Реализация метода наилучшего среднеквадратичного приближения функции для построения наилучшего приближения. Использование ортогональных полиномов Лежандра. (1.3.2(1.3.3La))

Группа: ПМ-2001

Студент: Иксанов Марат Васильевич

1. Суть метода и алгоритм решения:

Дано N точек $\left(x_i, f(x_i)\right)$с некоторым отклонением, где $f -$ некоторая функция.

Задача построить ее наилучшее приближение. Также требуется, чтобы использовалась ортонормированная система базисных функций, построенная на основе ортогональных многочленов Лежандра.

Рассматривается некоторое евклидово пространство с нормой

$$(\phi, \psi) = \int_{-1}^{1} \rho(x)\phi(x)\psi(x)dx$$

Наилучшим среднеквадратичным приближением является:

$\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$*, где* $n -$ количество базисных функций. Для решения поставленной задачи, достаточно взять $n = 5$

$$\phi_j \text{ образуются с помощью нормированных ортогональных многочленов}$$

$$\text{Лежандра, которые ортогональны на промежутке } [-1; 1]$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

где $L_0 = 1, L_1 = x$

Базисные функции строятся следующим образом:

$$\phi_k(x) = \mu_k L_k(x)$$

В нашем случае $\mu_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$

Сами коэффициенты a_k находятся по следующей формуле:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N} \rho_i \phi_k(x_i)\phi_i(x_i) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i f(x_i)\phi_i(x_i)$$

Однако, поскольку мы работаем с ортонормированной системой, следовательно, из этой формулы получается следующее:

$$a_i = \sum_{i=1}^{N} \rho_i f(x_i)\phi_i(x_i), i = 0, \dots, n$$

Следует отметить, что в нашем случае $\rho_i = 1$.

2. Программная реализация:

Входные данные: набор N точек $(x_i, f(x_i))$с некоторым отклонением. Количество и шаг определяется пользователем

Выходные данные: Построенное наилучшее приближение

Данный метод реализован с помощью Wolfram Mathematica:

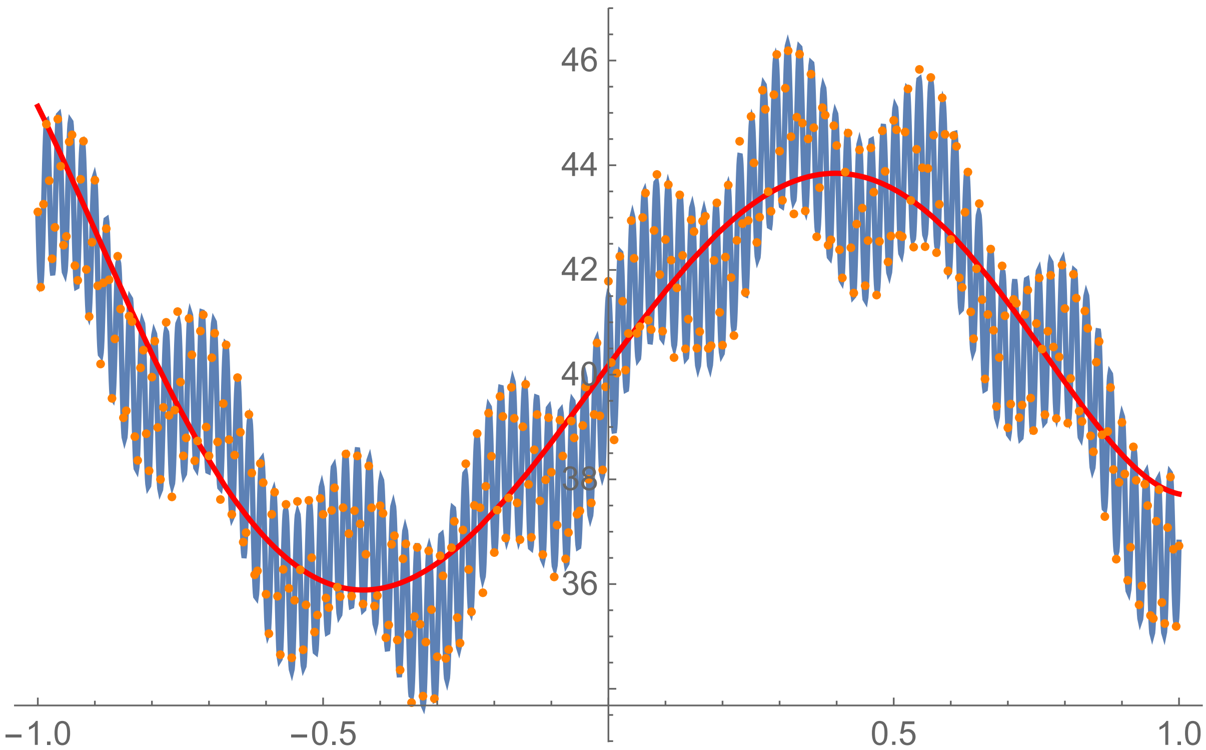
```
n = 5;
dots = Table[{x, f[x] + RandomReal[{-0.3, 0.3}]}, {x, -1, 1, 0.005}];
pol = Plus @@ Table[
   ((2 i + 1)/2)^1 * LegendreP[i, x] * (Plus @@ Table[k[[2]] * LegendreP[i, k[[1]]], {k, dots}])

   , {i, 0, n}];
```

