Mathematical Methods in Computer Science
Home Exam

Lecturer: Nati Linial

1. (a)

יהי $L \subset V = \{0,1\}^n$ תת מרחב **ליניארי**

ותהי $f_L : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ כך ש-

$$\forall v \in V : f_L(v) = \begin{cases} 1 & v \in L \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\widehat{f_L}(a) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in V} f(v)\chi_a(v) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}\chi_a(v) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}(-1)^{<v,a>}$$

אם $a \perp L$:

$$\widehat{f_L}(a) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}(-1)^{<v,a>} = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}(-1)^0 = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}1 = \frac{|L|}{2^n}$$

אחרת:

בהכרח קיים $x \in L - \{0\}$ כך ש- $<a,x> \neq 0 \Rightarrow <a,x> = 1$

יהי L' תת מרחב ליניארי כך ש-

$$L = Sp\{x\} \oplus L' = \{0,x\} \oplus L'$$

ולכן נקבל:

$$\widehat{f_L}(a) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L}(-1)^{<v,a>} = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L'}\left((-1)^{<v+0,a>} + (-1)^{<v+x,a>}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{v \in L'}0 = 0$$

$$\boxed{<v+x,a>=1 \Leftrightarrow <v,a>+<x,a>=1 \Leftrightarrow <v,a>+1=1 \Leftrightarrow <v,a>=0}$$

מצאנו כי עבור תת מרחב **ליניארי** L :

$$\widehat{f_L}(a) = \begin{cases} \frac{|L|}{2^n} & a \perp L \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

יהי $L=\{v_1,...,v_k\}\subset V$ תת מרחב **אפיני**, ותהי f_L כנ״ל.

כלומר, קיימת מטריצה A ווקטור b כך ש- $v\in L \Leftrightarrow Av=b$

יהי $x\in L$

$$\forall v\in L: A(v-x)=Av-Ax=b-b=0$$

כלומר $L'=\{v_1-x,...,v_k-x\}\subset V$ הוא תת מרחב **ליניארי**. לכן נקבל:

$$\widehat{f_L}(a)=\frac{1}{2^n}\sum_{v\in V} f_L(v)\chi_a(v)=\frac{1}{2^n}\sum_{v\in V} f_{L'}(v-x)\chi_a(v)\underset{\boxed{\text{הומומורפיזם}}}{=}\frac{1}{2^n}\sum_{v\in V} f_{L'}(v-x)\chi_a(v-x)\chi_a(x)$$

$$=\chi_a(x)\frac{1}{2^n}\sum_{w\in V} f_{L'}(w)\chi_a(w)=\chi_a(x)\widehat{f}(a)$$

ומכאן:

$$\widehat{f}_L(a)=\begin{cases}\chi_a(x)\frac{|L|}{2^n} & a\perp L' \\ \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

(b) .1

$$\hat{g}(a)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g(j)\overline{\chi_a(j)}\underset{\boxed{\text{מהגדרת g}}}{=}\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}\left(\left(f(j)+f(j+1)\right)\overline{\chi_a(j)}\right)+f(n-1)\overline{\chi_a(n-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}f(j)\overline{\chi_a(j)}+\sum_{j=0}^{n-2}f(j+1)\overline{\chi_a(j)}+f(n-1)\overline{\chi_a(n-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}f(j)\overline{\chi_a(j)}+\sum_{j=0}^{n-2}f(j+1)\overline{\chi_a(j)}\right)\underset{\boxed{\text{הומומורפיזם}}}{=}\hat{f}(a)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}f(j+1)\overline{\chi_a(j+1)}\,\overline{\chi_a(-1)}$$

$$\underset{\boxed{\overline{\chi_a(-1)}=e^{-2\pi(-1)a/n}=e^{2\pi a/n}=\chi_a(1)}}{=}\hat{f}(a)+\frac{1}{n}\chi_a(1)\sum_{j=0}^{n-2}f(j+1)\overline{\chi_a(j+1)}$$

