Math tools, Hebrew U.
Final exam

Lecturer	Teaching assistant
Guy Kindler	Nitzan Guberman

February 3, 2016

Instructions

- The exam is three hours long, there will be no extensions
- There is no choice – try to solve all questions
- Manage your time carefully – do not linger too long on any particular question
- You may use statements proven in class, but you should cite exactly which statement you are using. Of course this doesn't hold when you are asked to prove these very statements or special cases of thereof. When in doubt, ask.
- No use of any material except writing equipment is allowed. You may not use or even have available any electronic devices during the test for any purpose.
- The questions in each section will have equal weight. The relative weights of items inside questions will be decided on when grading.

Short questions (30 points)

This section contains questions. Please try to solve them.

(1) Bob drives to work every day. On sunny days, the probability of him crashing his car is 0.01. On rainy days his crash probability is 0.04. Each day is independently chosen to be sunny with probability p and rainy with probability $1-p$. Compute p given that the total probability that Bob crashes on his way to work on any particular day is 0.03.

(2) Let A and B be $n \times n$ matrices with $AB = 0$. Give a proof or a counterexample for the following statement: There is a vector $v \neq 0$ such that $BAv = 0$.

(3) Let $\mathcal{P}$ be the LP:

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 3 \end{array}$$

Find the dual program of $\mathcal{P}$.

(4) For an element $y \in \{-1,1\}^n$, define a function $\delta_y : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ by

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

For a subset $S \subseteq [n]$, compute $\widehat{\delta_y}(S)$.

(5) a. State (without proof) Cheeger's theorem.

b. Show that any connected regular graph with n vertices satisfies

$$1 - \lambda_2 \geq \Omega\left(1/n^4\right),$$

where λ_2 is the second largest eigenvalue of the normalized adjacency matrix of the graph.

Proof questions (34 points)

Prove the following statements.

(6) Let $C \in \mathbb{R}^n$ be a closed cone, and let $v \notin C$ be a vector. Then there exists a vector $u \in \mathbb{R}^n$ such that $\langle u, v\rangle > 0$, and that $\langle u, w\rangle \leq 0$ for every $w \in C$. (You may state and use (without proof) the separation theorem for convex bodies.)

(7) Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent indicator variables, and let $X = \sum_{i=1}^n X_i$ and $\mu = \mathbb{E}[X]$. Then for any $\delta > 0$,

$$\Pr\left[X \geq (1+\delta)\mu\right] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu.$$

Just questions (36 points)

Solve as many questions as you can out of these...

(8) Let $A \subseteq \mathbb{R}^n$ be a non-empty closed and bounded set, and let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a non-empty closed and convex body (not necessarily bounded). The distance between A and K is defined by

$$dist(A,K) = \inf_{x \in A, y \in K} \|x - y\|.$$

Prove that there exist elements $x \in A$ and $y \in K$ such that $\|x - y\| = dist(A,K)$.

(9) Let V be a finite-dimensional inner-product space over $\mathbb{R}$, and let $U \subseteq V$ be a subspace.

a. Prove that for every $v \in V$, the affine translation of U by v contains a unique vector $w \in v + U$ which has the minimal norm in $v + U$.

b. For every affine transformation $v+U$ of U, define $T(v+U) = w$, where w is the vector in $v+U$ with minimal norm. Show that T is a linear transformation from the quotient space V/U to V (that is, $T\colon V/U \to V$ is a linear transformation).

c. Find the image of T and its kernel.

(10) Let $G = ([n], E)$ be a d-regular graph, with normalized adjacency matrix M_G whose eigenvalues are $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n$, and let $\delta = 1 - \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\}$. Let $X_0, X_1, \ldots$ be a random walk on G with initial distribution P^0.

