ELTE-IK Matematikai alapok 2020. őszi félév
25. Kép, őskép, értékkészlet, inverz függvény
az órai feladatok szakasz 3a., 3b., 3c., 8d., 8b. feladatainak megoldása
(írta: Filipp Zoltán)

25.2.1 Órai Feladatok / 3a.

Állapítsuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értékkészletét, ha:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az értékkészlet definíciója alapján:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D_f : y = f(x)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R} : y = x^2 - 6x + 5\}.$$

Oldjuk meg a fenti egyenletet:

$$x^2 - 6x + (5 - y) = 0 \iff x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (5 - y)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2} \iff$$

$$x_1, x_2 = 3 \pm \sqrt{4 + y} \in \mathbb{R} \iff D = 4 + y \geq 0 \iff y \geq -4.$$

A kapott másodfokú egyenlet pontosan akkor oldható meg a valós számok halmazán, ha

$$y \in [-4; +\infty).$$

Ekkor az $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ feltétel is teljesül, tehát:

$$\underline{R_f = [-4; +\infty).}$$

Megjegyzés: Az

$$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4 \;\; (x \in \mathbb{R})$$

alakból szépen leolvasható, hogy

$$(x - 3)^2 = y + 4,$$

és pontosan akkor vannak valós megoldásai, ha $y \geq -4$. Lásd grafikus szemléltetést is.

25.2.1 Órai Feladatok / 3b.

Állapítsuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értékkészletét, ha:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad (x \in [-1; 6]).$$

Az értékkészlet definíciója alapján:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D_f : y = f(x)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in [-1; 6] : y = x^2 - 6x + 5\}.$$

Az előző pont eredményeit felhasználva:

$$x_1, x_2 = 3 \pm \sqrt{4+y} \in \mathbb{R} \iff D = 4 + y \geq 0 \iff y \geq -4 \quad (1).$$

További feltétel az, hogy a megoldások valamelyike (legalább egy) essen a $[-1; 6]$ számközbe:

$$x_1 \in [-1; 6] \iff -1 \leq 3 + \sqrt{y+4} \leq 6 \iff -4 \leq \sqrt{y+4} \leq 3.$$

Az egyenlőtlenség-lánc első része minden $y \geq -4$ mellett igaz, a második alapján pedig:

$$0 \leq \sqrt{y+4} \leq 3 \iff ()^2 \iff y + 4 \leq 9 \iff y \leq 5.$$

Összevetve az egyenlet megoldhatósági feltételével:

$$y \in [-4; +\infty] \cap (-\infty; 5] = [-4; 5] \quad (2).$$

Ugyanezt felírva a másik gyökre is:

$$x_2 \in [-1; 6] \iff -1 \leq 3 - \sqrt{y+4} \leq 6 \iff -3 \leq \sqrt{y+4} \leq 4$$

Az egyenlőtlenség-lánc első része minden $y \geq -4$ mellett igaz, a második alapján pedig:

$$0 \leq \sqrt{y+4} \leq 4 \iff ()^2 \iff y + 4 \leq 16 \iff y \leq 12.$$

Összevetve az egyenlet megoldhatósági feltételével:

$$y \in [-4; +\infty] \cap (-\infty; 12] = [-4; 12] \quad (3).$$

A fentieket figyelembe véve az R_f értékkészlet elemeire (1), (2) és (3) alapján:

$$y \in [-4; 5] \cup [-4; 12] = [-4; 12] \iff$$

$$\underline{R_f = [-4; 12]}.$$

Megjegyzés: Szemléltessük grafikusan.

25.2.1 Órai Feladatok / 3c.

Állapítsuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értékkészletét, ha:

$$f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in [-2; 3]).$$

Az értékkészlet ebben az esetben:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D_f : y = f(x)\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in [-2; 3] : y = 1 - x^2\}.$$

A megoldandó egyenlet:

$$x^2 = 1 - y \quad (x \in [-2; 3]),$$

ami pontosan akkor oldható meg a megadott intervallumon, ha

$$1 - y \geq 0 \;\wedge\; x_{1,2} = \pm\sqrt{1-y} \in [-2; 3] \iff$$

$$y \leq 1 \ \wedge \ ((-2 \leq -\sqrt{1-y} \leq 3) \text{ vagy } (-2 \leq \sqrt{1-y} \leq 3)).$$

