Реализация численного интегрирования с помощью квадратурной формулы Гаусса-Кристофелля, с использованием полиномов Чебышёва 2 рода. (1.3.10aU)

Группа: ПМ-2001

Студент: Иксанов Марат Васильевич

1. Суть метода и алгоритм решения:

Дана непрерывная на некотором промежутке $[a;b]$ функция $f(x)$.

Пусть существует какая-то весовая функция $p(x) > 0$, которая непрерывна на интервале $(a;b)$.

Рассматривается задача поиска определенного интеграла вида:

$$I = \int_a^b f(x)p(x)dx$$

Данный метод необходим, когда выразить интеграл через элементарные функции в общем случае либо не удается, либо вызывает слишком много проблем. Поэтому обычно $f(x)$ заменяют на некоторую аппроксимирующую функцию $\phi(x) = f(x)$. Она подбирается таким образом, чтобы интеграл от нее легко считался в элементарных функциях. Стандартный пример $\phi(x) -$ некоторый обобщенный интерполяционный многочлен. При этом $f(x)$ заменяется линейным выражением со значениями в узлах в качестве некоторых коэффициентов:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\phi_k(x) + r(x),$$

где $r(x)$ – некоторый остаточный член аппроксимации, $n -$ количество узлов аппроксимации.

Подставив только что выраженную функцию $f(x)$ в интеграл получаем следующее:

$$I = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k + R,$$

где $A_k = \int_a^b \phi(x)p(x)dx$, $R = \int_a^b r(x)p(x)dx$.

В нашем случае, $R=0$

Целью данной работы является реализация одного из частного вида данного метода: ортогональных полиномов Чебышёва 2 рода, определенных на $[-1;1]$.

В этом случае $x_k = \cos\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$, $A_k = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$, где $\frac{1}{n}$ – шаг между k и $k+1$

$p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[a;b] = [-1;1]$

2. Программная реализация:

Входные данные: функция $f(x)$ и количество узлов n.

Выходные данные: найденное численное значение интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)p(x)dx$

Данный метод реализован с помощью Wolfram Mathematica:

```
gCr[f_, n_] := Module[{a = π/(n + 1) Sin[(π * #)/(n + 1)]^2 &, x = Cos[(π * #)/n] &, p = Sqrt[1 - #^2] &},
  f1 = Total@Table[a[k] * f /. d → x[k], {k, 1, n}] // N
 ]
```

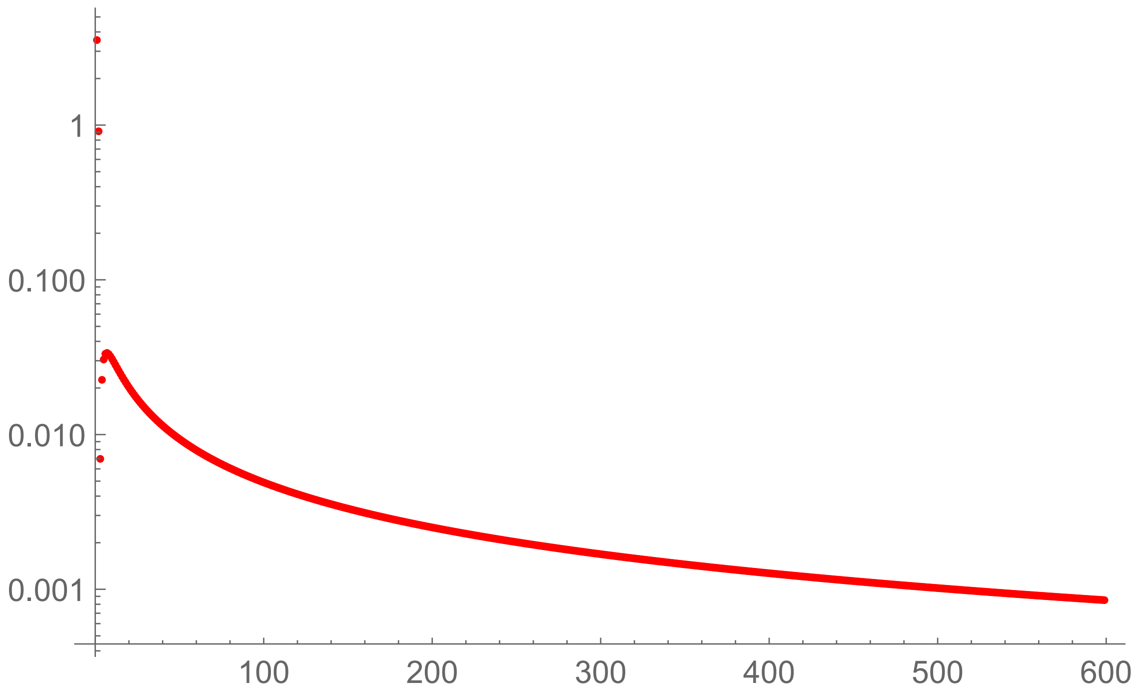
3. Сравнение и анализ результатов.

