Seminario Ecuaciones Diferenciales Parciales

Ingeniería Civil Matemática

Primer Semestre de 2021

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE BIFURCACIONES

Primeras aplicaciones al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

Realizado por:
Eduardo Carriel Ordenes

Índice

1. Objetivos y Esquema de la presentación

En el presente trabajo se tendrá el fin de establecer un primer acercamiento al uso de herramientas de la teoría de bifurcaciones en el estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales, lo cúal se hará en perspectiva del siguiente esquema

1 Presentar el grado topológico y sus propiedades como una construcción ya hecha, y mostrar brevemente unas aplicaciones.

2 Entender la definición y construir una intuición de los puntos de bifurcación, y dar un criterio para determinarlos en distintas ecuaciones.

3 Aplicar el criterio anterior a Ecuaciones en Derivadas Parciales.

4 Estudiar el Principio del Anti-Máximo como primera aplicación de los criterior expuestos.

5 Presentar la Condición de Landesman-Lazer, viendo como un problema aparentemente no dependiente de párametros puede ser trabajado con la Teoría de Bifurcaciones.

6 Presentar el Teorema de Ambrosetti-Prodi como consecuencia de las técnicas topológicas usadas en las Teorías de Grado y de Bifurcación.

2. Breve introducción a la Teoría de Grado

2.1. Primer acercamiento

Cuando hablemos de *grado topológico*, nos referiremos a un número, asociado a cierta ecuación, que nos dará información sobre el conjunto de soluciones, para ir concretizando consideremos la ecuación

$$f(x) = y, \quad x \in U \tag{1}$$

donde:

1. (i) $f : X \to Y$ es una función continua dada.

2. (ii) X, Y son espacios euclideanos de dimensión finita o bien espacios de Banach de dimensión infinita.

3. (iii) $y \in Y$ un punto dado.

4. (iv) U subconjunto de X abierto.

en diversos contextos la resolución explicita de la ecuacion (1) o una aproximación a esta, son tareas de alta complejidad (o imposibles), el grado nos dará información sobre el conjunto de soluciones, si este es vacío, finito, o infinito, y eventualmente comportamento de las soluciones en diversos sentidos.

Veamos primeramente el caso de espacios finito dimensionales, diremos que

$$T = \{(f, U, y)\}$$

es un conjunto de *tripletes admisible* si dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, U un subconjunto abierto de Ω, y $f^{-1}(y) \cap U$ es compacto.Un *grado topológico* es un mapeo

$$\deg : T \to \mathbb{Z}$$

si satisface ciertas propiedades, las enunciaremos más adelante, por el momento hablemos de dos de ellas:

1. **Propiedad de Existencia:** Dado un triplete admisible (f, U, y), si

$$\deg(f, U, y) \neq 0$$

entonces, $f^{-1}(y) \cap U \neq \varnothing$, dicho de otra forma, existe al menos solución de (1) en U.

2. **Invarianza Homotópica:** Dados dos tripletes admisibles (f, U, y) y (g, U, y), si existe una función continua $H : U \times 0,1 \ \to \mathbb{R}^n$ tal que $H^{-1}(0)$ es compacto, entonces, si

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x), \quad \forall x \in U \tag{2}$$

entonces

$$\deg(f, U, y) = deg(g, U, y)$$

La primera propiedad nos dará una condición suficiente (no nesesariamente necesaria) para la existencia de soluciones de (1), la segunda nos permitirá calcular el grado de funciones complejas, evaluando otras más simples *homotópicas* (esto es, que satisfagan (2)).

2.2. Grado de Browner

El grado de Browner es un mapeo entre el conjunto de tripletes admisibles y los enteros, para definirlo diremos primero que y es un punto *regular* de $g : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ clase C^1, si la derivada $g'(y) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ es sobreyectiva, en caso contrario diremos que un punto es *crítico*. Consideremos ahora las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tales que f en su restricción a U es de clase C^∞ e y es punto regular de f, se puede probar que en este caso $f^{-1}(y) \cap U$ es finito y está bien definido el *Grado de Bowner*:

$$\deg_B(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} sign \det(Df(x))$$

donde $sign \det(Df)$ es el signo del determinante de la matriz jacobiana $Df(x)$.

2.3. Grado de Leray-Schauder

Querriamos de una forma similar extender el concepto de grado a funciones entre espacios de Banach infinito dimensionales, considerando tripletes admisibles (f, U, y), es decir, donde $f : \Omega \to F$ es un mapeo continuo definido entre un subconjunto abierto de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F, $U \subseteq \Omega$ es abierto y $f^{-1}(y) \cap U$ es compacto. Frente a esta iniciativa surgen varias discrepancias en relación al caso finito dimensional, entre ellas:

1. Si f es de clase C^1, e y un punto regular, no es claro como definir el signo de la derivada de Frechet.

2. No hay un resultdo general para aproximación por funciones suaves.

3. Aún con U acotado y f continua, no podemos garantizar que $f^{-1}(y) \cap U$ sea compacto.

En vista de lo anterior, para el caso infinito dimensional, restringiremos nuestro estudio a una clase particular de operadores, las *perturbaciones compactas de la identidad*, esto es, las funciones $f : E \to E$ de la forma

$$f = I - k$$

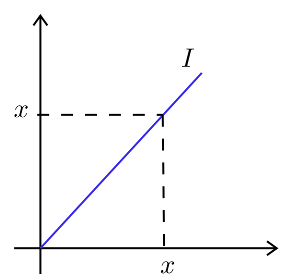
donde I es la identidad en E y $k : E \to E$ un operador compacto. En base a la construcción anterior, para el caso infinito dimensional, podemos definir el *grado topológico de Leray-Schauder* del triplete (f, U, y)

$$\deg_L S(f, U, s)$$

y se puede probar que satisface (similarmente al grado de Browner), las siguientes propiedades:

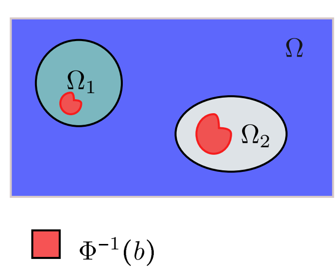
i) **Propiedad de Normalización:**

$$\deg(I, \Omega, b) = 1 \quad b \in \Omega$$



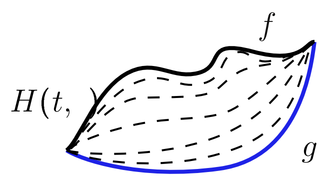
ii) **Propiedad Aditiva:** Asumir que Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos disjuntos de Ω. Si $b \notin \phi(\overline{\Omega} - \Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces

$$\deg(\Phi, \Omega, b) = \deg(\Phi, \Omega_1, b) + \deg(\Phi, \Omega_2, b)$$



iii) **Propiedad Homotópica** Sea $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, X)$. Si $b : [0,1] \to X$ es continua y $b(t) \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$ entonces

$$\deg(H(t,.), \Omega, b(t)) = cte \quad \forall t \in [0,1]$$

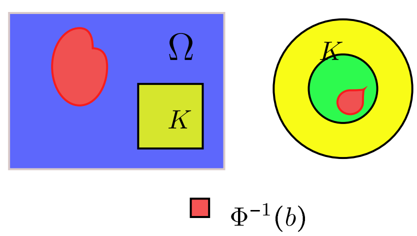


iv) $\deg(\phi, \varnothing, b) = 0$

v) **Propiedad de existencia:** si $\deg(\phi, \Omega, b) \neq 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $\phi(x) = y$.

vi) **Propiedad de Excisión:** Si $K \subseteq \Omega$ es cerrado y $b \notin \phi(K)$, entonces

$$\deg(\phi, \Omega, b) = \deg(\phi, \Omega - K, b)$$



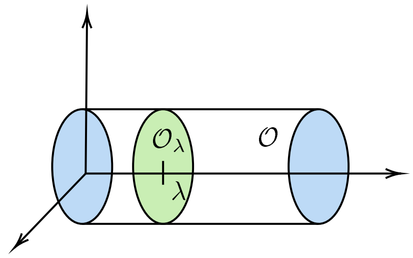
vii) **Propiedad General de Homotopía:** Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R} \times X$ y sea $H : \overline{\mathcal{O}} \to X$ un operador compacto. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos el λ-corte

$$\mathcal{O}_\lambda = \{u \in X; (\lambda, u) \in O\}$$

y el mapeo $H_\lambda : \overline{\mathcal{O}} \to X$ dado por

$$H_\lambda(u) = H(\lambda, u)$$

si $u - H_\lambda(u) \neq b, \forall u \in \partial\mathcal{O}_\lambda, \forall \lambda \in [a,b]$, entonces el grado $\deg(I - H_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, b)$ está bien definido y es independiente de λ.



viii) **Continuidad**

(a) **Continuidad con respecto a b** El grado es constante en cada componente conexa de $X - \phi(\partial\Omega)$

(b) **Continuidad con respecto a T** Existe una vecindad V de T en el espacio de operadores compactos de $\overline{\Omega}$ en X, con la norma del supremo, tal que

$$\deg(I - S, \Omega, b) = cte, \quad \forall S \in V$$

3. Un Teorema de Leray y Schauder

Sea X un espacio de Banach real, sea Ω un subconjunto abierto y acotado de X, sea $a < b$ y sea $T : [a, b] \times \overline{\Omega} \to X$ un mapeo compacto. Para $\lambda \in [a, b]$ considere la ecuación

$$\phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u) = 0, \quad u \in X \tag{1}$$

Para evidenciar la dependencia del parámetro λ en la ecuación (1), a veces nos referiremos a esta por $(1)_\lambda$. Observemos que T puede ser visto inmerso en la familia de operadores compactos de la forma

