האוניברסיטה העברית בירושלים
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

מספר מחברת 8/1

לפני הבחינה אנא מלא/מלאי את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

מספר תעודת הזהות | 2 | 0 | 0 | 6 | 7 | 7 | 2 | 4 | 3 |

שם הקורס כלים מתמטיים במדעי המחשב מס' הקורס 67865

שם המרצה פרופ' גיא קינדלר תאריך הבחינה 05.02.2016

67865 כלים מתמטיים במדעי המחשב
05/02/2016 בחינה סופית , מועד א, סמסטר א

200677243
מס' מחברת: **0008** אולם: אודיטוריום הנדסה

00086786508 11-200677243

<u>הנחיות לנבחן:</u>

- יש להכין תעודה מזהה.
- יש להישמע להוראות הבוחנים והמשגיחים.
- אסור לנבחנים לשוחח ולהתקשר בכל צורה ביניהם או עם כל גורם אחר, או להעביר חומר כלשהו זה לזה.
- אין לעזוב את אולם הבחינה במהלך הבחינה, אלא ברשות בוחן או משגיח.
- חל איסור להשתמש בבחינה בחומר כלשהו או להחזיקו למעט חומר שהותר לשימוש במפורש על ידי הבוחנים ובתנאי שאין בו כל רישומים, פתקים וכיו"ב. <u>כל החפצים האחרים ירוכזו באולם הבחינה בהתאם להוראות המשגיחים.</u>
- יש לכתוב את התשובות בעט <u>כחול או שחור</u> בכתב יד ברור ונקי. <u>אין</u> לכתוב בעיפרון.
- אין להשתמש בטיפקס או במרקרים צבעוניים.
- אין לכתוב בשוליים. יש לכתוב טיוטה רק על העמוד הפנימי של הדף במקום המסומן לכך.
- אין לתלוש או להוסיף דפים למחברת. מחברת שייתלשו או יצורפו אליה דפים דינה כמחברת פסולה.
- יש להקפיד למלא את כל הפרטים המזהים על גבי כל מחברת נוספת שאין עליה מדבקת ברקוד.
- יש למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
- **האוניברסיטה העברית מקפידה על קיומן התקין של הבחינות לפי הנהלים וכללי היושר הקבועים בתקנוניה, ומאחלת לך הצלחה בבחינות.**

34

✓, 70, ✓

<u>לשימוש המרצה</u>

ציון הבחינה (0-100) ______ שם הבודק ______

המחברת נבדקה בתאריך ______ חתימת הבודק ______

✓	1
✓	2
✓	3
✓	4
34	5
✓	6
✓	7
✓	8
✓, 70, ✓	9
✓, ✓, ✓	10

הערות הבודק

טיוטה למבחן

1. נסמן ב- p את ההסתברות לוירוס שמאל

ואז ~~הסתברות לתאונה~~ בגיא Y מ״מ מציין

הגורם ל שמאל כיוס מסוים וה A מציין

את המאורע Y קרות תאונה עבורו

$$P(A) = E(P(A|Y)) = p\cdot P(A|Y=0) + (1-p)\cdot P(A|Y=1)$$

מנוסחת ההתניה

$$= 0.01\cdot p + 0.04(1-p)$$

לפי הנתון $P(A)=0.03$ לכן

$$0.03 = 0.04 - 0.03p$$

$$\boxed{p=\frac{1}{3}}$$

2. $A,B\in Mat_{n\times n}$ $A\cdot B=0$ אזי קיים

$v\neq 0$ כך ש $BA\cdot v=0$

כזכור (הוכח) שאלה. $rank(AB)=0<n$

לכן $rank(A)<n$ או $rank(B)<n$

מכיוון ש A,B הן לא הפיכות של ההרגלה (= מכפלה)