a. Show that there is some $t = O(\frac{\ln n}{\delta})$ such that for any initial distribution P^0 and every vertex $i \in [n]$,

$$\Pr[X_t \neq i] \leq 1 - \frac{1}{2n}.$$

b. Denote by t_0 the time found in the previous article, show that for every initial distribution P^0 and every vertex $i \in [n]$ and for every $N \in \mathbb{N}$,

$$\Pr\left[\forall k \in \{1, \ldots, N\} \quad X_{(k \cdot t_0)} \neq i\right] < (1 - \frac{1}{2n})^N.$$

c. Show that there is some $t = O(\frac{n \ln^2 n}{\delta})$ such that

$$\Pr[\exists i \in [n],\ \forall t' \leq t,\ X_{t'} \neq i] < \frac{1}{2}.$$

MTTS

Math Tools 2015-6

Test Solution

(1)

$$0.03 = P[crash] \underset{\text{נוסחת ההסתברות השלמה}}{=\!=} P[crash/sunny]\cdot p + P[crash/rainy]\cdot(1-p) = 0.01\cdot p + 0.04(1-p)$$

$$\Downarrow$$

$$3 = p + 4 - 4p \Rightarrow 3p = 1 \Rightarrow \underline{\underline{p = \tfrac{1}{3}}}$$

(2) אם $B=0$, ברור. אחרת יש עמודה $B_{i\uparrow} \neq 0$, ולמעשה

$$A\cdot B_{i\uparrow} = 0 \Rightarrow BA\cdot B_{i\uparrow} = 0 .$$

(3)

$$\min \quad -2y_1 + y_2 + 3y_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} y_1 - 2y_2 + y_3 &= 3 \\ y_1 + y_2 &= 4 \\ -y_3 &= -1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\hat{\delta}_y(S) = \mathop{\mathbb{E}}_{x\sim U(\{\pm1\}^n)}\left[\delta_y(x)\cdot w_S(x)\right] = \quad (4)$$

זה שונה מאפס רק אם $x=y$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot w_S(y) = \frac{1}{2^n}\prod_{i\in S} y_i$$

(5) a. יהי $G=(V,E)$ גרף d-רגולרי ויהיו $1=\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n$

הערכים העצמיים של מט' השכנויות המנורמלת שלו.

אז $1-\lambda_2 \ge \frac{(h_G)^2}{2}$,

כאשר $h_G = \min_{\emptyset\ne S\subseteq V}\left\{\frac{|\partial S|}{d\cdot\min\{|S|,|V\setminus S|\}}\right\}$.

b. נשתמש בעובדה שלכל $S\subseteq V$ לא טריוויאלי,

$|\partial S|\ge 1$, ולכן לכל S כזה

$$\frac{|\partial S|}{d\cdot\min\{|S|,|V\setminus S|\}} \ge \frac{1}{d\cdot\frac{n}{2}} \ge$$

$$\overset{d\le n}{\ge} \frac{2}{n^2}$$

ומכאן ש: $h_G\ge\frac{2}{n^2}$, ומשוויון Cheeger,

$1-\lambda_2\ge\frac{2}{n^4}$.

(6) נשתמש במשפט ההפרדה לגופים

תזכורת:

משפט: לכל גוף (לא ריק) קמור וסגור $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ולכל $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ יש אילוץ $(v,a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ המקיים $x \notin \Lambda(v,a)$ ו- $K \subseteq \Lambda(v,a)$.
ויתרה מכך, קיים אילוץ כנ"ל כך שיש $y \in K$ שעליו האילוץ הדוק.

הוכחת הטענה: מכיוון ש- C קמור וסגור (וגם לא ריק) (אחרי הטענה הראשונית), ניתן להשתמש במשפט ההפרדה ולקבל אילוץ (u,a) שמפריד את v מ- C, ותומך (שהוא הדוק) ב- C בנקודה $y \in C$.

נשים לב ש- $\langle u,y \rangle \le 0$: כי $\forall t \in \mathbb{R}^+$ מתקיים $ty \in C$ ולכן $t\langle u,y\rangle = \langle u,ty \rangle \le a$, וזה מתקיים רק אם $a = \langle u,y \rangle \le 0$.

מצד שני, $0 \in C$ ולכן $0 = \langle u,0 \rangle \le a$.

קיבלנו ש- $a=0$ ולכן (משפט ההפרדה) ניתן $\langle u,w \rangle \le 0$ $\forall w \in U$! $\langle u,v \rangle > 0$.