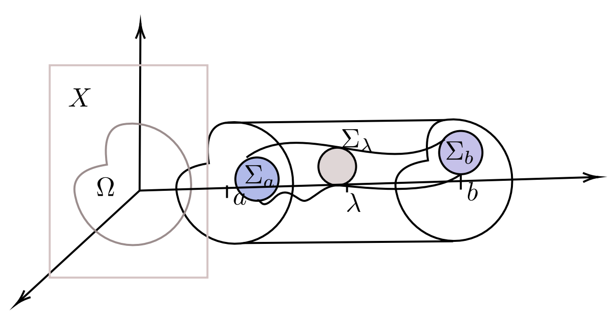
$$T_\lambda(u) = T(\lambda, u), \quad u \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y similarmente denotamos $\phi_\lambda = I - T_\lambda$. Definamos

$$\Sigma = \{(\lambda, u) \in [a, b] \times \overline{\Omega}; \quad \phi(\lambda, u) = 0\}$$

y usaremos la notación para el λ-corte

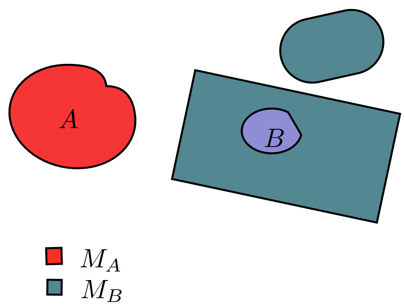
$$\Sigma_\lambda = \{u \in \overline{\Omega}; \quad (\lambda, u) \in \Sigma\}$$



Notemos que Σ es compacto, pues si (λ_n, u_n) es una sucesión en Σ, con $a \le \lambda_n \le b$, pasando a una subsucesión de ser nesesario, tendremos que existe $\lambda \in [a, b]$ tal que $\lambda_n \to \lambda$, por otro lado como Ω es acotado, $u_n = T(\lambda_n, u_n)$ tiene una subsucesión convergente, digamos a $u \in \overline{\Omega}$, luego por la continuidad de T, se tiene que $u = T(\lambda, u)$, es decir, $u \in \Sigma$ y este es compacto. Considerando esto, para abordar el problema, usaremos ahora el siguiente lema de Topología:

Lema Sea (M, d) un espacio métrico compacto, A una componente conexa de M y $B \subseteq M$ cerrado, tal que $A \cap B = \varnothing$. entonces existen compactos M_a, M_b tales que

1. $A \subseteq M_a$, $B \subseteq M_b$.
2. $M = M_a \cup M_b$ y $M_a \cap M_b = \varnothing$.



Observación: Como consecuencia del lema, si A y B son dos subconjuntos cerrados de un espacio métrico compacto M, entonces existe un subconjunto de M cerrado y conexo que conecta A y B o bien , $M = M_a \cup M_b$ donde M_a y M_b son conjuntos compactos conteniendo a A y B respectivamente.

De todo lo anterior, obtenemos el siguiente resultado:

3.1. Teorema de Leray-Schauder (1934)

Sea X un espacio de Banach real, Ω un subconjunto abierto y acotado de X, sea $\phi : [a, b] \times \overline{\Omega} \to X$ dado por $\phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$ con T un operador compacto. Suponer además que

$$\phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u) \neq 0, \quad \forall (\lambda, u) \in [a, b] \times \overline{\partial\Omega}$$

$$\deg(\phi_a, \Omega, 0) \neq 0 \tag{2}$$

entonces:

(1) $(1)_\lambda$ tiene solución in Ω para todo $\lambda \in [a, b]$

(2) Más aún, existe un conjunto compacto, conexo $C \subseteq \Sigma$ tal que

$$C \cap \Sigma_a \neq \varnothing \text{ y } C \cap \Sigma_b \neq \varnothing$$

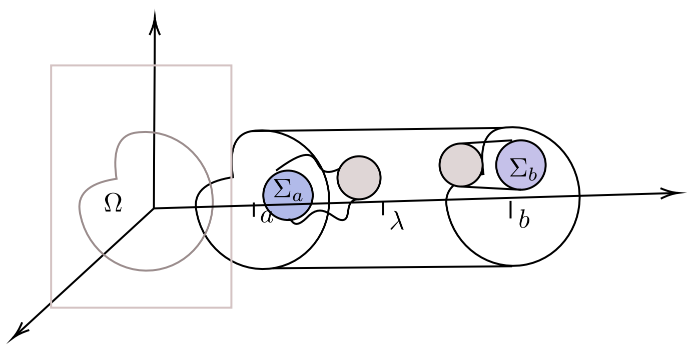
Demostración:

(1) Veamos que como no existen soluciones $(\lambda, u) \in [a,b] \times \partial\Omega$ por la propiedad homotópica del grado

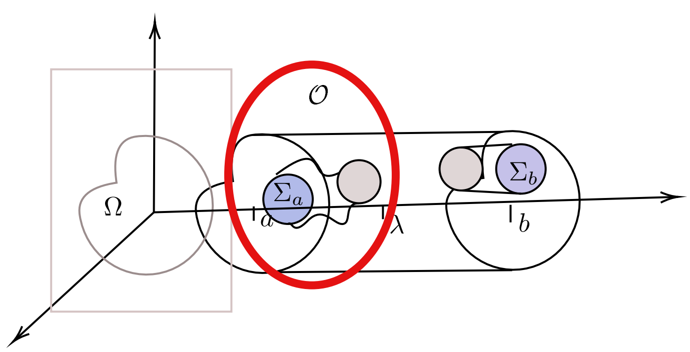
$$\deg(\phi_\lambda, \phi, 0) \neq 0, \quad \forall \lambda \in [a,b]$$

luego por la propiedad de existencia, fijandonos que $\deg(\phi_a, \phi, 0) \neq 0$, se deduce que $(1)_\lambda$ tiene solución para todo $\lambda \in [a,b]$.

(2) Supongamos que no existe un conjunto compacto, conexo $C \subseteq \Sigma$ tal que $C \cap \Sigma_a \neq \emptyset$ y $C \cap \Sigma_b \neq \emptyset$,



del lema anterior y la observación, con $A = \Sigma_a$ y $B = \Sigma_b$, deducimos que existen conjuntos compactos disjuntos M_a y M_b conteniendo a A y B respectivamente tales que $\Sigma = M_a \cup M_b$.



Esto prueba (Usando las caracteristicas de la topología metrica, o la forma geomérica del Teorema de Hahn-Banach) que existe un subconjunto abierto acotado $O \in [a,b] \times X$ tal que $\Sigma_a \subseteq O$, $\Sigma_b \cap 0 = \emptyset$ y que $T(\lambda, u) \neq u$

para todo $u \in \partial O_\lambda$, con $\lambda \in [a,b]$,(pues Ω es acotado) la propieda general de homotopía implica que

$$\deg(\phi_\lambda, O_\lambda, 0) = \deg(\phi_a, O_a, 0)$$

para todo $\lambda \in [a,b]$. Como ϕ_b no tiene ceros en O_b, pues O no intersecta a M_B, este grado es cero, nuevamente, como no hay soluciones en la frontera, usando la propiedad homotópica, llegamos a

$$\deg(\phi_\lambda, O_\lambda, 0) = \deg(\phi_a, O_a, 0) = \deg(\phi_b, O_b, 0) = 0$$

una contradicción de (2).

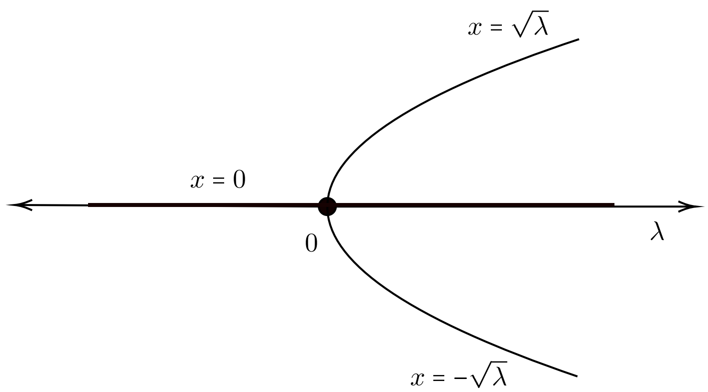
□

4. Bifurcaciones desde la solución nula

Para visualizar de mejor manera, el suceso que trataremos como bifurcación, apreciemos primero que en una familia de ecuaciones, parametrizadas por $\lambda \in \mathbb{R}$, las soluciones pueden tener cierto comportamiento en cuando λ se encuentre en determinado intervalo, o "tendiendo.ª cierto valor. Para ver esto de forma más concreta, estudiemos primero el caso de la ecuación

$$\phi(\lambda, x) := x(x^2 - \lambda) = 0$$

notemos que para $\lambda < 0$ no existe solución real no nula , para $\lambda = 0$ existe solución única y para $\lambda > 0$ existen tres soluciones diferentes



Más aún, vemos que si $\lambda \to 0$, la solución asociada $x_\lambda \to 0$, siguiendo esta idea, pasamos al estudio de bifurcaciones.

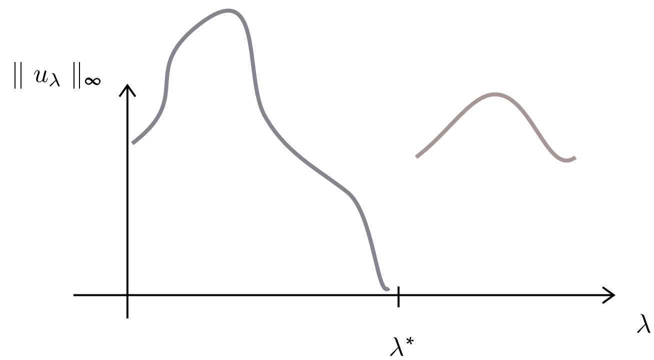
4.1. Bifurcaciones a cero

Sea X un espacio de Banach real, y sea $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ un mapeo compacto que satisface

$$\phi(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Denotemos por Σ^* la clausura en $\mathbb{R} \times X$ de los pares $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ con u solución no trivial de la ecuación (1).

Definición: Decimos que $\lambda^* \in \mathbb{R}$ es un *punto de bifurcación para la solución nula* de (1), si $(\lambda^*, 0) \in \Sigma^*$. Equivalentemente, si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$ tal que $\lambda_n \to \lambda^*$, $||u_n|| \to 0$ y $\phi(\lambda_n, u_n) = 0$.