Itt:

$$-2 \leq -\sqrt{1-y} \leq 3 \,\Big|\, \cdot (-1) \iff -3 \leq \sqrt{1-y} \leq 2.$$

A bal oldali egyenlőtelnség teljesül minden $y \leq 1$ mellett ($- < +, 0$ eset), a jobb oldal megoldásai pedig:

$$0 \leq \sqrt{1-y} \leq 2 \iff ()^2 \iff 1-y \leq 4 \iff y \geq -3.$$

A megoldhatósági feltétellel összevetve:

$$y \in (-\infty; 1] \cap [-3; +\infty) = [-3; 1] \quad (1)$$

Hasonlóan, ha:

$$-2 \leq \sqrt{1-y} \leq 3$$

A bal oldali egyenlőtelnség teljesül minden $y \leq 1$ mellett ($- < +, 0$ eset), a jobb oldal megoldásai pedig:

$$0 \leq \sqrt{1-y} \leq 3 \iff ()^2 \iff 1-y \leq 9 \iff y \geq -8.$$

A megoldhatósági feltétellel összevetve:

$$y \in (-\infty; 1] \cap [-8; +\infty) = [-8; 1] \quad (2).$$

Végül (1) és (2) alapján:

$$\underset{\sim}{R_f} = [-3; 1] \cup [-8; 1] = \underset{\sim\sim\sim}{[-8; 1]}.$$

Megjegyzés: Szemléltessük grafikusan.

| 25.2.1 Órai Feladatok / 8d. |

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvény invertálható-e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}, R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \quad (x \in (1; +\infty)).$$

• Az invertálhatósághoz lássuk be, hogy:

$$\forall\, x, t \in D_f : \ x \neq t \Longrightarrow f(x) \neq f(t),$$

vagy a vele logikailag ekvivalens:

$$\text{Ha } x, t \in D_f \ : f(x) = f(t) \Longrightarrow x = t.$$

1. megoldás:

Az első megfogalmazás szerint legyenek $x, t \in D_f = (1; +\infty)$ különböző pontok, tehát $x \neq t$

és vizsgáljuk a függvényértékek különbségét:

$$f(x)-f(t)=\frac{3x+2}{x-1}-\frac{3t+2}{t-1}=\frac{(3x+2)\cdot(t-1)-(3t+2)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(t-1)}=$$

$$=\frac{5\cdot(t-x)}{(x-1)\cdot(t-1)}\neq 0,\ \text{ha } x\neq t\Longrightarrow f(x)\neq f(t),$$

tehát f invertálható (vagy injektív).

2. megoldás:

Legyen most a második megfogalmazás szerint $x,t\in D_f=(1;+\infty)$ két olyan pont, melyekre $f(x)=f(t)$. Ekkor:

$$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3t+2}{t-1}\Longrightarrow(3x+2)\cdot(t-1)=(3t+2)\cdot(x-1)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3xt-3x+2t-2=3tx-3t+2x-2\Longrightarrow 5x=5t\Longrightarrow x=t,$$

tehát f invertálható.

• Adjuk meg az inverzfüggvényt annak definíciója alapján, illetve az f^{-1} értékkészletét is:

∗ $D_{f^{-1}}=R_f$

∗ ha $x\in D_{f^{-1}}$, akkor $f^{-1}(x)=y\iff y=f(x)$

∗ $R_{f^{-1}}=D_f=(1;+\infty)$.

Határozzuk meg először az f értékkészletét:

$$R_f=\{y\in\mathbb{R}\mid\exists x\in D_f: y=f(x)\}=\left\{y\in\mathbb{R}\;\middle|\;\exists\, x\in(1;+\infty): y=\frac{3x+2}{x-1}\right\}.$$

Valamely $y\in\mathbb{R}$ mellett oldjuk meg tehát az alábbi egyenletet $x-$re az $(1;+\infty)$ halmazon.

