3, 2, 4

האוניברסיטה העברית בירושלים
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

מספר מחברת 137

לפני הבחינה אנא מלא/מלאי את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

מספר תעודת הזהות [redacted]

שם הקורס [illegible] מס' הקורס 67865

שם המרצה [illegible] תאריך הבחינה 12.02.2017

[redacted]

הנחיות לנבחן:

- יש להכין תעודה מזהה.
- יש להישמע להוראות הבוחנים והמשגיחים.
- אסור לנבחנים לשוחח ולהתקשר בכל צורה ביניהם או עם כל גורם אחר, או להעביר חומר כלשהו זה לזה.
- אין לעזוב את אולם הבחינה במהלך הבחינה, אלא ברשות בוחן או משגיח.
- חל איסור להשתמש בבחינה בחומר כלשהו או להחזיקו למעט חומר שהותר לשימוש במפורש על ידי הבוחנים ובתנאי שאין בו כל רישומים, פתקים וכיו"ב. <u>כל החפצים האחרים ירוכזו באולם הבחינה בהתאם להוראות המשגיחים.</u>
- יש לכתוב את התשובות בעט <u>כחול או שחור</u> בכתב יד ברור ונקי. <u>אין</u> לכתוב בעיפרון.
- אין להשתמש בטיפקס או במרקרים צבעוניים.
- אין לכתוב בשוליים. יש לכתוב טיוטה רק על העמוד הפנימי של הדף במקום המסומן לכך.
- אין לתלוש או להוסיף דפים למחברת. מחברת שייתלשו או יצורפו אליה דפים דינה כמחברת פסולה.
- יש להקפיד למלא את כל הפרטים המזהים על גבי כל מחברת נוספת שאין עליה מדבקת ברקוד.
- יש למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
- האוניברסיטה העברית מקפידה על קיומן התקין של הבחינות לפי הנהלים וכללי היושר הקבועים בתקנונים, ומאחלת לך הצלחה בבחינות.

2 | 10
3 | 9
4 | 10
29

לשימוש המרצה

ציון הבחינה (0-100) 100 שם הבודק ______

המחברת נבדקה בתאריך ______ חתימת הבודק ______

שים לב! השוליים יחתכו לפני הסריקה. לכן, חל איסור מוחלט לכתוב כאן!

שאלה 4

סעיף א' - נניח בה"כ $m \le n$

נתבונן בפירוק ה-SVD של A: $A = U D_{mn} V^T$, כאשר $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m & 0 \end{pmatrix}$

והערכים הסינגולריים מקיימים $0 \le \dots \le \sigma_2 \le \sigma_1$

כפי שראינו בהרצאה, הערך הסינגולרי המקסימלי של A הוא בדיוק הנורמה האופרטורית שלה:

$\|A\|_{op} = \sigma_1$

נתבונן בפירוק של A^T, ונראה שהערכים הסינגולריים נשמרים:

$A^T = (UDV^T)^T = VD^TU^T = V \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} U^T$

גם עבור A^T, הערך הסינגולרי המקסימלי הוא σ_1, לכן $\|A\|_{op} = \|A^T\|_{op} = \sigma_1$

סעיף ב'

$AA^T = UDV^T \cdot VD^TU^T = UD^2U^T$, where $D^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$

מכיוון ש-AA^T סימטרית, ו-U אורתוגונלית, UD^2U^T הוא הפירוק הספקטרלי של AA^T.

לכן הע"ע של AA^T הם $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$, וזה בדיוק ריבוע הערכים הסינגולריים של A.

סעיף ג'

נניח σ ע"ע של A עם ו"ע u. A סימטרית, לכן $AA^T = AA$:

$AAu = A(\sigma u) = \sigma Au = \sigma^2 u \to \sigma^2$ is an eigenvalue of AA^T.

לפי סעיף ב', σ הוא ערך סינגולרי של A. ההוכחה עבור $(-\sigma)$ אנלוגית.

בכיוון השני: σ ערך סינגולרי של A. לפי ב' σ^2 ע"ע של $AA^T = AA$. הפירוק הספקטרלי של AA הוא VD^2V^T

כאשר VDV^T הוא הפירוק של A. כאשר $D^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$. מתקיים $VD^2V^Tu = AAu = \sigma^2 u$

לכן $VDV^Tu = \sigma u$ או $VDV^T u = -\sigma u$

לא, אלכסונית לא בהכרח

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

שאלה 4

סעיף ג'

ראשית, מכיוון ש-A סימטרית, אזי $A+\alpha I$, גם היא סימטרית ולכן קיים לה פירוק ספקטרלי (ערכים עצמיים).

