20. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy adott $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix esetén $\mathbb{K}^n$-ben mely irányokban lesz az A-val való szorzás eredménye párhuzamos ugyanezzel az iránnyal. Az ilyen irányokat fogjuk sajátirányoknak nevezni.

A felvetett kérdés szoros kapcsolatban áll a lineáris transzformációkkal, ezért a fejezet elején röviden érintjük a lineáris transzformációk témakörét is.

20.1. Az elméleti anyag

20.1.1. Lineáris transzformációk a $\mathbb{K}^n$ téren

20.1. Definíció. Egy $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ függvényt a $\mathbb{K}^n$ tér egy lineáris transzformációjának nevezünk, ha

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n)$, és

b) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{K}^n,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

Például $\mathbb{R}^2$-n lineáris transzformáció az x-tengelyre való tengelyes tükrözés. Szintén lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2$-n az origó körüli $+90°$-os elforgatás.

Adott $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix esetén lineáris transzformáció a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \varphi(x) = Ax$$

függvény. Igazolható, hogy $\mathbb{K}^n$ minden lineáris transzformációjához egyértelműen létezik olyan $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix, hogy $\varphi(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{K}^n)$. Tehát $\mathbb{K}^n$ minden lineáris transzformációja jellemezhető egy $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixszal. Ezt a mátrixot a transzformáció mátrixának nevezzük.

20.2. Példák.

1. Az előbb említett, x-tengelyre tükrözés mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Az előbb említett, origó körüli $+90°$-os elforgatás mátrixa: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Érdekes kérdés, hogy egy lineáris transzformáció mely irányokban viselkedik nyújtásként, azaz mely $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorok és $\lambda \in \mathbb{K}$ számok esetén igaz, hogy

$$\varphi(x) = \lambda x \qquad \text{(a sajátértékfeladat transzformációkkal való megfogalmazása)}$$

A transzformáció mátrixát beírva:

$$Ax = \lambda x \qquad \text{(a sajátértékfeladat mátrixokkal való megfogalmazása)}$$

Ezt a kérdést fogjuk vizsgálni az alábbiakban, mégpedig a mátrixokkal való megfogalmazásban.

20.1.2. Alapfogalmak

20.3. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A sajátértékének nevezzük, ha

$$\exists\, x \in \mathbb{K}^n,\ x \neq 0 : \quad Ax = \lambda x\,.$$

Az $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektort egy, a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük.

A sajátértékek halmazát az A mátrix spektrumának nevezzük, jele: $\mathrm{Sp}\,(A)$. Tehát:

$$\mathrm{Sp}\,(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\, x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} :\ Ax = \lambda x\} \subseteq \mathbb{K}\,.$$

Egyszerű átrendezéssel látható, hogy az $Ax = \lambda x$ egyenlet minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén ekvivalens az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerrel:

$$(A - \lambda I)x = 0\,, \tag{20.1}$$

ahol I a $\mathbb{K}^{n\times n}$-beli egységmátrixot jelöli.

Ebből pedig az következik, hogy a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha a fenti egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ez pedig – a négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerekről tanultak értelmében – azzal ekvivalens, hogy az $A - \lambda I$ együtthatómátrix determinánsa 0:

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala a λ változó polinomja, mivel a determináns kifejtésekor csak összeadást és szorzást alkalmazunk. Ennek a polinomnak a $\mathbb{K}$-beli gyökei a sajátértékek. Egy rögzített λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig a (20.1) homogén lineáris egyenletrendszer nem 0 megoldásai.

20.4. Definíció. A

$$P(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük.

20.5. Megjegyzés. Az első sor szerinti kifejtésből látszik, hogy a karakterisztikus polinom n-edfokú, λ^n együtthatója $(-1)^n$. Továbbá $P(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$ miatt adódik, hogy konstans tagja $\det(A)$. Tehát a karakterisztikus polinom alakja:

$$P(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + \ldots + \det(A) \qquad (\lambda \in \mathbb{K})\,.$$

Az 1. fejezet elméleti bevezetőjében szó volt a valós gyökök multiplicitásáról. Az ott leírtakhoz hasonlóan értelmezzük a komplex gyökök multiplicitását is. Ez vezet el a következő definícióhoz:

20.6. Definíció. Jelölje P az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomját, $\lambda \in \mathbb{K}$ pedig az A egy sajátértékét (azaz P egy gyökét). A λ gyök multiplicitását a λ sajátérték algebrai multiplicitásának nevezzük és $a(\lambda)$-val jelöljük.

Mivel a sajátértékek a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$-beli gyökei, megállapíthatjuk a következőket:

- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\mathrm{Sp}\,(A)$ nem üres, legfeljebb n elemű halmaz. Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk meg, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor a sajátértékek száma pontosan n.
- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ akkor $\mathrm{Sp}\,(A)$ lehet üres is, és elemeinek száma legfeljebb n. Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk meg, mint amennyi az algebrai multiplicitása, még akkor sem biztos, hogy a sajátértékek száma pontosan n. Amennyiben a sajátértékeket algebrai multiplicitással számolva pontosan n-et kapunk, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix minden sajátértéke valós.

Háromszögmátrixok (speciálisan diagonálmátrixok) sajátértékeit egyszerűen megkaphatjuk, erről szól az alábbi megjegyzés.