שלוש ולכן $A\cdot B\neq 0$

אם $rank(A)<n$ אז $dim(ker\ A)>0$ ולכן

קיים $v\neq 0$ כך ש $A\cdot v=0$ ולכן גם $B\cdot Av=0$ ~~$A\cdot Bv=0$~~

אחרת $rank(A)=n$ לכן $rank(B)<n$ לכן קיים

$0\neq u\in\mathbb{R}^n$ כך ש $B\cdot u=0$ $rank(A)=n$ לכן A

הפיכה. נסמן $v=A^{-1}u$ אזי $BAv=BAA^{-1}u=Bu=0$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$$P = \min \langle (3,4,-1), (x_1,x_2,x_3) \rangle$$

s.t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\max \ (y, b)$$

$$A^t y = C$$

$$y \geq 0$$

~~לכן כל וקטור עצמי $V\neq 0$~~

$V\neq 0$ כי אם $V=0$ אז $u=AV=0$

בסתירה לנתון $u\neq 0$.

לכן לכל וקטור עצמי $V\neq 0$ נקבל $BAV=0$.

3. ~~$\varphi =$ min~~

$$P\begin{cases} \min\ 3x_1+4x_2-x_3 \\ \text{s.t.}\quad x_1+x_2-x_3\le -2 \\ \qquad -2x_1+x_2\le 1 \\ \qquad x_1\le 3 \end{cases}$$

צריך בעיה קנונית סטנדרטית את P.

פיתרון: נעביר לצורת מטריצות וקטוריות של סימנים

זה בסדר, זה היה max במקום מכפלה

$$P\begin{cases} \max\ -\langle(3,4,-1),(x_1,x_2,x_3)\rangle \\ \text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\max -\langle(3,4,-1),(x_1,x_2,x_3)\rangle$

$\max \langle(-3,-4,1),(x_1,x_2,x_3)\rangle$ ש(

סה"כ

$P\begin{cases} \max\ \langle c,x\rangle \\ \text{s.t.}\quad Ax\le b \end{cases}$ זו הקנונית

ג) שינוי צורה

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$$D \quad \min \langle y, b\rangle \quad s.t. \quad A^t y \geq c, \quad y \geq 0$$

לכן הדואלי הוא

$$P\begin{cases} \min \langle (-2,1,3), y\rangle \\ s.t. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. $\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & o.w. \end{cases}$ נחשב $\hat{\delta}_y(S)$

כי ראינו פונקציות W_S הן בסיס של [illegible]

כפי שראינו את [illegible]

$$\hat{\delta}_y(S) = \langle \delta_y, W_S\rangle = \mathbb{E}[\delta_y W_S] = \frac{1}{2^n}\delta_y W_S(y)$$

כי אם $x \neq y$ אז $\delta_y(x)=0$ ולכן גם $\delta_y \cdot W_S(x)=0$

$$= \boxed{\frac{1}{2^n}\cdot\prod_{i\in S} y_i = \frac{1}{2^n} W_S(y)} \quad (\text{כי } \delta_y(y)=1)$$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

5. קבוע ההרחבה, עבור קבוצה $S \subseteq V$

$$h_G(S) = \frac{|\partial S|}{\frac{|S| \cdot |V \setminus S|}{|V|} \cdot d}$$

קבוע Cheeger עבור $S \subseteq V$

$$\theta_G(S) = \frac{|\partial S|}{d \cdot \min\{|S|, |V \setminus S|\}}$$

קבוע ההרחבה עבור G

$$h_G = \min_{S \subseteq V} h_G(S)$$

$\theta_G($ קבוע Cheeger עבור $S \subseteq V$

2. קבוע ההרחבה עבור $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$$\theta_G(S) = \frac{|\partial S|}{d \cdot \frac{|S| \cdot |V \setminus S|}{|V|}}$$

קבוע Cheeger עבור $\emptyset \neq S \subsetneq V$

$$h_G(S) = \frac{|\partial S|}{d \cdot \min\{|S|, |V \setminus S|\}}$$

עבור גרף G הקבועים הם המינימום

$$\theta_G = \min_{\emptyset \neq S \subsetneq V} \theta_G(S) \qquad h_G = \min_{\emptyset \neq S \subsetneq V} h_G(S)$$

משפט:

$$\frac{h_G^2}{2} \le 1 - \lambda_2 \qquad \theta_G \ge 1 - \lambda_2$$

$$h_G \le \theta_G \le 2 h_G$$

הערות הבודק

איפה אתה הוכחת משפט cheeger?