Let λ_i be an eigenvalue with corresponding eigenvector u_i. $\Rightarrow A u_i = \lambda_i u_i$

$$(A+\alpha I)u_i = Au_i + \alpha I u_i = \lambda_i u_i + \alpha u_i = (\lambda_i + \alpha)u_i$$

כלומר, λ_i ע"ע של A אזי $(\lambda_i+\alpha)$ ע"ע של $(A+\alpha I)$. כלומר מצאנו n ע"ע ל-$(A+\alpha I)$, ולכן אין יותר.

סעיף ה'

(נשתמש בהגדרה שקולה, וקודם נוכיח שההגדרות הבאות ל-PSD שקולות:

1) כל הע"ע אי שליליים
↓
2) (קיים פירוק) ל-A כך: $A=MM^T$
↓
3) לכל $x\in\mathbb{R}^n$, $x^TAx\geq 0$.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$:

$$A \overset{\text{פירוק ספקטרלי}}{=} V\Lambda V^T \overset{\text{(ניתן להוציא שורש כי הע"ע אי שליליים)}}{=} V\Lambda^{1/2}\cdot\Lambda^{1/2}V^T = \overbrace{(V\Lambda^{1/2})}^{M}(V\Lambda^{1/2})^T = MM^T$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$:

$$x^TAx = x^TMM^Tx = \langle M^Tx, M^Tx\rangle = \|M^Tx\|_2^2 \geq 0$$

לכן מספיק להראות שהע"ע של $(A+\alpha I)$ אי שליליים, וראינו שהם מהצורה:

$$\lambda_1+\alpha, \ldots, \lambda_n+\alpha$$

ומתקיים $\alpha \geq -\lambda_n$, לכן

$$\lambda_1+\alpha \geq \cdots \geq \lambda_n+\alpha \geq \lambda_n-\lambda_n = 0$$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

שאלה 2

סעיף א'

לכל X_{ij} נגדיר n משתנים "אינדיקטורים" $X_{ij}^{(k)}$ באופן הבא:

$$X_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{if } (V_i)_k = (V_j)_k \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נבחין כי מתקיים:

$$\Rightarrow X_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ij}^{(k)}$$

$$\mathbb{E}[X_{ij}^{(k)}] = P_r(X_{ij}^{(k)} = 1)\cdot 1 + P_r(X_{ij}^{(k)} = (-1))\cdot(-1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot(-1) = 0$$

$$\mathbb{E}[(X_{ij}^{(k)})^2] = P_r(X_{ij}^{(k)} = 1)\cdot 1^2 + P(X_{ij}^{(k)} = -1)\cdot(-1)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

$$\rightarrow Var(X_{ij}^{(k)}) = \mathbb{E}[(X_{ij}^{(k)})^2] - \mathbb{E}^2(X_{ij}^{(k)}) = 1 - 0^2 = 1$$

סכום

$$\mathbb{E}[X_{ij}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_{ij}^{(k)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}^{(k)}] = n\cdot 0 = 0$$

סעיף ב'

ב"ת $X_{ij}^{(k)}$

$$Var(X_{ij}^{(k)}) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_{ij}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_{ij}^{(k)}) = n\cdot 1 = n$$

סעיף ג'

נגדיר משתנה חדש:

$$Y_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 2 & (V_i)_k = (V_j)_k \Leftrightarrow X_{ij}^{(k)} = 1 \\ 0 & \text{o.w} \Leftrightarrow X_{ij}^{(k)} = -1 \end{cases} = X_{ij}^{(k)} + 1$$

$$\mathbb{E}[Y_{ij}^{(k)}] = 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1 \quad , \quad \mathbb{E}[(Y_{ij}^{(k)})^2] = 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$$

$$Var(Y_{ij}^{(k)}) = 2 - 1^2 = 1$$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

שאלה 2

המשך סעיף ב

באופן דומה נגדיר $Y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ij}^{(k)}$

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} (X_{ij}^{(k)} + 1) = X_{ij} + n$$

$$\mathbb{E}[Y_{ij}] = n \quad , \quad Var(Y_{ij}) = n .$$

Y_{ij} הוא סכום של n ב״ת המקבלים ערכים ב-$\{0,2\}$ לכן נוכל

להשתמש בחסם chernoff :

$$\Pr\left[|Y_{ij} - \mathbb{E}[Y_{ij}]| \geq \delta \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y_{ij}]}_{n} \right] \leq 2\exp\left[-\frac{\delta^2 \, \mathbb{E}[Y_{ij}]}{3} \right]$$

