תרגיל תאורטי 1 - בינה מלאכותית

מגישים: גד זלצברג- 201116605 $gaditzc$, אור בר יעקב - 300486396 $orbarya$

26 באפריל 2018

שאלה 1:

הטענה נכונה תחת ההנחות הבאות:

1. מדובר באלגוריתם ID-DFS GRAPH-SEARCH
2. מעבר בין כל שני מצבים הוא בעלות קבועה.
3. b- סופי, m- סופי

האלגוריתם ימצא פיתרון אופטימלי או שיחזיר "אין פיתרון": נניח שקיים פיתרון ונסמן את עומק הפיתרון האופטימלי בD, אזי לכל $d_{max} < d$ האלגוריתם ירחיב את כל הצמתים במרחק d_{max}, כיוון שB סופי יש מספר סופי של צמתים כאלה ולכן האלגוריתם יסיים להרחיב אותם. כאשר יגיע ל $d_{max} = \mathrm{d}$ אזי האלגוריתם ימצא את אחד הפתרונות עם עומק D, כלומר אחד הפתרונות האופטימליים.

אם אין פיתרון, האלגוריתם ירוץ לכל $d_{max} \leq \mathrm{m}$ כאשר נגיע ל$d_{max} = m+1$ נוכל לזהות את המצב הזה אם נשמור עבור כל עומק האם פגשנו בצמתים שלא הוספנו אותם לfringe בגלל שהעומק שלהם גדול מדיי. כל עוד פגשנו בצומת כזה, נמשיך גם לרמה הבאה של d_{max}, אחרת נדע שהגענו לעומק המקסימלי ולא מצאנו פיתרון.

שאלה 2:

נתבונן בבעיה (הטריוויאלית) הבאה:

אנו מעוניינים לכסות את כל המשבצות של לוח שחמט בגודל $n \times n$ בעזרת חלקי דמקה.

כעת נבחין כי אלגוריתם DFS יכסה את הלוח לאחר n^2 צעדים: בכל צעד הוא יוסיף חלק ללוח ולאחר n^2 הלוח יהיה מכוסה כולו.

מנגד, אם נגדיר $d_{\max} = n^2 - 1$, נקבל שאלגוריתם $iterative\ deepening$ יעבור על כל המצבים האפשריים עם k חלקים עבור $k \leq n^2$, כלומר $\Omega\left(2^n\right)$.

שאלה 3:

h_1:

אדמיסבילי: נבחין כי בכל סדר פעולות המסתיים ב $goal$ נצטרך להזיז את כל האריחים שאינם במקומם לפחות פעם אחת, מכיוון שהם יצטרכו לשנות מקום למקום המתאים להם ב $goal$.

h_2:

אדמיסבילי: נבחין כי בכל סדר פעולות המסתיים ב $goal$ נצטרך להזיז את כל האריחים שאינם במקומם למקום המתאים להם ב $goal$, בכדי להעביר אריח ממקומו הנוכחי למקום המתאים לו דרוש מספר הזזות לפחות כמו המרחק, והזזת אריח לא מקרבת את יתר האריחים למקומם המתאים, ולכן נקבל שמספר ההזזות הדרושות הוא לפחות סכום המרחקים.

h_3:

אדמיסבילי: כל אריח שמחוץ לשורה ו/או מחוץ לעמודה המרחק שלו מהמקום המתאים לו גדול או שווה מ 2 או 1 בהתאמה, ולכן נקבל $h_2 > h_3$, ומכיוון שh_2 אמיסבילית נקבל שכך גם h_3.

h_4:

אדמיסבילי: נבחין כי סדר פעולות אפשרי לפי חוקי המשחק הוא חוקי גם לפי $Blank - Swap$, ולכן הפתרון האופטימלי לפי $Blank - Swap$ קטן או שווה מהסדר האופטימלי לפי חוקי המשחק ולכן אדמיסבילי.

h_5:

אדמיסבילי: נבחין כי סדר פעולות אפשרי לפי חוקי המשחק הוא חוקי גם לפי $Pair - Swap$, ולכן הפתרון האופטימלי לפי $Pair - Swap$ קטן או שווה מהסדר האופטימלי לפי חוקי המשחק ולכן אדמיסבילי.

h_6:

נתבונן בלוח הבא:

3	1	2
	4	5
6	7	8

נבחין כי ע"י הזזה אחת של 3 ללמטה ניתן להגיע ל $goal$, בעוד שלפי היוריסטיקה המוצעת נקבל את הסדר: 31245678 ומתקיים: $3 > 1,\ 3 > 2$ ולכן יוחזר 2 כלומר היורסטיקה אינה אדמיסבילית.