Рассмотрим несколько различных функций. Сравним точность вычислений со встроенными функциями $Wolfram\ Mathematica$ и рассмотрим, как влияет значение n на полученный результат.

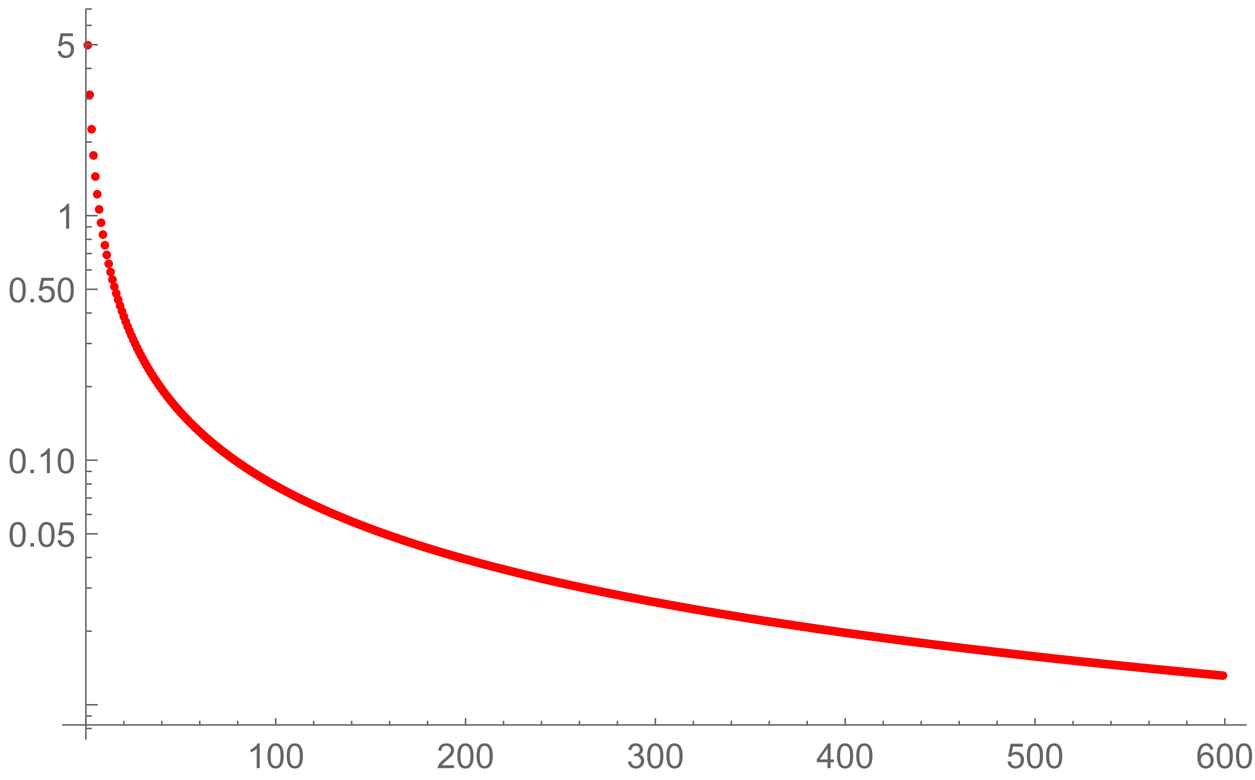
a) $f(x) = 3\cos(5x) + 24\sin(30x) + x + 10$

Далее будут приводится графики, отображающее значение полученной невязки по оси ординат с значением n по оси абсцисс.

