Основные понятия

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным наз. событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.
Невозможным наз. событие, которое заведомо не произойдет при S.
Случайным наз. событие, которое при S может либо произойти, либо не произойти. ТВ не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет. Однако другое дело - когда случайные события могут многократно наблюдаться при одних и тех же S - т.е. если речь идет о массовых однородных случ. событиях.
Достаточно большое кол-во однородных случ. событий независимо от их природы подчиняется опред. закономерностям - вероятностным.
Эти закономерности и являются предметом теории вероятностей.

"произведено испытание" ≡ "совокупность условий S осуществлена"

События наз. несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.
Каждый из возможных результатов испытания наз. элементарным исходом (элементарным событием). Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает наз. благоприятствующими ему.

Вероятность - это число, характеризующее степень возможности появления события A, и равно оно отношению числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. В. m n

$$P(A) = m/n \qquad \text{для случайного события} \qquad 0 < P(A) < 1 \qquad (1)$$

В общем случае элементарные исходы могут быть не равновозмож., и им будут соответствовать положительные числа p_i, причем $\sum p_i = 1$
В. $P(A)$ будет равна сумме В. элем. исходов, благоприятствующих A.

Основные формулы комбинаторики

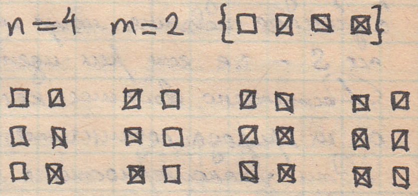
Комбинаторика изучает кол-во комбинаций, подчиненных опред. условиям, которые можно составить из элементов, безразлично, какой природы, заданного конечного множества.

Перестановками наз. комбинации, состоящие из одних и тех же n различ. элементов, и отличающиеся только порядком их расположения.

(2) Число всех возможных перестановок $P_n = n!$ где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n$

Размещениями наз. комбинации, составленные из n различ. элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком

$n=4 \quad m=2$



(3) $$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$ Число всех возмож. размещений $$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

(4) Размещения с повторениями $\bar{A}_n^m = n^m$ $m=2$

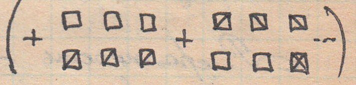
(5) Сочетаниями наз. комбинации, составленные из n различ. элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$m = 3$

(6) $$A_n^m = P_m C_n^m$$

(7) Сочетания с повторениями $$C_{(n)}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$



(8) Перестановки с повторениями – когда среди n элементов есть n_1 одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д. $n = n_1 + n_2 \ldots$

$$P_n(n_1, n_2 \ldots) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots}$$

Правило суммы. Если нек. объект А может быть выбран из сов-сти объектов m способами, а объект В – n способами, то выбрать либо А либо В можно $m+n$ способ.

Правило произведения. Если нек. объект А можно выбрать из сов-сти объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (A,B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Относительная частота. Сложение вероятностей

Относительной частотой события наз. отношение числа испытаний, в кот. событие появилось, к общему числу произведенных испытаний. $W(A) = \frac{m}{n}$ (9)

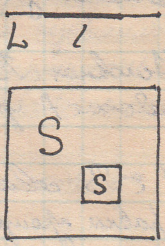
• Вероятность вычисляют до опыта (a priori), а относит. частоту после опыта (a posteriori). В качестве статистической В. события принимают относит. частоту или число, близкое к ней.

Применительно к испытаниям с бесконечным числом возмож. исходов вводят геометрические В — В попадания точки в область.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропор. длине отрезка.

$$P = \frac{l}{L}$$

$$P = \frac{s}{S}$$



Суммой $A+B$ двух событий A и B наз. событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. В общем случ. $A+B+C\ldots$

Т В появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (10)

Т Сумма В. событий $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ образующих полную группу, равна единице $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$ (11)

Противоположными наз. два единственно возможных события, образующих полную группу. Сумма их В равна единице

Принцип практической невозможности маловероятных событий: если случ. событие имеет очень малую В, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит. Достаточно малую В, при которой событие можно считать прак. невозможным, называют уровнем значимости. Обычно в (0.01 – 0.05)

Умножение вероятностей

Произведением AB двух вероятностей A и B наз. событие, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. В общем случае, это произведение нескольких событий $ABC\dots$

Если при вычислении В. события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую В наз. безусловной. Если же налагаются и другие доп. условия, то В наз. условной. Строго говоря, всякая В. условная, поскольку предполагается S.