שאלה 4:

נסמן $n = N \cdot N - 1$, נגדיר "הפיכה" כמו ב h_6 בשאלה בקודמת, ונטען את הטענות הבאות:

1. אם N אי זוגי אזי הפאזל פתיר אם ורק אם מספר ה"הפיכות" הוא זוגי במצב הקלט.
2. אם N זוגי הפאזל יהיה פתיר אם ורק אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

תנאי א: האריח החסר נמצא בשורה זוגית (בספירה מלמטה) ומספר ה"הפיכות" הוא אי זוגי.

תנאי ב: האריח החסר נמצא בשורה אי זוגית (בספירה מלמטה) ומספר ה"הפיכות" הוא "זוגי".

הוכחת טענה 1:

נבחין כי הזזת אריח בתוך השורה אינה משפיעה על מספר ההיפוכים, מנגד הזזת אריח משורה לשורה משפיע על $N - 1$ היפוכים (יוצר/מבטל היפוכים), ולכן במקרה ש N אי זוגי נקבל שלא משנה כמה הזזות נעשה ישאר מספר אי זוגי של הזזות ובפרט לא 0, כלומר הלוח לא פתיר.

הוכחת טענה 2:

עבור תנאי א' שוב נבחין כי הזזת אריח בתוך השורה אינה משפיעה על מספר ההיפוכים, בעוד שהזזת אריח משורה לשורה משפיעה על $N - 1$ היפוכים (יוצר/מבטל היפוכים), ולכן במקרה ש N זוגי נקבל שהעברה של האריח הריק בין שורות תשנה את מספר ה"הפיכות" מזוגי לאי זוגי ולהיפך, ולכן יוצא שאם מספר ה"הפיכות" היה אי זוגי והאריח החסר היה בשורה זוגית בכל מצב בו האריח נמצא בשורה זוגית (ובפרט בשורה העליונה ביותר) יהיה מספר היפוכים אי זוגי (ובפרט לא 0) ולכן הלוח אינו פתיר. ניתן לראות שתנאי ב' מתקיים מכיוון שהעברת האריח החסר לשורה אחרת תביא אותנו למצב דומה לתנאי א'.

שאלה 5:

נסמן ב $P = \{s_0 = s_1, ..., s_n = t \in \mathcal{G}\}$ את המסלול המתקבל לפי A^* עם h וב $P^* = \{s_0 = s_1^*, ..., s_k^* = t^* \in \mathcal{G}\}$ את המסלול המתקבל לפי A^* עם h^*, אזי:

$$C =^1 g\left(t\right) \leq^2 h\left(s_{k-1}^*\right) + g\left(s_{k-1}^*\right) \leq^3 h^*\left(s_{k-1}^*\right) + g\left(s_{k-1}^*\right) + \epsilon \leq^4 c\left(s_{k-1}^*, a, t\right) + g\left(s_{k-1}^*\right) + \epsilon =^5 C^* + \epsilon$$

1 - מהגדרה.

2 - נבחין כי אם נניח בשלילה ש $f\left(s_{k-1}^*\right)=h\left(s_{k-1}^*\right)+g\left(s_{k-1}^*\right)<g(t)=f(t)$, אזי מהגדרת A^* היינו מוצאים את s_{k-1}^* מהפרונטיר ואז t^* היה נכנס לפרונטיר והיינו מוציאים אותו בתור פתרון אופטימלי (אלא אם $C=g(t)=g(t^*)=C^*$ ואז הטענה נכונה). כמובן ש s_{k-1}^* נמצא בפרונטיר מכיוון שלפי מה שהנחנו בשלילה מתקיים: $f\left(s_{k-1}^*\right)<f(t)$ ולכן אם tבפרונטיר אזי בהכרח גם s_{k-1}^* נמצא.

3 - מהנתון ש: $h<h^*+\epsilon$.

4 - מאדמיסביליות של h.

5 - מהגדרת C^*.

שאלה 6:

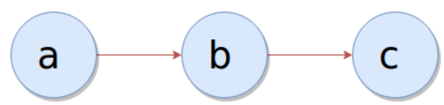
יהא $s_1\in S$, אזי עבור $s_1...s_n\in\mathcal{G}$ המסלול הקצר ביותר המסתיים בפתרון מתקיים:

$$h(s_1)\le c(s_1,a_1,s_2)+h(s_2)\le...\le\sum_{i=1}^{n-1}c(s_i,a_i,s_{i+1})+h(s_n)=\sum_{i=1}^{n-1}c(s_i,a_i,s_{i+1})=h^*(s_1)$$

האי שיוויונות מתקיימים מהקונסיסטנטיות.

