Интегрирование функции одной переменной с помощью квадратурных формул Гаусса-Кристоффеля

Описание метода

Задача состоит в приближенном вычислении интеграла вида:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\rho(x)dx$$

где ρ – некоторая весовая функция. В данной реализации воспользуюсь весовой функцией Якоби

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

Положу альфа и бета равными 1/2. Тогда данной функции будут соответствовать многочлены Чебышева первого рода. Вот первые 8

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1\\
&T_1(x) = x\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
&T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
&T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1
\end{aligned}$$

В общем виде квадратурная формула Гаусса-Кристоффеля имеет вид

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Узлы интегрирования x_k и коэффициенты A_k можно найти непосредственно из данных выше. Они получаются равными для любого n:

$$x_k = cos\left(\frac{2k\ -\ 1}{2n}\pi\right)$$

$$A_k = \frac{\pi}{n}$$

Тогда интеграл можно приближенно вычислить, используя формулы выше.

Программная реализация

```
from math import *

ro = (lambda x: 1 / sqrt(1 - x ** 2))
xk = (lambda k, n: cos((2 * k - 1) * pi / (2 * n)))
ak = (lambda k, n: pi / n)


def integrate(f, n):
    res = 0
    for k in range(1, n + 1):
        res += ak(k, n) * f(xk(k, n))
    return res


f1 = lambda x: sin(x) ** 2
f2 = lambda x: exp(-x ** 2)
f3 = lambda x: log(x ** 2 + 10) + cos(4.2 * x)

m = 4
print("f1: ", integrate(f1, m))
print("f2: ", integrate(f2, m))
print("f3: ", integrate(f3, m))
```

Проверка правильности решения

Буду проверять истинные значения вычисляемого интеграла посредством математического пакета Wolfram Mathematica

Вычислю интеграл от следующих функций

$$f_1(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_2(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_3(x) = \frac{\left(\ln\left(x^2+10\right)+\cos(4.2x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Сначала поставлю количество узлов равным 4 и посмотрю результат

```
f1:  1.2191791924349822
f2:  2.026469405000093
f3:  6.202223454144738
```

Теперь истинный результат:

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Sqrt}\left[\frac{1}{1-x^2}\right](\text{Sin}[x])^2, \{x, -1, 1\}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Sqrt}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]E^{-x^2}, \{x, -1, 1\}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Sqrt}\left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left(\text{Log}\left[x^2+10\right]+\text{Cos}[4.2\,x]\right), \{x, -1, 1\}\right]$$

```
1.2191095133166039`

2.0264380669493627`

6.202291893540272`
```

Как видно точность уже высокая – 4 знака после запятой.

Теперь увеличу n до 10.

```
f1:  1.2191095133165961
f2:  2.0264380669493782
f3:  6.202291893540315
```

Здесь точность увеличилась до 12-х знаков.

Исходя из результатов выше, можно сказать, что алгоритм реализован правильно, выдается точный результат в соответствии с теоретическими данными.