Условной вероятностью $P(B|A)$ наз. В. события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Условная В события B, при условии, что событие A уже наступило, по определению, равна $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

(12) $P(BA) = P(B)\,P(A|B)$

T В. совмест. появления двух событий → $P(AB) = P(A)\,P(B|A)$

равна произведению В одного из них $\Rightarrow P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило. (Это все верно только для класс. В)

(13) В общем случае $P(A_1, A_2, A_3 \dots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 A_2)\dots P(A_n|A_1 A_2 \dots)$

(14) Событие B наз. независимым от A, если $P(B|A) = P(B)$

(15) Для независимых событий теорема умножения: $P(AB) = P(A)P(B)$

Два события наз. независимыми, если В. их совмещения равна произведению В. этих событий. В против. случ. события наз. зависимыми. Несколько событий наз. попарно независимыми, если каждые два из них независимы, при этом события могут оказаться зависимыми в совокупности...

Несколько событий наз. независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимо каждые два из них и независимо каждое событие и все возможные произведения остальных.

(16) T В. совмест. появления независ. событий: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\dots P(A_n)$

Следствия теорем сложения и умножения
Формула Бейеса

Т В. появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением В. противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$. ($q_1 q_2 \dots q_n$ — В. того, что ни одно из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ не наступило). По сути $P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \tag{17}$$

- Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую В., равную p, то $P(A) = 1 - q^n$ (18)

Два события наз. совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Т В. появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме В. этих событий без В. их совместного появления

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{19}$$

- Если A и B несовместны, то $P(AB) = 0 \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$ (20)

- Для зависимых событий $P(AB) = P(A)P(B|A)$
  Для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$

Т В события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соотв. услов. В. события A.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i) \tag{21}$$

формула полной В.

Допустим теперь, что событие A произошло. Какова теперь вероятность того, что происходило событие B_i? т.е $P(B_i|A)$

$$P(AB_i) = P(A)P(B_i|A) = P(B_i)P(A|B_i) \tag{22}$$

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\,P(A|B_i)}{P(A)}} \tag{23}$$

Формула Бейеса

В. того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абс. величине не превышает заданного числа ε:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{24}$$

Повторение испытаний

Если производится несколько испытаний, причем В. события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания наз. независимыми относит. события А. Будем считать, что в разных независ. испытаниях В. А одна и та же. Сложное событие – совмещение неск. отдельных (простых) событий.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых А может произойти с В. p (или не произойти с В. $q=1-p$).

(25) $$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$ формула Бернулли

Формула позволяет вычислить вероятность того, что при n испытаниях А осуществится ровно k раз (и не осуществится n−k раз).

• При больших n формула становится громоздкой, поэтому вычислять значение вероятности целесообразно следующим образом:

Т $$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

Если В. появления А в каждом испытании постоянна, $0<p<1$, то $P_n(k)$ – В. того, что А появится в n испытаниях k раз приближенно равна

(26) где $$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

(26-1) $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ функция Гаусса

Т Лапласа – Муавра. (локальная Т Лапласа).

Формула тем точнее, чем больше n.

Т $$P_n(k_1, k_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Интегральная теорема Лапласа

Если В. наступ. А постоянна и $0<p<1$, то В. $P_n(k_1, k_2)$ того, что А появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна

(27) $$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

(28) $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ функция Лапласа

$\varphi(x)$ – четная ф-ция

$\Phi(x)$ – нечетная ф-ция

• Для вычисления значений $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ можно использовать таблицы.

Случайные величины (СВ.)