$$=\hat{f}(a)+\frac{1}{n}\chi_a(1)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(f(j)\overline{\chi_a(j)}\right)-f(0)\overline{\chi_a(0)}\right)=\hat{f}(a)+\chi_a(1)\hat{f}(a)-\frac{1}{n}\chi_a(1)f(0)$$

$$=\left(\chi_a(1)+1\right)\hat{f}(a)-\frac{1}{n}\chi_a(1)\sum_{j=0}^{n-1}\hat{f}(j)\overline{\chi_0(j)}$$

$$=\left(\chi_a(1)+1\right)\hat{f}(a)-\frac{1}{n}\chi_a(1)\sum_{j=0}^{n-1}\hat{f}(j)$$

.i (b) .2

נבחן את קבוצת הווקטורים הבאה :

$$A=\left\{\left(u_1,...,u_n\right)\middle|\,\exists i\neq j: u_i=u_j=1,\forall k\neq i,j: u_k=0\right\}$$

קל לראות כי מתקיים :

$$\forall u,v\in A,u\neq v:\ \left\|u-v\right\|_2=\begin{cases}\sqrt{2} & \exists k: u_k=v_k=1\\ 2 & otherwise\end{cases}$$

וכי

$$|A|=\binom{n}{2}$$

.ii

תהי $\left\{x_1,\ldots,x_m\right\}\subset\mathbb{R}^n$ כך שלכל $j\neq i$ מתקיים $\left\|x_i-x_j\right\|_2\in\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$

נגדיר :

$$F\left(y,z\right)=\left(\left\|y-z\right\|_2^2-\delta_1^2\right)\left(\left\|y-z\right\|_2^2-\delta_2^2\right)$$

$$f_i\left(y\right)=F\left(y,x_i\right)$$

נבחן את $Sp\left\{f_i\right\}_{j=1}^{m}$ במרחב הפולינומים $\mathbb{R}_5\left[y_1,\ldots,y_n\right]=Sp\left\{y_1^{j_1}y_2^{j_2}\ldots y_n^{j_n}\middle|\,j_1+j_2+\ldots+j_n<5\right\}$.

נמצא קבוצה פורשת A לפולינום הכללי $f_i\left(y\right)$

$$f_i\left(y\right)=F\left(y,x_i\right)=\left(\left\|y-x_i\right\|_2^2-\delta_1^2\right)\left(\left\|y-x_i\right\|_2^2-\delta_2^2\right)$$

$$=\left(\left\|y-x_i\right\|_2^2\right)^2-\left(\delta_1^2+\delta_2^2\right)\left\|y-x_i\right\|_2^2+\delta_1^2\delta_2^2$$

נבחן כל איבר מהביטוי בנפרד :

$$\left\|y-x_i\right\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-x_{ij}\right)^2=\sum_{j=0}^{n}\left(y_j^2-2x_{ij}y_j+x_{ij}^2\right)=\sum_{j=0}^{n}y_j^2-\sum_{j=0}^{n}2x_{ij}y_j+\sum_{j=0}^{n}x_{ij}^2$$

$$\left(\left\|y-x_i\right\|_2^2\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_j^2-2x_{ij}y_j+x_{ij}^2\right)\left(y_k^2-2x_{ik}y_k+x_{ik}^2\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_j^2-2x_{ij}y_j+x_{ij}^2\right)\left(y_k^2-2x_{ik}y_k+x_{ik}^2\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_j^2y_k^2-2x_{ij}y_jy_k^2+x_{ij}^2y_k^2-2x_{ik}y_j^2y_k+4x_{ij}x_{ik}y_jy_k-2x_{ij}^2x_{ik}y_k+x_{ik}^2y_j^2-2x_{ij}x_{ik}^2y_j+x_{ij}^2x_{ik}^2\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_j^2y_k^2\right)-2\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\sum_{k=1}^{n}\left(y_jy_k^2\right)-2\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2y_k\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2y_k^2\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}^2y_j^2\right)$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}x_{ik}y_jy_k\right)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}x_{ik}^2y_j\right)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2x_{ik}y_k\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2x_{ik}^2\right)$$

