מבחן מועד א׳ בקורס כלים מתמטיים במדעי המחשב
שנת הלימודים תשע״ז

12.2.2017

משך המבחן: שלוש שעות
מרצה: פרופ׳ נתי ליניאל
מתרגלים: מיכאל סימקין ויובל פלד
מספר קורס: 67865

הוראות כלליות:

1. נסחו במדוייק כל טענה בה אתם עושים שימוש. מותר להשתמש בטענות שנלמדו בכיתה, בתרגול או בתרגיל, אלא אם התבקשתם להוכיח את הטענה עצמה.
2. השימוש בכל חומר עזר אסור, למעט תרגום השאלות לאנגלית, שיסופק על ידי הבוחנים.
3. ניקוד בבחינה יינתן לכל שאלה כמקשה אחת. חלוקת השאלות לסעיפים היא לצורך נוחות בלבד.
4. שיטת הניקוד: בחלק ב׳ יש לענות על שלוש שאלות. כל שאלה תקבל ציון בין 0 ל10. אם ציוני השאלות הם $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, הציון על חלק ב׳ יהיה $5x_1 + 3x_2 + 2x_3$.
5. שימו לב שהניקוד הכולל של השאלות עליהן עליכם לענות הוא 102 נקודות. עם זאת, הציון הסופי במבחן הוא לכל היותר 100.

חלק א׳ (2 נקודות):

בפינה השמאלית-עליונה של כריכת מחברת הבחינה הראשונה שלכם הקצו מקום שבו תכתבו על אילו שאלות עניתם. בסוף המבחן, בשם כל היקר לנו, אנו מבקשים מכם לא לשכוח למלא חלק זה. תודה.

חלק ב׳ (100 נק׳): ענו על 3 שאלות מבין שאלות 1-4.

שימו לב: אם תענו על יותר מ 3 שאלות, תבדקנה רק 3 מהתשובות, שיבחרו באופן שרירותי.

.1

(א) הגדירו התפלגות סטציונרית של שרשרת מרקוב עם מטריצת מעברים $P \in M_n(\mathbb{R})$ על מרחב המצבים $[n]$.

(ב) תנו דוגמא להילוך מקרי פשוט על גרף קשיר שאינו מתכנס להתפלגות הסטציונרית שלו.

(ג) יהי $n \geq 2$, ויהי $G = (V, E)$ הגרף בו $V = [2n+1]$ ו

$$E = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n\} \bigcup \{\{i,j\} : n+1 \leq i < j \leq 2n\} \bigcup \{\{2n+1, i\} : 1 \leq i \leq 2n\}$$

i. מהי ההתפלגות הסטציונרית של הילוך מקרי פשוט על G? אל תשכחו להוכיח תשובתכם.

ii. מתחילים הילוך מקרי פשוט על G בקודקוד 1 בזמן 0. נסמן את מיקום ההילוך בזמן t על ידי X_t. הוכיחו כי בזמן $t = \frac{n}{3}$:

$$\mathbb{P}\left[n+1 \leq X_t \leq 2n\right] \leq \frac{2}{5}$$

<u>הערה</u>: הטענה נכונה לכל n, אך מספיק להוכיח אותה עבור n גדול מספיק.

2. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ וקטורים מקריים, שבכל אחת הערך של כל קואורדינטה מוגרל בצורה אחידה מתוך $\{-1, 1\}$, וכל ההגרלות בלתי תלויות.

עבור $1 \leq i < j \leq n$ נגדיר $X_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$ (כך שיש $\binom{n}{2}$ משתנים מקריים).

(א) עבור $1 \leq i < j \leq n$, חשבו את $\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$.

(ב) עבור $1 \leq i < j \leq n$ חשבו את $Var\left[X_{i,j}\right]$.

(ג) הוכיחו:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\exists 1 \leq i < j \leq n : \left|X_{i,j} - \mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]\right| \geq \sqrt{n}\ln n\right] = 0$$

3. יהי $G = (V, E)$ גרף סופי. עבור $v \in V$, נסמן ב $N(v)$ את קבוצת השכנים של v.
כיסוי שברי של G הוא פונקציה $f : V \to [0, \infty)$ כך שלכל $e = \{u, v\} \in E$, $f(u) + f(v) \geq 1$.
נסמן ב P את קבוצת הכיסויים השבריים של G. עבור $f \in P$, נגדיר $\tau(f) = \sum_{v \in V} f(v)$.
$\tau(f)$ נקרא **הערך של** f.
זיווג שברי של G זו פונקציה $g : E \to [0, \infty)$ כך שלכל $v \in V$, $\sum_{u \in N(v)} g(\{u, v\}) \leq 1$.
נסמן ב Q את קבוצת הזיווגים השבריים של G. עבור $g \in Q$, נגדיר $\nu(g) = \sum_{e \in E} g(e)$.

(א) הוכיחו ש Q פאון קמור חסום (bounded convex polytope).

(ב) הוכיחו כי $\tau^* = \min\{\tau(f) : f \in P\}$ ו $\nu^* = \max\{\nu(g) : g \in Q\}$ קיימים וסופיים.

(ג) כתבו תוכנית לינארית המוצאת כיסוי שברי שערכה τ^*.

(ד) כתבו את התוכנית הדואלית לתוכנית שמצאתם בסעיף הקודם.

(ה) הוכיחו כי $\nu^* = \tau^*$.

4. עבור $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ נגדיר:

$$\|A\|_{op} = \max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

(א) הוכיחו כי $\|A\|_{op} = \left\|A^T\right\|_{op}$.

(ב) הניחו ש־ $m \leq n$. הוכיחו כי $\sigma \in \mathbb{R}$ ערך סינגולרי של A אם"ם σ^2 ערך עצמי של AA^T.

(ג) מעתה, הניחו ש $m = n$ ו A סימטרית. הוכיחו כי σ ערך סינגולרי של A אמ"ם אחד לפחות מבין $\{-\sigma, \sigma\}$ ערך עצמי של A.

(ד) נניח ש־ $\lambda_n \geq \ldots \geq \lambda_1$ ההם ערכים העצמיים של A. הוכיחו כי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, הערכים העצמיים של $A + \alpha I$ הם $\lambda_1 + \alpha \geq \ldots \geq \lambda_n + \alpha$.

(ה) תזכורת: $B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית נקראת מוגדרת אי־שלילית (positive semi-definite) אם לכל $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Bx, x\rangle \geq 0$.
הוכיחו כי לכל $\alpha \geq -\lambda_n$, $A + \alpha I$ מוגדרת אי־שלילית.