Случайной наз. величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной наз. СВ, которая принимает отдельные (изолированные) возможные значения с определёнными вероятностями.

Непрерывной наз. СВ., которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения дискрет. СВ наз. соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Биномиальное распределение – распределение [СВ] количества появления события A в последовательности из n независимых испытаний, если P A в каждом из них постоянна и равна p.

формула Бернулли

$$P_n(k) \equiv P(Y=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (29)$$

$$k = 0, \ldots, n \qquad Y \sim Bin(n, p)$$

- При больших n пользуются асимптотической формулой Лапласа (26)
- Однако она непригодна если p мала ($p \leq 0.1$)

В этих случаях прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

$$P_n(k) \equiv P(Y=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (30)$$

$$Y \sim P(\lambda)$$

(λ – интенсивность потока, совпадает с мат. ожиданием $M(Y)$ и дисперсией $D(Y)$.)

- При росте n, малом p и $\lambda = np$ $Bin(n, p)$ сходится к $P(\lambda)$.

Потоком событий наз. последовательность событий, которые наступ. в случайные моменты времени.

Поток стационарный, если P появления k событий за время t есть функция, зависящая только от k и t (и не зависит от начала отсчёта t).

Поток обладает свойством отсутствия последствия, если имеет место независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Поток ординарный, если за БМ промежуток времени может появиться не более одного события.

Интенсивностью потока λ наз. ср. число событий, которое появляются в ед. времени.

Простейшим (пуассоновским) наз. поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последствий и ординарности.

(31) $$P_t(k) \equiv P(Y=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$ ← В. появления k событий простейшего потока за время t.

- Формулу Пуассона можно считать мат моделью простейшего потока событий.

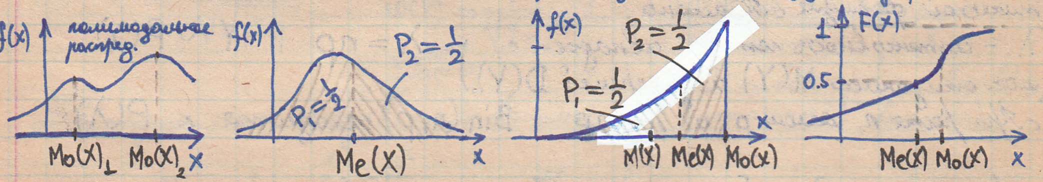
(32) $$P(Y=k) \doteq q^{k-1} p$$ $$Y \sim Geom(p)$$

Геометрическое распределение – распред. СВ количества испытаний до наблюдения первого появления события A, вероятность которого в каждом испытании <u>пост.</u> и равна p.

(33) $$P(Y=k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$ $$Y \sim HG(D, N, n)$$

Пусть имеется конеч. совокупность из N элементов. Среди них D дефективных. Случайно отбирается n элементов (отобранный элемент перед отбором следующего не возвращается). Тогда распределение вероятностей того, что среди отобранных элементов будет k дефективных, определяется Гипергеометрическим распределением HG

Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n и $p = D/N$, где p - В того, что первое извлеченное изделие дефективное.



Модой $Mo(X)$ случайной величины X наз ее наиб. вероятное значение.

Медианой непрерывной СВ X называется такое ее значение, для которого $$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}$$ $$Me(X) = x_{0.5}$$

Квантилем уровня q (или q-квантилем) наз. такое значение x_q случ. величины X, при котором ее функция распределения принимает значение, равное q. $$q = F(x_q) = P(X < x_q)$$

Математическое ожидание дискретной СВ. Дисперсия

Математическим ожиданием дискр. СВ наз. сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$ (2.1)

$$\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}$$

- МО существует, если ряд сходится абсолютно.

