

Условная и полная вероятность

Условная вероятность (*conditional probability*) $P(A | B)$ – это вероятность того, что произошло событие A , если известно, что произошло событие B . Если $P(B) > 0$, то условная вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

где $P(A \cap B)$ – вероятность того, что одновременно произойдут и событие A и событие B . Если $P(B) = 0$, то $P(A | B)$ не определено.

Полную вероятность события B можно выразить так:

$$P(B) = P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

где \bar{A} – дополнение события A , и его вероятность $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, это вероятность того, что событие A не произойдет.

Теорема Байеса

Т Теорема Байеса

Пусть A и B – два события с ненулевыми вероятностями, то есть $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тогда выполняется формула Байеса:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}.$$

Можно записать через полную вероятность:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Событие A играет здесь роль **гипотезы**, а событие B играет роль данных, полученных в результате эксперимента.

$P(A)$ – **априорная вероятность** (*prior probability*) события A – оценка вероятности события A , сформированная до учёта какой-либо новой информации (данных, наблюдений). Именно этими значениями мы стартуем: это наши «предубеждения» или «ожидания» относительно A , основанные на знании из прошлого, экспертных оценках или предыдущих данных.

$P(A | B)$ – **апостериорная вероятность** (*posterior probability*) события A при условии B – обновлённая оценка вероятности гипотезы A , уже с учётом новых данных B .

$P(B | A)$ – **правдоподобие** (*likelihood*) события B при условии A (насколько данные B согласуются с гипотезой A), т.е. вероятность получить данные B при условии, что гипотеза A истинна. Чем выше правдоподобие, тем более согласуются данные B с гипотезой A .

$P(B)$ – полная вероятность события B , которая служит **нормирующей константой** (*normalizing constant*).

Пример использования

Предположим есть некоторое заболевание такое, что им болеет 1% популяции. Если случайным образом взять из популяции одного человека, то вероятность того, что этот человек окажется больным, равна 1%. Имеется некоторый метод исследования, который с вероятностью 99% выдает положительный результат, если человек болен, но при этом нам известно, что этот метод ошибочно выдает положительный результат в 5% случаев (когда человек здоров). Какова вероятность того, что случайно отобранный человек болен, если результат исследования дал положительный результат?

Для вычисления вероятности воспользуемся формулой Байеса, выраженной через полную вероятность:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Гипотезой в данном случае является предположение о том, что человек болен – произошло событие A . Если бы мы не проводили никаких исследований, то вероятность того, что человек болен была бы равна 1%, т.е. априорная вероятность

$$P(A) = 0.01$$

Вероятность того, что человек не болен, равна, соответственно

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.01 = 0.99$$

Правдоподобием является вероятность получения положительного результата (событие B) в случае, если гипотеза верна (истинно-положительный результат)

$$P(B | A) = 0.99$$

$P(B | \bar{A})$ – это условная вероятность того, что исследование выдаст положительный результат в случае, если гипотеза не верна (человек здоров). Т.е. это вероятность ложно-положительного результата и равна она (из условия)

$$P(B | \bar{A}) = 0.05$$

Подставляя все в формулу

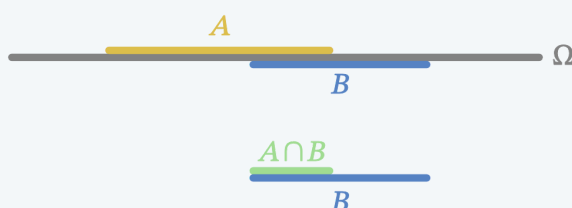
$$P(A | B) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167$$

Получаем апостериорную вероятность около 16.7% того, что гипотеза верна (обследованный болен).

Вывод формул

+ Вывод формулы условной вероятности >

Рассмотрим такую конфигурацию событий A и B на пространстве исходов Ω :



События A и B совместны. Каждый отрезок представляет собой событие, и его мерой является вероятность. Мерой Ω является 1, мерами событий A и B – вероятности $P(A)$ и $P(B)$ соответственно, а мерой совместного события – вероятность $P(A \cap B)$.

При условии того, что произошло (или произойдет) событие B пространство возможных исходов сокращается до множества B (исход ω принадлежит B). Поэтому мы рассматриваем новую вероятностную меру, в которой все пространство элементарных исходов – B и его вероятность равна 1. Для этого исходные вероятности событий внутри B умножаются на коэффициент

$$k = \frac{1}{P(B)}$$

Множество исходов, благоприятствующих событию A , сокращается до $A \cap B$. Масштабируя меру этого события коэффициентом k , получим вероятность того, что произошло событие A при условии,

что произошло событие B :

$$P(A | B) = k \cdot P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Интуитивно понятно, что чем больше вероятность пересечения $P(A \cap B)$, тем больше шансов для события A , с другой стороны, чем менее вероятно B , тем сильнее повышается вероятность A при условии B . В пределе, когда $B \rightarrow \Omega$, вероятность $P(A | B) \rightarrow P(A)$, т.к. $P(B) \rightarrow 1$, т.е. стремится остаться прежней. Чем более невероятным является событие B , тем сильнее меняются условия, когда происходит это событие.

+ Вывод формулы полной вероятности >

Событие B можно представить так:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

Так как объединяемые множества не пересекаются ($(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$), вероятность B является суммой их вероятностей:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

По определению условной вероятности,

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A), \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

Поэтому

$$P(B) = P(B | A) \cdot P(A) + P(B | \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

+ Вывод формулы Байеса >

Формула выводится из условных вероятностей:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Поэтому, симметрично можно получить выражение и для $P(B | A)$:

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A)}$$