Условная и полная вероятность

Условная вероятность (*conditional probability*) $P(A \mid B)$ – это вероятность того, что произошло событие A, если известно, что произошло событие B. Если $P(B) > 0$, то условная вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

где $P(A \cap B)$ – вероятность того, что одновременно произойдут и событие A и событие B. Если $P(B) = 0$, то $P(A \mid B)$ не определено.

Полную вероятность события B можно выразить так:

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

где $\bar{A}$ – дополнение события A, и его вероятность $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, это вероятность того, что событие A не произойдет.

Теорема Байеса

Теорема Байеса

Пусть A и B — два события с ненулевыми вероятностями, то есть $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тогда выполняется формула Байеса:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}.$$

Можно записать через полную вероятность:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Событие A играет здесь роль **гипотезы**, а событие B играет роль данных, полученных в результате эксперимента.

$P(A)$ – **априорная вероятность** (*prior probability*) события A – оценка вероятности события A, сформированная до учёта какой-либо новой информации (данных, наблюдений). Именно этими значениями мы стартуем: это наши «предубеждения» или «ожидания» относительно A, основанные на знании из прошлого, экспертных оценках или предыдущих данных.

$P(A \mid B)$ – **апостериорная вероятность** (*posterior probability*) события A при условии B – обновлённая оценка вероятности гипотезы A, уже с учётом новых данных B.

$P(B \mid A)$ – **правдоподобие** (*likelihood*) события B при условии A (насколько данные B согласуются с гипотезой A), т.е. вероятность получить данные B при условии, что гипотеза A истинна. Чем выше правдоподобие, тем более согласуются данные B с гипотезой A.

$P(B)$ – полная вероятность события B, которая служит **нормирующей константой** (*normalizing constant*).

Пример использования

Предположим есть некоторое заболевание такое, что им болеет 1% популяции. Если случайным образом взять из популяции одного человека, то вероятность того, что этот человек окажется больным, равна 1%. Имеется некоторый метод исследования, который с вероятностью 99% выдает положительный результат, если человек болен, но при этом нам известно, что этот метод ошибочно выдает положительный результат в 5% случаев (когда человек здоров). Какова вероятность того, что случайно отобранный человек болен, если результат исследования дал положительный результат?

Для вычисления вероятности воспользуемся формулой Байеса, выраженной через полную вероятность:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Гипотезой в данном случае является предположение о том, что человек болен – произошло событие A. Если бы мы не проводили никаких исследований, то вероятность того, что человек болен была бы равна 1%, т.е. априорная вероятность

$$P(A) = 0.01$$

Вероятность того, что человек не болен, равна, соответственно

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Апостериорной вероятностью является вероятность получения положительного результата (событие B) в случае, если гипотеза верна (истинно-положительный результат)

$$P(B \mid A) = 0.99$$

$P(B \mid \bar{A})$ – это условная вероятность того, что исследование выдаст положительный результат в случае, если гипотеза не верна (человек здоров). Т.е. это вероятность ложно-положительного результата и равна она (из условия)

$$P(B \mid \bar{A}) = 0.05$$

Подставляя все в формулу

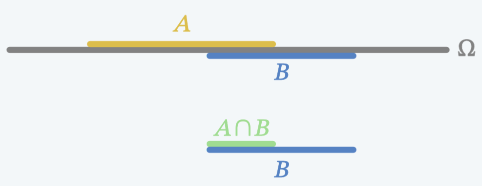
$$P(A \mid B) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167$$

Получаем вероятность около 16.7% того, что гипотеза верна (обследованный болен).

Вывод формул

Вывод формулы условной вероятности

Рассмотрим такую конфигурацию событий A и B на пространстве исходов Ω:



События A и B совместны. Каждый отрезок представляет собой событие, и его мерой является вероятность. Мерой Ω является 1, мерами событий A и B – вероятности $P(A)$

и $P(B)$ соответственно, а мерой совместного события – вероятность $P(A \cap B)$.

При условии того, что произошло (или произойдет) событие B пространство возможных исходов сокращается до множества B (исход ω принадлежит B). Поэтому мы рассматриваем новую вероятностную меру, в которой все пространство элементарных исходов – B и его вероятность равна 1. Для этого исходные вероятности событий внутри B умножаются на коэффициент

$$k = \frac{1}{P(B)}$$

Множество исходов, благоприятствующих событию A, сокращается до $A \cap B$. Масштабируя меру этого события коэффициентом k, получим вероятность того, что произошло событие A при условии, что произошло событие B:

$$P(A \mid B) = k \cdot P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Интуитивно понятно, что чем больше вероятность пересечения $P(A \cap B)$, тем больше шансов для события A, с другой стороны, чем менее вероятно B, тем сильнее повышается вероятность A при условии B. В пределе, когда $B \to \Omega$, вероятность $P(A \mid B) \to P(A)$, т.к. $P(B) \to 1$, т.е. стремится остаться прежней. Чем более невероятным является событие B, тем сильнее меняются условия, когда происходит это событие.

Вывод формулы полной вероятности

Событие B можно представить так:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

Так как объединяемые множества не пересекаются ($(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \varnothing$), вероятность B является суммой их вероятностей:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

По определению условной вероятности,

$$P(A \cap B) \;=\; P(B \mid A) \cdot P(A), \quad P(\bar{A} \cap B) \;=\; P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

Поэтому

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

Вывод формулы Байеса

Формула выводится из условных вероятностей:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Поэтому, симметрично можно получить выражение и для $P(B \mid A)$:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$$