- МО числа появлений события в одном испытании равно В этого события.
- МО приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

- $M(C) = C$ МО постоянной (неслучайной) величины равно самой постоянной. (2.2)

- Произведение пост. величины C на дискр. СВ. X — дискр СВ. CX, возможные значения которой равны произведению C на возмож. значения X

- $M(CX) = CM(X)$ пост. множитель можно выносить за знак МО. (2.3)

- Две СВ наз. независимыми, если закон распр. одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Такое обстоятельство для нескольких СВ делает их взаимно независимыми.
- Произведением независимых СВ X и Y будет СВ, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возм. значений XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Некоторые произведения $x_i y_j$ могут оказаться равными между собой. В этом случае В. возмож. значения произведения равна сумме соотв. В.
- Суммой случайных величин X и Y будет СВ $X + Y$, возм. значения которой равны суммам каждого возм. значения X с каждым возмож. значением Y; вероятности возм. значений $X+Y$ для независимых величин X и Y равны произведениям В. слагаемых; для зависимых величин произведениям В. одного слагаемого на условную В второго. Некоторые суммы $x_i + y_j$ могут оказаться равными между собой. В этом случае В. возм. значения суммы равно сумме соответ. В.

- $M(X) = np$ МО числа появлений A в n независ. испытаниях равно произв. числа испытаний на В события A в кажд. испытании. (2.4)

III

(2.5) $M(XY) = M(X)M(Y)$ МО произведения двух независимых СВ равно произведению их МО

$M(X_1X_2 \ldots X_n) = \prod M(X_i)$ — в общем случае, для произвольного n.

(2.6) $M(X+Y) = M(X)+M(Y)$ МО суммы двух (и более) СВ (не важно, зависимых или независ.) равно сумме МО слагаемых.

$M(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \sum M(X_i)$

Отклонением наз. СВ, предс. собой разность между СВ X и ее МО M(X):

(2.7)

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	p_n

(2.8)

Т $M[X-M(X)] = 0$ МО отклонения равно нулю

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0$$

- Это вполне ожидаемо, ибо все значения $X-M(X)$ "разбросаны" вокруг 0. Другое дело, если брать квадрат от отклонения...

(2.9) Дисперсией дискр. СВ наз. МО квадрата отклонения СВ от ее М.О. (D явл. пост. величиной) $\boxed{D(X) = M([X-M(X)]^2)}$

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n$$

(2.10)

Т $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ (этой формулой проще вычислять D)

$D(C) = 0$ $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

$D(CX) = C^2 D(X)$ Дисперсия суммы двух (и более) независимых СВ равна сумме их дисперсий.

(2.11) $D(-X) = D(X)$ Дисперсия разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий: $D(X-Y) = D(X) - D(Y)$

$D(C+X) = D(X)$

Т Дисперсия числа появлений события A в n независим. испыт., в каждом из которых В.р появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании $D(X) = npq$ (2.13)

Среднеквадратичным отклонением СВ X наз. квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ (2.14)

Т Среднеквадратич. отклонение суммы конеч. числа взаимно независимых СВ равно квадратному корню из суммы квадратов среднеквадратичных отклонений этих величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)} \qquad (2.15)$$

Ср. арифм. n взаимно независимых СВ, которые имеют одинаковое расп.: $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ (2.16)

- МО среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых СВ равно МО a каждой из СВ: $M(\overline{X}) = a$ (2.17)
(т.к. у всех СВ одинак. распределение, то и МО у всех одно)

- Дисперсия сред. арифметического n одинаково расп. взаимно независ. СВ в n раз меньше дисперсии каждой СВ. $D(\overline{X}) = \frac{D}{n}$ (2.18)
(т.к. у всех СВ одинак. расп., то и дисперсия у всех СВ одна)

- Ср. квадратич. отклонение среднего арифметического n одинаково распределенных взаимно независимых СВ в $\sqrt{n}$ раз меньше сред. квад. откл. каждого из СВ. $\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (2.19)

Начальным моментом порядка k СВ X наз. МО величины X^k $\quad \nu_k = M(X^k)$ (2.20)

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 \qquad (2.21)$$

Центральным моментом порядка k СВ X наз. МО величины $(X - M(X))^k$ $\quad \mu_k = M[(X - M(X))^k]$ (2.22)

$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0 \qquad \mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X) \qquad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$ (2.23)

Закон больших чисел

- При некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа СВ утрачивает случайный характер и становится закономерным. Эти условия указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. В частности, это Т Чебышева – наиб. общий закон больш. чисел, и Т Бернулли.