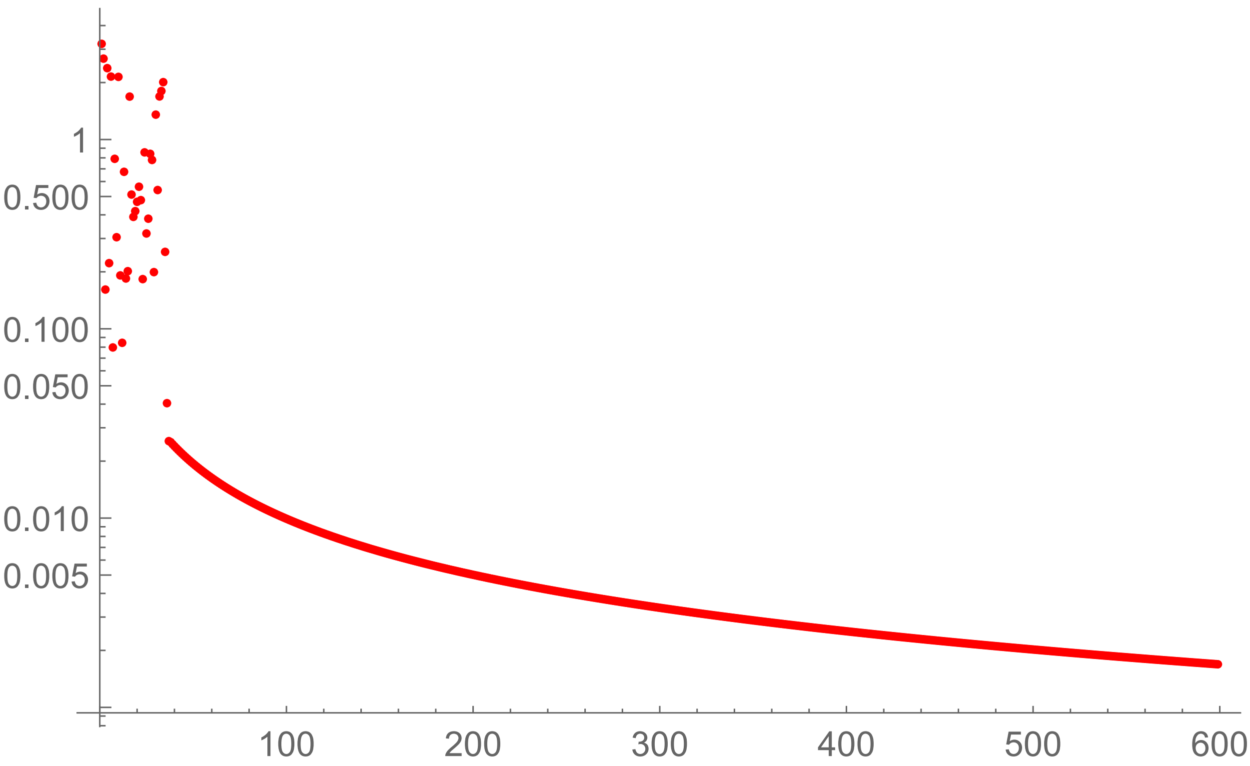
```
f2 = NIntegrate[f * p[d], {d, -1, 1}]
ints = Table[gCr[f, i], {i, 10, 3000, 5}];
ListLogPlot[Abs[ints - f2], PlotStyle → Red]
```



Б) $f(x) = x^5 - 66x^2 + x^{19}$



в) $f(x) = 5\cos(350x) + 7\sin(4x) + \sin(24x) + (30 - \frac{x^2}{200})$



По данным графикам наглядно видно, что при $n \to \infty$ норма невязки стремится к 0, что подтверждает правильность работы данного метода. Можно также наблюдать, как с ростом n норма невязки становится более монотонной, нежели при довольно малом n. Это также подтверждает корректность работы алгоритма.