MTTS

7 עבו' - פרמטר $0 \leq t$, נעריך את $: \mathbb{E}[e^{tX}]$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[e^{t\cdot\sum_i^n X_i}\right] \underset{\text{אי-תלות}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}] \leq$$

$$\left[\mathbb{E}[e^{tX_i}] \xlongequal{p_i := P[X_i=1]} 1 - p_i + p_i \cdot e^t = 1 + p_i(e^t - 1) \underset{[1+x \leq e^x]}{\leq} e^{p_i(e^t-1)}\right]$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^t-1)} = e^{(e^t-1)\cdot\sum_i^n p_i} = e^{(e^t-1)\cdot\mu}.$$

עתה נקבל מאי-שוויון מרקוב ש-:

$$P[X \geq (1+\delta)\mu] = P[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \cancel{\frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}} \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} \leq e^{(e^t - 1 - t(1+\delta))\mu}$$

באי-השוויון לעיל נציב $t=\ln(1+\delta)$ ונקבל

$$P[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{(1+\delta-1-(1+\delta)\ln(1+\delta))\cdot\mu} =$$

$$= \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

כנדרש.

(8) <u>טענת עזר</u>: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה, קמורה ולא ריקה, ויהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ נקודות. אז

$$dist(x_2, K) \leq dist(x_1, K) + \|x_2 - x_1\|$$

<u>הוכחה</u>: עפ"י משפט מהכיתה, המרחק של נקודה מאוסף קמור וסגור מתקבל על נקודה באוסף, ולכן יש $y \in K$ כך ש- $dist(x_1, K) = \|x_1 - y\|$. עתה

$$dist(x_2, K) \leq \|x_2 - y\| \underset{\text{א-שוויון }\Delta}{\leq} \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - y\| =$$

$$= \|x_2 - x_1\| + dist(x_1, K)$$

<u>מסקנה מטענת העזר</u>: אם $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ אז

$$dist(x_n, K) \xrightarrow{n\to\infty} dist(x, K)$$

<u>הוכחת המסקנה:</u> לכל $\varepsilon > 0$ יש n_0 כך ש:

$$\forall n > n_0 \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

עפ"י שימוש כפול בטענת העזר מקבלים

$$dist(x,k) - \|x_n - x\| \le dist(x_n, k) \le dist(x,K) + \|x_n - x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n > n_0 \quad \|dist(x,k) - dist(x_n,k)\| < \varepsilon$$

אי השוויון הנ"ל מתקיים לכל $\varepsilon > 0$ (עבור n_0 מתאים) ולכן

$dist(x_n, k) \xrightarrow{n\to\infty} dist(x,k)$ כדרוש.

<u>הוכחת הטענה העיקרית:</u> תהא $x_1, x_2, \ldots$ סדרת איברים

ב-A כך ש: $dist(A,k) = \lim\limits_{n\to\infty} dist(x_n,k)$.

אז עפ"י ירידה לתת-סדרה ניתן להניח בה"כ כי יש לסדרה

(x_n) גבול $x \in A$ (כי A קומפקטית).

מהמסקנה לעיל, $dist(x,k) = \lim dist(x_n,k) = dist(A,k)$.

כיון ש-k קמור וסגור, יש (עפ"י משפט מהכיתה) $y \in k$ כך ש-

$dist(x,y) = dist(x,k)$,

וזה מה שרצינו להראות.

9 a. נניח כי U ו-V הם ממימדים m ו-n בהתאמה,

ויהי $\{u_1, \dots, u_m\}$ בסיס אורתונורמלי של U,

ו- $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ השלמה

שלו לבסיס אורתונורמלי של V.

עבור כל $v \in V$ יש הצגה יחידה

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i ,$$

לכל וקטור $u \in U$ נוסף, יש $\beta_1, \dots, \beta_m$ יחידים כך

ש- $v + u = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i u_i$.

לכן לכל $u \in U$ מתקיים (ע"פ פרסבל)

$$\|v+u\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

ואז השוויון מתקיים כשוויון אמ"מ $u = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$.

לכן $w := v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ הוא הוקטור היחיד ב- $v + U$

שנורמה שלו מינימלית.