Неравенство Чебышева.

(2.24) $$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

В. того, что отклонение СВ X от ее МО по абс. величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$.

Т Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно независимые СВ, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают пост. числа C), то, как бы мало ни было положит. число ε, В неравенства

(2.25) $$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к 1, если число СВ достаточно велико

- Частный случай Т Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно независимые СВ, имеющие одно и то же МО a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было число $\varepsilon>0$.

(2.26) $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

(В неравенства будет тем ближе к 1, чем больше число СВ n)

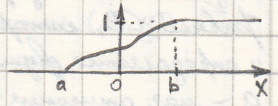
- Сущность теоремы в том, что хотя отдельные независимые СВ могут принимать значения, далекие от своих МО, ср. арифм. достат. большого числа СВ с большой В принимают значения, близкие к опр. пост. числу (в частности, к a).

Т Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний В. p появления события А постоянна, то как угодно близка к 1 В того, что отклонение относит. частоты от В. p по абс. величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико. $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon)=1$ (2.27)

Функция и плотность распределения вероятностей

Функцией распределения [вероятностей СВ] наз. функцию $F(x)$, определяющую В. того, что СВ X в результате испытания примет значение, меньшее x

$$F(x) = P(X < x) \qquad (3.1)$$



СВ наз. непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

$F(x)$ - неуб. ф-ция: $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$; $\quad 0 \leq F(x) \leq 1$ (3.2)

В. того, что СВ примет значение, заключенное в интервале (a, b) равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \leq X \leq b) = F(a) - F(b) \qquad (3.3)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) \qquad (3.4)$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ наз. функцию $f(x)$ — первую производную от $F'(x)$

$$f(x) = F'(x) \qquad (3.5)$$

В. того, что непр. СВ X примет значения из (a, b), равна опр. интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3.6)$$

Плот. расп. - неотр. ф-ция: $f(x) \geq 0$; $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (3.7)

МО непрерывной СВ X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$ (в общ. случае — всей оси x)

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx \qquad (3.8)$$

Предполагается, что несобств. инт. $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$ сходится абсолютно. (3.9)
Если бы это требование не выполнялось, то значение интеграла зависело бы от скорости стремления (в отдельности) нижнего предела к $-\infty$, а верхнего - к $+\infty$

Дисперсией непрерывной СВ X, знач. которой принадлежат $[a, b]$ наз. опред. интеграл

$$D(X) = \int_b^a [x - M(X)]^2 f(x)\,dx \qquad (3.10)$$

Среднее квадратич. отклонение непрерывной СВ X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (3.11)$$

Расп. вер-ей наз. равномерным, если $f(x) = const$ на интервале возм. знач. СВ.
В. того, что непрерывная СВ X примет одно опр. значение равна нулю.

Нормальное распределение

(3.12) Нормальным наз. распределение В непрерывной СВ, которое описывается плотностью $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,
и определяется двумя параметрами a и σ.
(с. 127) a – мат. ожидание; σ – ср. квад. отклонение нормального распределения.

Общим наз. норм. распр. с произвольными параметрами a и σ $(\sigma > 0)$.

Нормированным (стандартным) наз. норм. распр. с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$.
Если X – нормальная СВ с параметрами a и σ, то $U = (X-a)/\sigma$ –
(3.13) нормированная величина, причем $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

(3.14) Плотность нормированного распределения: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

(3.15) $$f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]$$

$y' = 0$ при $x = a$; $y'' = 0$ при $x = a+\sigma$ и $x = a-\sigma$. (точки перегиба)

Если СВ X распределена по норм. закону, тогда В. того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) можно выразить через функцию Лапласа

(3.16) $$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Центральная предельная теорема (Ляпунов). Если СВ X предс. собой сумму очень большого числа взаимно независимых СВ, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, X имеет распределение, близкое к нормальному.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие:

(3.17) Ассиметрией распределения наз. отношение центрального момента третьего порядка к кубу ср. квадр. отклонения. $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

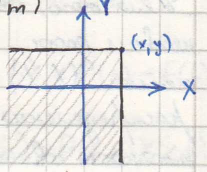
Эксцесс. Для норм. распр $\mu_4 / \sigma^4 = 3 \Rightarrow E_k = 0$
(3.18) Если $E_k > 0$, то кривая имеет более высокую и острую вершину; $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$
Если $E_k < 0$, то более низкую и плоскую вершину.