Observaciones:

(1) Si $\phi(\lambda, u) = u - Lu$ con L un operador lineal compacto, así, si $\lambda^* \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un punto de bifurcación, entonces $\frac{1}{\lambda^*}$ es valor propio de L.
Para notar esto basta ver que si (λ_n, u_n) satisfacen las condiciones de la definición anterior, entonces

$$\frac{u_n}{||u_n||} = \lambda_n L\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)$$

por la compacidad de L existe

$$v = \lim_n \frac{u_n}{||u_n||}$$

luego por la continuidad de L y la convergencia de λ_n, se conluye

$$L\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right) \to Lv$$

y así $v = \lambda^* Lv$, equivalentemente, como λ^* es no nulo:

$$\frac{1}{\lambda^*} v = Lv$$

(2) Similarmente si $\phi(\lambda, u) = u - Lu + N(\lambda, u)$ con L un operador lineal compacto, y N operador compacto que satisface

$$\lim_{||u|| \to 0} \frac{N(\lambda, u)}{||u||} = 0$$

uniformemente para λ en un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces si $\lambda^* \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un punto de bifurcación, entonces $\frac{1}{\lambda^*}$ es valor propio de L.

Para notar esto basta ver que si (λ_n, u_n) satisfacen las condiciones de la definición de bifurcación, entonces

$$\frac{u_n}{||u_n||} = \lambda^* L\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right) - \frac{N(\lambda, u)}{||u||}$$

por la compacidad de L y N existe

$$v = \lim_n \frac{u_n}{||u_n||}$$

luego por la continuidad de L y la convergencia de λ_n, se conluye

$$L\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right) \to Lv$$

y así $v = \lambda^* Lv$, equivalentemente, como λ^* es no nulo

$$\frac{1}{\lambda^*} v = Lv$$

Ejemplo 1: Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Si consideramos el operador $(-\triangle)^{-1} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ definido por $(-\triangle)^{-1}(u) = v$ donde

$$\begin{cases} -\Delta v = u, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Denotando por $f : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ el operador de Nemistki

$$f(v)(x) = f(v(x)) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall v \in C(\overline{\Omega})$$

el problema es equivalente a resolver

$$\phi(\lambda, u) = u - (-\triangle)^{-1}(f(u)) = 0, \quad u \in C(\overline{\Omega})$$

por lo que deducimos de la Observación 1 que los puntos de bifurcación de ϕ son valores propios del operador $-\triangle$.

Ejemplo 2: Asumir $\phi(\lambda, u) = \lambda u - Lu$ con L un operador lineal acotado en X, entonces el valor λ^* es un punto de bifurcación de $\phi = 0$ si y sólo si λ es un punto de acumulación de valores propios de L.

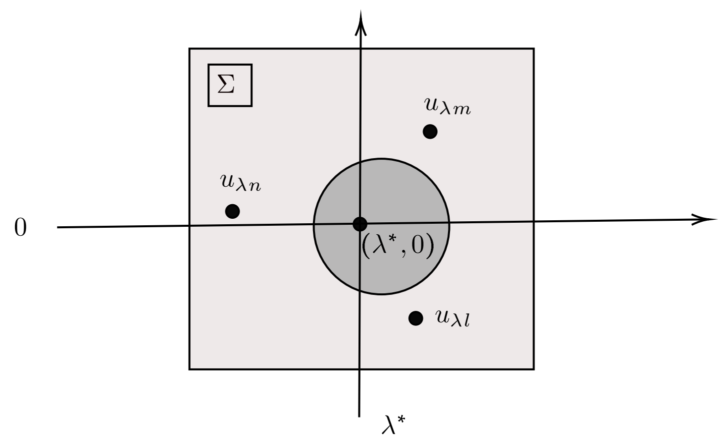
El ejemplo anterior nos hace notar que si λ no es un punto de bifurcación, entonces $(\lambda, 0)$ es una solución aislada (única en alguna vecindad), del problema estudiado, esto motiva la siguiente definición, que servirá para dar un resultado que nos entregará condiciones que garanticen la condición de bifurcación de un valor real, y nos dará información acerca de las soluciones del probema $(1)_\lambda$ para distintos valores de λ, además, será clave para probar que los recíprocos de las observaciones 1 y 2 también son ciertos.

Definición: Sea $\phi : I - T$ con $T : \overline{\Omega} \to X$ un operador compacto, si $u_0 \in \Omega$ es una solución aislada de $\phi(u) = 0$, entonces para $r_0 > 0$ suficientemente cercano a cero

$$\deg(\phi, B_r(u_0), 0) = \deg(\phi, B_{r_0}(u_0), 0) \quad \forall r \in (0, r_0)$$

por lo cúal definimos el **índice** de ϕ relativo a u_0 por

$$\boxed{i(\phi, u_0) = \lim_{r \to 0} \deg(\phi, B_r(u_0), 0)}$$



5. Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz

Ahora veremos un Teorema que nos dará el criterio para encontrar los puntos de bifurcación en distintas ecuaciones.

5.1. Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz

Sea $\lambda^* \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que el conjunto $(\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0) - \lambda^*$ no contiene puntos de bifurcacioń de (1). Suponga además que para todos $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \varepsilon^*)$ y $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$ se tiene

$$i(\phi_\lambda, 0) \neq i(\phi_{\overline{\lambda}}, 0) \tag{3}$$

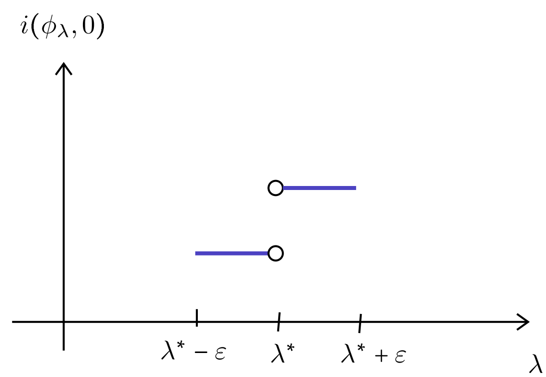
entonces

1) (Krasnoselski) el valor λ^* es un punto de bifurcación de (1).

2) (Rabinowitz) La componente conexa $C^*_\lambda \subseteq \overline{\Sigma^*}$ que contiene a $(\lambda^*,0)$ satisface al menos una de las siguientes condiciones:

   a) C^*_λ no es acotado en $\mathbb{R} \times X$.

   b) Existe una bifurcación $\lambda' \in \mathbb{R}\ \{\lambda^*\}$ tal que $(\lambda', 0) \in C^*_\lambda$.



Observación: Como $(\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0) - \lambda^*$ no contiene puntos de bifurcación, no es complejo ver que por la propiedad homotópica

$$i(\phi_\lambda, 0) = cte \quad \forall \lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \varepsilon^*)$$

y

$$i(\phi_{\overline{\lambda}}, 0) = cte \quad \forall \overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$$

Demostración:

(1) Asumamos que λ^* no es un punto de bifurcación, esto significa que existe $r > 0$ tal que

$$\phi(\lambda, u) \neq 0 \quad \forall u \in X; \quad ||u|| \leq r, \quad \forall \lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0)$$

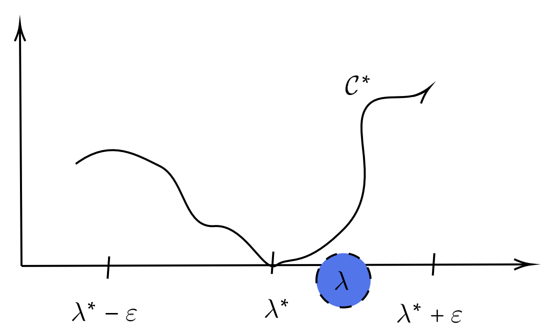
entonces el grado $\deg(\phi_\lambda, B_r(0), 0)$ está bien definido, y así, por la propiedad homotópica

$$i(\phi_\lambda, 0) = cte \quad \forall \lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0)$$

lo que es una contradicción.

(2) Por la parte anterior, $(\lambda^*, 0) \in \overline{\Sigma^*}$, Sea C_λ^* la componente conexa de $\overline{\Sigma^*}$ que lo contiene, asumamos que C_λ^* no verifica ninguna de las hipótesis dichas, es decir es acotado y para cada $\lambda \neq \lambda^*$ exite $r(\lambda) > 0$ tal que

$$C_\lambda^* \cap B_r(\lambda, 0) = \emptyset$$

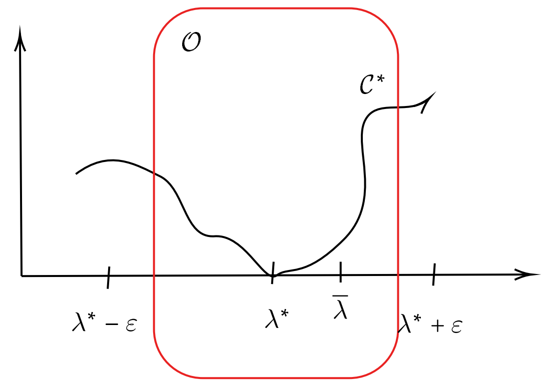


Similarmente a como hicimos en el Teorema de Leray-Schauder, deducimos que existe $O \subseteq \mathbb{R} \times X$ conteniendo a $(\lambda^*, 0)$ y satisfaciendo

$$\partial O \cap \Sigma^* = \emptyset$$

y

$$O \subseteq (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0) \times X$$



de la propiedad general de homotopía tenemos que

$$\deg(\phi_\lambda, O_\lambda, 0) = cte \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

