ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
17. Bázis, dimenzió
az "Órai feladatok" szakasz 1., 2., 3. feladatainak megoldása
(írta: Pap Viktória)

17.2.1. Órai feladatok / 1.

1. A kiindulási pont

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

A következő egyenletrendszert kell megoldani a báziskiválasztáshoz:

$$a \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a + 2b - c - d &= 0 \\ b + 4c + d &= 0 \\ -2a - b + 2c + d &= 0 \\ 4a + 3b - d &= 0 \end{aligned}$$

Pl. az utolsó egyenletből fejezzük ki d-t: $d = 4a + 3b$. A továbbiakban hagyjuk el pl. az utolsó egyenletet és alkalmazzuk a fent leírt helyettesítést.

$$\begin{aligned} 3a + 2b - c - (4a + 3b) &= 0 \\ b + 4c + (4a + 3b) &= 0 \\ -2a - b + 2c + (4a + 3b) &= 0 \end{aligned}$$

Amely egyenletrendszer összevonva a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} -a - b - c &= 0 \\ 4a + 4b + 4c &= 0 \\ 2a + 2b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből fejezzük ki a c-t: $c = -a - b$, és helyetessítsük vissza az egyenletrendszerbe, ezzel elhagyjuk a c paramétert is

$$\begin{aligned} 0a + 0b &= 0 \\ 0a + 0b &= 0, \end{aligned}$$

amiből azt kaptuk, hogy az a és b paraméterek szabadon megválaszthatók: $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R}$. Ezek után az egyenletrendszert tovább nem lehet egyszerűsíteni. Pl. egy lehetséges megoldás a következő alakú: $a = 1$, $b = 1$, $c = -a - b = -2$ és $d = 4a + 3b = 7$, melyből látható, hogy az eredeti négy vektorból bármelyik elhagyható, pl. az x_4-et elhagyva $Span\{x_1, x_2, x_3\} = W$

2. Az x_4-et elhagyva

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A következő egyenletrendszert kell megoldani a báziskiválasztáshoz:

$$a \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a + 2b - c &= 0 \\ b + 4c &= 0 \\ -2a - b + 2c &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezve c-t: $c = 3a + 2b$ és visszahelyettesítve, majd rendezve:

$$\begin{aligned} b + 4(3a + 2b) &= 0 \\ -2a - b + 2(3a + 2b) &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12a + 9b &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből fejezzük ki b-t: $b = -4/3a$

$$\begin{aligned} 0a &= 0 \\ 0a &= 0 \end{aligned}$$

amiből azt kaptuk, hogy az a paraméter szabadon megválasztható: $a \in \mathbb{R}$. Ezek után az egyenletrendszert tovább nem lehet egyszerűsíteni. Pl. egy lehetséges megoldás a következő alakú: $a = 3$, $b = -4/3a = -4$ és $c = 3a + 2b = 1$, melyből látható, hogy a három vektorból bármelyik elhagyható, pl. az x_3-et elhagyva $Span\{x_1, x_2\} = W$

3. Az x_3-at elhagyva

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

A következő egyenletrendszert kell megoldani a báziskiválasztáshoz:

$$a\begin{bmatrix}3\\0\\-2\\4\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}3a+2b&=0\\b&=0\\-2a-b&=0\\4a+3b&=0\end{aligned}$$

Mivel ebből azt kapjuk, hogy $a=0$ és $b=0$, így ez a két vektor már lineárisan független rendszert alkot, így bázis, melynek dimenziója a következő: $dimW=2$

$\boxed{\text{17.2.1. Órai feladatok / 2.}}$

Bázis-e $\mathbb{R}^4$-ben?

$$x_1=\begin{bmatrix}2\\3\\-2\\7\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},x_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix},x_4=\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\\0\end{bmatrix},x_5=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\2\end{bmatrix},$$

1. x_1, x_2. Mivel dim$\mathbb{R}^4$=4, és $2<4$, így x_1, x_2 nem alkot generátorrendszert, nem bázis!

2. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Mivel dim$\mathbb{R}^4$=4, és $5>4$, így x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nem alkot lineárisan független, nem bázis!

3. x_1, x_2, x_3, x_4. Mivel dim$\mathbb{R}^4$=4, így x_1, x_2, x_3, x_4 lehet bázis, de még nem tudjuk, hogy lineárisan függetlenek-e.

   Ehhez a következő egyenletrendszert kell felírni:

$$a\begin{bmatrix}2\\3\\-2\\7\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}2a+c-d&=0\\3a+b+2c-5d&=0\\-2a-c+2d&=0\\7a+b&=0\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből fejezzük ki b-t: $b = -7a$, és helyettesítsük be a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned}
&2a + c - d = 0 \\
&3a + (-7a) + 2c - 5d = -4a + 2c - 5d = 0 \\
&-2a - c + 2d = 0
\end{aligned}$$

A felső egyenletből fejezzük ki d-t: $d = 2a + c$:

$$\begin{aligned}
-4a + 2c - 5(2a + c) &= 0 \\
-2a - c + 2(2a + c) &= 0
\end{aligned}$$

Amely egyszerűsítve:

$$\begin{aligned}
-14a - 3c &= 0 \\
2a + c &= 0
\end{aligned}$$

Második egyenletből kifejezve c-t: $c = -2a$:

$$-14a + 6a = 8a = 0$$

Amelyből az jön ki, hogy $a = 0 \to c = 0 \to d = 0 \to b = 0$

Ebből az következik, hogy ez az x_1, x_2, x_3, x_4 rendszer lineárisan független, azaz bázist alkot.

17.2.1. Órai feladatok / 3.

Bázis kiválasztása $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerekből

1.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
a + 4b + 5c &= 0\\
2a + 3b + 8c &= 0\\
2a + 9b + 9c &= 0\\
-a - 4b - 5c &= 0
\end{aligned}
$$

Az első egyenletből fejezzük ki pl. a-t, $a = -4b - 5c$, és helyettesítsük vissza a másik 3 egyenletbe:

$$
\begin{aligned}
2(-4b - 5c) + 3b + 8c &= 0\\
2(-4b - 5c) + 9b + 9c &= 0\\
-(-4b - 5c) - 4b - 5c &= 0
\end{aligned}
$$

Vonjuk össze a megfelelő tagokat:

$$
\begin{aligned}
-5b - 2c &= 0\\
b - c &= 0\\
0b + 0c &= 0
\end{aligned}
$$

A második egyenletből $b = c$, behelyettesítve a fölső egyenletbe: $-7c = 0 \to c = 0 \to b = 0 \to a = 0$. Mivel $a = b = c = 0$, így ez a rendszer lineárisan független, azaz bázis.

2.

$$
x_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\\3\end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix}-1\\2\\7\\-3\end{bmatrix}
$$

$$
a\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\2\\1\\3\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-1\\2\\7\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

A 16. fejezet 1/b) feladatában beláttuk, hogy ez a rendszer lineárisan összefüggő, így például, ha elhagyjuk c-t, akkor $\mathrm{Span}\{x_1, x_2, x_3\} = \mathrm{Span}\{x_1, x_2\}$, és ekkor a továbbiakban x_1 és x_2 lineáris függetlenségét kell csak vizsgálni:

$$
a\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
a + 2b &= 0\\
2a + 2b &= 0\\
3a + b &= 0\\
a + 3b &= 0
\end{aligned}
$$

Az első egyenletből fejezzük ki a-t: $a = -2b$, ekkor:

$$\begin{aligned} -2b &= 0 \\ -5b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Ebből az jött ki, hogy $b = 0 \rightarrow a = 0$, vagyis az x_1, x_2 rendszer lineárisan független, azaz bázis.