Двумерная случайная величина (СВ)

- Законом распределения дискретной двумерной СВ (X,Y) наз. перечень всевозможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $\quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m.$

- Зная закон распр. двумерной СВ, можно найти законы распр. каждой из составляющих. Например, В. $P(x_1)$ того, что X примет значение x_1:

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \dots + p(x_1, y_m) \qquad (4.1)$$



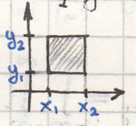
- Функцией распределения непрерывной двумерной СВ наз. ф-цию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x,y) В. того, что X примет значение, меньшее x, и Y примет значение, меньшее y. Т.е. В. того, что (X,Y) попадет в квадрант.

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) \qquad (4.2)$$

$$0 \le F(x,y) \le 1, \quad F(x_1,y_1) \le F(x_2,y_1), \text{ если } x_1<x_2, \quad F(x_1,y_1) \le F(x_1,y_2), \text{ если } y_1<y_2 \qquad (4.3)$$

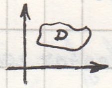
$$F(-\infty,y)=0, \quad F(x,-\infty)=0, \quad F(\infty,\infty)=1, \quad F(x,\infty)=F_1(x) \quad F(\infty,y)=F_2(y) \qquad (4.4)$$

$$P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2) = [F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)] - [F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)] \qquad (4.5)$$



- Плотностью совместного распр. вероятностей двумерной непрерывной СВ наз. вторую смешанную производную от ф-ции распределения. Т.е. это поверхность распределения.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad (4.6)$$



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy \qquad P((X,Y)\subset D) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad (4.7)$$

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} \qquad F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \qquad f_1(x) = \frac{dF_1}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad (4.8)$$

- Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ наз. совокупность условных вероятностей $p(x_1|y_j) \dots p(x_n|y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \qquad (4.9)$$

∘ Условной плотностью $\varphi(x|y)$ распределения составляющих X при данном значении $Y=y$ называют отношение плотности вероятности совместного распределения $f(x,y)$ к плотности $f_2(y)$ состав-щей Y

4.10 Аналогично определяется и $\psi(y|x)$ для Y.

$$\varphi(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

4.11 $$\varphi(x|y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx} \qquad \psi(y|x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x|y)\,dx=1$$

Т Для того, чтобы СВ X и Y были независимыми, необх. и дост., чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих (в таком случае плотность совместного распр. тоже будет равна произведению плот. составляющих).

4.12 $$F(x,y)=F_1(x)\,F_2(y)$$

$$f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y)$$

4.13 Ковариацией (или корреляционным моментом) наз. математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}$$

4.14 $$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i-M(X)][y_j-M(Y)]\,p(x_i,y_j) \qquad \mu_{xy}=M[\mathring{X}\mathring{Y}]$$

где $\mathring{X}$ и $\mathring{Y}$ – центрированные СВ.

4.15 $$\mu_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)][y-M(Y)]\,f(x,y)\,dx\,dy \qquad \mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)$$

Т Ковариация двух независимых величин равна 0. (Для завис. СВ $M(XY)=M(X)M(Y)$)
Обратное неверно: две СВ с $\mu_{xy}=0$ могут оказаться зависимыми.

Т Квадрат ковариации не превышает произведения дисперсий: $\mu_{xy}^2 \le D_x D_y$

4.16

∘ Коэффициентом корреляции r_{xy} двух СВ наз. отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений.

4.17 $$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

∘ Две СВ X и Y наз. коррелированными, если μ_{xy} (или r_{xy}) отлично от нуля, и некоррелированными величинами, если $\mu_{xy}=0$ (или $r_{xy}=0$).