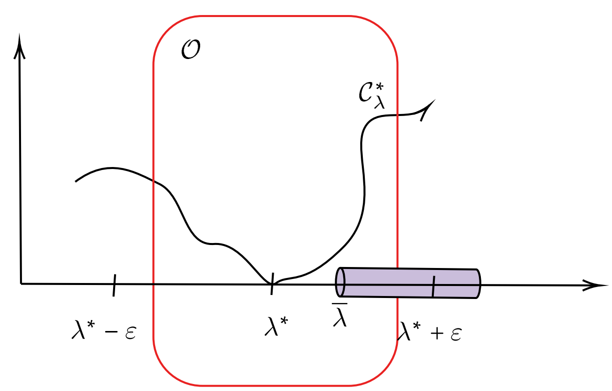
Ahora estudiemos este valor, para eso sea $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$ tal que $(\overline{\lambda}, 0) \in O$, podemos elegir $r > 0$ tal que

(a) Para todo $\lambda \in [\overline{\lambda}, \overline{\lambda} + \varepsilon_0]$, el problema $(1)_\lambda$ no tenga soluciones no triviales en $\overline{B_r(0)}$, esto es

$$\Sigma^* \cap B_r(0) = \varnothing$$

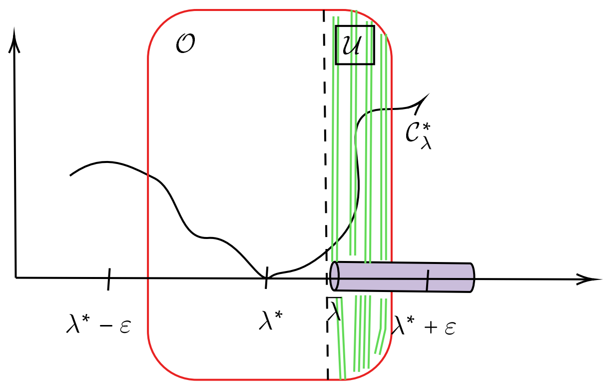
(b) Para todo $\lambda > \overline{\lambda} + \varepsilon_0$ el λ-corte, O_λ no contiene puntos de $\overline{B_r(0)}$, es decir

$$O_\lambda \cap \overline{B_r(0)} = \varnothing$$



Tomemos

$$U = O \cap [[\overline{\lambda}, +\infty[\times X - \overline{B_r(0)}]$$



, así vemos que

$$U_\lambda = O_\lambda - \overline{B_r(0)} \quad \forall \lambda \geq \overline{\lambda}$$

por (a) y (b) podemos usar la propiedad general de homotopía para ver que

$$\deg(\phi_\lambda, U_\lambda, 0) = cte \quad \forall \lambda \geq \overline{\lambda}$$

Como O es acotado, $U_\lambda = \varnothing$ para λ mucho mayor a $\overline{\lambda}$, de donde concluimos que el grado anterior es cero, en particular

$$\deg(\phi_{\overline{\lambda}}, U_\lambda, 0) = \deg(\phi_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}} - \overline{B_r(0)}, 0) = 0$$

Por la propiedad aditiva del grado

$$\deg(\phi_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}}, 0) = \deg(\phi_{\overline{\lambda}}, \overline{B_r(0)}, 0) + \deg(\phi_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}} - \overline{B_r(0)}, 0) = i(\phi_{\overline{\lambda}}, 0)$$

Similarmente, si elegimos $\underline{\lambda} \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^*)$ obtenemos

$$\deg(\phi_{\underline{\lambda}}, O_{\underline{\lambda}}, 0) = i(\phi_{\underline{\lambda}}, 0)$$

como este grado es independiente de λ concluimos

$$i(\phi_{\underline{\lambda}}, 0) = i(\phi_{\overline{\lambda}}, 0)$$

lo que es una contradicción a (3).

□

Usemos ahora el siguiente resultado, que nos dará el valor del grado

Lema Asumir $\phi = I - T$ con $T \in Q(\overline{\Omega}, X)$ donde Ω es una vecindad de cero. Supongamos que $T(0) = 0$ y que T es Frechet diferenciable en 0, entonces:

1. La derivada $T'(0)$ es compacta.

2. Si $I - T'(0)$ es invertible en X entonces 0 es la única solución de $\phi(u) = 0$ y
$$i(\phi, 0) = i(\phi', 0) = (-1)^{\beta}$$
donde
$$\beta = \sum_{\substack{\lambda \in \mu(T'(0)) \\ 0<\lambda<1}} mult(\lambda)$$
donde $\mu(T'(0))$ es el conjunto de valores caracteristicos de $T'(0)$ y $mult(\lambda)$ denota la multiplicidad de λ.

de aquí obtenemos el siguiente corolario:

Corolario: Supongamos que $\phi(\lambda, u) = u - \lambda Lu + N(\lambda, u)$, donde L es un operador lineal compacto y N es un operador compacto que satisface
$$\lim_{||u|| \to 0} \frac{N(\lambda, u)}{||u||} = 0$$
uniformemente para valores acotados de λ. Entonces cada valor caracteristico λ^* de multiplicidad algebraica 1 de L es un punto de bifurcación. Más aún, existe un continuo C_{λ}^* de Σ^* que es no acotado o bien $(\lambda, 0) \in C_{\lambda}^*$ para algún valor característico $\lambda \neq \lambda^*$.

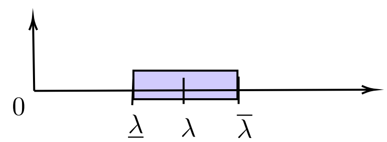
Demostración: Aplicando el lema, obtenemos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene
$$i(\phi_{\lambda}, 0) = i(\phi_{\lambda}', 0) = i(I - \lambda L, 0) = (-1)^{\beta}$$
con
$$\beta = \sum_{\substack{\beta \in \mu(\lambda L) \\ 0<\beta<1}} mult(\beta) = \sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\lambda}} mult(\mu)$$

En particular si elegimos $\underline{\lambda} < \lambda^* < \overline{\lambda}$ tal que el único valor característico en el intervalo $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ es λ^*, deducimos

$$\sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\overline{\lambda}}} mult(\mu) = mult(\lambda^*) + \sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\lambda^*}} mult(\mu)$$

y similarmente

$$\sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\underline{\lambda}}} mult(\mu) = \sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\lambda^*}} mult(\mu)$$



luego por la multiplicidad de λ^*

$$i(\phi_{\overline{\lambda}}, 0) = (-1)^{mult(\lambda^*) + \sum_{\substack{\mu \in \mu(L) \\ 0<\mu<\lambda^*}} mult(\mu)} = (-1)^{mult(\lambda^*)} i(\phi_{\underline{\lambda}}, 0) = -i(\phi_{\underline{\lambda}}, 0)$$

y concluimos por el Teorema anterior.

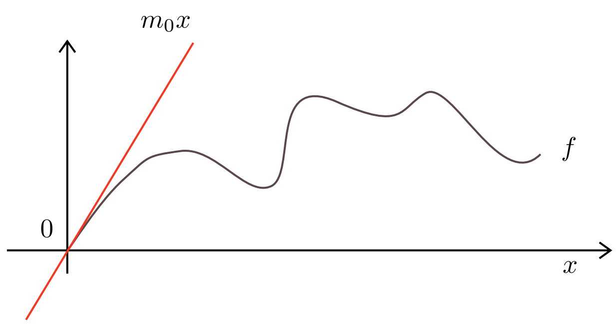
□

6. Problemas linealmente asintóticos

Trabajaremos en la existencia de soluciones positivas del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & x \in D \\ u = 0, & x \in \partial D \end{cases} \tag{4}$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ y $f \in C^1([0, \infty[)$, con $f(0) = 0$, y derivada por la derecha positiva en cero, es decir $f_+^{'}(0) =: m_0 > 0$.



Para reducir nuestro estudio al caso de soluciones nonegativas, extendemos f definiendo $f(s) = f(0)$ para $s < 0$, con esta definición, del principio del máximo se concluye que todas las soluciones del problema, son no negativas.
Tomemos ahora $X = C(\Omega)$ y consideremos el operador $\Phi : [0, \infty[\times X \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(\lambda, u) = u - \lambda(-\triangle)[f(u)]$$

para todo $\lambda \geq 0$ y $u \in X$. De esta forma, el problema lo podemos replantear por encontrar $(\lambda, u) \in [0, \infty[\times X$ tal que

$$\Phi(\lambda, u) = 0$$

En adelante consideremos $\lambda_1 > 0$ el valor propio principal del operador Laplaciano con frontera de Dirichlet igual a cero, y similarmente, $\phi_1 > 0$ es la función propia asociada a λ_1 con $||\phi|| = 1$. Recordemos que la positividad de ϕ_1 viene del Teorema de Krein-Rutman, y que concluye que, más aún, ϕ_1 es punto interior de un cono de funciones positivas en $C^1(\overline{\Omega})$.

Teorema: Si $f(0) = 0$ y $f'_+(0) = m_0 > 0$ entonces $\lambda_0 := \frac{\lambda_1}{m_0}$ es el único punto de bifurcación desde la solución nula de soluciones positivas de (4). Además, el continuo emanado de $(\lambda_0, 0)$ es no acotado.