20.7. Megjegyzés. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ egy (alsó vagy felső) háromszögmátrix. Ekkor – pl. az alsó háromszögmátrix esetében – karakterisztikus polinomja a következő (háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata):

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\cdot\dots\cdot(a_{nn}-\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Ugyanez lesz a karakterisztikus polinom felső háromszögmátrix esetén is.

Innen pedig az következik, hogy a háromszögmátrix sajátértékei a főátló elemei, s mindegyik sajátérték algebrai multiplicitása annyi, ahányszor a főátlóban szerepel.

Térjünk rá a sajátvektorok vizsgálatára. Először megmutatjuk, hogy minden sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, melyekhez a nullvektort hozzávéve egy alteret kapunk.

20.8. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Ekkor a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból álló*

$$W_\lambda := W_\lambda(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

halmaz altér $\mathbb{K}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda I)$. A λ sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik.

Bizonyítás.

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda I)x = 0\} = \mathcal{M}_h$$

A homogén lineáris egyenletrendszerekről tanultak értelmében tehát a fenti halmaz altér, melynek dimenziója:

$$\dim W_\lambda = \dim \mathcal{M}_h = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)\,.$$

Mivel $\dim W_\lambda = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I) \geq 1$, ezért a sajátvektorok halmaza $(W_\lambda \setminus \{0\})$ valóban végtelen. □

Rögzített sajátérték esetén tehát nem az az igazi kérdés, hogy hány sajátvektor tartozik hozzá, hanem az, hogy maximálisan hány független sajátvektor tartozik hozzá, azaz mennyi a W_λ altér dimenziója.

20.9. Definíció. A fenti tételben értelmezett

$$W_\lambda := W_\lambda(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük. A W_λ sajátaltér dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük, és $g(\lambda)$-val jelöljük. Beláttuk tehát, hogy $g(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)$.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt, melynek lényege, hogy a geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.

20.10. Tétel.

$$\forall\, \lambda \in \operatorname{Sp}(A) : \quad 1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq n\,.$$

20.1.3. Sajátvektorokból álló bázis (S.B.)

Az alábbi tételt bizonyítás nélkül közöljük. Lényege, hogy a különböző sajátértékekhez linárisan független sajátvektorok tartoznak.

20.11. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A mátrix k db különböző sajátértéke. Legyen továbbá $s_i \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq s_i \leq g(\lambda_i)$, és $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(s_i)}$ lineárisan független vektorrendszer a W_{λ_i} sajátaltérben $(i = 1, \ldots, k)$. Ekkor az*

$$x_i^{(j)} \in \mathbb{K}^n \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s_i) \tag{20.2}$$

egyesített vektorrendszer lineárisan független.

Vegyük a W_λ sajátaltérből a maximális számú, azaz $g(\lambda)$ db lineárisan független sajátvektort. Ezek egyesített rendszere – az előző tétel következtében – linárisan független, és tagjainak száma $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda)$. Így tehát megállapíthatjuk, hogy

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda) \leq n\,.$$

Amennyiben ez az egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül, akkor n db független sajátvektorunk van az n dimenziós $\mathbb{K}^n$ térben. Ez a vektorrendszer tehát bázis, mely sajátvektorokból áll. Ezt a bázist sajátvektorokból álló bázisnak (S.B.) nevezzük.

Előző eredményünkből egyszerűen következik, hogy

$$\exists \text{ S.B.} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda) = n\,.$$

Az algebrai és a geometriai multiplicitás viszonyáról szóló 20.10 tétel segítségével igazolható az alábbi tétel:

20.12. Tétel. *Legyen $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ és jelölje a λ sajátérték algebrai multiplicitását $a(\lambda)$, geometriai multiplicitását pedig $g(\lambda)$. Ekkor*

$$\exists \; S.B. \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} a(\lambda) = n \quad \textit{és} \quad \forall\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A):\quad g(\lambda)=a(\lambda)\,.$$

20.13. Megjegyzés. A $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} a(\lambda) = n$ feltétel jelentése, hogy a karakterisztikus polinomnak – multiplicitással számolva – n db gyöke vak $\mathbb{K}$-ban. Ez a feltétel

- $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ esetén „automatikusan” teljesül.
- $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a karakterisztikus polinom minden gyöke valós.

20.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a sajátérték és a sajátvektor fogalmát

2. Definiálja a karakterisztikus polinomot

3. Definiálja a sajátérték algebrai multiplicitását

4. Írja fel a háromszögmátrix sajátértékeiről szóló állítást

5. Milyen halmazt alkotnak a sajátvektorok a nullvektorral együtt?

6. Definiálja a sajátaltér fogalmát

7. Definiálja a sajátérték geometriai multiplicitását

8. Írja fel az algebrai és a geometriai multiplicitás kapcsolatáról szóló tételt

9. Írja fel a sajátvektorok függetlenségéről szóló tételt

10. Definiálja a sajátvektorokból álló bázis (S.B.) fogalmát

11. Írja fel a S.B. létezésének szükséges és elégséges feltételéről szóló tételeket (2 db tétel)

20.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei

2. A háromszögmátrix sajátértékeiről szóló állítás

3. Egy adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak

20.2. Feladatok

20.2.1. Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását. Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20.2.2. További feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását. Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -9 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)\quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$