezzel a jobb oldalt csökkenteni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{n+1}} &\overset{?}{<} \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \qquad / \cdot 2\sqrt{n+1} \\
1 &\overset{?}{<} \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} \qquad / \cdot 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \\
2\sqrt{n}\sqrt{n+1} &\overset{?}{<} 2n+1 \\
4n(n+1) &\overset{?}{<} (2n+1)^2 \\
4n^2+4n &\overset{?}{<} 4n^2+4n+1\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}
\end{aligned}$$

10.2.1. Órai feladatok / 4c. jobb oldali egyenlőtlensége

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2: \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 2:$

$$\prod_{k=1}^{2} \frac{2k-1}{2k} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2+1}}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{7}}$$
$$3\sqrt{7} \overset{?}{<} 8$$
$$9\cdot 7 \overset{?}{<} 64\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 2$-re igaz.

$n \to n+1:$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

A bal oldali szorzat utolsó tényezőjét leválasztjuk:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right)\cdot \underbrace{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}}_{\text{pozitív}} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

A bal oldalon szereplő produktum éppen az indukciós feltevés bal oldala. Ha helyére beírjuk az indukciós feltevés jobb oldalát, akkor ezzel a bal oldalt növelni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$
$$(2n+1)\cdot\sqrt{3n+4} \overset{?}{<} (2n+2)\cdot\sqrt{3n+1}$$
$$(2n+1)^2\cdot(3n+4) \overset{?}{<} (2n+2)^2\cdot(3n+1)$$
$$(4n^2+4n+1)\cdot(3n+4) \overset{?}{<} (4n^2+8n+4)\cdot(3n+1)$$
$$12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4 \overset{?}{<} 12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4$$
$$12n^3+28n^2+19n+4 \overset{?}{<} 12n^3+28n^2+20n+4\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}$$

10.2.1. Órai feladatok / 4d.

Ez a feladat azért bonyolultabb az eddigieknél, mivel egy kicsit nehezebben ismerhető fel az $(n+1)$-re felírt állításban az indukciós feltevés.

Állítás: $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \quad \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$

Bizonyítás: teljes indukcióval

$n = 1 :$

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} \overset{?}{>} 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \overset{?}{>} 1$$

$$\frac{13}{12} \overset{?}{>} 1\,, \quad \text{ez pedig nyilvánvalóan igaz}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = 1$-re igaz.

$n \to n+1 :$

Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamely $n \in \mathbb{N}^+$ számra igaz (indukciós feltevés). Ennek felhasználásával igazolni kell, hogy:

$$\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \frac{1}{(n+1)+3} + \ldots + \frac{1}{3(n+1)+1} \overset{?}{>} 1$$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots + \frac{1}{3n+4} \overset{?}{>} 1 \qquad / + \frac{1}{n+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}}_{\text{indukciós feltevés bal oldala}} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \overset{?}{>} 1 + \frac{1}{n+1}$$

Ha a fenti egyenlőtlenségben a felismert ”indukciós feltevés bal oldala” helyére beírjuk az indukciós feltevés jobb oldalát, akkor ezzel a bal oldalt csökkenteni fogjuk, s az így keletkező szigorúbb egyenlőtlenséget fogjuk igazolni. Tehát *elég* igazolni, hogy:

$$1 + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

Ezt pedig elemi átalakításokkal könnyen igazolhatjuk:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} &\overset{?}{>} 1+\frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{3n+4} &\overset{?}{>} \frac{1}{n+1} \qquad / \cdot 3(n+1)(3n+2)(3n+4) \\
3(n+1)(3n+4)+(3n+2)(3n+4)+3(n+1)(3n+2) &\overset{?}{>} 3(3n+2)(3n+4) \\
3(3n^2+7n+4)+(9n^2+18n+8)+3(3n^2+5n+2) &\overset{?}{>} 3(9n^2+18n+8) \\
9n^2+21n+12+9n^2+18n+8+9n^2+15n+6 &\overset{?}{>} 27n^2+54n+24 \\
27n^2+54n+26 &\overset{?}{>} 27n^2+54n+24
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség pedig nyilvánvalóan igaz.