$$y=\frac{3x+2}{x-1}\iff y\cdot(x-1)=3x+2\iff(y-3)\cdot x=y+2.$$

Ha $3\neq y\in\mathbb{R}$, akkor:

$$\exists\, x=\frac{y+2}{y-3}\ (=f^{-1}(y))$$

alakú megoldása az egyenletnek. Teljesíteni kell továbbá az $x>1$ feltételt is, azaz:

$$x=\frac{y+2}{y-3}>1\iff\frac{y+2}{y-3}-1>0\iff\frac{5}{y-3}>0\iff y>3.$$

A fentiek alapján:

$$D_{f^{-1}}=R_f=(3;+\infty)\ \wedge\ f^{-1}(y)=\frac{y+2}{y-3}\ (y>3).$$

Megjegyzés: Szemléltessük grafikusan, ábrázolva egy koordinátarendszerben az f,f^{-1} függvényeket. A számolásokat és a szemléltetést elvégezhetjük az f szokásos alábbi alakjával is:

$$y = 3 + 5 \cdot \frac{1}{x-1} \quad (x > 1) \iff x = 1 + 5 \cdot \frac{1}{y-3} \quad (y > 3).$$

25.2.1 Órai Feladatok / 8b.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvény invertálható-e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}, R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad (x \in (-\infty; 1]).$$

• Az invertálhatósághoz lássuk be, hogy:

$$\forall\, x, t \in D_f : \; x \neq t \Longrightarrow f(x) \neq f(t).$$

Legyenek most $x, t \in D_f = (-\infty; 1]$ különböző pontok, tehát $x \neq t$. Ekkor:

$$f(x) - f(t) = (x^2 - 2x + 2) - (t^2 - 2t + 2) = x^2 - 2x - t^2 + 2t =$$

$$= (x^2 - t^2) - 2 \cdot (x - t) = (x - t) \cdot (x + t - 2) \neq 0,$$

hiszen a megadott x, t számok mellett pl. $x \leq 1$ és $t < 1$ (vagy fordítva), ezért:

$$x + t - 2 < 1 + 1 - 2 = 0.$$

Megkaptuk tehát, hogy $f(x) \neq f(t)$, így f invertálható (vagy injektív).
• Adjuk meg az inverzfüggvényt annak definíciója alapján, illetve az f^{-1} értékkészletét is:

∗ $D_{f^{-1}} = R_f$

∗ ha $x \in D_{f^{-1}}$, akkor $f^{-1}(x) = y \iff y = f(x)$

∗ $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty; 1]$.

Határozzuk meg először az f értékkészletét:

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \;\big|\; \exists\, x \in D_f : y = f(x)\} = \Big\{y \in \mathbb{R} \;\Big|\; \exists\, x \in (-\infty; 1] : y = x^2 - 2x + 2\Big\}.$$

Valamely $y \in \mathbb{R}$ mellett oldjuk meg tehát az alábbi egyenletet $x-$re a $(-\infty; 1]$ intervallumon.

$$y = x^2 - 2x + 2 \iff x^2 - 2x + (2 - y) = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (2 - y)}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{y - 1} \in \mathbb{R} \iff y - 1 \geq 0 \iff y \geq 1.$$

Ha tehát $y \in [1; +\infty)$, akkor a fenti egyenlet megoldható a valós számok halmazán. A kapott megoldásokra további feltétel az, hogy:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{y - 1} \in (-\infty; 1].$$

Tegyük fel, hogy $y \geq 1$ és

$$x_1 = 1 + \sqrt{y-1} \leq 1 \iff \sqrt{y-1} \leq 0 \iff y \leq 1,$$

ami a feltétellel összevetve egyetlen pontot ad, amikor $\underset{\sim\sim\sim}{y = 1}$. A másik gyökre hasonlóan:

$$x_2 = 1 - \sqrt{y-1} \leq 1 \iff \sqrt{y-1} \geq 0 \iff \underset{\sim\sim\sim}{y \geq 1},$$

ami a feltételnek is megfelel.
A fentieket egybevetve: amikor $y = 1$, akkor $x_1 = x_2 = 1$, ezért:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{D_{f^{-1}} = R_f = [1;+\infty) \ \wedge \ f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-1} \ \ (y \geq 1)}.$$

Megjegyzés: Szemléltessük grafikusan, ábrázolva egy koordinátarendszerben az f, f^{-1} függvényeket. A számolást és az ábrázolást (ld. transzformációk) elvégezhetjük az f teljes négyzetté alakított alakjával is:

$$y = (x-1)^2 + 1 \quad (x \leq 1) \iff x = 1 - \sqrt{y-1} \quad (y \geq 1).$$
