Интегрирование функции одной переменной с помощью квадратурных формул Гаусса-Кристоффеля

Описание метода

Задача состоит в приближенном вычислении интеграла вида:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\rho(x)dx$$

где ρ – некоторая весовая функция. В данной реализации воспользуюсь весовой функцией Якоби

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

Положу альфа равной 1/2 и бета равным -1/2.

В общем виде квадратурная формула Гаусса-Кристоффеля имеет вид

$$\int_{a}^{b} \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Узлы интегрирования x_k и коэффициенты A_k можно найти непосредственно из данных выше. Они получаются равными для любого n:

$$x_k = cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$A_k = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Тогда интеграл можно приближенно вычислить, используя формулы выше.

Программная реализация

```python
from math import *

ro = (lambda x: sqrt((1 - x)/(1 + x)))
xk = (lambda k, n: cos(2*k * pi / (2*n+1)))
ak = (lambda k, n: 4*pi / (2*n+1) * (sin(k*pi/(2*n+1)))**2)


def integrate(f, n):
    res = 0
    for k in range(1, n + 1):
        res += ak(k, n) * f(xk(k, n))
    return res


f1 = lambda x: sin(x) ** 2
f2 = lambda x: exp(-x ** 2)
f3 = lambda x: log(x ** 2 + 10) + cos(4.2 * x)

m = 4
print("f1: ", integrate(f1, m))
print("f2: ", integrate(f2, m+1))
print("f3: ", integrate(f3, m+2))
```

Проверка правильности решения

Буду проверять истинные значения вычисляемого интеграла посредством математического пакета Wolfram Mathematica

Вычислю интеграл от следующих функций

$$f_1(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

$$f_2(x) = e^{-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

$$f_3(x) = \left(\ln\left(x^2+10\right) + \cos(4.2x)\right)\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

Сначала поставлю количество узлов равным 4 и посмотрю результат

```
f1:  1.2191439577599066
f2:  2.026453084067181
f3:  6.202258542657084
```

Теперь истинный результат:

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Sin}[x]^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \{x, -1, 1\}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[e^{-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \{x, -1, 1\}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[\left(\text{Log}\left[x^2+10\right] + \text{Cos}[4.2\,x]\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \{x, -1, 1\}\right]$$

1.2191095133166001`

2.0264380669493525`

6.202291893539576`

Как видно точность уже высокая – 4 знака после запятой.

Теперь увеличу n до 10.

```
f1:  1.2191095133165961
f2:  2.0264380669493667
f3:  6.202291893540315
```

Здесь точность увеличилась до 12 знаков.

Исходя из результатов выше, можно сказать, что алгоритм реализован правильно, выдается точный результат в соответствии с теоретическими данными.