$\delta := \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow$

$$\Pr\left(|Y_{ij} - \mathbb{E}(Y_{ij})| \geq \sqrt{n} \cdot \ln n \right) \leq 2\exp\left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{\ln^2 n}{n} \cdot n \right] = 2\exp\left[\frac{-\ln^2 n}{3} \right]$$

$\parallel$ שוויון מאורעות

$$|X_{ij} + n - (\mathbb{E}[X_{ij}] + n)|$$

$\parallel$

$$\Pr\left[|X_{ij} - \mathbb{E}[X_{ij}]| \geq \sqrt{n} \ln n \right] \leq 2\exp\left[-\frac{\ln^2 n}{3} \right]$$

נשתמש בחסם האיחוד

$$\Pr\left[\exists\, 1 \leq i < j \leq n \, , \, |X_{ij} - \mathbb{E}[X_{ij}]| \geq \sqrt{n} \ln n \right] \leq \binom{n}{2} 2\exp\left[-\frac{\ln^2 n}{3} \right]$$

$$= 2\exp\left[-\frac{1}{3}\ln^2 n + \ln \frac{n(n-1)}{2} \right] \leq \exp\left[-\frac{1}{3}\ln^2 n + \ln n^2 \right]$$

$$= \exp\left[\underset{\downarrow \, \infty}{\ln n} \underbrace{\left(-\frac{\ln n}{3} + 2 \right)}_{\downarrow \, -\infty} \right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

שאלה 1 - לא לבדיקה

סעיף א'

[illegible] זה וקטור $p \in \mathbb{R}^n$, כך ש- $0 \le p$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, [illegible]

המהלך המקרי [illegible] של [illegible] ו[illegible] וקטור

[illegible] $x \in \mathbb{R}^n$,

$$p = \lim_{t \to \infty} \left(x^T P^t \right)$$

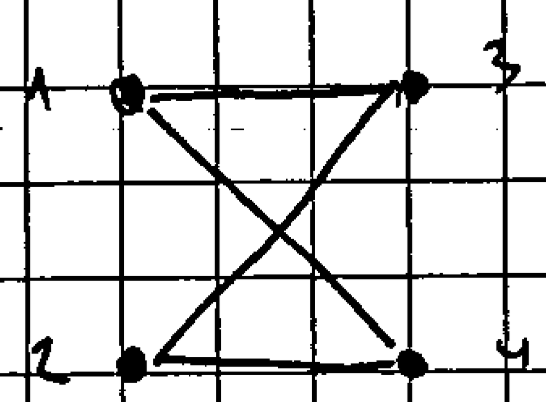
סעיף ב'

זה קורה בגרף דו צדדי, כי ישנם קודקודים שהמהלך יגיע אליהם בהסתברות 0 ([illegible])

[illegible] מספר זוגי (אי-זוגי) של צעדים, [illegible] הגרף הדו צדדי $K_{2,2}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[illegible]



סעיף ג'

נשים לב [illegible] של הגרף [illegible]:

$$\begin{array}{cccc} & 0,\dots,n & n+1,\dots,2n & 2n+1 \\ P = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ 1 \ \cdots \ 1 & & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \cdot \frac{1}{n} \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$$

[illegible] ([illegible])

$$x^T = (\underbrace{1,\dots,1}_{n \text{ times}}, \underbrace{-n,\dots,-n}_{\text{times}}, 0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

[illegible] $\frac{n-1}{n}$.

הערות הבודק

אין לכתוב בשוליים

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

~~שאלה 1~~

~~המשך סעיף ג~~

~~הנחה ש- $\rho(P)=\frac{n-1}{n}$, (שימוש במשפט פרון-פרובניוס:~~

$$\cancel{\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\rho(P)}\cdot P^t\right] = \frac{x\cdot x^T}{\langle x,x\rangle}}$$

הערות הבודק

נא/ לא לכתוב בשוליים

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב במסגרת

שאלה 3

סעיף א'

~~לכל [illegible] (נגדיר וקטור) הקודקודים v~~

לכל קודקוד $v \in V$ נגדיר וקטור באורך $|E|$, כך שכל קואורדינטה

מוגדרת ע"י הצלעות הנוגעות בקודקוד:

הקואורדינטה ה-e מייצגת (שייכת) האם הצלע נוגעת בקודקוד v.

$$(\phi_v)_e = \begin{cases} 1 & \text{if vertex } v \text{ is in edge } e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מה-3 כתבנו בשיעור הקודם, הגוון שהוא $\sum_{u \in N(v)} g(\{u,v\}) \le 1$ לכן הוא נמצא

בתוך הפוליטופ המוגדר ע"י $\langle \phi_v, x \rangle \le 1$. ומשום שהוא מוגדר בדיוק

ע"י חיתוך $|E|$ חצאי המרחבים

$\bigcap_{i=1}^{|E|} \Lambda(\phi_i, 1)$, לכן הוא פאון קמור.