שאלה 7:

לא נכון!!! נתבונן בדוגמא הנגדית הבאה:



$\mathcal{G}=\{c\}$, $a=s_0$, ונגדיר:

$c(a,b)=c(b,c)=3$,

$h_1(a)=6$, $h_1(b)=3$

$h_2(a)=6$, $h_2(b)=0$

אז נקבל:

$$h_2(a)=6>3+0=c(a,b)+h_2(b)$$

כלומר h_2 איננה קונסיסטנטית, בעוד ש h_1 שולט על h_2 וh_1 קונסיסטנטית.

שאלה 8:

ראינו בשיעור כי אם עלות הפתרון האופטימלי היא C^* אזי A^* עם היוריסטיקה h אדמיסבילית מבקר בדיוק בקבוצה: $\{s|f(s)<C^*\}=\{s|h(s)+g(s)<C^*\}$ ולכן נקבל שקבוצת הקודקדים בהם מבקר A^* עם h_2 הם בדיוק $\{s|h_2(s)+g(s)<C^*\}$ ועם h_1 הם בדיוק $\{s|h_1(s)+g(s)<C^*\}$, וקל לראות שאם $h_1<h_2$ אזי $\{s|h_2(s)+g(s)<C^*\}\supseteq\{s|h_1(s)+g(s)<C^*\}$ כנדרש.

שאלה 9:

סעיף א:

המצבים הם תתי קבוצות s_i של $[n]$, וקיימת קשת מכל מצב s_i למצב s_j המקיים: $s_j = s_i \cup \{k\}$ עבור $k \in [n]$.

הפונקציה שנרצה להביא למקסימום היא: $f(s_i) = \begin{cases} \sum_{j\in s_i} \frac{v_k}{w_k} & \sum_{j\in s_i} w_j \leq W \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$, האלגוריתם יתבצע באופן הבא : נגדיר עבור כל אובייקט k את הערך הסגולי שלו להיות $\frac{v_k}{w_k}$ ובהנתן מצב s_i נעבור למצב $s_j = s_i \cup \{k\}$ עבור k בעל הערך הסגולי המקסימלי המקיים ש $s_j \in S$, כלומר ש $\sum_{l\in s_j} w_l \leq W$. נעצור כאשר לא קיים מצב שכן ששייך לS.

סעיף ב:

לא ניתן לדעת! האלגוריתם שהצענו בסעיף הקודם איננו מבטיח לקבל פתרון אופטימלי (ובודאי שלא יחזיר את הפתרון הגרוע ביותר אם ניתן להכניס אובייקט כלשהו לתיק...), בעוד ש $simulated\ annealing$ מכיל מרכיב רנדומי, ולכן הוא יכול להגיע לכל תוצאה אפשרית ובפרט גם פחות או יותר טובה מהתוצאה אליה מגיע האלג' שהצענו.

אם זאת, simulated annealing יברח ממקסימום מקומי לעומת Gradient Descent ולכן, אנו חושבים שהוא יגיע לתוצאה טובה יותר.

סעיף ג:

נקודד את המצבים כמחרוזות בינאריות באורך N כאשר במיקום הi יהיה 1 אם באותו מצב החפץ הi נמצא בתיק ו0 אם לא.

Fitness Function- במקרה של מצב שעונה על דרישות המשקל הפונ' תחזיר את סכום המשקלים אחרת תחזיר 0. $f(s_i) = \begin{cases} \sum_{j\in s_i} w_j & \sum_{j\in s_i} w_j \leq W \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

Crossover operator- נבחר 2 הורים רנדומלית מתוך האוכלוסיה, נבנה ילד ע"י כך שניקח את $\frac{n}{2}$ הביטים הראשונים מהורה 1 ואת $\frac{n}{2}$ הביטים האחרונים מהורה 2.

Mutation Operator- לכל מצב באוכלוסיה החדשה, עבור כל ביט נגריל בהסתברות P האם להחליף את הביט או לא.

סעיף ד:

שתי השיטות מתמודדות עם הגעה למקסימום מקומי ע"י הכנסת רנדומיות בבחירת המצב הבא. עם זאת, אלגוריתם גנטי מחפש במרחב החיפוש בהרבה מקומות בו זמנית לעומת האלגוריתמים האיטרטיביים ולכן אנו חושבים שהוא יגיע לתוצאות טובות יותר.

שאלה 10:

נמספר את התחנות ב $1...m$, את המסילות בין התחנות ב $1...n$ ואת הרכבות ב $1...l$.

כעת נניח דיסקרטיזציה של הזמנים לפי דקות, ונחלק כל מסילה r_i למרחקי נסיעה של דקה ונקבל r_{ij} חלק מסילה באורך דקת נסיעה. בנוסף נגדיר s_i להיות התחנה ה i (כולל תחנות התחלה) ונגדיר את המשתנים x_{it} להיות "מקום הרכבת הiובזמן t".