Demostración:

La demostración la haremos usando el Teorema 11, por lo que lo que se debe probar es el salto del índice en λ_0. Dividimos la demostración en dos pasos:

(1) Demostrar que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo intervalo $I \subseteq [0, \infty[- \{\lambda_0\}$, existe $\varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$\Phi(\lambda, u) \neq 0 \quad \forall \lambda \in I, \quad \forall 0 < ||u|| < \varepsilon$$

(2) Para todo $\lambda > \lambda_0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(\lambda, u) \neq r\phi_1, \quad 0 < ||u|| < \delta, \quad \forall r > 0$$

Para la prueba del paso 1, procedemos por contradicción, es decir, que existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in I \times X$ que cumple:

$$\lambda_n \to \lambda \neq \lambda_0 \quad ||u_n|| \to 0$$

con

$$\Phi(\lambda_n, u_n) = 0, \quad u_n \geq 0$$

Usando la compacidad e $(-\triangle)^{-1}$, dividiendo la ecuación $u_n = \lambda_n(-\triangle)^{-1}[f(u_n)]$ por $||u_n||$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{||u_n||} &= \lambda_n(-\triangle)^{-1}[\frac{f(u_n)}{||u_n||}] \\ &= \lambda_n(-\triangle)^{-1}[\frac{f(u_n) - f(0)}{||u_n||}] \end{aligned}$$

notemos que por las hipótesis sobre f y $\{u_n\}$, $\frac{f(u_n)-f(0)}{||u_n||}$ es acotada, más aún, convergente, de donde concluimos que existe $v \in X$ tal que

$$\frac{u_n}{||u_n||} \to v, \quad ||v|| = 1$$

y de esta forma

$$\frac{f(u_n) - f(0)}{||u_n||} \to f'(0)v$$

se sigue, que al tomar límite, obtenemos

$$v = \lambda(-\triangle)^{-1}[f'(0)v]$$

equivalentemente

$$-\triangle v = \lambda f'(0)v$$

Usando ϕ_1 como función test e integrando por partes obtenemos

$$\lambda_1 \int_D v\phi_1 = \lambda f^{'}(0) \int_D v\phi_1$$

con lo que concluimos $\lambda_1 = \lambda f'(0)$, lo que es una contradicción.

Consecuencias del paso 1:

(a) El único posible punto de bifurcación de soluciones positivas es $\lambda = \lambda_0$

(b) Si $\lambda < \lambda_0$ y tomamos $I = [0, \lambda]$ obtenemos

$$i(\phi_\lambda, 0) = i(\phi_0, 0) = i(Id, 0) = 1$$

Para la segunda parte, supongamos existe una sucesión $\{u_n\}_{n\epsilon}$ y $\tau_n \geq 0$ tal que

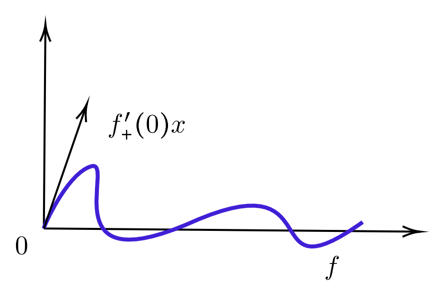
$$\Phi(\lambda, u_n) = \tau_n \phi_1 \quad \|u_n\| \to 0$$

equivalentemente

$$u_n = \lambda(-\Delta)^{-1}[f(u_n)] + \tau_n \phi_1$$

$$-\Delta u_n = \lambda f(u_n) + \tau_n \lambda_1 \phi_1$$

notemos que $\tau_n \lambda_1 \phi_1 > 0$, y como $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ y f' continua, existe una vecindad (al menos por derecha) de cero, donde f' es positiva y por ende f creciente y en particular positiva



, de esta forma, como $\{u_n\}$ converge uniformemente a cero, para n suficientemente grande

$$-\Delta u_n = f(u_n) + \tau_n \lambda_1 \phi_1 > 0$$

del Principio del Mínimo para funciones sobre-armónicas, se concluye que para n suficientemente grande $u_n \geq 0$ en Ω.
Escribamos ahora

$$L^2(\Omega) = \langle\{\phi_1\}\rangle \oplus \langle\{\phi_1\}\rangle^{\perp}$$

y consecuentemente escribimos

$$u_n = s_n\phi_n + w_n$$

denotemos por $(;\dot{)}$ el producto interno en $L^2(\Omega)$, de esta forma

$$(u_n, \phi_1) = s_n(\phi_1, \phi_1)$$

y así

$$s_n = \frac{(u_n, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)} > 0$$

y escribimos

$$\begin{aligned}(-\Delta u_n, \phi_1) &= \lambda_1(u_n, \phi_1)\\ &= \lambda_1 s_n(\phi_1, \phi_1)\\ &= \lambda(f(u_n), \phi_1) + \tau_n\lambda_n(\phi_1, \phi_1)\end{aligned}$$

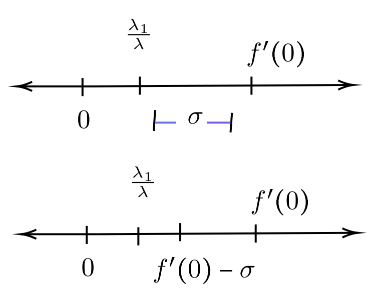
Ahora, como

$$\lambda > \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f'(0)}$$

se tiene que $f'(0) - \frac{\lambda_1}{\lambda} > 0$ y por tanto existe $\sigma > 0$ tal que

$$f'(0) - \frac{\lambda_1}{\lambda} > \sigma$$

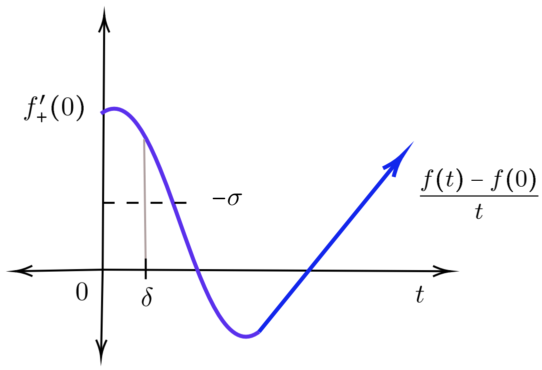
$$(f'(0) - \sigma) > \frac{\lambda_1}{\lambda}$$



de la definición de derivada, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{f(t)}{t} > f'(0) - \sigma$$

$$f(t) > (f'(0) - \sigma)t$$



nuevamente por la convergencia uniforme de $\{u_n\}$ a cero, para n suficiente-mente grande

$$f(u_n) > (f'(0) - \sigma)u_n$$

y finalmente

$$\begin{aligned} s_n\lambda_1(\phi_1, \phi_1) &= \lambda(f(u_n), \phi_1) + \tau_n\lambda_n(\phi_1, \phi_1) \\ &> \lambda(f'(0) - \sigma)(u_n, \phi_1) \\ &= \lambda(f'(0) - \sigma)s_n(\phi_1, \phi_1) \\ &> \lambda\frac{\lambda_1}{\lambda}s_n(\phi_1, \phi_1) \\ &= \lambda_1 s_n(\phi_1, \phi_1) \end{aligned}$$

lo que es absurdo.

Consecuencia del paso 2: Podemos ocupar la propiedad de Homotoía y concluir que para todo $\lambda > \lambda_0$

$$i(\Phi_\lambda, 0) = i(\Phi_\lambda + \tau\phi_1), \quad \forall\tau > 0$$

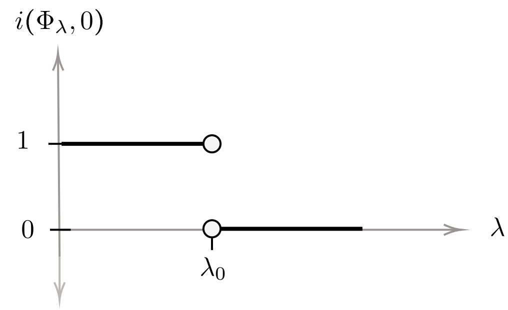
También del Paso 2, concluimos que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) + \tau\phi_1 & x \in D \\ \quad u = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

no tiene soluciones no triviales, como la función nula no es solución, concluimos que

$$i(\Phi_\lambda, 0) = 0$$

lo que se ilustra en el siguiente gráfico



y de esta forma, se concluye usando el Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz. □

7. Bifurcaciones a infinito

Definición: Diremos que λ_∞ es un punto de bifurcación a infinito de 4 si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$ satisfeciendo

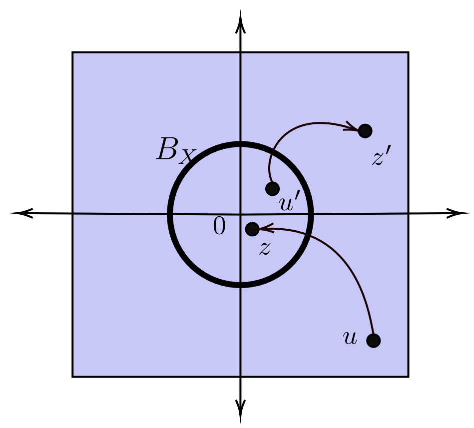
$$\lambda_n \to \lambda_\infty, \quad ||u_n|| \to \infty, \quad \Phi(\lambda_n, u_n) = 0$$

Asumir

$$\Phi(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$$

Con T un operador compacto. Si consideramos la transformada de Kelvin

$$z := \frac{u}{||u||^2}, \quad u \neq 0$$



Deducimos que

$$\begin{cases} \Phi(\lambda, u) = 0 \\ \qquad u \neq 0 \end{cases}$$

si y sólo si

$$\begin{cases} z - ||z||^2 T\left(\lambda, \dfrac{z}{||z||}\right) = 0 \\ \qquad\qquad z \neq 0 \end{cases}$$

de donde concluimos que al definir

$$\overbrace{\Phi}(\lambda, z) = \begin{cases} z - ||z||^2 T\left(\lambda, \dfrac{z}{||z||}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

tenemos que λ_∞ es un punto de bifurcación a infinito para $\Phi(\lambda, u) = 0$ si y sólo si es un punto de bifurcación a cero de $\overbrace{\Phi}(\lambda, z) = 0$.
Con esta última observación, vemos que el estudio de bifucaciones a infinito se puede estudiar en base al de bifurcaciones a cero.

