Реализация прямого метода решения обычной проблемы собственных значений. Вычисление характеристического полинома или его коэффициентов. (3.2.1 – метод Леверье)

Группа: ПМ-2001

Студент: Иксанов Марат Васильевич

1. Суть метода и алгоритм решения:

Дано квадратная матрица A размера $n_x n$. Необходимо найти характеристический полином матрицы A:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n = (-1)^n\phi(\lambda)$$

Основной задачей является восстановление коэффициентов p_i характеристического полинома заданной матрицы A

Данный метод основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения.

Первым шагом вычисляются следы матрицы A^k, где $k = 1, \ldots, n$. След матрицы A^k: $s_k = trA^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, $k = 1, \ldots, n$. Из данной формулы следует второй шаг. На этом шаге вычисляются искомые коэффициенты p_i искомого характеристического полинома.

Пусть $p_1 = s_1$.

Тогда $kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \cdots - p_{k-1}s_1$, $k = 1, 2, \ldots, n$

Таким образом $p_i = \frac{s_k - p_1 s_{k-1} - \cdots - p_{k-1}s_1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

2. Программная реализация:

Входные данные: квадратная матрица A размера $n_x n$

Выходные данные: восстановленный характеристический полином входной матрицы

Метод Леверье реализован с помощью Wolfram Mathematica:

```
leverrierMethod[a_] := Module[{n = Length@a, p, s, result},
  s = Table[Tr@Nest[#.a &, a, k], {k, 0, n - 1}];
  p = {s[[1]]};
  Do[
   AppendTo[p, (s[[k]] - Plus @@ Table[p[[i]] * s[[k - i]], {i, k - 1, 1, -1}])/k];
   , {k, 2, n}];
  result = (-1)^n (x^n - Plus @@ Table[p[[k]] * x^(n-k), {k, 1, n}]) // Expand
];
```

3. Результат вычисления на предоставленных входных данных и сравнение его с результатом встроенных функций $Wolfram\ Mathematica$:

Рассмотрим 5 различных матриц A. Будем оценивать точность и корректность решения путем сравнений найденных с помощью собственной реализации и встроенной характеристических многочленов с помощью встроенной функции сравнения $Equal$.

В данном случае функция будет сравнивать соответствующие коэффициенты при соответствующих степенях λ. Если данные коэффициенты отличаются на малое число, а точнее на машинный эпсилон, тогда считается, что такие коэффициенты равны.

Вычисление с помощью встроенных функций будет осуществляться по определению: $|A - \lambda E|$

Соответственно из равенства многочленов следует и равенство полученных корней, однако все же после равенства сверим полученные корни, отсортировав список найденных собственных значений и попарно вычисляя модуль их разности и посчитаем норму полученного вектора

1. $A = \begin{pmatrix} 1. & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1. & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1. & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1. \end{pmatrix}$

Собственная	Встроенная
0.286152 - 2.11186 x + 4.752 x^2 - 4. x^3 + x^4	0.286152 - 2.11186 x + 4.752 x^2 - 4. x^3 + x^4

Проверка на равенство полиномов:

```
leverrierMethod[a1] == Det[a1 - x * IdentityMatrix[Length@a1]]
```

```
True
```

Проверка нормы разности попарно найденных собственных чисел:

```
(x /. Sort@Solve[leverrierMethod[a1] == 0, x]) - (x /. Solve[Det[a1 - x * IdentityMatrix[Length@a1]] == 0, x])
% // Norm
```

$\{6.10623\times10^{-16}, -4.10783\times10^{-15}, 4.44089\times10^{-15}, -8.88178\times10^{-16}\}$

6.14471×10^{-15}

2. $A = \begin{pmatrix} 4.33 & -1.12 & -1.08 & 1.14 \\ -1.12 & 4.33 & 0.24 & -1.22 \\ -1.08 & 0.24 & 7.21 & -3.22 \\ 1.14 & -1.22 & -3.22 & 5.43 \end{pmatrix}$

Собственная	Встроенная
445.432 - 439.773 x + 151.727 x^2 - 21.3 x^3 + x^4	445.432 - 439.773 x + 151.727 x^2 - 21.3 x^3 + x^4

Проверка на равенство полиномов:

```
leverrierMethod[a2] == Det[a2 - x * IdentityMatrix[Length@a2]]
```

```
True
```

Проверка нормы разности попарно найденных собственных чисел:

```
(x /. Sort@Solve[leverrierMethod[a2] == 0, x]) - (x /. Solve[Det[a2 - x * IdentityMatrix[Length@a2]] == 0, x])
% // Norm
```

$\{4.52971\times10^{-14}, -9.54792\times10^{-14}, 5.50671\times10^{-14}, -1.06581\times10^{-14}\}$

1.19641×10^{-13}

3. $A = \begin{pmatrix} 1. & 0.17 & -0.25 & 0.54 \\ 0.47 & 1. & 0.67 & -0.32 \\ -0.11 & 0.35 & 1. & -0.74 \\ 0.55 & 0.43 & 0.36 & 1. \end{pmatrix}$

Собственная	Встроенная
0.638638 - 3.38261 x + 5.7651 x^2 - 4. x^3 + x^4	0.638638 - 3.38261 x + 5.7651 x^2 - 4. x^3 + x^4

Проверка на равенство полиномов:

```
leverrierMethod[a3] == Det[a3 - x * IdentityMatrix[Length@a3]]
```

```
True
```

