*ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév*
*8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.*
*az "Órai feladatok" szakasz 1a., 1b., 1c., 3a., 3b., 3c., 3d. feladatainak megoldása*
*9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III.*
*az "Órai feladatok" szakasz 2a., 2c., 2e., 2i., 2j. feladatainak megoldása*
*(írta: Szeidl Betti)*

8.2.1. Órai feladatok / 1a.

$a + b = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = -2ab$

Tudjuk: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Ezt felhasználva a következő ekvivalens állításokat kapjuk:

$$a + b = 0 \Longleftrightarrow (a + b)^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = -2ab$$

Tehát az eredeti állítás igaz.

---

8.2.1. Órai feladatok / 1b.

$a + b = 1 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

Nézzük először a $\Longrightarrow$ irányt:

$$a + b = 1 \Longrightarrow (a + b)^2 = 1 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 1 - 2ab$$

Tehát az állítás ebben az irányban igaz.
Nézzük a másik ($\Longleftarrow$) irányt:

$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab \Longrightarrow (a + b)^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a + b = \pm 1$$

Tehát ebben az irányban nem igaz az állítás.
Mivel az eredeti állítás nem teljesül mindkét irányban, ezért az hamis.

---

8.2.1. Órai feladatok / 1c.

$x = -1 \Longleftrightarrow x^2 + x = 0$

A balról jobbra irány behelyettesítéssel ellenőrizhető: $(-1)^2 + (-1) = 0$.
Fordított irányban:

$$x^2 + x = 0 \Longrightarrow x(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ vagy } x = -1$$

Így ebben az irányban nem teljesül az állítás, tehát az eredeti állításunk is hamis.

---

8.2.1. Órai feladatok / 3a.

$f(x) = |1 - |x||$, $D_f = [-3, 2)$ az értelmezési tartomány.

Mivel egy szám abszolút értéke sosem negatív, ezért $|1 - |x|| \geq 0$ teljesül minden $x \in D_f$ esetén. Tehát az állítás igaz.

---

8.2.1. Órai feladatok / 3b.

$$D_f = [-3, 2) \Longrightarrow -3 \leq x < 2 \Longrightarrow 0 \leq |x| \leq 3 \Longrightarrow$$
$$-3 \leq -|x| \leq 0 \Longrightarrow -2 \leq 1 - |x| \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq |1 - |x|| \leq 2$$

Tehát igaz az állítás: $\forall x \in D_f : f(x) \leq 2$

---

8.2.1. Órai feladatok / 3c.

Állítás: $\exists! a \in D_f : \forall x \in D_f : f(a) \leq f(x)$ (azaz $f$-nek létezik pontosan egy minimumhelye)

Az előző példában láthattuk, hogy az $f$ függvény minimum értéke 0. Megnézzük, hol veszi fel ezt az értéket:

$$|1 - |x|| = 0 \Longleftrightarrow 1 - |x| = 0 \Longleftrightarrow |x| = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

Mivel 2 helyen is felveszi a függvény a legkisebb értékét, az eredeti állítás hamis.

---

8.2.1. Órai feladatok / 3d.

$\exists a \in D_f : \forall x \in D_f : f(a) \leq f(x)$ (azaz $f$-nek létezik minimumhelye)

Az előző feladatban láttuk, hogy $f$-nek létezik minimumhelye, tehát az állítás igaz.

---

9.2.1. Órai feladatok / 2a.

$x^2 = 25 \Longrightarrow x = \pm 5$, tehát ez az irány hamis. $x = \pm 5 \Longrightarrow x^2 = 25$, tehát ez az irány igaz. Mivel csak az egyik irányban volt igaz az állítás, nem írhatunk $\Longleftrightarrow$ jelet sem a * helyére, tehát csak a $\Longleftarrow$ jelet használhatjuk.

---

$\boxed{\text{9.2.1. Órai feladatok / 2c.}}$

Induljunk ki a bal oldalból:

Mivel $a^2$ és $b^2$ nemnegatív számok, ezért az összegük csak akkor lehet 0, ha $a$ és $b$ is 0, ebből pedig következik, hogy $ab = 0$.

Ha $ab = 0$, akkor $a$ és $b$ közül elég az egyiknek nullának lenni, hogy a szozatuk 0 legyen, pl. $a = 0$, $b = 1$. Ekkor a négyzetösszegük nem lesz 0.

Ezek alapján a * helyére a $\Longrightarrow$ jel írható.

---

$\boxed{\text{9.2.1. Órai feladatok / 2e.}}$

A jobbról balra irányt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük: $1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$, tehát ez igaz.

A másik irány vizsgálatához meg kell néznünk, hogy van-e a polinomnak másik gyöke. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x = -1$ is gyöke a polinomnak, tehát az $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ egyenletből nem következik egyértelműen, hogy $x = 1$.

Így a * helyére csak a $\Longrightarrow$ írható.

---

$\boxed{\text{9.2.1. Órai feladatok / 2i.}}$

Az abszolút érték definíciójából kövezkezik, hogy a * helyére a $\Longleftrightarrow$ jel írható.

---

$\boxed{\text{9.2.1. Órai feladatok / 2j.}}$

A jobbról balra irányt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük:

2 esetet különböztetünk meg, a $k$ lehet páros, vagy páratlan.

Ha $k$ páros ($l = \frac{k}{2}$):

$$\sin(2(\frac{\pi}{4} + l\pi)) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2l\pi) = 1$$

$$\operatorname{tg}\,(\frac{\pi}{4} + l\pi) = 1$$

Ha $k$ páratlan ($l = \frac{k-1}{2}$):

$$\sin(2(\frac{3\pi}{4} + l\pi)) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2l\pi) = -1$$

$$\operatorname{tg}\,(\frac{3\pi}{4} + l\pi) = -1$$

Ez az irány tehát igaz.

Nézzük a másik irányt:

$$\sin 2x = \text{tg } x$$
$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ,\ \cos x \neq 0$$
$$2\sin x\cos^2 x = \sin x$$
$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

2 eset lehetséges:

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0 + k\pi$$
$$2\cos^2 x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Mivel az egyenletnek az $x = k\pi$ is megoldása, ezért ez az irány hamis.

A * tehát a $\Longleftarrow$ jel írható.

---