(בנוסף), הוא חסום, מפני שהוא נמצא בקובייה ה-$|E|$-ממדית $(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1)$.

שכחת את החלק של הקואורדינטות שצריכות להיות ≥ 0

-0.5

סעיף ב'

לפי: V^* - לפי סעיף א', Q הוא פאון קמור וחסום, לכן קיים לו מקסימום סופי, ובפרט הוא נמצא

(לפחות באחד) מהקודקודים של הפאון.

מה זה מקסימום של פאון?

-0.5

לא הראית $Q \neq \emptyset$

I^* - תנאי מלמעלה באופן טריוויאלי. (לשם) $f(v)=1$ לכל $v \in V$). ~~[illegible]~~

~~$f \in P$ כך שקיים $v \in V$ עבורו $f(v) > 0$, קיים הפתרון [illegible], ומכאן $f(v) = 0$~~

ומהגדרה ע"י $f(v)=0$ לכל $v \in V$. נראה שזה לא פתרון ב-?, אבל מתקיים: $f: V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$

הוא תוסף את ~~[illegible]~~ מלמטה.

הערות הבודק

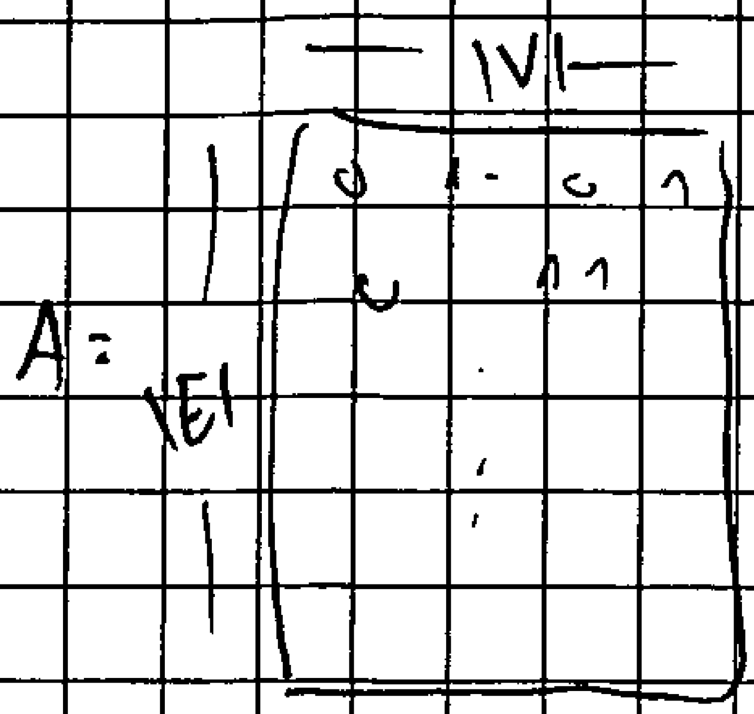
טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בספרון

שאלה 3

סעיף ג'

נתבונן במטריצה $A \in \mathbb{R}^{|E| \times |V|}$ הבאה:



e שורה מייצגת צלע e (צלע), היא מורכבת מאפסים, למעט אחדות במקומות u ו-v.

לכן e מוכלת ומכוסה ע"י קודקוד, יש בה אחדות בדיוק בשורה המתאימה לצלע הזאת במטריצה.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if vertex } j \text{ is in edge } i. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הבעיית LP המתאימה למציאת τ^* היא:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{|V|}} \langle x, \vec{1} \rangle \quad \text{s.t}$$

$$Ax \geq \vec{1} \in \mathbb{R}^{|E|}$$

$$x \geq 0$$

סעיף ד'

הבעיה הדואלית היא: DLP

$$\max_{y \in \mathbb{R}^{|E|}} \langle y, \vec{1} \rangle \quad \text{s.t}$$

$$A^T y \leq \vec{1} \in \mathbb{R}^{|V|}$$

$$y \geq 0$$

סעיף ה' - ~~לפי משפט הדואליות, הפתרונות של ... מתקיים~~

(שימו לב ש-DLP הבעיה בדיוק מציאת ν^*. היא התאמה (הוכחנו בסעיף ב'), לכן, לפי משפט הדואליות, הפתרונות של LP ושל DLP שווים, ומתקיים $\nu^* = \tau^*$. (המשך בעמוד הבא)

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

שאלה 3

המשך סעיף ה'

אין מקום לכת..
ההגדרה של V^t

הספק לכך ש [illegible] מגיע V^t : y מייצג [illegible] שבה : $y_i = g(e_i)$. $\in \mathbb{R}^{|E|}$

A^T [illegible] שבה [illegible] שורה [illegible] $v \in V$. לכן [illegible] y

של שורה, שקולה לסכום $\sum_{u \in N(v)} g(\ldots) = \sum_{i \in N(v)} y_i$, [illegible] G [illegible] 1.