(9) b. ראינו שלכל $v\in V$,
אם רושמים $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$ עפ"י הסימונים
מסעיף הקודם, אז

$$T(v+U)=\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i u_i \qquad (*)$$

אם $w\in V$ מקיים $w=\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i$, אז

$$T\left((v+U)+(w+U)\right)=T(v+w+U)=$$
$$\overset{}{\underset{(*)}{=}}\sum_{i=m+1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)u_i \underset{(*)}{=} T(v+U)+T(u+U)$$

וקיבלנו אדיטיביות של T. מקבלים הומוגניות בדרך דומה.

c. ברור ש- $\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Span}\{u_{m+1},\dots u_n\}$. מכיוון שאלה הוקטורים המשלימים את $\{u_1\dots u_m\}$ לבסיס אורתונורמלי של V, וש- $\{u_1\dots u_m\}$ הם בסיס ל- U, מקבלים ש- $\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Span}\{u_{m+1},\dots,u_n\}=U^{\perp}$.

עבור $v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$, נראה מ-(*) ש-

$$v\in U \iff \alpha_{m+1}=\dots=\alpha_n=0 \iff T(v+U)=0$$

והתנאי האחרון מתקיים אמ"מ $v+U=U=0+U$.

לכן הגרעין של T מכיל איבר יחיד והוא $0+U$.

10) ע"פ משפט מהכיתה, לכל ε, אם לוקחים $t_\varepsilon=\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)}{\delta}$ מקבלים

$$\|p^{t_\varepsilon}-\pi\|_1\le\varepsilon,$$

כאשר p^{t_ε} היא ההתפלגות של X_{t_ε}, ו-π היא ההתפלגות האוניפורמית על הצמתים. נקבל

$t=t_{\frac{1}{2n}}=O\left(\frac{\ln(n)}{\delta}\right)$ ונקבל שלכל i,

$$|p_i^t-\tfrac{1}{n}|=|p_i^t-\pi_i|\le\|p^t-\pi\|_1\le\frac{1}{2n}$$ ולכן,

$$P[X_t\neq i]=1-P[X_t=i]=1-p_i^t\le\frac{1}{2n}$$

כנדרש.

b. נסמן ב-: A_k את המאורע $X_{k\cdot t_0}\neq i$. אז

$$(*)\quad P[\forall k\in[N]\ X_{k\cdot t_0}=i] = P[A_1]\cdot P[A_2|\bar{A}_1]\cdot\ldots\cdot P[A_N|\underbrace{\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{N-1}}]$$

נקבע k ונעריך את ההסתברות

$$P[A_k|\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{k-1}].$$

נשים לב שההתפלגות של $X_{(k-1)t_0}, X_{(k-1)t_0+1}, X_{(k-1)t_0+2},\ldots,X_{k\cdot t_0}$ מותנה, של המאורע $\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{k-1}$ היא התפלגות של הילוך מקרי של G עם התפלגות התחלתית של $X_{(k-1)t_0}|\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{k-1}$. לכן עפ"י סעיף a,

$$P[A_k|\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{k-1}] = P[X_{k\cdot t_0}\neq i|\bar{A}_1\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{k-1}] \le$$

$$\le 1-\frac{1}{2n}$$

אם נציב א-שוויון זה ב-(*) נקבל

$$P[\text{המאורע שבשאלה}] \le \left(1-\frac{1}{2n}\right)^N.$$

c. נקבע

$$t = t_0 \cdot 2n \ln(2n) = O\left(\frac{n \ln^2 n}{\delta}\right)$$

עפ"י ההצבה של t_0 מסעיף a.

אז לכל צומת i,

$$P[\forall t' \le t \;\; X_{t'} \ne i] \le P[\forall k \in [2n \ln(2n)] \;\; X_{k \cdot t_0} \ne i]$$

$$\overset{(b)}{\le} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n \ln(2n)} \le e^{-\ln(2n)} \le \frac{1}{2n}$$

ומחסם האיחוד מקבלים

$$P[\exists i \;\; \forall t' \le t \;\; X_{t'} \ne i] \le \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כנדרש.