נתאים לכל ביטוי פולינומים שפורשים אותו:

$$\delta_1^2\delta_2^2\ ,\ \sum_{j=0}^{n}x_{ij}^2\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2x_{ik}^2\right)\quad\rightarrow\quad A_0=\{1\}\qquad(1)$$

$$\sum_{j=0}^{n}2x_{ij}\underline{y_j}\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}x_{ik}^2\underline{y_j}\right),\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2x_{ik}\underline{y_k}\right)\quad\rightarrow\quad A_1=\left\{y_j\right\}_{j=1}^{n}\qquad(n)$$

$$\sum_{j=0}^{n}\underline{y_j^2}\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}^2\underline{y_k^2}\right),\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}^2\underline{y_j^2}\right),\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ij}x_{ik}\underline{y_jy_k}\right)\quad\rightarrow\quad A_2=\left\{y_jy_k\,\middle|\,j\le k\right\}\qquad\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\sum_{k=1}^{n}\left(\underline{y_jy_k^2}\right),\ \sum_{k=1}^{n}x_{ik}\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{y_j^2y_k}\right)\quad\rightarrow\quad A_3=\left\{\sum_{k=1}^{n}y_jy_k^2\right\}_{j=1}^{n}\qquad(n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\underline{y_j^2y_k^2}\right)\quad\rightarrow\quad A_4=\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_j^2y_k^2\right)\right\}\qquad(1)$$

מצאנו אם כן כי $A=\bigcup_{l=0}^{4}A_l$, $\forall i:\ f_i(y)\in Sp(A)$, ולכן $Sp\left\{f_i\right\}_{j=1}^{m}\subseteq Sp\left\{A\right\}$

$$|A|=1+n+\frac{n^2+n}{2}+n+1=\frac{n^2+5n+4}{2}=\frac{(n+4)(n+1)}{2}$$

ולכן

$$\dim Sp\left\{f_i\right\}_{j=1}^{m}\le\dim Sp\left\{A\right\}\le\frac{(n+4)(n+1)}{2}$$

כעת נניח בשלילה כי קיימת קבוצה $\left\{x_1,\dots,x_m\right\}$ כך ש- $\forall i\ne j:\left\|x_i-x_j\right\|_2\in\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$

ו- $m>\frac{(n+4)(n+1)}{2}$

ומכאן ש- $\left\{f_i\right\}_{j=1}^{m}$ תלויה ליניארית $\dim Sp\left\{f_i\right\}_{j=1}^{m}\le\frac{(n+4)(n+1)}{2}<m$

כלומר

$$\exists\lambda_1,\dots,\lambda_m:\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i=0\ ,\ \exists j:\lambda_j\neq 0$$

ובפרט

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i\left(x_j\right)=\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i\right)\left(x_j\right)=0$$

אבל לכל $i\neq j$

$$f_i\left(x_j\right)=\left(\left\|x_j-x_i\right\|_2^2-\delta_1^2\right)\left(\left\|x_j-x_i\right\|_2^2-\delta_2^2\right)=0$$

ולכן נסיק כי

$$0=f_j\left(x_j\right)=\left(\left\|x_j-x_j\right\|_2^2-\delta_1^2\right)\left(\left\|x_j-x_j\right\|_2^2-\delta_2^2\right)=\left(0-\delta_1^2\right)\left(0-\delta_2^2\right)=\delta_1^2\delta_2^2$$

כלומר בה״כ $\delta_1=0$

מכיוון שלכל $i\neq j$, $x_i\neq x_j$ נסיק כי $\left\|x_i-x_j\right\|_2\neq 0$ (שכן $\|\ \|_2$ מטריקה)

ולכן $\forall i\neq j:\left\|x_i-x_j\right\|_2=\delta_2$, או בעצם לכל $\delta\in\mathbb{R}$ מתקיים $\forall i\neq j:\left\|x_i-x_j\right\|_2\in\left\{\delta,\delta_2\right\}$