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בשוליים

אין לכתוב בשוליים

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נא לא לכתוב בעפרון

$x+1=4$

$x=3$

$\frac{4x}{1}=\frac{x+1}{x}$

$4x^2-x-1=0$

$1\pm\sqrt{16+16}$

כיסוי שבר: $f: V \to [0,\infty)$, $f \in P$. לכל $\{u,v\} \in E$, $f(u)+f(v) \geq 1$

$$\tau(f) = \sum_{v \in V} f(v)$$

זיווג שבר: $g: E \to [0,\infty)$ $g \in Q$, לכל $v \in V$, $\sum_{u \in N(u)} g(\{u,v\}) \leq 1$

$$\nu(g) = \sum_{e \in E} g(e)$$

$G =$ V E

$\max \sum_{u \in V} x_u$ $\langle x, \vec{1} \rangle$

$x_u + x_v \geq 1$

$\min \langle x, 1 \rangle$, R^n

DLP $\max \langle y, 1 \rangle$, R^E

$y^T A \leq 1$

$\geq 1 \in R^n$

AA σ^2

$AAv = \sigma^2 v$

$vD^2v = \sigma^2 v$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

בשוליים לא לכתוב כאן

$\|A\|_{op} = \|A^T\|_{op}$

$\|A^T\|_{op} = \max_{y \in \mathbb{R}^m, \|y\|=1} \|A^T y\|$

$A = UDV^T$ $\quad \sigma_i \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^T = VDU^T$

$AA^T = UDV^T V D U^T$

$= UDDU^T \rightarrow$ [illegible]

$\|A\|_F = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

Let λ be eval of $AA^T = AA$, and v its evec $AAv = \lambda v$

σ is eval of A, then $AAv = \sigma^2 v$ $\rightarrow UDDU^T v = \lambda v$ $\quad n^2 = e^{2\ln n}$

$\sqrt{\sigma^2}$ is singular val of A

(3) $u_1, \ldots, u_n$ corr. to $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. $\rightarrow Au_i = \lambda_i u_i$

$\rightarrow (A + \alpha I)u = Au + \alpha I u = \lambda u + \alpha u = (\lambda + \alpha)u$

(1) B is PSD if $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^T B x \geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$

$u_i^T B u_i \geq 0$

$\leftrightarrow \lambda_i \|u_i\|^2 = \lambda_i \geq 0$

$A = V \Lambda V^T = (V\Lambda^{1/2})(V\Lambda^{1/2})^T = MM^T$

$x^T A x = x^T M M^T x = \langle M^T x, M^T x \rangle \geq 0$

indicator var $X_k = \begin{cases} 1 & \text{iff } v_{ik} = v_{jk} \\ -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

$AA^T = UDDU^T$

$\rightarrow DDu_i = \sigma^2 u_i$

$A^T = A$

if σ is eval with u

$AAu = \sigma^2 u \rightarrow \sigma^2$ eval of $AA^T \rightarrow \sigma$

$\sigma \rightarrow \sigma^2$ eval of $AA \rightarrow AAu = \sigma^2 u$

$P(|Y - E_Y| \geq \delta \cdot n) \leq 2\exp\left(-\frac{\delta^2 n}{3}\right)$

$\delta n = \sqrt{n} \ln n$

$\delta = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad \leq \binom{n}{2} 2\exp\left(-\frac{1}{3} n \cdot \frac{\ln^2 n}{n}\right)$

$\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{\ln n}$

$\frac{-c^2}{2\sum_i 4n^2} = \frac{-n\ln^2 n}{8 \cdot n^2 \cdot (n-1)}$

$E[X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n] = X_n$

$\delta E_Y = \sqrt{n} \ln n$

$\delta = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

$E[X_k] = Pr(v_{ik} = v_{jk}) + (-1)(1-p) = 0$

$\rightarrow E(X) = \binom{n}{2} E(X_k) = 0$

$Var(X_{ij}) = Var\left(\sum_{k=1}^n (X_{ij})_k\right) = \sum Var((X_{ij})_k) = n \cdot Var(X_k)$

$E(X_k^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 1, -1, -1, 0)$

$= 8p_1 + p_2 - p_3 - p_4$