4.18

Т Абс. величина r_{xy} не превышает 1. $-1\le r_{xy}\le 1$

Линейная регрессия

Условным математическим ожиданием дискретной СВ Y при $X=x$ (где x — определенное возможное значение X) называют произведение возможных значений Y на их условные вероятности.

4.19 $$M(Y|X=x)=\sum_{j=1}^{m} y_j\, p(y_j|x)$$

4.20 $$M(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,\psi(y|x)\,dy$$

4.21 $M(Y|x)$ есть ф-ция от x: $M(Y|x)=g(x)$, кот. наз. ф-цией регрессии Y на X.

Аналогично определяются условное МО СВ X и функция регрессии X на Y.

Пусть (X,Y) — двумерная СВ, где X и Y — зависимые СВ. Представим одну из величин как функцию другой. Ограничимся приближенным представлением величины Y в виде линейной ф-ции величины X:

4.22 α и β — параметры, подлежащие определению. $$Y\simeq g(x)=\alpha X+\beta$$

Метод наименьших квадратов — один из способов определения α и β.

4.23 Задача заключается в минимизации значения $M[Y-g(X)]^2$. Функцию $g(x)$ называют среднеквадратической регрессией Y на X.

Т Линейная ср. квадратическая регрессия Y на X имеет вид: $$g(X)=m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x)$$ где $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$, $r=\mu_{xy}/\sigma_x\sigma_y$

4.24 $$g(X)=\alpha X+\beta=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X+m_y-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x,\quad \alpha=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x},\quad \beta=m_y-r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x$$

4.25 $\alpha=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ — коэффициент регрессии. $y-m_y=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)$ — прямая среднеквадратич. регрессии Y на X.

о Остаточной дисперсией СВ Y относительно СВ X называют величину

4.26 $\sigma_y^2(1-r^2)$; она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене Y линейной функцией $g(X)=\alpha X+\beta$. При $r=\pm1$ остаточная дисперсия равна нулю, тогда Y и X связаны линейной коррел-ой зависимостью.

о Аналогичным образом строится и прямая регрессии X на Y. Обе прямые регрессии проходят через точку (m_x, m_y) — центр совместного распределения величин X и Y.

о При $r=\pm1$ обе прямые регрессии совпадут.

Т Если двумерная случайная величина (X,Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению СВ X соотв-ует $Y = \varphi(X)$ одно возможное значение СВ Y, то Y наз. функцией случайного аргумента X.

- В случае дискретной СВ X, если различ. возможным значениям X соответствуют различные возможные значения ф-ции Y, то В. сотв. значений X и Y между собой равны.
- В случае, когда различным возможным значениям X соотв. значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать В. повторяющихся значений Y.
- В случае непрерывной СВ X доказано: если $y = \varphi(x)$ – диф-мая строго возрастающая или строго убывающая ф-ция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ будет

$$g(y) = f[\psi(y)]\,|\psi'(y)| \qquad \text{с. 140} \qquad 4.27$$

МО функции одного случайного дискретного аргумента X, с возможными значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$, с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Очевидно – Y – так же диск. СВ с возможными значениями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$...
Т.к. событие "X приняло значение x_i" влечет за собой событие "Y приняла значение $\varphi(x_i)$", то В. возможных значений Y соотв. равна $p_1, p_2, \dots, p_n$.

$$\Rightarrow \quad M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, p_i \qquad 4.28$$

МО функции одного случ. непрерывного аргумента X, заданного плотностью распределения $f(x)$. Для отыскания МО функции $Y = \varphi(X)$ можно сначала найти плотность распределения $g(y)$ величины Y, тогда

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y)\, dy \qquad 4.29$$

- Если отыскание ф-ции $g(y)$ явл. затруднительным, то можно непосредственно найти МО ф-ции $\varphi(X)$ по формуле

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx \qquad 4.30$$

- В частности, если возмож. значения X принадлежат интервалу (a, b), то пределы интегрирования можно заменить на a и b.