Ahora veamos un caso de función, que justifica el nombre de "linealmente asintótico", consideremos funciones de la forma

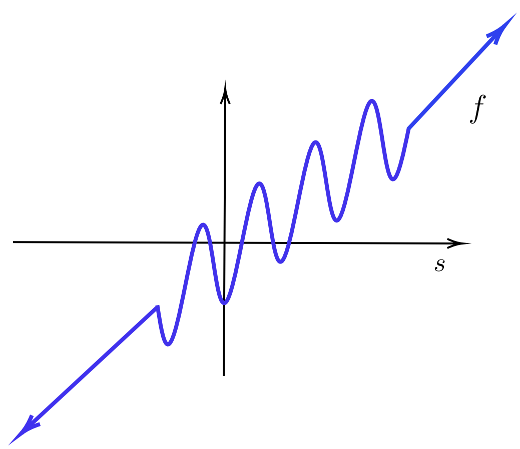
$$f(s) = m_\infty s + g(s)$$

donde g satisface

$$\lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = 0$$

es decir

$$\frac{f(s) - m_\infty s}{s} = \frac{g(s)}{s} \to 0, \quad s \to \infty$$



Teorema: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abieto y acotado y sea f una función C^1 en $[0, \infty[$ tal que

$$f(s) = m_\infty + g(s)$$

donde g satisface

$$\lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = 0$$

Entonces $\lambda_\infty = \frac{\lambda_1}{m_\infty}$ es el único punto de bifurcación a infinito de soluciones positivas de (9). Más aún, existe un subconjunto S_∞ de $\mathbb{R}^n \times C(\overline{\Omega})$ de soluciones positivas de (9) tal que si $\overbrace{S_\infty} = \{(\lambda, z); (\lambda, \frac{z}{\|z\|}) \in S_\infty\}$, entonces $\overbrace{S_\infty} \cup (\lambda^*, 0)$ es conexo y no acotado.

La demostración es similar a la del Teorema anterior, basta verificar los Pasos 1 y 2 para $\overbrace{\Phi}$.

Para ver como condiciones sobre f repercuten en el comportamiento de las soluciones, veamos dos casos, asumamos las hipótesis de los Teoremas anteriores

1. Sea $\alpha > 0$. Si $f(s) > \alpha s$ para todo $s > 0$, vemos que el problema 4 no tiene solución para $\lambda >> \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{m_0}$, de ser así, de forma tal que

$$\lambda > \frac{\lambda_1}{\alpha}$$

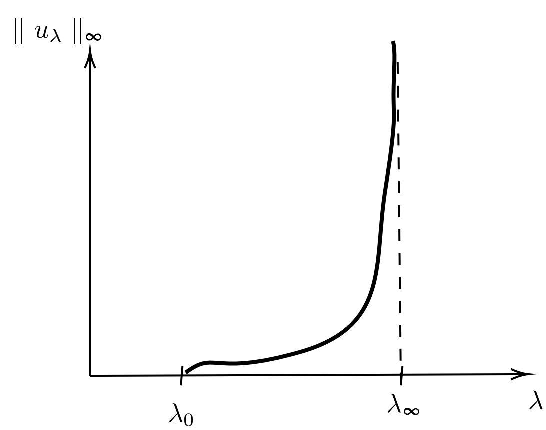
tomamos ϕ_1 como función test e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_D u\phi_1 &= \int_D -\Delta\phi_1 u \\ &= \int_D -\Delta u\phi_1 \\ &= \lambda \int_D f(u)\phi_1 \\ &> \lambda\alpha \int_D u\phi_1 \end{aligned}$$

así

$$\lambda < \frac{\lambda_1}{\alpha}$$

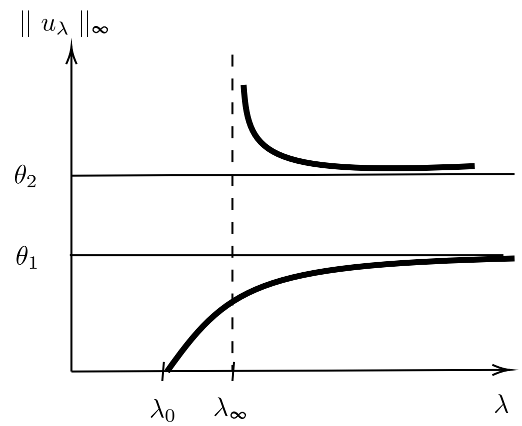
contradicción. Notemos que como el continuo que emana de $(\lambda, 0)$ es no acotado, es el mismo que emana al infinito en λ_∞.



2. En el caso que existan $0 < \theta_1 < \theta_2$ tal que $f(s) \leq 0$ para todo $s \in (\theta_1, \theta_2)$, y en este caso vemos que no existe solución en $\mathbb{R} \times C(\Omega)$ tal que $\theta_1 \leq u \leq \theta_2$. En caso que si

$$\lambda_1 \int_D u\phi_1 = \int_D f(u)\phi_1 \leq 0$$

por lo que u_n no puede ser no negativa, nuevamente contradicción.



7.1. Lado de la bifurcación a infinito

En adelante, nos referiremos a una *bifurcación por izquierda* (respectivamente bifurcación por derecha), si la sucesión real convergente lo hace por izquierda (respectivamente por derecha), es decir $\lambda_n \leq \lambda^*$ ($\lambda_n \geq \lambda^*$). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado y sea g una función C^1 en $[0, \infty[$, satisfaciendo

$$\lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = 0$$

y consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\triangle\, u = \lambda u + g(u) & x \in D \\ \quad u = 0 & x \in \partial D \end{cases} \tag{5}$$

de forma similar a los casos anteriores, se puede probar el siguiente resultado

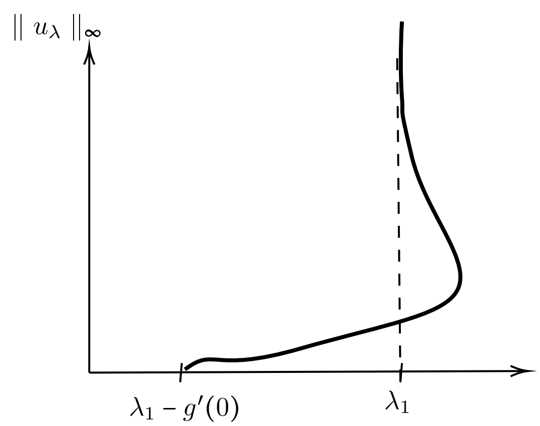
Teorema: El punto $\lambda = \lambda_1$ es el único punto de bifurcación a infinito de soluciones positivas de (5). Más aún, si $g(0) = 0$ y g' acotada, entonces $\lambda_1 - g'(0)$ es el único punto de bifurcación a cero de soluciones positivas de (5). Además existe un continuo que conecta $(\lambda_1 - g'(0), 0)$ con (λ_1, ∞).

Demostración:

La demostración sobre la bifurcación a cero en $\lambda_1 - g'(0)$ es similar a la de los Teoremas anteriores. Por otro lado como $g(0) = 0$, y g una función C^1 con derivada acotada, existe $\alpha > 0$ tal que

$$-\alpha x \leq g(x) - g(0) = g(x) \leq \alpha x$$

por lo cúal el el problema 5 no tiene solución para $\lambda >> 0$, como el continuo que emana de la bifurcación a cero es no acotado, se concluye que es el el mismo que va hacia la bifurcación en $\lambda_1 - g'(0)$.



Observación: En particular existen soluciones del problema (5) para todo λ en el intervalo de extremos λ_1 y $\lambda_1 - g'(0)$, por lo cúal resulta interesante estudiar .ª que lado”son estas bifurcaciones, en esta perspectiva, presentamos el siguiente análisis.

Si $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$ son soluciones de (5) con $\lambda_n \to \lambda_1$ y $||u_n|| \to \infty$, de esta forma

$$\frac{u_n}{||u_n||} = (-\Delta)^{-1}(\lambda_n \frac{u_n}{||u_n||} + \frac{g(u_n)}{||u_n||})$$

pasando a una subsucesión

$$\frac{u_n}{||u_n||} \to v, \quad ||v|| = 1$$

$$v = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v)$$

obtenemos que $\frac{u_n}{||u_n||} \to \phi_1$ uniformemente, por lo cúal para n suficientemente grande, se tendrá que $u_n > 0$, luego, usando ϕ_1 como función test e integrando por partes, obtenemos

$$(\lambda_1 - \lambda_n) \int_D u_n \phi_1 = \int_D g(u_n)\phi_1$$

como

$$\int_D u_n \phi_1 > 0$$

concluimos que

$$\boxed{sgn(\lambda_1 - \lambda_n) = sgn[\int_D g(u_n)\phi_1]} \tag{2}$$

por la positividad de ϕ_1, condiciones sobre el signo de g en una frontera de cero, nos dará la información sobre el lado de la bifurcación.

Teorema : Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$g(x)x^2 \geq \varepsilon, \quad \forall x > 0$$

entonces el punto de bifurcación a infinito del Teorema anterior es a la izquierda, similarmente si la desigualdad es al reverso, la bifurcación a infinito es a la derecha.

Demostración:

Primero veamos que, siguiendo el mismo análisis anterior, tomamos $\lambda_n \to \lambda_1$ con u_n solución asociada de 5, con $\frac{u_n}{||u_n||} \to \phi_1$, así

$$\begin{aligned} sgn(\lambda_1 - \lambda_n) &= sgn[\int_D g(u_n)\phi_1] \\ &= sgn[||u_n||^2 \int_D g(u_n)\phi_1] \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} ||u_n||^2 \int_D g(u_n)\phi_1 &= \frac{||u_n||^2}{||u_n||^2} \int_D g(u_n)u_n^2 \frac{||u_n||^2}{u_n^2}\phi_1 \\ &= \int_D g(u_n)u_n^2 \frac{||u_n||^2}{u_n^2}\phi_1 \end{aligned}$$

ahora por el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_D g(u_n)u_n^2 \frac{||u_n||^2}{u_n^2}\phi_1 &\geq \liminf_{n\to\infty} \varepsilon \int_D \frac{||u_n||^2}{u_n^2}\phi_1 \\ &\geq \varepsilon \int_D \frac{1}{\phi_1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

De donde concluimos que $\lambda_1 \geq \lambda_n$, que es el resultado esperado.

□

Veamos un resultado similar para bifurcaciones a cero

Teorema: Si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$g(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, \varepsilon)$$

entonces el punto de bifurcación a cero del Teorema anterior es a la izquierda, similarmente si la desigualdad es al reverso, la bifurcación es a la derecha.