טיוטה למבחן

כי G קשיר עם n קודקודים אז $1-\lambda_2 \geq \Omega(\frac{1}{n^4})$

כלומר נראה לינון שכע שרבוך

$h_G(s) \geq \Omega(\frac{1}{n^2})$ ואז $1-\lambda_2 \geq \frac{h_G(s)^2}{2} \geq \Omega(\frac{1}{n^4})$

?

24

הערות הבודק

טיוטה למבחן

8. תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה סגורה ו-$v \notin C$ ב-$\mathbb{R}^n$

צ"ל שקיים $u \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$\langle u,v\rangle > 0$

לכל $w \in C$ $\langle u,w\rangle \le 0$ [illegible]

הוכחה,

פתרון: C קונוס (סגור) קמור, לכן C

קמורה וסגורה ו-$v \notin C$ ולכן לפי משפט ההפרדה

קיים מישור $\Lambda(u,b)$ כך ש $C \subseteq \Lambda(u,b)$

ו-$v \notin \Lambda(u,b)$ יתר על כן אפילו לא נוגע ב-C

מה זה אומר?

נשים לב, $b \ge 0$, (~~[illegible]~~) C קונוס

ובפרט $0 \in C$ לכן $b \ge \langle u,0\rangle = 0$. לכן $b \ge 0$.

נראה שלכל $w \in C$, $\langle u,w\rangle \le 0$, נניח בשלילה

שיש $w_1 \in C$ כך ש $a = \langle u,w_1\rangle > 0$ אבל אם

$a = b$ זה לא יתכן כי $C \subseteq \Lambda(u,b)$ אחרת נניח

אבל $\frac{2b}{a} \in \mathbb{R}_+$ C קונוס לכן $\frac{2b}{a} w_1 \in C$

([illegible])

אבל $\langle u, \frac{2b}{a} w_1\rangle = \frac{2b}{a}\cdot a = 2b > b$ כי $b > 0$ סתירה לכן

ש $C \subseteq \Lambda(u,b)$ לכן לכל $w \in C$

$\langle u,w\rangle \le 0$, לכן $v \notin \Lambda(u,b)$ לכן $\langle u,v\rangle > b \ge 0$

ולכן u מקיים את הנדרש

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$$e^{E[x_i]} = e^{p_i}$$

$$E[e^{tX}] = E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^{n} 1 - p_i + p_i e^t$$

$$\le \prod_{i=1}^{n} e^{p_i e^t - p_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} e^t p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i}$$

$$= e^{(e^t - 1)\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

$$\le \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

.7 $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ מציינים בלתי תלויים

$X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad \mu = E[x]$ $\quad \delta > 0$

צ"ל $\Pr[x \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$

פיתרון: לכל $t > 0$ $\quad a \geq b$ אמ"מ $e^{ta} \geq e^{tb}$

לכן $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tx} \geq e^{t(1+\delta)\mu}]$

$\cancel{\left(e^{\mu} = e^{E[x]} = e^{\sum_{i=1}^{n} E[x_i]} = \prod_{i=1}^{n} e^{E[x_i]}\right)}$

~~לינאריות התוחלת~~

$E[e^{tx}] = E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tx_i}\right]$

$= \prod_{i=1}^{n} E[e^{tx_i}] = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i + p_i e^{t})$

X_i ב"ת לכן גם פונקציות שלהם ב"ת

$\leq \prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^{t}-1)} = e^{(e^{t}-1)\sum_{i=1}^{n} p_i} = e^{(e^{t}-1)\mu}$

e^{x} חיובי לכל x לכן e^{tx} מ"מ חיובי

מ"מ חיובי לכן ניתן להפעיל עליו את הפכ

מרקוב. (לפי e^{t}

הערות הבודק

טיוטה למבחן

(x_i, y_i)

$$Pr\left[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}\right] \underset{\text{מרקוב}}{\leq} \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

$$= \frac{e^{(e^{t}-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

נבחר את t ונגדיר עבור $t = \ln(\delta+1)$

נציב

$$\frac{e^{(e^{\ln(\delta+1)}-1)\mu}}{e^{\ln(\delta+1)(1+\delta)\mu}} = \left(\frac{e^{(\delta+1-1)}}{(\delta+1)^{\delta+1}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{\delta}}{(\delta+1)^{\delta+1}}\right)^{\mu}$$

