Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2020. december 14.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

1. *(12 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, adjuk meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. Jelölje W az alábbi lineárisan független vektorrendszer által generált alteret $\mathbb{R}^4$-ben:

$$b_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 2), \quad b_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1), \quad b_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),$$

a) *(8 pont)* Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.

b) *(6 pont)* Bontsuk fel az $x = (-1,\ 2,\ 2,\ 0)$ vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. *(9 pont)* Adott az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú f függvény:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \qquad (x \in [3\,,\, +\infty)\,)$$

a) Igazoljuk, hogy f invertálható, továbbá adjuk meg a $D_{f^{-1}}$, $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

(FIGYELEM: itt a "rajzos" megoldás nem fogadható el.)

b) Ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = f(x)$ és az $y = f^{-1}(x)$ egyenletű görbéket.

4. *(8 pont)* A definíció alapján igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5}{x^4 - 2x^2 + 3} = 3$$