3. Построение исходной функции и наилучшего приближения.

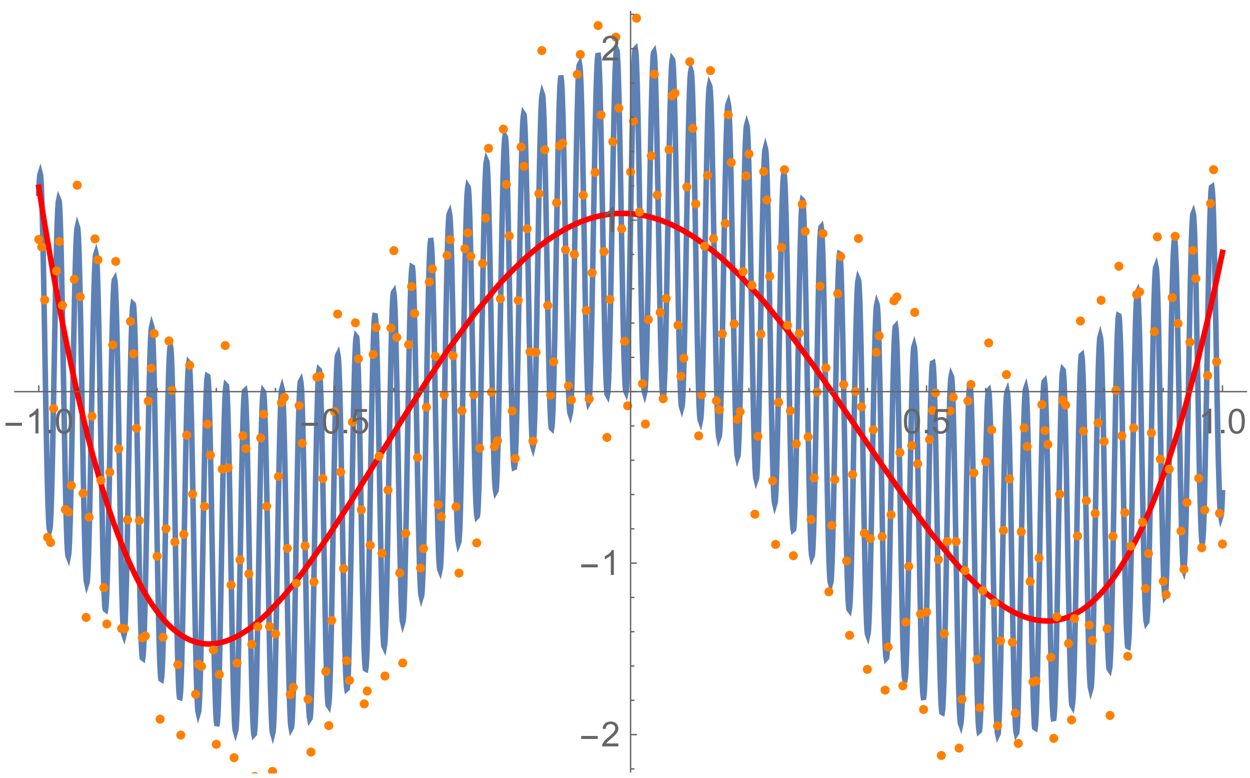
Выберем следующую функцию: $f = 1.5\mathrm{Cos}[300x] + 4\mathrm{Sin}[4x] + \mathrm{Sin}[25x] + 40 - x^2/100$, которая определена на $[-1; 1]$

Для удобства будем строить все графики на одной координатной плоскости. Красные точки – точки исходного набора, по которым проводится аппроксимация. Синяя кривая – обычный график $f(x)$, оранжевые точки – набор заданных точек, красная кривая – построенное приближение.

