Реализация метода вычисления характеристического многочлена для матриц специального вида. Трехдиагональная матрица

Задача:3.2.4.(a)

Дана матрица A, которая является трехдиагональной, то есть:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \beta_n \\ 0 & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Необходимо найти характеристический многочлен для данной матрицы.

Пусть $p_k(t)$ – характеристический многочлен матрицы S_k, где S_k - k главный минор матрицы A.

Соответственно, $S_n = A$

$$S_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \beta_k \\ 0 & 0 & \gamma_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

Очевидно, что для любого $k = 1, \dots, n$ $p_k(t) = |S_k - tI_k|$, где t – переменная по которой строится многочлен, I_k – единичная матрица размера $k\ x\ k$

С помощью данных формул рекуррентно можно вычислить любой $p_k(t)$:

$$p_0(t) = 1$$

$$p_1(t) = \alpha_1 - t$$

$$p_k(t) = (\alpha_k - t)p_{k-1}(t) - \beta_k\gamma_k p_{k-2}(t),\ k = 2, \dots, n$$

Программная реализация:

Мною была реализована функция в среде $Wolfram\ Mathematica$.

```
m = matr;
n = m // Length
pk2 = 1;
pk1 = m[[1, 1]] - t;
Do[
 pk = (m[[k, k]] - t) * pk1 - m[[k, k - 1]] * m[[k - 1, k]] pk2;
 pk2 = pk1;
 pk1 = pk
 , {k, 2, n}
]
pk1
```

Поскольку передо мной стояла задача только построить характеристический многочлен, собственные значения можно не искать, чтобы узнать правильность данной реализации.

В система $Wolram\ Mathematica$ существует встроенная функция $Eigenvalues$, которая считает все собственные значения заданной матрицы. Будем использовать ее при сравнении с моей функцией. То есть будем представлять полученные собственные значения, с помощью полученного полинома, в виде вектора, координаты которого идут по возрастанию собственных значений. Таким же образом представим собственные значения, полученные с помощью встроенной функции. Далее посчитаем норму разности созданных нами векторов и увидим, насколько точно решает поставленную задачу моя реализация.

1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a+b \end{pmatrix}$

   Рассмотрим матрицы:

   - $n = 5, a = 5.32, b = -34.356$

$$\begin{pmatrix} -29.036 & -34.356 & 0 & 0 & 0 \\ -34.356 & 5.32 & -34.356 & 0 & 0 \\ 0 & -34.356 & 5.32 & -34.356 & 0 \\ 0 & 0 & -34.356 & 5.32 & -34.356 \\ 0 & 0 & 0 & -34.356 & -29.036 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues@matr
t /. Solve[pk1 == 0, t]
Norm[Sort@(t /. Solve[pk1 == 0, t]) - Sort@Eigenvalues@matr]
```

{-63.392, 60.9092, -50.2692, 26.5532, -15.9132}

{-63.392, -50.2692, -15.9132, 26.5532, 60.9092}

3.01458×10^{-14}

- $n = 10, a = 6.4574, b = 231.515$

$$\begin{pmatrix}
237.972 & 231.515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 231.515 & 6.4574 & 231.515 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 231.515 & 237.972
\end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues@matr
t /. Solve[pk1 == 0, t]
Norm[Sort@(t /. Solve[pk1 == 0, t]) - Sort@Eigenvalues@matr]
```

{469.487, 446.825, -433.91, 381.057, -368.142, 278.62, -265.705, 149.542, -136.627, 6.4574}

{-433.91, -368.142, -265.705, -136.627, 6.4574, 149.542, 278.62, 381.057, 446.825, 469.487}

3.16869×10^{-11}

2. Пусть матрица $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$

- $n = 7, a = -13.55,\ b = 21.41, c = 3.71$

$$\begin{pmatrix}
-13.55 & 3.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
21.41 & -13.55 & 3.71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 21.41 & -13.55 & 3.71 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 21.41 & -13.55 & 3.71 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 21.41 & -13.55 & 3.71 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 21.41 & -13.55 & 3.71 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.41 & -13.55
\end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues@matr
t /. Solve[pk1 == 0, t]
Norm[Sort@(t /. Solve[pk1 == 0, t]) - Sort@Eigenvalues@matr]
```

```
{-30.018, -26.1541, -20.3713, -13.55, -6.72873, 2.91799, -0.945945}

{-30.018, -26.1541, -20.3713, -13.55, -6.72873, -0.945945, 2.91799}
```

9.7085×10^{-13}

- $n = 12, a = -134.55, b = 212.41, c = 30.71$

$$\begin{pmatrix}
-134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55 & 30.71 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212.41 & -134.55
\end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues@matr
t /. Solve[pk1 == 0, t]
Norm[Sort@(t /. Solve[pk1 == 0, t]) - Sort@Eigenvalues@matr]
```

```
{-291.388, -277.579, -255.458, -226.31, -191.83, -154.02, -115.08, -77.2701, -42.7896, 22.2877, -13.6419, 8.47909}

{-291.388, -277.579, -255.458, -226.31, -191.83, -154.02, -115.08, -77.2701, -42.7896, -13.6419, 8.47909, 22.2877}
```

1.70667×10^{-8}

По данным примерам можно наблюдать, что норма «вектора» разности собственных значений (последняя строчка на каждой картинке) очень мала (от 8 знаков после запятой). Этот факт подтверждает корректность написанной мною реализации.