ולכן קיבלנו

$$Pr\left[X \geq (1+\delta)\mu\right] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

8. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגור נתונה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגור וחסום

צריך להוכיח $dist(A,K) = \inf_{x\in A, y\in K} \|x-y\|$ מתקבל.

להראות כי יש $x\in A,\ y\in K$ כך ש $\|x-y\| = dist(A,K)$

פיתרון: נסמן $d = \inf_{x\in A, y\in K} \|x-y\|$ אני צריך

סדרה $\{\|x-y\| \mid x\in A, y\in K\} \ni (d_i)$ כך ש $\lim_{n\to\infty} d_i = d$

כאשר כל d_i מתקבל על ידי x_i, y_i שאיבריהם

כי A, K נתונות. A סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^n$ ולכן

קומפקטית לפי היינה בורל לכל סדרה ב A יש תת סדרה מתכנסת

(ניתן להסיק) לפי BW קיימת תת סדרה מתכנסת

הערות הבודק

טיוטה למבחן

משפט B ו-ויירשטרס נקבל את סדרה שמתכנסת גם

(ב-ויירשטרס) לכן יש תת סדרה ~~מ...~~ מתכנסת

$X = \lim_{k\to\infty} X_{n_k}$, (נסמן את הגבול ב-$X$).

~~לפי~~ את סדרה של סדרה מתכנסת-מתכנסת לאותו הגבול

לכן $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d_{n_k} = d$

$d(x, y_{n_k}) \le d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k})$
אי שוויון משולש

לכן מאריתמטיקה $\lim_{k\to\infty} d(x, y_{n_k}) \le 0 + d$

מצד שני $x\in, y_{n_k} \in K$ לכן $d(x, y_{n_k}) \ge d$

לכן $\lim_{k\to\infty} d(x, y_{n_k}) = d$

למה: אם $y_1, y_2 \in K$ עבור K ~~...~~ כך ש

~~$d(x, K) = e$~~ ~~K~~

$d(x, K) = e$ אז $\|x - y_1\|^2 \le e^2 + \varepsilon$, $\|x - y_2\|^2 \le e^2 + \varepsilon$

$\|y_1 - y_2\|^2 \le 4\varepsilon$.

לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים L כך שלכל $k > L$

מהתכנסות $\|x - y_{n_k}\|^2 \le d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$ ~~...~~ $\|x - y_{n_k}\|^2$ ל d^2

לכן לכל $n, m > L$, $\|y_m - y_n\|^2 \le \varepsilon$

לכן ~~...~~ $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}^n$ מרחב שלם

לכן יש (y_{n_k}) מתכנסת לגבול ששייך ב-Y

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$w_1, w_2 \in V \neq U$

$\|w_1\| = \|w_2\|$

$\|w_1\| \leq \|w_2\| + \|v\|$

$\|w_1\| - \|w_2\| \leq \|v\|$

$\left\| \frac{w_1 + w_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|w_1\| + \frac{1}{2} \|w_2\|$

$\| \cancel{t w_1 + t w_2}$

$\| t w_1 + (1-t) w_2 \|^2$

$= t^2 \|w_1\|^2 + (1-t)^2 \|w_2\|^2 + 2t(1-t)\langle w_1, w_2 \rangle$

$= t^2 \cdot \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + \|w_2\|^2 - 2t \|w_1\| \|w_2\| - 2t(1-t)\langle w_1, w_2 \rangle$

$w_1 -$

ואז $d(x,y) = d\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}, \lim_{k\to\infty} y_{n_k}\right)$

מרציפות המטריקה

$= \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq \delta$

ולכן המרחק $d(A,K)$ מתקבל על ידי x,y

ששייכים ל A,K בהתאמה.