קבוצת המשתנים תהיה:

$$X = \{x_{it} | i \in [l], t \in [\#minuts\ in\ day]\}$$

הדומיין יהיה:

$$D = \{s_i | i \in [m]\} \cup \{r_{ij} | i \in [n], j \in [\#parts\ of\ railroad\ i]\}$$

האילוצים שנגדיר יהיו:

– עבור כל רכבת נגדיר אילוץ

$$\begin{aligned}(x_{it}, x_{it+1}) \in &\{(r_{ij}, r_{ij+1}) \,|i \in [n], j, j+1 \in [\#parts\ of\ railroad\ i]\} \\ &\cup \{(r_{ij}, s_k) \,|r_{ij}\ is\ last\ part\ of\ railroad\ before\ s_k\} \\ &\cup \{(s_k, r_{i1}) \,|r_{ij}\ is\ first\ part\ of\ railroad\ after\ s_k\ in\ the\ train\ routs\} \\ &\cup \{(s_k, s_k) \,|s_k\ is\ station\}\end{aligned}$$

כלומר כל רכבת צריכה להיות בזמנים עוקבים או בשני קטעי מסילה עוקבים או בתחנה העוקבת לקטע מסילה או בקטע מסילה הנמצא במסלול הרכבת ועוקב לתחנה.

– עבור כל תחנה s_i, אם המספר המקסימלי של רכבות שיכולות להיות בתחנה בזמן נתון הוא k, נגדיר לכל $t \in [\#minuts\ in\ day]$ את האילוץ:

$$(x_{1t}, ...x_{lt}) \in \{(x_{1t}, ...x_{lt}) \,| |\{x_{jt}|x_{jt} = s_i\}| \leq k\}$$

כלומר מספר הרכבות הנמצאות בתחנה s_i בזמן t קטן או שווה ל k.

– עבור כל מסילה $r_i = \{r_{ij}|j \in [\#parts\ of\ railroad\ i]\}$ נגדיר לכל $t \in [\#minuts\ in\ day]$ את האילוץ:

$$(x_{1t}, ..., x_{lt}) \in \{(x_{1t}, ..., x_{lt}) \,| |\{x_{jt}|x_{jt} \in r_i\}| \leq 1\}$$

כלומר מספר הרכבות הנמצאות בקטע המסילה r_i בזמן t קטן או שווה ל 1.

– עבור כל רכבת j, אם זמן היציאה שלה מהתחנה הראשונה s_i הוא T, ו r_{k1} הוא קטע המסילה היוצא מהתחנה בכיוון המסלול של הרכבת, אז נגדיר את האילוץ:

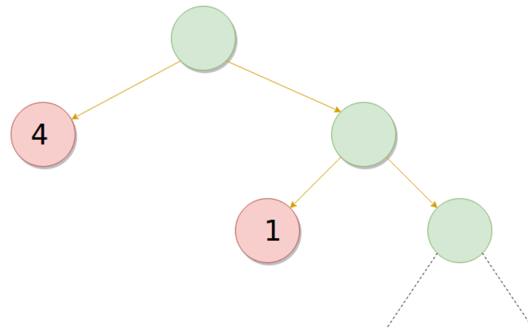
$$x_{jT+1} = r_{k1}$$

היוריסטיקות טובות יהיו:

$minimum\ remaining\ values$: מכיוון שחלק מהאילוצים יהיה ניתן לספק בדרכים רבות (למשל אילוץ על מספר הרכבות בתחנה־ אם k הוא המספר המקסימלי של רכבות בתחנה יש סדר גודל של $\begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$ דרכים לספק את האילוץ), וחלק אחר ניתן לספק ביחידות (למשל־ אם רכבת התחילה נסיעה על מסילה היא בהכרח תמשיך אותה ביחידת הזמן הבאה), אז יהיה הגיוני יותר להתחיל לספק את האילוצים המצומצמים יותר ובאופן כזה לצמצם אפשרויות לאילוצים האחרים.

שאלה 11:

נתבונן בעץ המשחק הבא (שחקן ה $\max$ מתחיל):



נבחין כי אם מרחיבים את הצמתים בעץ משמאל לימין, מוצאים לאחר ביקור בקודקוד הראשון ששחקן ה max מסוגל לכפות על ה min סיום ב4, ובבדיקת תת העץ הימני מתברר לאחר ביקור בעלה הראשון שבחירה של שחקן ה max בתת העץ הזה תאפשר לשחקן ה min לכפות על שחקן ה max סיום ב1, מה שמביא את שחקן ה max לבחור בבן השמאלי של השורש מבלי לבדוק את יתר הקדקדים בעץ. כלומר מספר הקדקדים בהם יש לבקר הוא שני עלים + השורש + קדקד אחד נוסף.