Проверка нормы разности попарно найденных собственных чисел:

```
(x /. Sort@Solve[leverrierMethod[a3] == 0, x]) - (x /. Solve[Det[a3 - x * IdentityMatrix[Length@a3]] == 0, x])
% // Norm
{0., 0., 0. + 0. i, 0. + 0. i}
0.
```

4. $$A = \begin{pmatrix} b+c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b+c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Собственная	Встроенная
$5 b^5 c + 4 b^4 c^2 - 7 b^3 c^3 - 4 b^2 c^4 + 2 b c^5 + c^6 - 5 b^5 x - 8 b^4 c x + 21 b^3 c^2 x + 16 b^2 c^3 x - 10 b c^4 x - 6 c^5 x + 4 b^4 x^2 - 21 b^3 c x^2 - 24 b^2 c^2 x^2 + 20 b c^3 x^2 + 15 c^4 x^2 + 7 b^3 x^3 + 16 b^2 c x^3 - 20 b c^2 x^3 - 20 c^3 x^3 - 4 b^2 x^4 + 10 b c x^4 + 15 c^2 x^4 - 2 b x^5 - 6 c x^5 + x^6$	$5 b^5 c + 4 b^4 c^2 - 7 b^3 c^3 - 4 b^2 c^4 + 2 b c^5 + c^6 - 5 b^5 x - 8 b^4 c x + 21 b^3 c^2 x + 16 b^2 c^3 x - 10 b c^4 x - 6 c^5 x + 4 b^4 x^2 - 21 b^3 c x^2 - 24 b^2 c^2 x^2 + 20 b c^3 x^2 + 15 c^4 x^2 + 7 b^3 x^3 + 16 b^2 c x^3 - 20 b c^2 x^3 - 20 c^3 x^3 - 4 b^2 x^4 + 10 b c x^4 + 15 c^2 x^4 - 2 b x^5 - 6 c x^5 + x^6$

Проверка на равенство полиномов:

```
leverrierMethod[a4] == Det[a4 - x * IdentityMatrix[Length@a4]]
True
```

Проверка нормы разности попарно найденных собственных чисел:

```
(x /. Sort@Solve[leverrierMethod[a4] == 0, x]) - (x /. Solve[Det[a4 - x * IdentityMatrix[Length@a4]] == 0, x])
% // Norm
{0, 0, 0, 0, 0, 0}
0
```

5. $$A = \begin{pmatrix} c & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Собственная	Встроенная
$c^{10} - 9 b c^8 f + 28 b^2 c^6 f^2 - 35 b^3 c^4 f^3 + 15 b^4 c^2 f^4 - b^5 f^5 - 10 c^9 x + 72 b c^7 f x - 168 b^2 c^5 f^2 x + 140 b^3 c^3 f^3 x - 30 b^4 c f^4 x + 45 c^8 x^2 - 252 b c^6 f x^2 + 420 b^2 c^4 f^2 x^2 - 210 b^3 c^2 f^3 x^2 + 15 b^4 f^4 x^2 - 120 c^7 x^3 + 504 b c^5 f x^3 - 560 b^2 c^3 f^2 x^3 + 140 b^3 c f^3 x^3 + 210 c^6 x^4 - 630 b c^4 f x^4 + 420 b^2 c^2 f^2 x^4 - 35 b^3 f^3 x^4 - 252 c^5 x^5 + 504 b c^3 f x^5 - 168 b^2 c f^2 x^5 + 210 c^4 x^6 - 252 b c^2 f x^6 + 28 b^2 f^2 x^6 - 120 c^3 x^7 + 72 b c f x^7 + 45 c^2 x^8 - 9 b f x^8 - 10 c x^9 + x^{10}$	$c^{10} - 9 b c^8 f + 28 b^2 c^6 f^2 - 35 b^3 c^4 f^3 + 15 b^4 c^2 f^4 - b^5 f^5 - 10 c^9 x + 72 b c^7 f x - 168 b^2 c^5 f^2 x + 140 b^3 c^3 f^3 x - 30 b^4 c f^4 x + 45 c^8 x^2 - 252 b c^6 f x^2 + 420 b^2 c^4 f^2 x^2 - 210 b^3 c^2 f^3 x^2 + 15 b^4 f^4 x^2 - 120 c^7 x^3 + 504 b c^5 f x^3 - 560 b^2 c^3 f^2 x^3 + 140 b^3 c f^3 x^3 + 210 c^6 x^4 - 630 b c^4 f x^4 + 420 b^2 c^2 f^2 x^4 - 35 b^3 f^3 x^4 - 252 c^5 x^5 + 504 b c^3 f x^5 - 168 b^2 c f^2 x^5 + 210 c^4 x^6 - 252 b c^2 f x^6 + 28 b^2 f^2 x^6 - 120 c^3 x^7 + 72 b c f x^7 + 45 c^2 x^8 - 9 b f x^8 - 10 c x^9 + x^{10}$

Проверка на равенство полиномов:

```
leverrierMethod[a5] == Det[a5 - x * IdentityMatrix[Length@a5]]
```

```
True
```

Проверка нормы разности попарно найденных собственных чисел:

```
(x /. Sort@Solve[leverrierMethod[a4] == 0, x]) - (x /. Solve[Det[a4 - x * IdentityMatrix[Length@a4]] == 0, x])
% // Norm
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

```
0
```

По данным примерам видно, что значения полученных «норм» очень малы, следовательно, собственная реализация довольно хорошо решает поставленную задачу.