הערה: כל נורמה שנתתי $d(a,b)$ על $a,b\in\mathbb{R}^n$

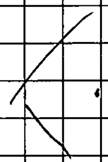
(השוויונית) $\|a-b\|$

טיוטה למבחן

$$2\left(\|w_1\|^2+\|w_2\|^2\right)=\|w_1-w_2\|^2+\|w_1+w_2\|^2$$

$$=2\left\|\frac{w_1-w_2}{2}\right\|+2\left\|\frac{w_1+w_2}{2}\right\|$$

$$\left\|\frac{w_1+w_2}{2}\right\|^2=\frac{\|w_1\|^2+\|w_2\|^2}{2}-\frac{1}{2}\|w_1-w_2\|^2$$



$$\min_{u\in U}\|v+u\|$$

10. צריך להוכיח $U \subseteq V$ ~~...~~ אז R ... V

מוכל

ס. $V \in W$ צריך להוכיח שקיים $U \subseteq W$ ואז

שמתקיים אם המרחב U $V+U$

פיתרון: ~~...~~ ~~...~~ צריך להוכיח e

$U = W + U$ ... $U \in U$ מתקיים.

~~למה ... W_1, W_2~~

נשים לב שצריך ... שהוכחנו ~~...~~ בשאלה הקודמת

שקח $A = \{0\}$, $K = V + U$

של A סגורה ... (מסקנה ... A ...) בהכרח

(0) ולכן מתקיים בתוך A (0)

יהי K ... ~~...~~ $a, b \in K$, $0 \le t \le 1$

$b = v + a'$ $a = v + a'$ ~~$t \in \mathbb{R}$~~

$t a + (1-t) b = t v + t a' + (1-t) v + (1-t) b'$

$= v + t a' + (1-t) b'$

$a', b' \in U$ לכן גם $t a' + (1-t) b'$ (כי $t \in \mathbb{R}$)

לכן $v + (t a' + (1-t) b') \in V + U = K$.

הערות הבודק

טיוטה למבחן

האוניברסיטה העברית בירושלים
THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

מספר מחברת 8/02

לפני הבחינה אנא מלא/מלאי את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

מספר תעודת הזהות 2 0 0 6 7 7 2 4 3

שם הקורס ______ מס' הקורס 67865

שם המרצה ______ תאריך הבחינה ______

<u>הנחיות לנבחן:</u>

- יש להכין תעודה מזהה.
- יש להישמע להוראות הבוחנים והמשגיחים.
- אסור לנבחנים לשוחח ולהתקשר בכל צורה ביניהם או עם כל גורם אחר, או להעביר חומר כלשהו זה לזה.
- אין לעזוב את אולם הבחינה במהלך הבחינה, אלא ברשות בוחן או משגיח.
- חל איסור להשתמש בבחינה בחומר כלשהו או להחזיקו למעט חומר שהותר לשימוש במפורש על ידי הבוחנים ובתנאי שאין בו כל רישומים, פתקים וכיו"ב. <u>כל החפצים האחרים ירוכזו באולם הבחינה בהתאם להוראות המשגיחים.</u>
- יש לכתוב את התשובות בעט <u>כחול או שחור</u> בכתב יד ברור ונקי. <u>אין</u> לכתוב בעיפרון.
- אין להשתמש בטיפקס או במרקרים צבעוניים.
- אין לכתוב בשוליים. יש לכתוב טיוטה רק על העמוד הפנימי של הדף במקום המסומן לכך.
- אין לתלוש או להוסיף דפים למחברת. מחברת שייתלשו או יצורפו אליה דפים דינה כמחברת פסולה.
- יש להקפיד למלא את כל הפרטים המזהים על גבי כל מחברת נוספת שאין עליה מדבקת ברקוד.
- יש למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
- **האוניברסיטה העברית מקפידה על קיומן התקין של הבחינות לפי הנהלים וכללי היושר הקבועים בתקנוניה, ומאחלת לך הצלחה בבחינות.**