Demostración:

Sea $\{\lambda_n\}_{n\epsilon}$ una sucesión de números reales tal que $\lambda_1 \to \lambda_1 - g'(0)$, y $\{u_n\}$ las soluciones asociadas del problema de esta forma

$$\frac{u_n}{||u_n||} = (-\Delta)^{-1}(\lambda_n \frac{u_n}{||u_n||} + \frac{g(u_n)}{||u_n||})$$
$$= (-\Delta)^{-1}(\lambda_n \frac{u_n}{||u_n||} + \frac{g(u_n) - g(0)}{||u_n||})$$

Por la compacidad del operador $(-\Delta)$, podemos pasar al límite y concluir que existe $v \in X$ tal que

$$v = (-\Delta)^{-1}[(\lambda_1 - g'(0))v + g'(0)v]$$
$$= (-\Delta)^{-1}[\lambda_1 v]$$

esto es
$-\Delta v = \lambda_1 v$
por lo que vemos que $\frac{u_n}{||u_n||} \to \phi_1$ y en particular, para n suficentemente grande $u_n \geq 0$. Con esto en mente, tomando ϕ_1 como función test en (5), obtenemos

$$(\lambda_1 - \lambda_n) \int u_n \phi_1 = \int g(u_n)\phi_1$$

por las hipótesis, y la convergencia uniforme a cero, concluimos

$$\lambda_1 \geq \lambda_n$$

que es el resultado buscado.
□

8. Principio del Anti-Máximo local

Consideremos ahora el problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

del principio del máximo, notamos que si $f > 0$ la solución u es no negativa, y, similarmente, si $f < 0$, se tendrá que $u_n \leq 0$. Lo que haremos ahora será en cierta forma, buscar un resultado análogo para el problema involucrando valores propios.

Como primera idea, veamos un ejemplo dado por los matemáticos Ph. Clément y L. A. Peletier, consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} -u" - \lambda u = f, & 0 < x < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \end{cases}$$

donde $f \in C([0,1])$ y consideremos $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \pi^2$.
Sea $G(x,\gamma,\lambda)$ la función de Green correspondiente a $-\frac{d^2}{dx^x} - \lambda$, donde $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$, así, la solución del problema anterior la podemos escribir como

$$u(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,\gamma,\lambda) f(\gamma) d\gamma$$

y calculando obtenemos que

$$G(x,\gamma,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\cos(\beta)(1-\gamma)}{\beta\sin(\beta)}\cos(\beta x) & si \quad 0 \leq x < \gamma \\ -\dfrac{\cos(\beta\gamma)}{\beta\sin(\beta)}\cos(1-x) & si \quad \gamma < x \leq 1 \end{cases}$$

con $\beta = \pi^{1/2}$, así, si $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, o equivalentemente $\lambda \in (0, \frac{\lambda_1}{4})$, para todo $\gamma \in (0,1)$

$$G(x,\gamma,\lambda) < 0, \quad x \in [0,\gamma[\cup]\gamma,1]$$

por lo que si $f \geq 0$, con f no nula, entonces $u(x,\lambda) < 0$ para todo $x \in (0,1)$.

Buscaremos este tipo de resultado en ecuaciones de otros tipos, y no necesariamente en dimensión 1, de esta forma, presentamos el siguiente resultado.

8.1. Principio del Anti-Máximo local

Sea $r > n$ entonces para todo $h \in W^{2,r}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ tal que

(i) Si $\int_D h\phi_1 < 0$, entonces toda solución (λ, u) de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + h(x), & x \in D \\ \quad u = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

satisface

a) $u > 0$ en D si $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \varepsilon$.

b) $u < 0$ en D si $\lambda_1 - \varepsilon < \lambda < \lambda_1$

(ii) Si $\int_D h\phi_1 > 0$, entonces toda solución (λ, u) de (13) satisface

a) $u < 0$ en D si $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \varepsilon$.

b) $u > 0$ en D si $\lambda_1 - \varepsilon < \lambda < \lambda_1$

(iii) Si $\int_D h\phi_1 = 0$, entonces toda solución (λ, u) de (13) con $\lambda \neq \lambda_1$ cambia de signo en D.

Demostración:

Por la compacidad de $(-\triangle^{-1})$, de la Alternativa de Freedholm concluimos que existe solución del problema para cada λ que no sea valor propio de $-\triangle$ con frontera de Dirichlet nula. Para $X = W^{2,r}(D)$, se puede probar que el valor λ_1 es un punto de bifurcación a $+\infty$ en el sentido que existen λ_n con $\lambda \to \lambda_1$ y que $\frac{u_n}{||u_n||} \to \phi_1$, por el embedimiento continuo de X en $C^1(\overline{D})$, esto nos dice, por el Teorema de Krein-Rutman, que $u_\lambda > 0$ para λ suficentemente cercano a λ_1. También es un punto de bfurcación a $-\infty$ en el sentido existen λ_n con $\lambda \to \lambda_1$ y que $\frac{u_n}{||u_n||} \to -\phi_1$, lo que nuevamente implica que para n suficientemene grande, $u_\lambda < 0$.
Por el análisis anterior, recordemos obtuvimos

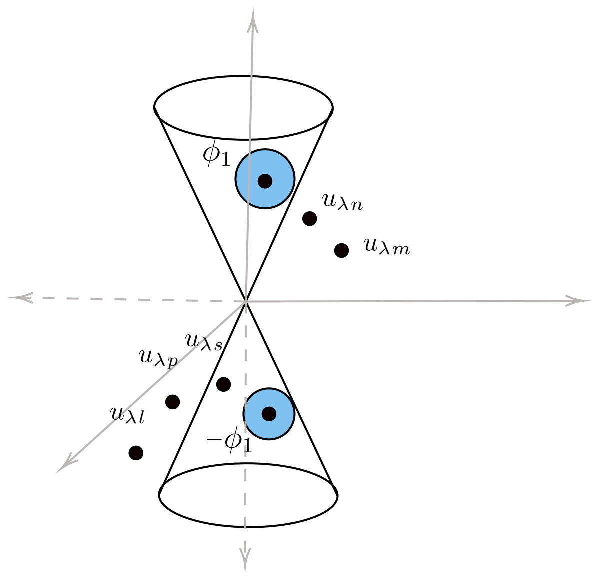
$$(\lambda_1 - \lambda_n) \int_D u_n \phi_1 = \int_D h(u_n)\phi_1$$

y concluimos que la condición (i), implica que la bifurcación a $+\infty$ es a la derecha, y la bifurcación a $-\infty$ es a la izquierda, lo cúal verifica el Teorema en el primer caso. El Segundo caso es análogo y finalmente, para (iii) tomamos ϕ_1 como función test y tenemos

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_D u\phi_1 = 0$$

de la positividad de ϕ_1, y el echo de que (en general para $h \in X$), la función nula no es solución, se concluye que toda solución cambia de signo.

□



9. Condición de Landesnman-Lazer

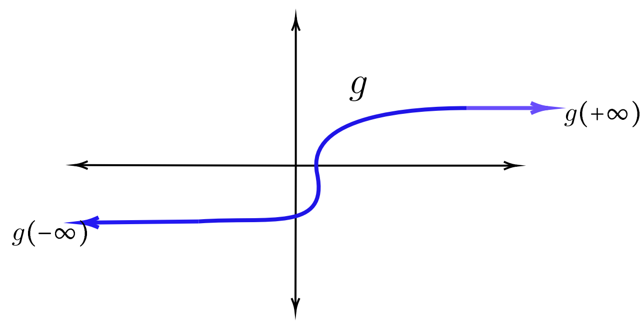
Ahora estudiaremos el problema

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda_1 u + g(u), & x \in D \\ u = 0, & x \in \partial D \end{cases} \tag{6}$$

donde g es una función continua que satisface

$$\exists g(+\infty) = \lim_{s \to +\infty} g(s)$$

$$\exists g(-\infty) = \lim_{s \to -\infty} g(s)$$



Para el siguiente resultado, es importante entender la no existencia de bifurcaciones, como un tipo de acotamiento, más precisamente, supongamos para el problema anterior tuvieramos que toda bifurcación a infinito es por la izquierda de λ_1, siguiendo la definición, como no existen bifurcaciones a infinito por la derecha (similarmente por izquierda), concluimos que existe $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tal que

$$||u_\lambda|| \leq M \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon[$$

donde (λ, u_λ) es solución. Con esto en mente, enunciamos el siguiente resultado

9.1. Condición de Landesnman-Lazer

Supongamos alguna de las dos condiciones:

$$\int_D g(+\infty)\phi_1 < 0 < \int_D g(-\infty)\phi_1 \tag{3}$$

$$\int_D g(+\infty)\phi_1 > 0 > \int_D g(-\infty)\phi_1 \tag{4}$$

Entonces el problema (14) admite al menos una solución.

Demostración:

Asumamos (4) y consideremos este problema inmerso en el conjunto de problemas parametrizado por λ:

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u + g(u), & x \in D \\ u = 0, & x \in \partial D \end{cases} \tag{5}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, por el acotamiento de g, podemos usar el resultado del matemático C. L. Dolph, quien probó la existencia de soluciones del problema anterior si λ no es valor propio, y que el valor λ_1 es un punto de bifurcación a infinito, de esta forma, al tomar ϕ_1 como función test

$$(\lambda_1 - \lambda_u)\int_D u_n\phi = \int_D g(u_n)\phi_1$$

Como g es una función acotada, y D un conjunto acotado, inferimos del Teorema de Convergencia dominada que

$$\int_D g(u_n)\phi_1 \to \int_D g(+\infty)\phi_1 > 0$$

esto nos dice que para n suficientemente grande

$$(\lambda_1 - \lambda_u)\int_D u_n\phi > 0$$

de la positividad de u_n y ϕ_1 concluimos que $\lambda_n < \lambda_1$, esto es, la bifurcación es por izquierda. Similarmente si "$u_n \to -\infty$çomo antes

$$(\lambda_1 - \lambda_u)\int_D u_n\phi = \int_D g(u_n)\phi_1$$

y como

$$\int_D g(u_n)\phi_1 \to \int_D g(-\infty)\phi_1 > 0$$

obtenemos que

$$(\lambda_1 - \lambda_u)\int_D u_n\phi < 0$$

como $u_n < 0$, y $\phi_1 > 0$, se tiene que, nuevamente $\lambda_1 - \lambda_n > 0$ esto es $\lambda_n < \lambda_1$, esto es, la bifurcación es por izquierda. Concluimos que toda bifurcación a infinito es por izquierda, y por análisis previo, existe $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tal que

$$||u_\lambda|| \leq M \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon[$$

donde (λ, u_λ) es solución. De esta forma, consideramos $\lambda_n \to \lambda_1$ por derecha y u_n la solución asociada, de esta forma

$$||u_n|| \leq M$$

para n suficientemente grande, luego, como es usual, escribimos

$$u_n = (-\triangle)^{-1}(\lambda_n u_n + g(u_n))$$

del acotamiento de g y $-\triangle$ concluimos por tanto que existe v tal que, pasando a una subsucesión de ser nesesario $u_n \to v$, de esta forma, por la continuidad de g, tomando límite, concluimos

$$v = (-\triangle)^{-1}(\lambda_1 v + g(v))$$

es decir

$$-\triangle v = \lambda_1 v + g(v)$$

y el problema tiene solución.