אם נבחן את המקרה האלכסוני שבו $\delta=\delta_2$ נקבל $\forall i\neq j:\left\|x_i-x_j\right\|_2\in\left\{\delta_2,\delta_2\right\}$

ונסיק כי $\delta_2=0$, ולכן לכל $i\neq j$, $x_i=x_j$ **סתירה!**

מצאנו כי $m\leq\frac{(n+4)(n+1)}{2}$

3. (a)

נגדיר:

$$V=\{1,\dots,n\}$$

$$\Omega=\left\{(u_1,u_2,u_3,u_4)\,\middle|\,u_1,u_2,u_3,u_4\in V\ ,\ u_i=u_j\Leftrightarrow i=j,u_1<u_4\right\}$$

ונגדיר לכל $u\in U$ מ״מ מציין X_u כך ש-

$$X_{(u_1,u_2,u_3,u_4)}=\begin{cases}1 & (u_1,u_2),(u_2,u_3),(u_3,u_4)\in E\\ \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

מכאן נסיק כי

$$\Pr[X_u=1]=\Pr\left[(u_1,u_2)\in E\right]\cdot\Pr\left[(u_2,u_3)\in E\right]\cdot\Pr\left[(u_3,u_4)\in E\right]=p^3$$

ולכן

$$\mathrm{E}(X_u)=p^3$$

קל לראות כי

$$X=\sum_{u\in\Omega}X_u$$

ולכן

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}\left(\sum_{u\in\Omega}X_u\right)\underset{\boxed{\text{ליניאריות התוחלת}}}{=}\sum_{u\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)=\sum_{u\in\Omega}p^3=\frac{1}{2}\mathrm{P}_4^n p^3=\frac{n!}{2(n-4)!}p^3$$

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}^2(X)=\mathrm{E}\left(\left(\sum_{u\in\Omega}X_u\right)^2\right)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\sum_{u,v\in\Omega}\mathrm{E}(X_uX_v)-\mathrm{E}^2(X)=\sum_{u,v\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)\mathrm{E}(X_v|X_u)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\sum_{u\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)\sum_{v\in\Omega}\mathrm{E}(X_v|X_u)-\mathrm{E}^2(X)$$

נחשב את $\mathrm{E}(X_v|X_u)$, ואת מספר המופעים שלה בהינתן X_u ע״י חלוקה למקרים:

נסמן: $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$

- 3 קשתות משותפות: אין קשתות נוספות: $\mathrm{E}\left(X_v \middle| X_u\right)=1$
  - 4 קודקודים משותפים: מופעים: 1 $\left\{\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)\right\}$

  סה"כ מופעים: $O_3=1$

- 2 קשתות משותפות: קשת נוספת אחת: $\mathrm{E}\left(X_v \middle| X_u\right)=p$
  - 4 קודקודים משותפים: מופעים: 5

    $\left\{\left(u_1,u_2,u_4,u_3\right),\left(u_1,u_4,u_3,u_2\right),\left(u_2,u_1,u_3,u_4\right),\left(u_2,u_1,u_4,u_3\right),\left(u_3,u_2,u_1,u_4\right)\right\}$
  - 3 קודקודים משותפים: קודקוד רביעי: a מתוך $(n-4)$ אפשרויות. מופעים: 4

    $\left\{\left(a,u_1,u_2,u_3\right),\left(a,u_2,u_3,u_4\right),\left(u_1,u_2,u_3,a\right),\left(u_2,u_3,u_4,a\right)\right\}$

  סה"כ מופעים: $O_2=4(n-4)+5=4n-11$
- קשת אחת משותפת: 2 קשתות נוספות: $\mathrm{E}\left(X_v \middle| X_u\right)=p^2$
  - 4 קודקודים משותפים: מופעים: 5

