Реализация метода решения частичной проблемы собственных значений. (3.4.2 (a) – Метод обратных итераций)

1. Суть метода и алгоритм решения:

Дано квадратная матрица A размера $n_x n$.

Метод обратных итераций — итеративный алгоритм вычисления собственных векторов и значений. Позволяет искать собственный вектора и наименьшее по модулю собственное значение матрицы A.

Данный метод является аналогом степенного метода.

Первым шагом задается начальное приближение $y_0 \neq 0$, следующее приближение вычисляется следующим образом:

$$\frac{A^{-1}y_k}{||A^{-1}y_k||} = y_{k+1}$$

Далее с помощью найденного вектора y_* находится искомое наименьшее по модулю собственное значение матрицы A:

Из уравнения $A^{-1}u_i = \lambda_i^{-1}u_i$ следует, что $\lambda_i = \frac{u_i}{A^{-1}u_i}$

В данном случае будем учитывать 2 критерия остановки итерационного процесса: Норма разности соседних приближений меньше заданного числа или максимальное количество итераций.

2. Программная реализация:

Входные данные: квадратная матрица A размера $n_x n$

Выходные данные: найденный искомые собственный вектор и его значение

Данный метод реализован с помощью Wolfram Mathematica:

```
reverseIteration[a_, e_, kmax_] := Module[{k = 1, y1 = ConstantArray[1, {Length@a, 1}], aRev = Inverse@a, y0 = ConstantArray[6, {Length@a, 1}], l = 1},
  While[Norm[y0 - y1] > e ∧ k < kmax,
   y0 = y1;
   y1 = (aRev.y0) / Norm[aRev.y0];

   l = (Norm[aRev.y0] / Norm[y0])^-1;
   k++;
  ];
  {l, y1, k}
 ]
```

3. Результат вычисления на предоставленных входных данных и сравнение его с результатом встроенных функций $Wolfram\ Mathematica$:

Будем сравнивать на точность полученный собственный вектор с собственным вектором при минимальном по модулю собственном значении, найденным встроенными функциями

Во всех примерах будем считать, что $Kmax = 400, \xi = 10^{-9}$

1. $A = \begin{pmatrix} 4.33 & -1.12 & -1.08 & 1.14 \\ -1.12 & 4.33 & 0.24 & -1.22 \\ -1.08 & 0.24 & 7.21 & -3.22 \\ 1.14 & -1.22 & -3.22 & 5.43 \end{pmatrix}$

```
reverseIteration[aMatrix, 10^-9, 400]
```

```
{2.53176, {{0.174478}, {0.509895}, {0.487129}, {0.687219}}, 69}
```

```
Norm[a[[2, All]] - Eigensystem[aMatrix][[2, -1]]]
```

```
2.37915×10^-9
```

Несложно заметить, что норма разности полученных результатов при помощи обоих функций очень мала, к тому же в собственной реализации из максимальных 400 понадобилось всего 69 итераций.

2. $A = \begin{pmatrix} 1. & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1. & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1. & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1. \end{pmatrix}$

```
a = reverseIteration[aMatrix, 10^-9, 400]
```

```
{0.242261, {{-0.718846}, {-0.095699}, {0.387435}, {0.569206}}, 23}
```

```
Norm[a[[2, All]] - Eigensystem[aMatrix][[2, -1]]]
```

```
5.61078×10^-10
```

Несложно заметить, что норма разности снова очень мала, к тому же в этот раз потребовалось из максимальных 400 итераций 23. Это еще меньше, чем в прошлом примере.