<u>לשימוש המרצה</u>

ציון הבחינה (0-100) ______ שם הבודק ______

המחברת נבדקה בתאריך ______ חתימת הבודק ______

נראה ש K קמור,

נניח $a_1 \dots a_n \in K = v + U$

לכן קיימים $u_1 \dots u_n$ כך ש

$a_i = v + u_i$ לכל $1 \le i \le n$

ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_n \ge 0$ כך ש $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

אז $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v + u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$

$= v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in v + U$

לכן לפי הגדרה קמור ש מתקיים [illegible] K [illegible]

לכן K קמור ולכן לפי המרחק $d(O,K) = d(A,K)$

מאחר ש [illegible] O, W איברים ב A, K בהתאמה

לכן לכל $x \in A$ $a \in K$ $d(x,a) \ge$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

9. V מרחב מ"פ סוף ממדי מעל $\mathbb{R}$

$U \subseteq V$.

ה. $v \in U$ צריך להראות שקיים $w \in v+U$

עבור הנורמה מינימלית מבין וקטורי $v+U$ ויש w

כנ"ל.

נזכור ש- $v+U$ קמורה, כי אם $a_1 \dots a_n \in v+U$

אז קיימים $u_1 \dots u_n \in U$ כך ש $a_i = v+u_i$

לכל $1 \le i \le n$ אם $0 \le \alpha_1 \dots \alpha_n \le 1$ כך ש

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ אז צריך להוכיח

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v+u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

$$= v \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in v+U$$

כי זה סכום של איברים ב- U נשאר ב- U.

לכן $v+U$ סגורה וקמורה.

הוכחנו בהרצאה שאם K קמורה $x \in V$ ~~$x \notin K$~~ אז קיים

$y \in K$ יחיד כך ש $d(x,y) = d(x,K)$

לכן קיים $w \in v+U$ יחיד כך ש $d(0,w) = d(0,v+U)$

אבל $\|w\| = d(0,w)$ ו $d(0,v+U) = \inf_{u \in V} \|v+u\|$

לכן w הוא מינימלי.

הערה: אני לא בטוח שהוכחנו בהרצאה למקרה $x \in K$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$T(v_1+U+v_2+U) = T(v_1+v_2+U)$

$T(v_1+U) = w_1 = v_1+u_1$

$T(v_2+U) = w_2 = v_2+u_2$

$u \in v_1+v_2 = *$

$w = v_1+v_2+u_1+u_2$

(מוגדרת כנורמה שלנו אם $V=0$). אבל אם

✓ $0=\rho(x,x)$ לכן עבור $x\in K$ $\rho(x,x)=0$ ולכן

$x\neq y$ גם אם $y\in K$ $\rho(x,y)>0$ ולכן (ג) עונה

לכן עונה גם כנורמה הזו.

b. נגדיר $T(V+U)=W$ כנורמה הזו שומר T

שזוהי מרחק אפשרי מהנורמה את ההגדרה המקורית

בינתיים לפני [illegible] צריך להראות שהוא ρ

$V\to V/U$: T היא לל.

ניקח קודם כל [illegible] קיים בסיס של U ל-V

ונשלים להרחיב אותו לבסיס של V ✓

$u_1 \ldots u_k$ בסיס $\{u_1 \ldots u_k, v_{k+1} \ldots v_n\}$

בסיס של U.

~~$V=\sum_{i=1}^{n}$ כלומר $T(v)$~~

$v_1 \ldots v_k$ ובסיס $\{v_1 \ldots v_k, v_{k+1} \ldots v_n\}$

בסיס של U ו-V ההרחבה לבסיס של V.

לכן לכל $V=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ אזי

$$T(V+U)=\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$$

כיוון שלכל $V+U \ni w=\sum_{i=1}^{n} w_i v_i$

מתקיים שלכל $1\le i\le k$ $w_i=a_i$ כי הנורמה כמו

לא יכולה להשפיע על הקואורדינטות האלה.

הערות הבודק

70

לא ברור.

הערה: שאלה הועתק לזה.

