Реализация решения СЛАУ методом квадратных корней (метод Холецкого-Холесского)

Задача:1.1.3(а)

Представим, что требуется решить СЛАУ $Ax = f$, где $A -$
$-$ положительно определенная симметричная матрица размером n на n. В основе метода квадратных корней лежит алгоритм построения специального $LU -$ разложения матрицы A: $A = LL^T$, где $x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}$$

Как и в LU $-$разложении решим сначала $L^T x = g$,где g – неизвестный вектор. После чего решим $Lg = f$.

Построение матрицы L и g происходит одновременно.

Первоначально определим значение элемента l_{11} равным $\sqrt{a_{11}}$, первый столбец матрицы L равным произведению первого столбца исходной матрицы A на обратный элемент $l_{11} - l_{11}^{-1}$, элемент первой строки столбца g как произведение обратного l_{11}^{-1} на значение первой строки столбца f.

Далее для $k = 2, \dots, n$ (прямой ход) элементы определяются следующим образом:

k диагональный элемент матрицы L равен квадратному корню из разности k диагонального элемента матрицы A и суммы квадратов элементов k строки всех столбцов i матрицы L, где $i < k$.

k столбец матрицы L равен произведению обратного элемента k диагонального элемента той же матрицы на разность k столбца и суммы всех i столбцов, умноженных на элемент k строки i столбца матрицы L соответственно.

k элемент столбца g определяется как произведение обратного k диагонального элемента матрицы L на разность k элемента столбца f и суммы произведения i элемента столбца g на элемент матрицы L k строки i столбца соответственно, где $i < k$

Первоначально задаем n элементу столбца x значение, равное произведению n элемента столбца g на обратный n диагональный элемент матрицы L.

Далее для $k = n - 1, \ldots, 1$ (обратный ход) элементы определяются следующим образом:

k элемент матрицы-столбца x равен произведению обратного k диагонального элемента матрицы L на разность k элемента матрицы g и суммы произведения i элемента матрицы x на элементы i строки k столбца матрицы L, где $k < j \leq n$

Полученная матрица x — искомое решение заданного СЛАУ.

Программная реализация:

```
x = ConstantArray[0, {n, 1}];
g = x;
l = ConstantArray[0, {n, n}];
l[[1, 1]] = √(input[[1, 1]]);
l[[All, 1]] = l[[1, 1]]^-1 * input[[All, 1]];
g[[1]] = l[[1, 1]]^-1 * f[[1]];

Do[
 l[[k, k]] = √(input[[k, k]] - Sum[l[[k, i]]^2, {i, k - 1}]);
 l[[All, k]] = l[[k, k]]^-1 * (input[[All, k]] - Sum[l[[All, i]] * l[[k, i]], {i, k - 1}]);
 g[[k]] = l[[k, k]]^-1 * (f[[k]] - Sum[l[[k, i]] * g[[i]], {i, k - 1}])

 , {k, 2, n}]

x[[n]] = l[[n, n]]^-1 * g[[n]];
Do[
  x[[k]] = l[[k, k]]^-1 * (g[[k]] - Sum[x[[i]] * l[[i, k]], {i, k + 1, n}])

  , {k, n - 1, 1, -1}];

x // MatrixForm
```

Реализация написана с помощью среды $Wolfram\ Mathematica$. Необходимо узнать, насколько точно решает данная функция заданное уравнение. Для этого найдем вектор невязки – разность левой и правой части с подставленным найденным с помощью реализации решением – и определим его норму — погрешность решения. Также следует сравнить решение со встроенными функциями среды $Wolfram\ Mathematica$, которая также решает поставленную задачу.

Входные данные:

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1.00 & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1.00 & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1.00 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Выходные данные, полученные собственной реализацией:

$$\begin{pmatrix} -1.25779 \\ 0.0434873 \\ 1.03917 \\ 1.48239 \end{pmatrix}$$

Выходные данные, полученные с помощью функции-1:

$$\text{Transpose}[\{x1, x2, x3, x4\}/.\ \text{Solve}[\text{Thread}[\text{input}.\{x1, x2, x3, x4\} = \\ = \{0.3,0.5,0.7,0.9\}], \{x1, x2, x3, x4\}]]//\text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} -1.25779 \\ 0.0434873 \\ 1.03917 \\ 1.48239 \end{pmatrix}$$

Выходные данные, полученные с помощью функции-2:

$$\text{LinearSolve}[\text{input}, f]//\text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} -1.25779 \\ 0.0434873 \\ 1.03917 \\ 1.48239 \end{pmatrix}$$

Посчитаем векторы невязки полученных результатов и сравним их нормы:

Собственная:

```
Norm[input.x - f]
```

2.98937×10^{-16}

Встроенная функция-1:

```
Norm[
 input.
   Transpose[{x1, x2, x3, x4} /. Solve[Thread[input.{x1, x2, x3, x4} == {0.3, 0.5, 0.7, 0.9}],
      {x1, x2, x3, x4}]] - f]
```

2.54384×10^{-16}

Встроенная функция-2:

```
Norm[input.LinearSolve[input, f] - f]
```

5.55112×10^{-17}

Несложно заметить, что все функции считают достаточно точно. Погрешности безумно малы, однако можно заметить, что встроенная функция-2 проигрывает моей собственной функции, которая проигрывает встроенной функции-1.

Но, опять-таки, погрешности настолько малы в каждом из случаев, что можно считать, что все функции по итогу справились с поставленной задачей.