    $\left\{\left(u_1,u_3,u_2,u_4\right),\left(u_1,u_4,u_2,u_3\right),\left(u_2,u_3,u_1,u_4\right),\left(u_3,u_1,u_2,u_4\right),\left(u_1,u_3,u_4,u_2\right)\right\}$
  - 3 קודקודים משותפים: קודקוד רביעי: a מתוך $(n-4)$ אפשרויות.
    - u_1,u_2,u_3 משותפים:
      - קשת משותפת $\left(u_1,u_2\right)$: מופעים: 3

        $\left\{\left(a,u_2,u_1,u_3\right),\left(u_1,u_2,a,u_3\right),\left(u_2,u_1,a,u_3\right)\right\}$
      - קשת משותפת $\left(u_2,u_3\right)$: מופעים: 4

        $\left\{\left(a,u_1,u_3,u_2\right),\left(u_1,a,u_2,u_3\right),\left(u_1,a,u_3,u_2\right),\left(u_1,u_3,u_2,a\right)\right\}$
    - u_1,u_2,u_4 משותפים: מופעים: 6

      $$\left\{\begin{matrix}\left(a,u_1,u_2,u_4\right),\left(a,u_2,u_1,u_4\right),\left(u_1,u_2,a,u_4\right),\\ \left(u_2,u_1,a,u_4\right),\left(u_1,u_2,u_4,a\right),\left(u_2,u_1,u_4,a\right)\end{matrix}\right\}$$
    - u_1,u_3,u_4 משותפים: מופעים: 6 סימטרי ל- u_1,u_2,u_4
    - u_2,u_3,u_4 משותפים: מופעים: 7 סימטרי ל- u_1,u_2,u_3
  - 2 קודקודים משותפים: קודקודים $3,4$: a,b מתוך $(n-4)(n-5)$ אפשרויות.
    - u_1,u_2 משותפים: מופעים: 3 $\left\{\left(a,b,u_1,u_2\right),\left(a,u_1,u_2,b\right),\left(u_1,u_2,a,b\right)\right\}$
    - u_2,u_3 משותפים: מופעים: 3 $\left\{\left(a,b,u_2,u_3\right),\left(a,u_2,u_3,b\right),\left(u_2,u_3,a,b\right)\right\}$
    - u_1,u_2 משותפים: מופעים: 3 סימטרי ל- u_1,u_2

  סה"כ מופעים:

  $$\begin{aligned}O_1&=9(n-4)(n-5)+26(n-4)+5\\&=9n^2-81n+180+26n-104+5=9n^2-55n+81\end{aligned}$$
- אין קשתות משותפות: 4 קשתות נוספות: $\mathrm{E}\left(X_v \middle| X_u\right)=\mathrm{E}\left(X_v\right)=p^3$

  סה"כ מופעים: $O_0=|\Omega|-O_1-O_2-O_3$

נפתח עפ"י המסקנות הנ"ל:

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{u\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)\sum_{v\in\Omega}\mathrm{E}(X_v|X_u)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\sum_{u\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)\left(O_3+O_2p+O_1p^2+O_0p^3\right)$$

$$=\left(O_3+O_2p+O_1p^2+O_0p^3\right)\sum_{u\in\Omega}\mathrm{E}(X_u)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\left(O_3+O_2p+O_1p^2+|\Omega|p^3-(O_1+O_2+O_3)p^3\right)\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\left(O_3+O_2p+O_1p^2+\mathrm{E}(X)-(O_1+O_2+O_3)p^3\right)\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}^2(X)$$

$$=\left(O_3+O_2p+O_1p^2-(O_1+O_2+O_3)p^3\right)\mathrm{E}(X)$$

$$=\left(1+(4n-11)p+\left(9n^2-55n+81\right)p^2-\left(1+4n-11+9n^2-55n+81\right)p^3\right)\mathrm{E}(X)$$

$$=\left(1+(4n-11)p+\left(9n^2-55n+81\right)p^2-\left(9n^2-51n+71\right)p^3\right)\mathrm{E}(X)$$

$$=\left(1+(4n-11)p+\left(9n^2-55n+81\right)p^2-\left(9n^2-51n+71\right)p^3\right)\frac{n!}{2(n-4)!}p^3$$