

6.6.2017

מועד מיוחד בקורס כלים מתמטיים במדעי המחשב, שנת הלימודים 2016-17
מרצה: פרופ' נתי ליניאל
מספר קורס: 67865

1. יהי K_n הגרף השלם על n קודקודים. נזהה את קבוצת הקודקודים עם $[n]$. מתחילים הילוך מקרי פשוט על K_n מהקודקוד 1 בזמן 0. נסמן את מיקום ההילוך בזמן t על ידי X_t . נסמן ב- T את הזמן הראשון בו ההילוך ביקר בכל הקודקודים, כלומר:

$$T = \min \{t : [n] = \{X_0, X_1, \dots, X_t\}\}$$

שימו לב כי T הוא משתנה מקרי.

(א) הוכיחו כי $\mathbb{E}T = \Theta(n \log n)$

(ב) הוכיחו כי אסימפטוטית כמעט בודאות $T \leq 10n \log n$.

2. נתונה תוכנית לינארית בצורה הסטנדרטית:

$$\max c^T x$$

תחת האילוצים:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

(א) כתבו את התכנית הדואלית לתכנית הנ"ל.

(ב) נניח ש $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ו y פתרונות פיזאביליים לתכנית הפרימאלית והדואלית, בהתאמה. הוכיחו:

$$c^T x \leq y^T b$$

(ג) נניח ש x ו y פתרונות פיזאביליים לתכנית הפרימאלית והדואלית, בהתאמה. הוכיחו כי $c^T x = y^T b$ אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$:

$$(x_i = 0) \vee ((A^T y)_i = c_i)$$

3. מטריצת גראהם היא מטריצה מהצורה AA^T . לפניכם שתי מטריצות. עבור כל אחת מהן, קבעו האם היא מטריצת גראהם.

$$\begin{pmatrix} 41 & -12 & 0 \\ -12 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 39 & -48 & 0 \\ -48 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$