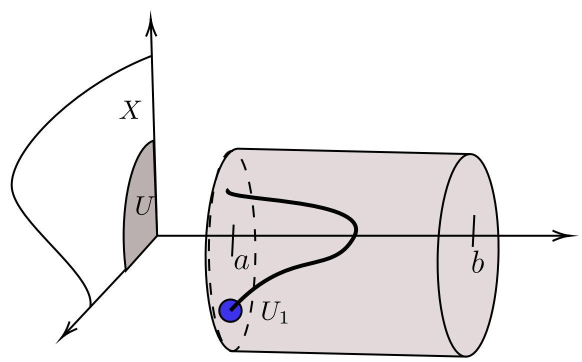
□

10. Problema de Ambrosetti-Prodi

En esta sección, usaremos la teoría de grado para estudiar la "forma"de un continuo de soluciones y aplicar esto al estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Definamos nuevamente X un espaccio de Banach Real, $T : \mathbb{R} \times X \to X$ un operador compacto. Denotamos Σ el conjunto cerrado de pares $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ con u solución (no nesesariamente no trivial) de $(1)_\lambda$. Con esto en mente, enunciamos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $U \subseteq X$ acotado, abierto y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(1)_b$ no tiene soluciones en ∂U, para $\lambda \in [a, b]$, y que $(1)_b$ no tiene solución en $\overline{U}$. Sea $U_1 \subseteq U$ abierto tal que $(1)_a$ no tiene solución en ∂U_1 y $\deg(I - T_a, U_1, 0) \neq 0$. Entonces existe un continuo $C \subseteq \Sigma$, tal que

$$C \cap (a \times U_1) \neq 0, \quad C \cap (a \times 8U - U_1)) \neq 0$$



Demostración:

Usaremos la siguiente notación:

$$K = ([a, b] \times U) \cap \Sigma$$

$$A = (a \times \overline{U_1}) \cap K$$

$$B = (a \times \overline{U - U_1}) \cap K$$

como $(1)_b$ no tiene solución en $\overline{U}$ y K es compacto, podemos considerar $K \subseteq [a, s] \times \overline{U}$ para algún $s \in (a, b)$.
Argumentando por contradicción, por el primer lema presentado, existen compactos disjuntos K_A y K_B conteniendo respectivamente a A y B tales que

$K = K_A \cup K_B$. Sea $\mathcal{O}$ una δ- vecindad de K_A tal que $d(\mathcal{O}, K_B) > 0$, así, el grado topológico está bien definido en $\mathcal{O}_\lambda = \{u \in \overline{U}; (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}$ para todo $\lambda \in [a, b]$, más aún, la propiedad general de homotopía estipula que

$$\deg(I - T_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0) = cte$$

y consecuentemente

$$\deg(I - T_a, \mathcal{O}_\lambda, 0) = \deg(I - T_b, \mathcal{O}_b, 0)$$

por otro lado, como $\mathcal{O} \cap K_B = \varnothing$, no existen soluciones de $(1)_a$ en $\mathcal{O}_a - \overline{U_1}$ y por tanto, por la propiedad de exción concluimos

$$\deg(I - T_a, \mathcal{O}_a, 0) = \deg(I - T_a, U_1, 0) \neq 0$$

pero por hipótesis $O_b = \varnothing$ por lo que $\deg(I - T_b, 0_\lambda, 0) = 0$, contradicción.

□

Aplicaremos el anteior Teorema, para el estudio del conocido resultado de Ambrosetti-Prodi para el problema de frontera

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) + t\phi, & x \in D \\ u = 0, & x \in \partial D \end{cases}$$

donde $\phi \in L^\infty(D)$ es una función positiva, f es continua y satisface

$$\lim_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{s} =: f_{\pm\infty}$$

existe.

Teorema: Sea $\phi \in L^\infty(D)$ una función positiva y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface

$$f_{-\infty} < \lambda_1 < f_{+\infty} < \lambda_2$$

entonces $t^* = \sup\{t \in \mathbb{R}; (Pt)$ admite solución es finito y para todo $t_0 < t^*$ existe un continuo $C \in \Sigma = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{D}); u$ es solución de $(P_t)\}$ satisface

$$[t_0, t^*[\subseteq Proy_{\mathbb{R}}(C)$$

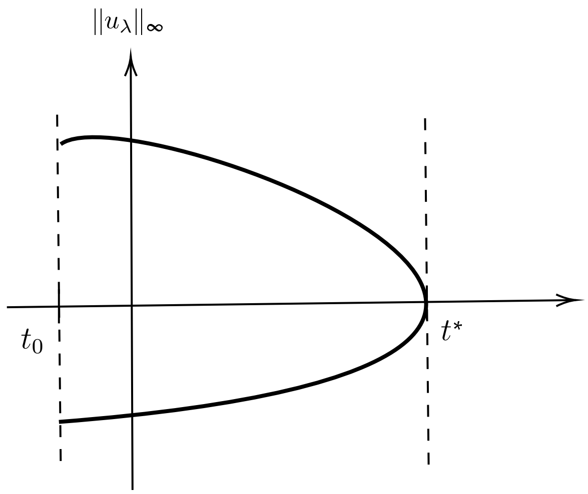
y para todo $t \in [t_0, t^*[$, $Proy_{C_0^1(D)}[C \cap (t \times C_0^1(\overline{D}))]$, contiene al menos dos soluciones distintas de (P_t).

Observación: , lo anterior se puede interpretar en que;

1 P_t tiene al menos dos soluciones para $t < t^*$.

2 P_t tiene al menos una soluciones para $t \leq t^*$.

3 P_t no tiene solución para $t > t^*$.



Demostración:

Denotemos $S := \{t \in \mathbb{R}; (P_t) \text{ admite solución } \}$. el Matemático De Figuereido, demostró que

(1) (P_t) tiene una super solución para algún $t \in \mathbb{R}$.

(2) Dada una supersolución $\overline{u}$, de (P_t) para $t \in \mathbb{R}$, existe una subsolución $\underline{u}$ de este, tal que $\underline{u} < \overline{u}$.

Usando el método de la sub y super solución, y el echo de que una supersolución para (P_t), implica la existencia de una supersolución para P_{t_0} para todo $t_o < t$, concluimos que S es cerrado y no acotado por debajo, más aún, multiplicando por ϕ_1, se concluye la no existencia de soluciones para $t >> 0$, de esta forma, S es acotado por arriba, y esto implica que existe un supremo del conjunto y este es alcanzado, escribimos

$$t^* := \sup S$$

Probamos ahora la existencia de un continuo de soluciones. Primero, se puede deducir que si $t_0 > t^* < t_1$, entonces existe $R > 0$ tal que $\|u\|_{C^1} < R$ para cada solución u de (P_t) con $t \in t_0, t_1]$. Denotemos por Φ_t es mapeo

$$\Phi_t = u - (\Delta)^{-1}(f(x,u) + t\phi)$$

Usando la propíedad homotópica del grado, y en vista de que (P_{t_1}) no tiene solución, obtenemos

$$\deg(\Phi_t, B_R(0), 0) = \deg(\Phi_{t_1}, B_R(0), 0) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Donde $B_R(0)$ es la bola de radio R en $C_0^1(\overline{D})$.
Sea u^* una solución de (P_t^*). Veamos nuevamente que u^* es una super soluci+on de (P_t) para cada $t \in [t_0, t^*[$ y no es solución. Más aún, existe una subsolución $u_{t_0} < u^*$ de (P_{t_0}) que no es solución, y claramente u_{t_0} es una subsolución y no solución de (P_t) si $t \in]t_0, t^*]$, consideremos el conjunto

$$U_1 = \{u \in C_0^1(\overline{D}); u_{t_0} < u < u^*, x \in D, \frac{\partial u^*}{\partial n} < \frac{\partial u}{\partial n} < \frac{\partial u_{t_0}}{\partial n} x \in \partial D\} \cap B_R(0)$$

se puede probar, que el principio del máximo implica la no existencia de soluciones de (P_t) en ∂U_1 si $t < t^*$ y que el grado de Φ_t está bien definido en U_1, y

$$\deg(\Phi_t, U_1, 0) = 1, \quad \forall t \in [t_0, t^*[$$

Aplicando el Teorema anterior, con $X = C_0^1(\overline{D})$, $[a,b] = [t_0, t_1]$ y $U = B_R(0)$, cncluimos que existe un continuo $C de \Sigma$ tal que

$$C \cap (\{t_0\} \times U_1) \neq \varnothing \quad C \cap (\{t_0\} \times [B_R(0) - U_1]) \neq \varnothing$$

en particular C intercecta $\{t\} \times \partial U_1$ para algún $t \in [t_0, t^*[$, lo cuál sólo pasa si $t = t^*$, lo que prueba el Teorema.