טיוטה למבחן

(טוען שאם $u \in U$ אז $u=\sum_{i=1}^{d} a_i v_i$)

לכן

~~$\min_{u\in U} \|v-u\|^2 = \min_{a_1 \dots a_d\in\mathbb{R}}$~~

$\min_{w\in v+U}\|w\|^2 = \min_{w\in v+U}\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \min_{w\in v+U}\sum_{i=1}^{d} w_i^2$

לכן, המינימום מתקבל כאשר $w_i^2=0$ עבור $i\le d$

כלומר המינימום הוא $\sum_{i=d+1}^{n} a_i v_i$

לכן אם $v_1=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $v_2=\sum_{i=1}^{n} b_i v_i$

אז $T(v_1+U+v_2+U)=T(v_1+v_2+U)$

$=\sum_{i=d+1}^{n}(a_i+b_i)v_i=\sum_{i=d+1}^{n} a_i v_i+\sum_{i=d+1}^{n} b_i v_i=T(v_1+U)+T(v_2+U)$

ואם $\lambda\in\mathbb{R}$

$T(\lambda(v_1+U))=T(\lambda v_1+U)=\sum_{i=d+1}^{n}\lambda a_i v_i=\lambda\sum_{i=d+1}^{n} a_i v_i$

$=\lambda(T(v_1+U))$

לכן T ליניארית.

ג. צריך למצוא את $\operatorname{Im} T$ וגם $\ker T$

פתרון: אם $v=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ ~~ker~~ וכן

$v+U\in\ker T$ אמ"ם $T(v+U)=0$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

כל אמין, לא אם..

אזי $0 = T(v+U) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = 0$

$\{v_i \mid k+1 \le i \le n\}$ בת"ל ולכן $a_i = 0$ לכל $k+1 \le i \le n$

כלומר $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in U$ ולכן 0

$v+U = 0_{V/U}$. כלומר $\ker T = 0$

(T חח"ע)

יהי $a \in \operatorname{Im}(T)$ כלומר קיים $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$

כך ש $a = T(v+U) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$

כלומר a צ"ל של איברי הבסיס המשלים של

U ב V ולכן $a \notin U$.

נראה גם הכיוון ההפוך, יהי $a \in U^{\perp}$ אזי (כנ"ל)

הוא נפרש ע"י $v_{k+1} \dots v_n$ $a = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$

ולכן $T(a+U) = a$

ולכן $a \in \operatorname{Im} T$.

מסקנה, $\operatorname{Im} T = U^{\perp}$. ✓

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$\forall i \quad |x_i - \pi_i| \leq \frac{1}{n}$

$d(x_i, \pi) \leq 1$

סעיף ב. $G = ([n], E)$ גרף d-רגולרי.

עם מרווח ספקטרלי מנורמל σ_G. יהי

כלו' $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ $\sigma = 1 - \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$

$X_0, X_1, \dots$ ~~הילוך~~ הילוך מקרי בגרף

עם התפלגות התחלתית $X_0 = P_0$

צ"ל שקיים $t = O\left(\frac{\ln n}{\sigma}\right)$ כך שלכל התפלגות

התחלתית P_0 ולכל $i \in [n]$ $\Pr[X_t = i] \geq \frac{1}{2n}$.

פתרון: משפט זמן ערבוב למרחק ε הוא

לכל היותר $t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)}{\sigma}$

~~ונבחר $\varepsilon = \frac{1}{n}$~~

$t = \frac{\frac{3}{2}\ln n}{\sigma} = O\left(\frac{\ln n}{\sigma}\right)$ נקבל

נזכור ש $d(X_t, \pi) = \|X_t - \pi\|_1$

$= \sum_{i=1}^{n}$

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{n}$

$t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{n}}\right)}{\sigma} = \frac{\frac{3}{2}\ln n}{\sigma} = O\left(\frac{\ln n}{\sigma}\right)$

לכן עבור t כזה $d(X_t, \pi) \leq \frac{1}{n}$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2n}$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{2}{2n}}\right)}{\sigma} = \frac{\ln 2 + \frac{3}{2}\ln n}{\sigma} = O\left(\frac{\ln n}{\sigma}\right)$$