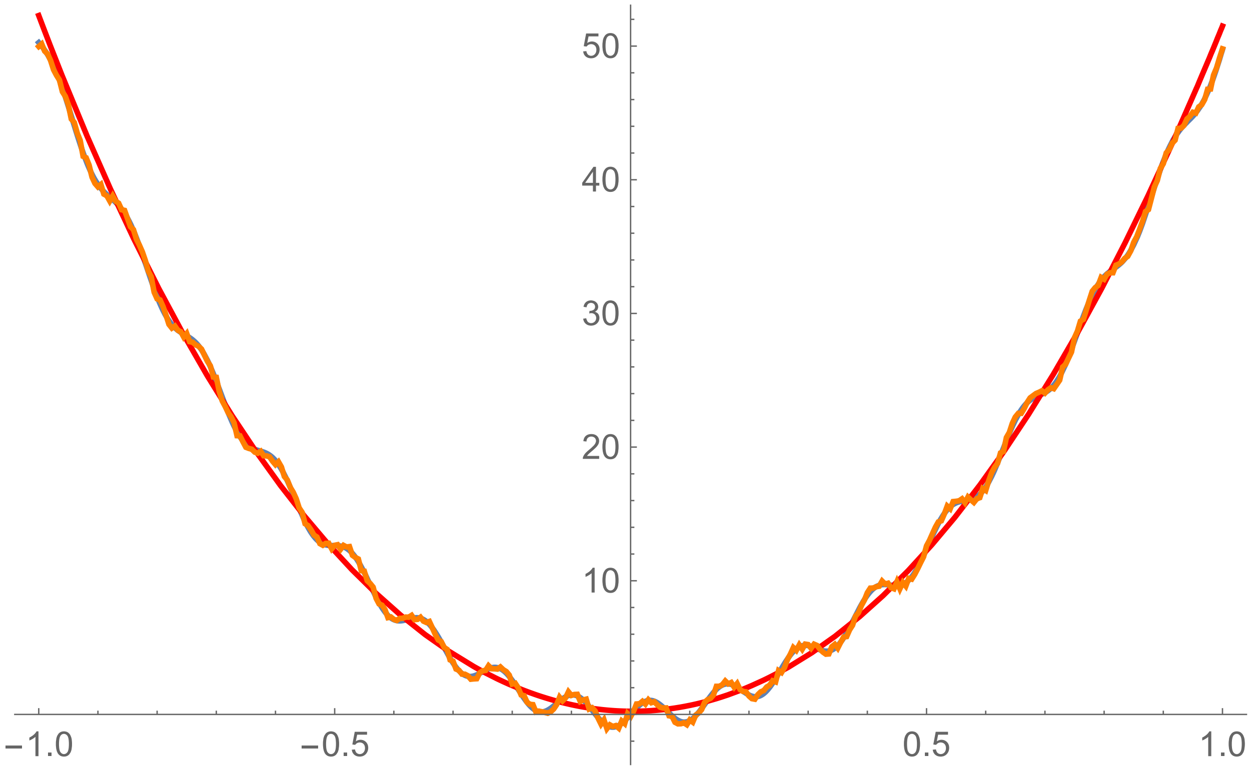
Стоит отметить, что точки выбираются по следующему образу: выбирается шаг, через который будет выбираться новая точка x_i, лежащая в промежутке $[-1; 1]$. Далее вычисляется значение f в данной точке. После чего к полученному значению прибавляется случайное отклонение – случайно выбранное число из промежутка [-0.3 ; 0.3]. В моем случае шаг = 0.005.



Выберем еще одну функцию: $f = \sin[200x] + \cos\,[5x]$, также определенную на [-1 ; 1]



Выберем еще одну функцию $f = \sin(50x) + 50x^2$, также определённую на [-1; 1].



По данным рисункам видно, что алгоритм работает корректно и достаточно точно. Стоит подметить, что из-за особенностей выбора ортонормированной системы функций, при попытке построить приближение за пределами области определения промежутка [-1; 1] будет некорректный результат. Это связано с тем, что полиномы Лежандра ортогональны только в данной области определения.