אזי אחרי t צעדים $d(X_t, \pi) \le \frac{1}{2n}$

$$d(X_t, \pi) = \max_{A \subseteq \Omega} \left| Pr[X_t \in A] - Pr[\pi \in A] \right|$$

בפרט עבור $A = \{i\}$ נקבל ש

$$\left| P(X_t = i) - Pr[\pi = i] \right| \le \frac{1}{2n}$$

אבל $Pr[\pi = i] = \frac{1}{n}$ ✓

לכן

$$\frac{3}{2n} \ge Pr(X_t = i) \ge \frac{1}{2n}$$

לכן ההסתברות המשלים $Pr(X_t \ne i) \le 1 - \frac{1}{2n}$

כ.. t_0 צעדים שלאחריו כיסוי הזרים צריך הוכחות

יהי t_0 P^0 לכל $i \in [n]$ $N \in \mathbb{N}$

$$Pr[\forall k \in \{1 .. N\} \ X_{(k \cdot t_0)} \ne i] \le \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^N$$

נימוק:

$$Pr[\forall k \in \{1 ... N\} \ X_{(k t_0)} \ne i]$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \left[Pr[X_{k t_0} \ne i] \,\middle|\, \forall j < k \ Pr[X_{j t_0} \ne i] \le 1 - \frac{1}{2n} \right]$$

כיון שהמצב ני אחרי t_0 צעדים לכל ההתפלגות

~~ההתחלתית של בעצמות שלו~~ ~~$1 - \frac{1}{2n} \ge Pr[P_0 \ne i]$~~

הערות הבודק

טיוטה למבחן

$Pr[\exists - - -]$

$\cancel{\&} = 1 - Pr \ \forall k \in [N] \ \forall i$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{N} \le e^{-\frac{N}{2n}} < e^{-\ln 2}$$

$$-\frac{N}{2n} < -\ln 2$$

$$N > \ln 2 \cdot 2n$$

$$e^{-\frac{N}{2n}} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{N}{2n} < \ln \frac{1}{2}$$

$$N \cancel{\&} > -\ln \frac{1}{2} \cdot 2n$$

לכן $P[X_t \neq i] \leq 1-\frac{1}{2n}$ לכל מצב $p^0 = X_{(k-1)t_0}$

$$\Pr \prod_{k=1}^{N} \left[\Pr[X_{kt_0} \neq i] \,\middle|\, \forall j<k \ \Pr[X_{jt_0} \neq i] \leq 1-\frac{1}{2n} \right]$$

$$\leq \prod_{k=1}^{N} \left(1-\frac{1}{2n}\right) = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{N}$$

ג. ניקח להיות כך ש $t = O\left(\frac{n \ln^2 n}{\delta}\right)$

כך ש $\Pr[\exists i \in [n], \forall t' \leq t, X_{t'} \neq i] < \frac{1}{2}$

פתרון: נבחר $t = t_0 \cdot N$

$$\Pr[\exists i \in [n], \forall t' \leq t \ X_{t'} \neq i] \leq (*)$$

$$\leq \Pr[\exists i \in [n] \ \forall k \in [N] \ X_{kt_0} \neq i] \leq \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{N}$$

$$< e^{-\frac{N}{2n}}$$

לכן אם נבחר $N > 2n \ln\frac{1}{2}$ נקבל

$$\cancel{e^{-\frac{2n}{2n}\ln\frac{1}{2}}} < e^{-\frac{2n}{2n}\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

לכן $N = O(n)$ ולכן עבור

$$t = t_0 N = O\left(\frac{n \ln n}{\delta}\right) \cdot O(n) = O\left(\frac{n^2 \ln n}{\delta}\right)$$

נקבל ש $\Pr[\exists i \in [n] \ \forall t' \leq t, X_{t'} \neq i] < \frac{1}{2}$

הערות הבודק

טיוטה למבחן

(*) אם זה נכון שהספרות לא חוזרות

כי זה פעם אחת, שהספרות לא חוזרות

כי בניים 9-K.

הערות הבודק

טיוטה למבחן

הערות הבודק

טיוטה למבחן

הערות הבודק

טיוטה למבחן

הערות הבודק

טיוטה למבחן